

ЛЕКЦИЯ 7 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Основные принципы построения стабилизирующих алгоритмов управления

Построение управляющих алгоритмов базируется на единых принципах и, прежде всего, на понятии стабилизирующего управления, т.е. такого управления с обратной связью, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость по Ляпунову тех или иных движений объекта.

Рассмотрим математическую модель динамической системы – объекта управления, представленную в векторно-матричной форме вида

$$\dot{\bar{x}} = F(\bar{x}, \bar{\delta}, \bar{f}_{out}) \quad (7.1)$$

Выделим некоторое контролируемое движение ДС $\bar{x} = \bar{x}_p(t)$, $\bar{\delta} = \bar{\delta}_p(t)$, $\bar{f}_{out} = \bar{f}_p(t)$, определяемое заданными векторами-функциями, которые удовлетворяют системе уравнений (7.1). При этом обеспечивается выполнение тождества

$$\dot{\bar{x}}_p = F(\bar{x}_p, \bar{\delta}_p, \bar{f}_p) \quad (7.2)$$

Обозначим через $x = x(t)$, $\delta = \delta(t)$, $f = f(t)$ отклонения соответствующих переменных в (7.1) от указанного движения, определяя этим соотношения

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_p(t) + x(t), \quad \bar{\delta}(t) = \bar{\delta}_p(t) + \delta(t), \quad \bar{f}_{out}(t) = \bar{f}_p(t) + f(t), \quad (7.3)$$

С учетом (7.3), запишем нелинейную систему, описывающую динамику объекта в отклонениях:

$$\dot{x} = G(x, \delta, f) \quad (7.4)$$

а также осуществим линеаризацию системы (7.2) или (7.4) в малой окрестности выбранного контролируемого движения. При этом получим систему линейных дифференциальных уравнений в отклонениях вида

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)x + B(t)\delta + C(t)f \quad (7.5)$$

Как указано в работах В. И. Зубова, рассматриваемое контролируемое движение $\bar{x} = \bar{x}_p(t)$, $\bar{\delta} = \bar{\delta}_p(t)$, $\bar{f}_{out} = \bar{f}_p(t)$, можно сделать асимптотически устойчивым в смысле А. М. Ляпунова при условии $f(t) \equiv 0$ с помощью обратных связей, если выполняются два следующих требования:

$$1) \|G(x, \delta, 0) - A(t)x - B(t)\delta\| \leq \theta(\|x\| + \|\delta\|),$$

где $\theta \rightarrow 0$ при $\|x\| \rightarrow 0$ и $\|\delta\| \rightarrow 0$

2) неизменяемая часть линейного приближения (7.5) является устойчивой.

В дальнейшем будем считать, что контролируемое движение таково, что матрицы A, B, C имеют постоянные компоненты.

Второе требование заведомо выполняется, если имеет место условие полной управляемости линейной модели.

$$\text{Rang}(B, AB, A^2B, \dots, A^{N-1}B) = n \quad (7.6)$$

Если приведенные выше условия выполняются, то нулевое положение равновесия линейной системы

$$\dot{x} = Ax + B\delta + C_f f, \quad (7.7)$$

может быть сделано асимптотически устойчивым с помощью регулятора прямого действия

$$\delta = Kx \quad (7.8)$$

или с помощью регулятора непрямого действия

$$\dot{\delta} = K_0\delta + Kx, \quad (7.9)$$

где K, K_0 – постоянные матрицы.

Нетрудно убедиться в том, что аналогичное утверждение справедливо и для обобщенного понятия регулятора непрямого действия, математическая модель которого может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Mz + M_1x + M_2\dot{x} + \dots + M_\mu x^{(\mu-1)}, \\ \delta &= Kz, \end{aligned} \quad (7.10)$$

где $z \in R^\nu$ – вектор состояния регулятора. Иными словами, обобщенный регулятор непрямого действия (в ряде работ его именуют динамическим компенсатором) — это самостоятельная динамическая система, на вход которой поступает информация от измерителей, а выходом служит вектор управляющих воздействий. С помощью регулятора (7.10) можно стабилизировать объект (7.7), обеспечивая произвольный спектр корней характеристического полинома замкнутой системы, задавая матрицы с постоянными компонентами K, M, M_i ($i = 1 \dots \mu$).

Замечание. Вопрос о возможности введения в состав регулятора производных $(\mu-1)$ -го порядка от измеряемых координат должен в каждом конкретном случае обсуждаться особо.

Уравнения регулятора непрямого действия (7.10) с использованием преобразования Лапласа могут быть представлены на базе понятия передаточной матрицы динамической системы от входа к выходу:

$$\delta = W(s)x, \quad (7.11)$$

где s - переменная Лапласа, $W(s) = W_1(s)/W_2(s)$ – передаточная матрица регулятора, $W_1(s)$ – полиномиальная матрица размера $m \times n$, $W_2(s)$ – полином степени $v = \dim z$. То есть компонентами передаточной матрицы $W(s)$ являются дробно-рациональные функции комплексной переменной s . Записывая уравнения регулятора (7.10) в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях по вектору z , нетрудно убедиться в том, что модели (7.10) и (7.11) связаны соотношением

$$W(s) = K(I_v s - M)^{-1}(M_1 + sM_2 + \dots + s^{\mu-1}M_\mu), \quad (7.12)$$

где I_v – единичная матрица размера $v \times v$, $W_2(s) = \det(I_v s - M)$.

Следует отметить, что математическая модель (7.11) может быть трактована как наиболее общее представление линейных регуляторов, охватывающее как регуляторы прямого (7.8) ($v = 0$), так и непрямого (7.9), (7.10) действия.

