

Лекция 4. ВЫБОР СТРУКТУРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

4.1. Классификация моделей

Этап построения математической модели системы разбивается на две части: выбор структуры и выбор параметров. Как было сказано на предыдущих лекциях, структура сложной системы определяется типами моделей каждой ее подсистемы и характером связей (отношений) между ними. Все многообразие имеющихся типов ММ можно классифицировать по нескольким основным признакам, см. табл. 4.1.

Таблица 4.1. Математические модели систем

Статические $y(t) = F(u(t))$	Динамические $y(t) = F(\{u(s), -\infty < s \leq t\})$
Дискретные (U, Y, T – конечные (счетные) множества)	Непрерывные (U, Y, T – континуумы (прямые, отрезки, тела в многомерных пространствах))
Детерминированные	Стохастические; нечеткие
Сосредоточенные (уравнения конечные (алгебраические или трансцендентные), разностные, обыкновенные, дифференциальные)	Распределенные (уравнения с запаздыванием, в частных производных, интегральные)
Линейные	Нелинейные
Стационарные (параметры не меняются со временем)	Нестационарные (параметры изменяются со временем)

Кроме того, структура модели определяется также набором размерностей - количеством переменных (входа, выхода, состояния) и параметров. Прежде всего следует дать краткую характеристику основным типам ММ.

4.1.1. Статические и динамические модели

Математическая модель системы называется статической, если значение выхода $y(t)$ зависит от значения входа $u(t)$ в один и тот же момент времени t . Символически это свойство записывается так:

$$y(t) = F(u(t)) \quad (4.1)$$

где F – символ некоторого преобразования (оператора). Кроме явных функциональных зависимостей (4.1) статические модели могут задаваться неявно, в виде уравнения или системы

$$\Phi(y(t), u(t)) = 0. \quad (4.2)$$

Так обычно записываются уравнения статических режимов радиоэлектронных схем, многих механических, энергетических систем и т.д. Уравнение (4.2) должно быть однозначно разрешимо относительно $y(t)$.

Статическими моделями пользуются, когда в рамках поставленной задачи (с точки зрения достижения выбранной цели) инерционностью и «памятью» реальной системы можно пренебречь. Это возможно при выполнении ряда условий, в число которых входят следующие:

1) система устойчива, т.е. переходные процессы после скачкообразного изменения входов затухают. Конечное время затухания с заданной точностью обозначим через t_{per} ;

2] входы меняются медленно, т.е. $\Delta t_{in} > t_{per}$, где Δt_{in} – время между изменениями входных воздействий;

3) выходы изменяются редко, т.е. $\Delta t_{out} > t_{per}$, где Δt_{out} – промежутки между измерениями входных величин.

В динамических моделях значение $y(t)$ может зависеть от всего прошлого (предыстории) входного процесса:

$$y(t) = F(\{u(s), s \leq t\}). \quad (4.3)$$

Динамические модели позволяют учесть наличие «памяти», инерционности системы. Математическим аппаратом описания динамических систем являются дифференциальные, разностные уравнения, конечные автоматы, случайные процессы.

4.1.2. Дискретные и непрерывные модели

Система может быть дискретной или непрерывной по входам, выходам и по времени в зависимости от того, дискретными или непрерывными являются множества U, Y, T соответственно. Под дискретным понимается

конечное или счетное множество. Под непрерывным (континуальным) будем понимать множество объектов, для которого адекватной моделью является отрезок, луч или прямая линия, т.е. связное числовое множество. Если система имеет несколько входов и выходов, то это значит, что соответствующие множества U, T лежат в многомерных пространствах, т.е. непрерывность и дискретность понимаются покомпонентно.

Удобство числового множества как модели реальных совокупностей объектов состоит в том, что на нем естественным образом определяются несколько отношений, формализующих реально встречающиеся отношения между реальными объектами. Например, отношения близости, сходимости формализуют понятия похожести, сходства объектов и могут быть заданы посредством функции расстояния (метрики) $d(x, y)$ (например, $d(x, y) = |x - y|$).

