Задана система линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = x(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

И начальные условия: $x(0) = 0; y(0) = 0$

Найдем решение этой системы:

$$x = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} \tag{1.2}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -y$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0$$

Получено однородное уравнение второго порядка. Решим для него характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

Получены мнимые корни, а это значит, что решение для y будет выглядеть следующим образом:

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

Возьмем производную этого решения и подставим в (1.2):

$$\frac{dy}{dt} = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$$

$$\Rightarrow x = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$$

Таким образом получаем общее решение системы:

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t \\ y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t \end{cases} \tag{1.3}$$

Найдем коэффициенты C_1 и C_2 при $t=0;\ x(0)=0;\ y(0)=0$

$$\begin{cases} x(0) = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 \\ y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(0) = C_2 = x_0 \\ y(0) = C_1 = y_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = -y_0 \sin t + x_0 \cos t \\ y(t) = y_0 \cos t + x_0 \sin t \end{cases}$$

Проведем исследование устойчивости системы по Ляпунову:

$$|x(0)-\varphi(0)| = \sqrt{|x_0|^2 + |y_0|^2} \le |x_0| + |y_0|$$

$$x_0 = y_0 = \frac{\delta}{2} \Rightarrow |x(0)-\varphi(0)| \le \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

$$|x(t)-\varphi(t)| = \sqrt{|-y_0 \sin t + x_0 \cos t|^2 + |y_0 \cos t + x_0 \sin t|^2} \le \sqrt{\left(|x_0|+|y_0|\right)^2 + \left(|x_0|+|y_0|\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2}\left(|x_0|+|y_0|\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}\right) = \delta\sqrt{2}$$

$$\varepsilon = \delta\sqrt{2}$$

$$\|x(0)-\varphi(0)\| < \delta$$

$$\|x(t)-\varphi(t)\| < \delta\sqrt{2} = \varepsilon\ \forall t \ge 0$$

Из вышесказанного можно сделать вывод об устойчивости системы по Ляпунову.