Очевидно, что при выполнении условия (7.6), существует бесконечно много регуляторов, стабилизирующих заданное контролируемое движение объекта (7.1). При этом естественно внести в рассмотрение количественные характеристики качества стабилизации. С этой целью на движениях замкнутой системы, уравнения которой согласно (7.1), (7.3) и (7.11) могут быть представлены в виде

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = F(\bar{x}, \bar{\delta}, \bar{f}_p + f), \\ \bar{\delta} = \bar{\delta}_p + W(p)(\bar{x} - \bar{x}_p), \end{cases}$$

из каких-либо соображений содержательного (неформального) характера зададим некоторый неотрицательный функционал

$$J_H = J_H(\bar{x}(t), \bar{\delta}(t)) \quad (7.14)$$

Очевидно, что при одних и тех же начальных условиях для замкнутой системы (7.13) и одной и той же функции $f(t)$ функционал (7.14) зависит от выбора передаточной матрицы $W(p)$ регулятора (7.11) (или, что то же самое, от выбора степеней μ и v и матриц K, M, M_i ($i = 1 \dots \mu$) в (7.10)), т.е.

$$J_H = J_H(\bar{x}(t, W(p)), \bar{\delta}(t, W(p))) = J_H(W(p)) = J_H(W) \quad (7.15)$$

Определение. Регулятор $\delta = W^0(p)x$ будем называть оптимальным по отношению к функционалу (7.15), если он является стабилизирующим в

указанном выше смысле и среди всех регуляторов вида (7.11) доставляет величине $J_H(W)$ наименьшее возможное значение.

Определение. Задачей аналитического оптимального синтеза линейных регуляторов будем называть задачу

$$J_H = J_H(W) \rightarrow \inf_{W \in \Omega_1} \quad (7.16)$$

о поиске оптимального стабилизирующего регулятора по отношению к функционалу J_H . Здесь Ω_1 – множество передаточных матриц регуляторов вида (7.11) — матриц размера $m \times n$ с дробно-рациональными компонентами такими, что характеристический полином замкнутой линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\delta + C_f f, \\ \dot{z} &= Mz + M_1 x + M_2 \dot{x} + \dots + M_\mu x^{(\mu-1)}, \\ \delta &= Kz, \end{aligned} \quad (7.17)$$

является гурвицевым.

Определение. Задачей параметрической синтеза будем называть задачу нелинейного программирования, состоящую в поиске всех компонентов матриц K, M, M_i ($i = 1 \dots \mu$) при заданных фиксированных μ и ν (или варьируемых параметрах, от которых эти компоненты зависят) регулятора вида (7.11), обеспечивающих минимум функционала (7.15)

$$J_H = J_H(W(p, h)) = J_H^* \rightarrow \inf_{h \in \Omega_H}$$

Здесь $h \in R^r$ – вектор варьируемых параметров, подлежащих поиску, $\Omega_H = \{h \in R^r : W(p, h) \in \Omega_1\}$ – область гурвицевости характеристического полинома $\Delta(s)$ замкнутой системы (7.17).

Нетрудно убедиться в том, что проведенное обсуждение основных положений, которые кладутся в основу проектирования алгоритмов автоматического управления, в равной мере распространяется и на тот случай, когда наряду с математической моделью ДС рассматривается уравнение инерционности исполнительных органов.

$$\dot{\delta} = F_\delta(u)$$

Отличие состоит лишь в том, что при этом роль управления играет управляющий сигнал u .

Другим базовым принципом, на котором основывается разработка алгоритмов автоматического управления, является использование асимптотических наблюдающих устройств. Особую роль наблюдатели

играют при формировании штатных законом управления, что обусловлено необходимостью достижения следующих целей:

- для получения асимптотических оценок тех компонент вектора состояния, которые недоступны для непосредственного измерения, однако используются в законах управления;
- для получения асимптотических оценок производных компонент вектора состояния, используемых в законах управления;
- для придания процессам в замкнутой системе определенных свойств, в частности – астатизма по регулируемым координатам;
- для обеспечения возможности грубой (инерционной) и точной (среднеквадратичной настраиваемой) фильтрации волновых помех.

Рассмотрим некоторые свойства асимптотических наблюдателей, которые непосредственно используются в системах управления движением подвижных объектов. Пусть задана линейная математическая модель, описывающая динамику ДС в виде (7.5).

Определение. Динамическую систему вида

$$\dot{z} = Az + B\delta + F(x - z), \quad (7.18)$$

будем называть асимптотическим наблюдателем по отношению к модели (7.5), если матрица F при невязках в (7.18) выбрана таким образом, что характеристический полином $\Delta_H(s) = \det(Is - A + F)$ этой системы имеет корни только в открытой левой полуплоскости (является гурвицевым).

Определение. Вектор состояния z асимптотического наблюдателя (7.18) будем именовать вектором оценок (или просто оценками) по отношению к вектору состояния x в (7.5) при $f(t) = 0$ в том смысле, что имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - z(t)) = 0.$$

Доказательство справедливости приведенного условия элементарно. Действительно, введем в рассмотрение вектор невязок $\varepsilon(t) = x(t) - z(t)$ и, вычитая из (7.5) (при $f = 0$) уравнение (7.19), получим

$$\dot{x} - \dot{z} = A(x - z) + F(x - z),$$

или

$$\dot{\varepsilon} = (A - F)\varepsilon. \quad (7.19)$$

Поскольку при условии гурвицевости полинома $\Delta_H(s) = \det(Is - A + F)$ нулевое положение равновесия системы (7.19) асимптотически устойчиво по Ляпунову, выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - z(t)) = 0,$$

что и требовалось показать.

Как и ранее, в рамках данного параграфа с целью упрощения выкладок будем считать, что управлением для системы (7.5) непосредственно является вектор δ , характеризующий отклонения исполнительных органов.

Введем в рассмотрение управление для объекта (7.5), формируемое в виде обратной связи по закону

$$\delta = K(x - x^*(t)) \quad (7.20)$$

где $x^*(t)$ – вектор задающих командных сигналов. Будем считать, что управление (7.20) является стабилизирующим по отношению к отклонению от заданного движения. Это значит, что матрица K в (7.20) выбрана из условия гурвицевости характеристического полинома $\Delta_0(s) = \det(Is - A - BK)$ замкнутой системы (7.5), (7.20).

Базовым утверждением, на котором основывается применение асимптотических наблюдателей в системах управления движением ДС, является следующая теорема.