Числовые множества являются упорядоченными: отношение порядка следования ($x \leq y$) формализует предпочтение одного объекта другому. Наконец, над элементами числовых множеств определены естественные операции, например линейные: $x + y, x \cdot a$.

Как правило, дискретность множества U влечет за собой дискретность Y . Кроме того, для статических систем исчезает разница между непрерывным и дискретным временем. Поэтому классификация детерминированных систем (табл. 4.2) по признакам «статические – динамические», «дискретные – непрерывные» включает шесть основных групп; для каждой группы указан математический аппарат описания систем, методы численного моделирования и оценки их параметров методы синтеза (оптимизации), а также типичные области применения.

Таблица 4.2. Детерминированные модели систем

	Статические	
	Дискретные по U, Y	Непрерывные по U, Y
Математический аппарат описания	Графы, булева алгебра, предикаты	Функции вещественных переменных
Методы оценки параметров и анализа	Методы математической логики	Методы интерполяции, аппроксимации
Методы синтеза	Карты Карно, метод Куайна, дискретное программирование	Методы оптимизации (линейное и нелинейное программирование)
Области применения	Релейно-контактные схемы, импульсные и логические схемы, качественные модели исследования операций	Количественные модели исследования операций
	Динамические, дискретные по T	
	Дискретные по U, Y	Непрерывные по U, Y
Математический аппарат описания	Конечные автоматы	Разностные уравнения
Методы оценки параметров и анализа	Теория конечных автоматов	Идентификация, теория устойчивости
Методы синтеза	Методы синтеза микропрограммных автоматов, динамическое программирование	Динамическое программирование, дискретный принцип максимума
Области применения	Цифровые САУ, логическое управление	Импульсные и цифровые САУ
	Динамические, непрерывные по T	
	Дискретные по U, Y	Непрерывные по U, Y
Математический аппарат описания	Асинхронные автоматы, сети Петри, модели теории расписаний	Обыкновенные дифференциальные уравнения
Методы оценки параметров и анализа	Методы идентификации	Идентификация, численное решение ОДУ
Методы синтеза	Динамическое программирование, теория расписаний	Теория управления, методы оптимизации
Области применения	Параллельные процессы	САУ, механические, тепловые, электронные и другие процессы

Пример 4.1.1. Рассмотрим работу турникета на входе в метро. В первом, грубом, приближении множество значений входа этой системы имеет два элемента: человек с жетоном (u_1) и человек без жетона (u_2), т.е. $U = \{u_1, u_2\}$. После небольшого размышления становится ясно, что следует включить еще отсутствие пассажира (u_0), т.е. $U = \{u_0, u_1, u_2\}$. Множество значений выхода

содержит элементы «открыто» (y_0) и «закрыто» (y_1). Таким образом, $Y = \{y_0, y_1\}$, и система является дискретной. В простейшем случае можно пренебречь памятью системы и описывать ее статической моделью, имеющей вид таблицы или графа:

$u(t)$	$y(t)$	
u_0	y_0	$u_0 \searrow$
u_1	y_0	$u_1 \nearrow$
		$u_2 \dashrightarrow$

При необходимости хранить ММ системы в памяти компьютера ее можно представить (закодировать) в виде матрицы $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ или более экономно, в виде списка (0,0,1), в котором на i -м месте стоит j , если значению входа u_{i-1} соответствует значение выхода y_i .