Теорема. Пусть начальные условия для объекта (7.5) и наблюдателя (7.18) совпадают, выполняется равенство $x(0) = z(0)$. Тогда движение замкнутой системы (7.5), (7.18) при $f = 0$ тождественно совпадает (для любых $t \in [0, \infty]$) с движением устойчивой замкнутой системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\delta, \\ \dot{z} &= Az + B\delta + F(x - z), \\ \delta &= K(z - x^*(t)), \end{aligned} \quad (7.21)$$

в которой управление формируется, в отличие от (7.20), по выходу асимптотического наблюдателя.

Приведенное утверждение, которое достаточно широко известно в теории асимптотических наблюдателей, допускает ряд весьма существенных обобщений, на которых непосредственно и основывается общая структура штатных алгоритмов автоматического управления. Указанные обобщения сформулируем в виде двух следующих теорем.

Теорема. Пусть начальные условия для объекта (7.5) и наблюдателя (7.18) совпадают, т.е. выполняется равенство $x(0) = z(0)$. Тогда движение замкнутой системы (7.5), (7.20) (при $f \equiv 0$) тождественно совпадает (для любых $t \in [0, \infty]$) с движением устойчивой замкнутой системы вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B\delta, \\ \dot{z} &= Az + B\delta + F(x - z), \\ \delta &= K(z - x^*(t)) + G(p)(x - z),\end{aligned}\tag{7.22}$$

где $G(p) = M(p)/\Phi(p)$ – произвольная матрица с дробно-рациональными компонентами от оператора дифференцирования $p = d/dt$, имеющими гурвицев общий знаменатель $\Phi(p)$.

В дальнейшем вектор $L\xi = G(p)(x - z)$ будем называть выходом дополнительного фильтра, а вектор ξ – вектором его состояния.

И, наконец, рассмотрим последнее обобщающее утверждение, сформулировав его в виде следующей теоремы.

Теорема. Если начальные условия для объекта (7.5) и наблюдателя (7.18) совпадают, т.е. выполняется равенство $x(0) = z(0)$, и если передаточная функция $F(s) = M_1(s)/\Phi_1(s)$, такова, что характеристический полином $\Delta_\Phi(s)$ системы

$$\dot{z} = Az + B\delta + F(p)(x - z),\tag{7.23}$$

является гурвицевым, то движение замкнутой системы (7.5), (7.20) (при $f \equiv 0$) тождественно совпадает (для любых $t \in [0, \infty]$) с движением устойчивой замкнутой системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B\delta, \\ \dot{z} &= Az + B\delta + F(p)(x - z), \\ \delta &= K(z - x^*(t)) + G(p)(x - z).\end{aligned}\tag{7.24}$$

Основной смысл всех приведенных утверждений состоит в том, что любые процессы маневрирования и стабилизации при отсутствии внешних возмущений могут быть реализованы с тождественным качеством не через реальные координаты, которые мы не можем измерять в полном составе, а через их оценки, получаемые с помощью асимптотических наблюдателей.

Введение в состав наблюдателя и уравнения управления нетрадиционной дополнительной динамики, определяемой передаточными матрицами $G(s)$ и $F(s)$, призвано обеспечивать борьбу с внешними возмущениями (их «фильтрацию» - подавление), отклоняющими оценки z от оцениваемого вектора x . В качестве возмущений обычно выступают волновые помехи и (возможно) шумы датчиков измерений.

Общая структура алгоритмов управления

Линейная математическая модель замкнутой системы управления движением со штатными алгоритмами управления, включающими асимптотические наблюдатели, в векторно-матричной форме представляется следующими уравнениями:

а) линейная модель ДС вида (7.5):

б) линейная модель инерционности исполнительных органов:

$$\dot{\delta} = u \quad (7.25)$$

в) уравнение асимптотического наблюдателя:

$$\dot{z} = Az + B\delta + Ry + Q(x - z), \quad (7.26)$$

г) уравнение инерционного фильтра:

$$\dot{y} = \Gamma y + P(x - z) \quad (7.27)$$

д) уравнение дополнительного фильтра:

$$\dot{\zeta} = A_{\zeta}\zeta + B_{\zeta}y, \quad \xi = C_{\zeta}\zeta. \quad (7.28)$$

е) уравнение основного управляющего сигнала:

е1) позиционный вариант:

$$u = K(z - x^*) - \delta + K_{\Delta}y + \xi, \quad (7.29)$$

е2) скоростной вариант:

$$u = L\dot{z} + N(z - x^*) + \xi. \quad (7.30)$$

В приведенных соотношениях уравнения (7.5) и (7.25) представляют математическую модель объекта управления, а уравнения (7.26) – (7.28) и (7.29) либо (7.26) – (7.28) и (7.30) – математическую модель алгоритмов управления, которая в равной мере используется как для управления линейной, так и нелинейной моделью объекта.

В приведенных уравнениях использованы следующие обозначения

x – вектор состояния объекта;

u – вектор управляющих воздействий;

z – вектор состояния наблюдателя;

y – вектор состояния грубого фильтра (оценок возмущений);

ζ – вектор состояния точного фильтра;

ξ – вектор выхода точного фильтра;

x^* – вектор командных сигналов.

Все матрицы в приведенных уравнениях имеют постоянные компоненты при фиксированной скорости хода.

В дальнейшем уравнения (7.26) и (7.27), рассматриваемые совместно, будем называть уравнениями обобщенного наблюдателя фильтра (ОНФ)

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + B\delta + Ry + Q(x - z), \\ \dot{y} &= \Gamma y + P(x - z)\end{aligned}\quad (7.31)$$

которые после исключения вектора y могут быть записаны в свернутой форме вида

$$\dot{z} = Az + B\delta + F(p)(x - z), \quad (7.32)$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования.

Уравнения дополнительного фильтра (ДФ) (7.28) также могут быть свернуть: к форме «вход-выход»:

$$\xi = G(p)(x - z) \quad (7.33)$$

С учетом (7.32) и (7.33), математическая модель алгоритмов автоматического управления (в позиционном варианте) представляется следующими формулами

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + B\delta + F(p)(x - z), \\ u &= K(z - x^*) - \delta + [G(p) + K_{\Delta}F(p)](x - z),\end{aligned}\quad (7.34)$$

При выбранной структуре обратной связи (7.34), выбору в процессе проектирования системы подлежат ее следующие элементы:

- матрица K базового закона управления $u = K(z - x^*) - \delta$;
- передаточная матрица $F(s)$ при невязках в обобщенном наблюдателе-фильтре (или $\dim y$ и матрицы R, Q, Γ, P в системе (7.31));
- передаточная матрица $G(s)$ дополнительного фильтра (или $\dim \xi$ и матрицы $A_{\xi}, B_{\xi}, C_{\xi}$ в уравнении системы (7.28));
- постоянная матрица K_{Δ} в уравнении (7.29) для позиционного варианта алгоритмов управления;
- законы формирования командных сигналов x^* , как функций времени, либо состояния объекта управления.