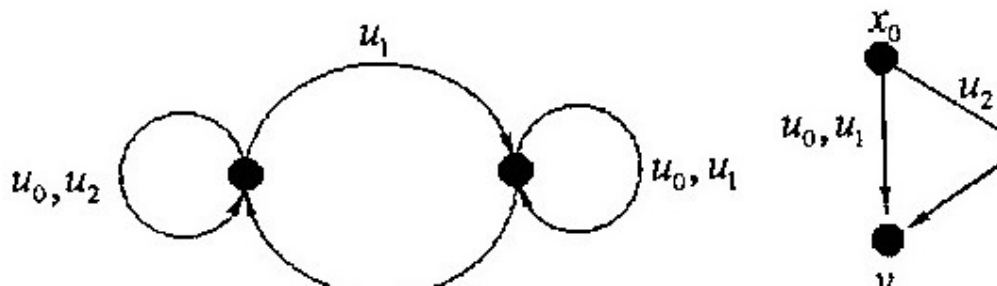
Пример 4.1.2. Если нас интересует более детально устройство самого турникета (т.е. системой является турникет), то придется учесть, что входными воздействиями (сигналами) для него являются опускание жетона и прохождение человека. Таким образом, система имеет два входа, каждый из которых может принимать два значения («есть» или «нет»). Пренебрегая возможностью одновременного опускания жетона и прохождения, вводим три значения входа: u_0 – «нет воздействия», u_1 – «опускание жетона», u_2 – «прохождение». Множество Y можно задать так же, как и в примере 4.1.1. Однако теперь значение выхода $y(t)$ не определяется только значением входа $u(t)$, а зависит еще и от того, был ли опущен жетон раньше, т.е. от значений $u(s)$ при $s < t$. Система имеет «память». Простейший тип ММ для описания дискретных систем с памятью – это конечный автомат. Для его построения вводится конечное множество внутренних состояний системы X , определяющее «память». В данном случае в X достаточно включить два элемента: x_0 – «жетон не был брошен», x_1 – «жетон был брошен». Значения состояния системы в следующий момент времени и выхода в текущий момент зависят от текущих значений состояния и входа, т.е.

$$\begin{aligned}x(k+1) &= F(x(k), u(k)), \\y(k) &= G(x(k), u(k)),\end{aligned}\tag{4.4}$$

где k – номер момента времени такта. Функцию переходов $F(x, u)$ и функцию выходов $G(x, u)$ можно задать таблично:

		u_0	u_1	u_2			u_0	u_1	u_2
$F(x, u)$	x_0	x_0	x_1	x_0	$G(x, u)$	x_0	y_0	y_0	y_1
	x_1	x_1	x_1	x_0		x_1	y_0	y_0	y_0

Можно также построить графы переходов и выходов:



Пример 4.1.3. Рассмотрим простейшую электрическую систему – RC -цепь (рис. 4.1), входом которой является напряжение источника $u(t) = E_0(t)$, а выходом – напряжение на конденсаторе $y(t) = E_1(t)$.

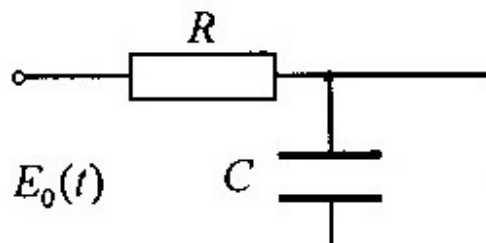


Рисунок 4.1 – Электрическая схема RC -цепи

Закон Кирхгофа дает ММ системы в виде дифференциального уравнения первого порядка

$$\tau \dot{y} = u - y,\tag{4.5}$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени цепи. Модель (4.5) полностью непрерывна: $U = Y = T = R^1$. Если исследователя интересует поведение системы в статических режимах, т.е. при $E_0(t) = \text{const}$, то нужно положить в (4.5) $\dot{y} = 0$ и получить статическую модель

$$y(t) = u(t).\tag{4.6}$$

Моделью (4.6) можно пользоваться как приближенной в случае, когда вход $E_0(t)$ изменяется достаточно редко или медленно (по сравнению с τ).