Перечисленные искомые элементы несут следующую функциональную основную нагрузку в замкнутой системе (как линейной, так и нелинейной).

1. Числовая матрица K полностью определяет динамику собственного движения системы управления, т.е. качество стабилизации отклонений регулируемых координат от движения, определяемого задающими командными сигналами.

2. Передаточная матрица $F(s)$ обеспечивает желаемую динамику движения замкнутой системы, вызванного низкочастотными внешними воздействиями типа $f(t) = f_0 1(t)$ и, возможно, грубую (инерционную) фильтрацию волновых помех.

3. Постоянная матрица K_{Δ} , обеспечивает астатизм замкнутой системы по регулируемым координатам.

4. Передаточная матрица $G(s)$ обеспечивает точную (настраиваемую) фильтрацию волновых возмущений в канале управления.

7. Задающие командные сигналы, являющиеся компонентами вектора x^* , определяют качество процессов маневрирования по регулируемым координатам.

Синтез базовых алгоритмов автоматической стабилизации

Базовые алгоритмы стабилизации являются ключевым элементом штатных законов автоматического управления. Они однозначно характеризуются заданием матрицы K в уравнении (7.29), которая, как было отмечено выше, полностью определяет динамику собственного движения системы управления, т. е. качество стабилизации отклонений регулируемых координат от желаемого движения, определяемого задающими командными сигналами.

В связи с отмеченным обстоятельством, целью рассматриваемой задачи синтеза является поиск такой матрицы K , которая удовлетворяет совокупности требований, предъявляемых к качеству собственного движения (при отсутствии возмущений).

В соответствии с приведенными выше теоремами, для формализованной постановки подобной задачи не обязательно рассматривать уравнения (7.5), (7.25) – (7.30) полной замкнутой системы со штатными автоматами управления. Здесь вполне достаточно ограничиться рассмотрением линейной замкнутой системы, в которой обратная связь формируется по вектору состояния. Это связано с тем, что рассматриваемые динамические процессы для такой системы не отличаются от процессов для штатных алгоритмов управления.

Математическая модель указанной системы имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B\delta, \quad x(0) = 0, \\ \dot{\delta} &= K(x - x^*) - \delta,\end{aligned}\tag{7.35}$$

где через x^* обозначен вектор задающего командного сигнала, имеющий постоянные компоненты. Состав указанных компонент зависит от выбранной плоскости стабилизации и от конкретного режима движения объекта.

На движениях замкнутой системы (7.35) зададим функционал, определяющий качество динамического процесса, значениями которого

являются величины перерегулирования по соответствующей координате или обобщенное перерегулирование вида

$$J_1 = J_1(x(t, K), \delta(t, K)) = J_1(K) = \sup_{t \in (0, \infty)} \frac{\|x(t, K) - x^*\|}{\|x^*\|}$$

Введем в рассмотрение допустимое множество Ω_K матриц K , определяя его следующим образом

$$\Omega_K = \{K : \Delta_i \in C_\Delta, \Delta_0(\Delta_i) = 0, i = 1 \dots n, T_p(k) \leq T_0\}. \quad (7.36)$$

В формуле (7.36) через $T_p(k)$ обозначена длительность переходного процесса, а через T_0 допустимое значение этой длительности. Через $\Delta_0(s)$ обозначен характеристический полином системы (7.35), т.е.,

$$\Delta_0(s) = \det \begin{pmatrix} I_n s - A & -B \\ -K & (s+1)I_m \end{pmatrix},$$

а через Δ_i – его корни. И наконец, через символ C_Δ обозначена область на комплексной плоскости, которой должны принадлежать указанные корни. Эта область, условно изображенная на рисунке 7.1, может быть формально представлена следующим образом

$$C_\Delta = \left\{ \Delta_i \in C^1 : \operatorname{Re} \Delta_i \leq -\alpha, \operatorname{arctg} \left| \frac{\operatorname{Im} \Delta_i}{\operatorname{Re} \Delta_i} \right| \leq \beta \right\},$$

где величина α определяет заданную степень устойчивости, а величина β – заданную степень колебательности замкнутой системы (7.35).

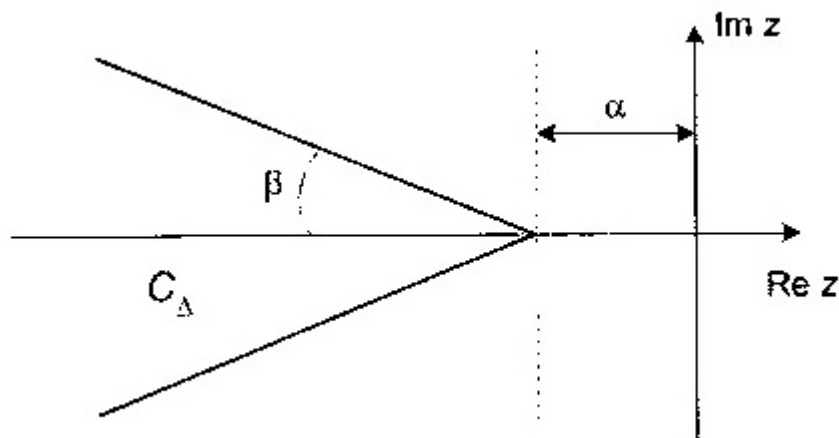


Рисунок 7.1 – Степень устойчивости динамической системы

С учетом введенных обозначений, сформулируем задачу о поиске матрицы K для базовых алгоритмов стабилизации вида $u = Kx - \delta$, которая имеет вид

$$J_1(K) = \min_{K \in \Omega_K} \quad (7.37)$$

Поставленная задача (7.37) является типичным примером задачи оптимального параметрического синтеза. Она представляет собой исключительно сложный вариант проблемы нелинейного программирования,отягощенный сложным заданием целевой функции и допустимого множества, определяемого наложенными ограничениями.

Тем не менее, в настоящее время разработаны различные численные методы приближенного решения, позволяющие найти искомую матрицу K .

ЛЕКЦИЯ 8. ФИЛЬТРАЦИЯ И АСТАТИЗМ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Синтез обобщенного наблюдателя-фильтра

Обобщенный наблюдатель-фильтр (ОНФ) является центральным звеном штатных алгоритмов автоматического управления ДС, выходной вектор $\{z, y\}$ которого по существу замещает реально измеряемые физические координаты объекта, а также те координаты и их производные, которые недоступны непосредственному измерению при формировании управляющих сигналов.

В соответствии с общей структурой штатных алгоритмов управления, уравнения ОНФ имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + B\delta + Ry + Q(x - z), \\ \dot{y} &= \Gamma y + P(x - z)\end{aligned}$$

Здесь матрицы A и B соответствуют линейной модели движения ДС. Остальные матрицы R, Q, P, Γ в уравнениях ОНФ априорно являются неизвестными и подлежат поиску в процессе синтеза ОНФ. Как было отмечено выше, эти постоянные (при фиксированной скорости хода) матрицы или однозначно определяемая ими передаточная матрица $F(s) = R(I_2s - \Gamma)^{-1}P + Q$ обеспечивают желаемую динамику движения замкнутой системы, вызванного низкочастотными скачкообразными внешними воздействиями типа $f(t) = f_0 1(t)$, а также грубую (инерционную) фильтрацию волновых помех.

В соответствии с теоремой, характеристический полином замкнутой системы с обратной связью, формируемой по выходу ОНФ, представляется формулой $\Delta(s) = \Delta_0(s)\Delta_\Phi(s)\Phi(s)$, откуда следует, что его корнями одновременно являются и корни характеристического полинома $\Delta_\Phi(s)$.

В связи с отмеченным обстоятельством, для выполнения требований по динамике замкнутой системы на низких частотах выбор искомых матриц R, Q, P, Γ следует осуществлять, обеспечивая размещение корней полинома

$$\Delta_\Phi(s) = \det \begin{pmatrix} I_4s - A + Q & -R \\ P & I_2s - \Gamma \end{pmatrix},$$

в пределах заданной области C_Δ на комплексной плоскости. Как и в предшествующем подпункте, определим эту область соотношением

$$C_\Delta = \left\{ \Delta_i \in C^1 : \operatorname{Re} \Delta_i \leq -\alpha, \operatorname{arctg} \left| \frac{\operatorname{Im} \Delta_i}{\operatorname{Re} \Delta_i} \right| \leq \beta \right\}$$

где величина α определяет заданную степень устойчивости, а величина β заданную степень колебательности ОНФ (7.31). Напомним, что схематичное изображение области C_Δ , приведено на рисунке 7.1.

Проблема грубой фильтрации волновой помехи с помощью ОНФ решается следующим образом. Будем трактовать ОНФ как динамическую систему с входным векторным сигналом $\{x, \delta\}$ и выходным сигналом $\{z, y\}$. При этом уравнения (7.31) могут быть записаны в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях в виде

$$\begin{pmatrix} sz \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-Q & R \\ -P & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q & B \\ P & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix},$$

что эквивалентно

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = W_\Phi(s) \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

где через

$$W_\Phi(s) = \left(I_6 s - \begin{pmatrix} A-Q & R \\ -P & \Gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Q & B \\ P & O \end{pmatrix} \right),$$

обозначена передаточная матрица ОНФ от входа к выходу.

Заметим, что входной сигнал $\{x, \delta\}$ для ОНФ является источником волновых помех, поступающих в канал управления через измерения. Очевидно, что степень подавления этих помех с помощью ОНФ определяется выбором матриц R, Q, P, Γ и будет тем большей, чем «меньше» матричный коэффициент усиления W_Φ в уравнении (8.1) в рамках допустимого расположения корней полинома Δ_Φ в пределах области C_Δ .

Введем количественную характеристику «малости» передаточной матрицы $W_\Phi(s)$, в качестве которой примем ее матричную норму для гильбертового пространства Харди H_2 . Эта характеристика является функционалом, имеющим вид

$$J_2 = J(R, Q, P, \Gamma) = \|W_\Phi(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[W_\Phi^T(-j\omega)W_\Phi(j\omega)]d\omega}. \quad (8.2)$$

С учетом (8.2), представляется целесообразной следующая постановка формализованной задачи об инерционной фильтрации волновых помех с помощью ОНФ:

$$J_2(R, Q, P, \Gamma) = \|W_\Phi(s)\|_2 \rightarrow \min_{\{R, Q, P, \Gamma\} \in \Omega_\Delta} \quad (8.3)$$

где допустимое множество искомых матриц определяется формулой

$$\Omega_{\Delta} = \{R, Q, P, \Gamma : \Delta_i \in C_{\Delta}, \Delta_{\Phi}(\Delta_i) = 0, i = 1 \dots n_j, n_j = \deg \Delta_{\Phi}\}$$

Заметим, что решение поставленной задачи (8.3) существенно определяется заданием величины α допустимой степени устойчивости ОНФ. В дальнейшем будем вместо этой величины задавать параметр T , связанный с α прямой пропорциональной зависимостью $\alpha = k_{\alpha} T$, где k_{α} – фиксированный множитель. Нетрудно показать, что чем меньше значение T , тем меньшей является величина минимума функционала $J_2(R, Q, P, \Gamma)$, т.е. тем лучше качество подавления волновой помехи. В связи с этим в дальнейшем параметр T будем называть степенью инерционной фильтрации (или просто степенью фильтрации) волновой помехи.