Пример 4.1.4. Рассмотрим экологическую систему, состоящую из двух взаимодействующих популяций, существующих на некоторой территории. Предположим, что система автономна, т.е. внешними воздействиями (входами) можно пренебречь; за выходы системы примем численности популяций (видов) $y_1(t), y_2(t)$. Пусть второй вид является пищей для первого, т.е. система относится к классу «хищник – жертва» (например, y_1 – численность лис в лесу, y_2 – численность зайцев; или y_1 – число бактерий возбудителей заболевания в городе, y_2 – число заболевших и т.д.). В данном случае y_1, y_2 – целые числа, и на первый взгляд в ММ системы множество Y должно быть дискретным. Однако для построения ММ удобнее считать, что y_1, y_2 могут принимать произвольные вещественные значения, т.е. можно перейти к непрерывной модели (при достаточно больших y_1, y_2 этот переход не внесет существенной погрешности). При этом мы сможем пользоваться такими понятиями, как скорости изменения выходных переменных $\frac{dy_1}{dt} = \dot{y}_1, \frac{dy_2}{dt} = \dot{y}_2$. Простейшая модель динамики популяции получается, если предположить, что:

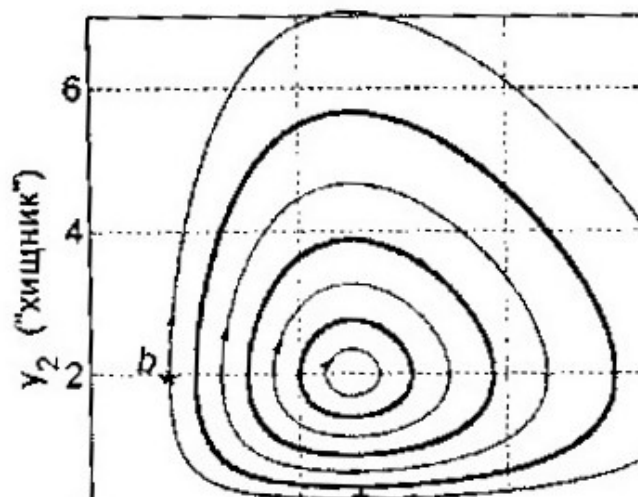
- при отсутствии хищников численность «жертв» растет экспоненциально;
- при отсутствии «жертв» численность хищников убывает экспоненциально;
- численность «съеденных» жертв пропорциональна числу хищников и числу жертв, т.е. величине $y_1 y_2$.

При этих предположениях динамика системы, как нетрудно видеть, описывается так называемой моделью Лотки-Вольтерра:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= ay_1 - by_1 y_2, \\ \dot{y}_2 &= cy_1 y_2 - dy_2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где a, b, c, d – положительные параметры. Если есть возможность изменять параметры, то они превращаются во входные переменные, например, когда изменяются коэффициенты рождаемости и смертности видов, коэффициенты размножения бактерий (при введении лекарств) и т.д.

Как видно из фазового портрета, в системе имеют место нелинейные колебания относительно некоторого состояния равновесия, амплитуда которых зависит от начальных условий. Часто эти кривые трактуются таким образом, что экологическая система имеет естественное состояние равновесия и уничтожение «хищников» (точка a на графике) приводит через некоторое к резкому уменьшению числа «жертв» (точка b). Если также учесть что уменьшение численности популяций может привести к ее полному исчезновению, то следует сделать вывод о необходимости соблюдать осторожность при воздействии на экологические системы.



Фазовый портрет системы «хищник – жертва».

4.2. Гармонический анализ процессов

При исследовании колебательных процессов часто применяются их энергетические характеристики, в первую очередь – мощность и энергия.

Мгновенная мощность $p(t)$ сигнала $y(t)$ определяется как квадрат его мгновенного значения: $p(t) \approx y(t)^2$. Энергия P сигнала на интервале $[t_1, t_2]$ находится как интеграл от мгновенной мощности $P = \int_{t_1}^{t_2} y(t)^2 dt$. Отношение

$\frac{P}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} y(t)^2 dt$ выражает среднюю (на интервале $[t_1, t_2]$) мощность сигнала. Обозначим ее через $\overline{y(t)^2}$. Получить представление об этих характеристиках процесса можно на основе преобразования Фурье. Рассмотрим этот метод более подробно.