Обратим особое внимание на ‘тот факт, что уменьшение величины T , улучшающее качество фильтрации, входит в противоречие с качеством динамики при скачкообразных возмущениях, поскольку влечет за собой приближение корней полинома $\Delta_{\Phi}(s)$ к мнимой оси. В связи с этим степень фильтрации T в процессе движения объекта может изменяться по мере необходимости путем задания с пульта. При отсутствии высокочастотного возмущения величина этого параметра должна принимать максимальное значение. При наличии высокочастотного возмущения (волнения), в зависимости от его интенсивности, величина параметра T уменьшается. Сформулированная оптимизационная задача (8.3) синтеза ОНФ по существу является сложной задачей нелинейного программирования, приближенно решаемой с помощью специально разработанных численных методов.

Обеспечение астатизма замкнутой системы по регулируемым координатам

Требование астатизма замкнутой системы по регулируемым координатам является довольно распространенным условием функционирования штатных алгоритмов управления динамической системы.

В соответствии с общей структурной схемой штатных алгоритмов управления, запишем линейные уравнения динамики замкнутой системы в соответствующей плоскости стабилизации в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B\delta + C_f f(t), \\
\dot{\delta} &= u, \\
\dot{z} &= Az + B\delta + Ry + Q(x - z), \\
\dot{y} &= \Gamma y + P(x - z), \\
u &= W_{uz}(p)z + W_{ux}(p)x + W_{u\delta}(p)\delta.
\end{aligned} \tag{8.4}$$

С формальной точки зрения, условие астатизма по регулируемой координате x_i для системы (8.4) записываются следующим образом:

для любого $f_0 \in R^2$ при $f(t) = f_0 1(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$.

Эти условия могут быть с очевидностью представлены в следующей эквивалентной форме:

$$F_{fx_i}(0) = 0, \tag{8.5}$$

где $F_{fx_i}(s)$ – передаточная матрица замкнутой системы (8.4) от возмущения к регулируемой координате x_i соответственно. Эта матрица может быть определена следующим образом:

$$F_{fx}(s) = \Delta^{-1}(s) \det \begin{pmatrix} C_f & -B & 0 & 0 \\ 0 & I_2 s - W_{u\delta}(s) & -W_{uz}(s) & 0 \\ 0 & -B & I_4 s - A + Q & -R \\ 0 & 0 & P & I_2 s - \Gamma \end{pmatrix}, \tag{8.6}$$

где $\Delta(s)$ – характеристический полином системы (8.4).

Таким образом, проблема обеспечения астатизма замкнутой системы по регулируемой координате сводится к такому выбору матриц $W_{uz}(s), W_{ux}(s), W_{u\delta}(s)$ в уравнении для основного управляющего сигнала, чтобы выполнялось условие (8.5). Регулируемых координат может быть несколько, тогда соответственно в (8.5) увеличится количество условий.

Заметим, что при непосредственном использовании базовых статических алгоритмов стабилизации

$$u = Kx - \delta$$

с последующим формированием управляющих сигналов по выходу ОНФ в виде

$$u = Kz - \delta \tag{8.7}$$

мы имеем $W_{uz}(s) = K$, $W_{ux}(s) = 0$, $W_{u\delta}(s) = -I_2$. Непосредственная подстановка указанных матриц в формулы (8.6) позволяет убедиться в том, что условия (8.5) не выполняются, т.е. закон управления (8.7) не обеспечивают астатизм и нуждается в коррекции.

Заметим, что при проектировании систем управления могут быть применены два подхода к обеспечению астатизма (или, что то же самое, к обеспечению выполнения условия (8.5)), именуемые соответственно позиционной и скоростной астатической коррекцией.

а) Астатические позиционные алгоритмы стабилизации.

Эти алгоритмы формируются на базе (8.7) путем введения дополнительного адаптивного корректирующего (балансирующего) сигнала:

$$u = Kz - \delta + K_{\Delta} y. \quad (8.8)$$

С учетом соотношения $y = F(p)(x - z)$, уравнение (8.8) принимает вид

$$u = Kz - \delta + K_{\Delta} F(p)(x - z),$$

откуда следует, что в данном случае мы имеем

$$W_{uz}(s) = K - K_{\Delta} F(s), W_{ux}(s) = K_{\Delta} F(s), W_{u\delta}(s) = -I_2 \quad (8.9)$$

Подставляя соотношения (8.9) в формулы (8.6), а затем в условие (8.5), получим систему из четырех неоднородных линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными – компонентами матрицы коррекции.

Замечание. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для более общего способа введения позиционной астатической коррекции в виде

$$u = Kz - \delta + K_{\Delta}(p)y.$$

б) Астатические скоростные алгоритмы стабилизации.

При данном способе обеспечения астатизма алгоритмы также формируются на базе (8.7). Однако здесь вместо введения дополнительного аддитивного корректирующего сигнала используется эквивалентное линейное выражение векторного слагаемого $Kx - \delta$ через производные \dot{x} и регулируемые координаты в силу уравнений объекта при $f \equiv 0$. Этот подход приводит к переходу от (8.7) к эквивалентному (в определенном смысле) регулятору

$$u = L\dot{x} + Nx \quad (8.10)$$

Синтез настраиваемых фильтров волновых помех в канале управления

Дополнительные фильтры (ДФ) являются вспомогательным элементом штатных алгоритмов управления, который не функционирует постоянно и включается лишь по мере необходимости. ДФ рационально использовать в тех режимах движения, при которых ДС подвергается существенному воздействию высокочастотного возмущения (волнения). Как известно,

характерной особенностью этих режимов, как правило, является малая скорость хода. Это обстоятельство определяет недостаточную эффективность исполнительных органов в плане повышения точности стабилизации заданного движения при наличии волнения. В связи с отмеченным обстоятельством, введение ДФ должно обеспечить максимальное подавление бесполезного сигнала (волновой помехи), порождаемой волнением и поступающей в канал управления через измерительный комплекс.

В отличие от грубой инерционной фильтрации. Обеспечиваемой ОНФ. дополнительные фильтры являются адаптивно настраиваемым элементом, который в ходе функционирования приспособляется к частотным свойствам волнения.

Детальное рассмотрение задачи синтеза ДФ будет осуществлено ниже, а здесь приведем лишь основные положения применяемого подхода.

Считая матрицы $A, B, C_f, R, Q, P, \Gamma, K$ и K_Δ заданными как в предшествующем подпункте, рассмотрим линейные уравнения системы, замкнутой астатическим позиционным регулятором

$$u = Kz - \delta + K_\Delta(p)y \quad (8.11)$$

В соответствии с общей структурой штатных алгоритмов управления, введем в состав математической модели замкнутой системы уравнение дополнительного фильтра в нормальной форме

$$\dot{\zeta} = A_\zeta \zeta + B_\zeta y, \quad \xi = C_\zeta \zeta$$

или в операторной форме

$$\xi = E_d(p)y.$$

Выходной сигнал ξ дополнительного фильтра аддитивно включим в алгоритм управления, переходя от (7.49) к уравнению

$$u = Kz - \delta + K_\Delta(p)y + \xi = Kz - \delta + K_\Delta(p)y + E_d(p)y$$

или

$$u = Kz - \delta + E(p)y, \quad (8.12)$$

где

$$E(p) = K_\Delta(p) + E_d(p). \quad (8.13)$$

Теперь рассмотрим линейные уравнения замкнутой дополненной системы, которые представим в матричной форме, предварительно исключив из состава переменных вектор управляющих сигналов u :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B\delta + C_f f(t), \\
\dot{\delta} &= Kz - \delta + E(p)y, \\
\dot{z} &= Az + B\delta + Ry + Q(x - z), \\
\dot{y} &= \Gamma y + P(x - z).
\end{aligned} \tag{8.14}$$

Переходя к изображениям по Лапласу при нулевых начальных условиях, систему (8.14) можно представить в матричной форме

$$\begin{pmatrix} I_4 s - A & -B & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)I_2 & -K & -E(s) \\ -Q & -B & I_4 s - A + Q & -R \\ -P & 0 & P & I_2 s - \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \delta \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot f(s). \tag{8.15}$$

В соответствии с уравнениями (8.15), запишем передаточную матрицу $W_{f\delta}$ замкнутой дополненной системы от возмущения f к управляющим воздействиям δ :

$$W_{f\delta} = W_{f\delta}(s, E) = \det \begin{pmatrix} I_4 s - A & C_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K & -E(s) \\ -Q & 0 & I_4 s - A + Q & -R \\ -P & 0 & P & I_2 s - \Gamma \end{pmatrix} \tag{8.16}$$

Введем в рассмотрение функционал $J(E)$, зависящий от задания матрицы $E(s)$ и определяемый некоторой матричной нормой передаточной матрицы $\|W_{f\delta}\|$, представленной формулой (8.16).

Выбор конкретной нормы указанной передаточной матрицы порождает различные классы задач оптимального синтеза стабилизирующих управлений, среди которых в настоящее время наиболее популярными являются следующие:

задачи о минимизации нормы $\|H\|_2$ (типичный представитель - задача LQG-оптимального синтеза):

задачи о минимизации нормы $\|H\|_\infty$ (задача H_∞ -оптимального синтеза);

задачи о минимизации указанных выше норм для «взвешенных» передаточных матриц HS_1 , где $S_1(s)$ – заданная весовая матричная функция (например, задачи средне-квадратичного оптимального синтеза и синтеза гарантирующих регуляторов соответственно).

Приведенные нормы вводятся следующими соотношениями:

а) норма $\|H\|_2$:

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[H^T(-j\omega)H(j\omega)]d\omega},$$

в частности, для SISO-задачи (со скалярными входом (d) и выходом (e)) получим

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega}.$$

б) норма $\|H\|_{\infty}$:

$$\|H\|_{\infty} = \max_{\omega \in (0, \infty)} \bar{\sigma}(\omega),$$

где $\bar{\sigma}(\omega)$ – максимальное сингулярное число матрицы $H(j\omega)$ (корень квадратный из максимального собственного значения эрмитовой матрицы $H^T(-j\omega)H(j\omega)$), в частности, для SISO-задачи имеем

$$\|H\|_{\infty} = \max_{\omega \in (0, \infty)} |H(j\omega)|,$$

в) взвешенная норма $\|HS_1\|_2$

$$\begin{aligned} \|HS_1\|_2 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[S_1^T(-j\omega)H^T(-j\omega)H(j\omega)S_1(j\omega)]d\omega} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[H(j\omega)S_v(\omega)H^T(-j\omega)]d\omega} \end{aligned}$$

где $S_v(\omega) = S_1(j\omega)S_1^T(-j\omega)$; в частности, для SISO-задачи –

$$\|HS_1\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_v(\omega) d\omega}$$

где $S_v(\omega) = |S_1(j\omega)|^2$;

г) взвешенная норма $\|HS_1\|_{\infty}$

$$\|HS_1\|_{\infty} = \max_{\omega \in (0, \infty)} \bar{\sigma}_v(\omega),$$

где $\bar{\sigma}_v(\omega)$, – максимальное сингулярное число матрицы $H(j\omega)S_1(j\omega)$,

Для целей фильтрации чаще всего используется взвешенная матричная норма $\|HS_1\|_2$ передаточной матрицы $W_{j\delta}$. Здесь в качестве весовой матрицы S_1 принимается результат факторизации матрицы $S_f(\omega)$ спектральных плотностей возмущения, определяемого высокочастотным возмущением $S_f(\omega) = S_1(j\omega)S_1^T(-j\omega)$. В соответствии с выбором нормы $\|HS_1\|_2$,

функционал, определяемый этой нормой и задающий качество фильтрации, можно представить в следующем виде:

$$J(E) = \|W_{f\delta} S_1\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[W_{f\delta}(j\omega) S_v(\omega) W_{f\delta}^T(-j\omega)] d\omega} \quad (8.17)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что введенный функционал (8.17) характеризует интенсивность функционирования исполнительных органов в условиях высокочастотного возмущения. В связи с этим представляется целесообразным поставить задачу об обеспечении минимума этого функционала за счет выбора матрицы $E(s)$ в уравнении (8.16) для основного управляющего сигнала:

$$J(E) = \|W_{f\delta} S_1\|_2 \rightarrow \min_{E \in \Omega_E} \quad (8.18)$$

Сформулированная оптимизационная задача по существу является задачей о поиске оптимальной передаточной функции дополнительного фильтра. Действительно, если найдена оптимальная матрица – решение задачи (8.18):

$$E_0(s) = \arg \min_{E \in \Omega_E} J(E) = \arg \min_{E \in \Omega_E} \|W_{f\delta} S_1\|_2$$

то оптимальная передаточная матрица $E_{d0}(s)$ ДФ, в соответствии с (8.13), может быть найдена по формуле

$$E_{d0}(s) = E_0(s) - K_{\Delta}(s).$$

Допустимое множество Ω_E в задаче (7.56) определяется требованиями, предъявляемыми к динамическим свойствам замкнутой системы, аналогично рис. 7.1. В наиболее простом варианте его можно принять в виде

$$\Omega_E = \{E : \Delta_i \in C_{\Delta}, \Phi_d(\Delta_i) = 0, i = 1 \dots n_d\},$$

где $\Phi_d(\Delta_i)$ – характеристический полином ДФ, n_d – степень этого полинома, C_{Δ} – область на комплексной плоскости, описанная выше и представленная на рисунке 7.1.

Необходимо отметить, что сформулированная оптимизационная задача (8.18) на допустимом множестве Ω_E является исключительно сложной в аналитическом плане. В настоящее время разработана теория и численные методы решения подобных задач, относящихся к области многоцелевой стабилизации динамических объектов.

Следует отметить, что введение дополнительных фильтрующих сигналов сохраняет устойчивость и не нарушает свойство астатизма замкнутой системы по регулируемым координатам.

Алгоритмы автоматического маневрирования подвижным объектом

Под маневрированием подвижного объекта в плоскостях стабилизации понимают изменение на заданные величины соответствующих угловых и линейных координат объекта управления. Перед началом маневра и после его завершения все угловые и линейные скорости (исключая скорость хода), а также отклонения исполнительных органов при отсутствии внешних возмущений должны быть нулевыми. Главными требованиями, которые предъявляются к качеству маневра, являются предельное быстродействие и минимальное перерегулирование по управляемой координате.

Для математической формализации проблемы автоматического маневрирования в принципе могут быть применены следующие подходы:

- теория оптимального программного быстродействия с реализацией управления в виде программы отклонения исполнительных органов в функции времени;
- теория оптимального быстродействия с реализацией управления в виде нелинейной обратной связи;
- теория линейных регуляторов с их параметрической оптимизацией по коэффициентам закона управления.

Необходимо отметить, что, к сожалению, при построении штатных законов управления не удастся ограничиться каким-либо одним из указанных подходов в силу целого ряда присущих им недостатков.

В первую очередь, укажем недостатки подхода, базирующегося на теории оптимального быстродействия.

1. Большие пределы изменения координат объекта в ходе маневров не позволяют пользоваться при синтезе оптимальных программ линейными моделями объекта, что с учетом большой размерности исключает построение оптимальных программ на борту в ходе движения.

2. Реализация оптимальных программ (даже при их наличии) невозможна без использования обратных связей, поскольку любое программное движение в вертикальной плоскости не является асимптотически устойчивым по Ляпунову и, кроме того. Поскольку на ДС постоянно воздействуют внешние неопределенные факторы, требующие непрерывного функционирования системы стабилизации.

3. Формирование нелинейного оптимального по быстродействию регулятора в силу сложности нелинейных уравнений динамики практически невозможно. Отметим, что всякие приближения к нему нежелательны, поскольку движения оптимальных нелинейных систем имеют ряд

динамических особенностей вблизи поверхностей переключения, которые отрицательно сказываются на приводе исполнительных органов.

4. Непосредственное использование нелинейных регуляторов, которые существенно отличаются по своей структуре от штатных линейных алгоритмов управления, требует выполнения соответствующих переключений перед началом маневра, что крайне нежелательно с позиций качества управления и его надежности.

Альтернативным подходом по отношению к теории оптимального быстрогодействия является обеспечение автоматического маневрирования с помощью линейных алгоритмов обратной связи вида

$$u = \tilde{K}\tilde{x} + k_p(x_p - x_{pz}) - \delta, \quad x = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ x_p \end{pmatrix} \quad (8.19)$$

с позиционным базовым законом управления или

$$u = L\dot{x} + v_p(x_p - x_{pz}) \quad (8.20)$$

со скоростным базовым алгоритмом стабилизации. Здесь через x_p обозначена регулируемая координата объекта, а через x_{pz} — ее желаемое (заданное) значение в конце маневра. Заметим, что при каждом фиксированном значении скорости хода и заданной величине x_{pz} , коэффициенты законов (8.19) и (8.20) могут быть выбраны так, чтобы обеспечить оптимальный по быстродействию маневр. Однако изменение коэффициентов автомата в столь широких пределах крайне нежелательно. С другой стороны, фиксация коэффициентов по отношению к x_{pz} на некотором уровне приводит к существенному недоиспользованию возможностей органов управления либо к большим перерегулированием.

В связи с отмеченными обстоятельствами, обеспечение автоматического маневрирования объекта осуществляется на базе специального подхода, объединяющего достоинства оптимального быстрогодействия и линейного регулирования. Предлагаемый подход состоит в следующем.

1. По известной скорости хода для существенно упрощенной линейной модели движения объекта тем или иным способом (построением оптимальной программы либо синтезом оптимальной обратной связи) формируются квазиоптимальные по отношению к соответствующей базовой модели законы

$$x_p = x_p^*(t), \dot{x}_p = \dot{x}_p^*(t), \delta = \delta^*(t), \quad (8.21)$$

изменения регулируемой координаты, ее производной и положения исполнительных органов при маневре.

2. С целью определенной компенсации неучтенных свойств объекта управления и условий его функционирования, тем или иным способом осуществляется коррекция функций (8.22).

3. В соответствии с (8.19) или (8.20) формируются базовые алгоритмы автоматического маневрирования вида

$$u = Kx + k_p^p (\dot{x}_p - \dot{x}_p^*(t)) + k_p (x_p - x_p^*(t)) - (\delta - \delta^*(t)), \quad (8.21)$$

или

$$u = L\ddot{x} + \mu_p^p (\dot{x}_p - \dot{x}_p^*(t)) + v_p (x_p - x_p^*(t)) + \delta^*(t)$$

для позиционного или скоростного варианта соответственно.

4. Осуществляется переход от базовых алгоритмов (8.21) к законам управления по выходу ОНФ.