Для периодических процессов $y(t)$ с периодом T можно записать ряд Фурье в виде

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \right), \quad (4.8)$$

где коэффициенты разложения находятся из формул

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos \left(k \frac{2\pi}{T} t \right) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin \left(k \frac{2\pi}{T} t \right) dt, \\ k = 1, 2, \dots$$

Совокупность величин $s_0 = |a_0|/2, s_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} (k = 1, 2, \dots)$ называется амплитудным частотным спектром периодической функции $y(t)$. Значения s_k представляют собой амплитуды гармоник с частотой $\omega_k = k\Omega, \Omega = 2\pi/T$ в разложении процесса в ряд (4.8). Они зависят от номера гармоники k и обычно графически представляются в виде отрезков высотой s_k , проведенных в точках ω_k оси частот (поэтому спектр периодической функции называют линейчатым, или дискретным). Он несет в себе информацию о частотных свойствах сигнала: если сигнал имеет выраженные колебания на некоторых частотах, то его спектр на этих частотах содержит пики.

Обобщением ряда Фурье на непериодические процессы является интеграл Фурье, при котором используется представление

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (V(\omega) \sin \omega t + U(\omega) \cos \omega t) d\omega \quad (4.9)$$

где

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cos(\omega t) dt, \quad V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \sin(\omega t) dt.$$

Аналогично вводится частотный спектр процесса $y(t)$ как $S(\omega) = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2}$. Это функция от непрерывного аргумента ω .

Поскольку при цифровом моделировании исходной является дискретная реализация процесса и нахождение интеграла выполняется конечным суммированием, то при числовом гармоническом анализе вместо непрерывного преобразования (4.9) выполняется дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Для этого исследуемый процесс $y(t)$ (длительностью T) заменяется выборочной дискретной функцией (т.е. последовательностью) $y[k] = y(t_k)$, где $t_k = kT_0$ ($k = 1, 2, \dots, N$), N – заданное число точек, $T_0 = T/N$ – шаг дискретности (квантования). Далее вычисляется функция

$$Y(k) = \sum_{n=1}^N y[n] \exp\left(-j2\pi(k-1)\frac{n-1}{N}\right), 1 \leq k \leq N, \quad (4.10)$$

(«изображение по Фурье»), имеющая комплексные значения. В пакете MATLAB дискретное преобразование Фурье выполняется процедурой **fft**. Для ускорения вычислений рекомендуется брать число точек $N = 2^v$, где v – некоторое натуральное число. В этом случае программой реализуется так называемое «быстрое преобразование Фурье» (БПФ). Обратный переход от изображения к исходной функции выполняется по формуле

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y(k) \exp\left(j2\pi(k-1)\frac{n-1}{N}\right), 1 \leq n \leq N. \quad (4.11)$$

Для вычисления спектральной плотности с помощью процедуры **fft** исходная реализация процесса разбивается на N точек, соответствующих равноотстоящим моментам времени с интервалом T_0 .

При выборе параметров вычисления спектра (длина реализации T , число точек N и связанный с ними интервал квантования T_0) следует учитывать, что диапазон существенных частот исследуемого процесса не должен выходить за частоту Найквиста $\omega_N = \pi/T_0$. Несоблюдение этого условия может привести к значительным ошибкам при определении характеристик

процесса. Данное требование вытекает из известной теоремы отсчетов Котельникова-Шеннона.

Поскольку рассматриваемый процесс $y(k)$ в общем случае не является периодическим с частотой $\Omega = 2\pi/T$, вычисление его спектра с помощью рассматриваемой процедуры является приближенным. Как видно из формулы (4.10), соседние точки по частоте отстоят на величину $\delta\omega = \frac{2\pi}{T_0 N}$.

Учитывая, что $N = T/T_0$, получим $\delta\omega = \frac{2\pi}{T}$. Таким образом, длительность исследуемой реализации должна быть достаточно большой для получения спектра с заданным шагом дискретности по частоте ($T \gg 1/\delta\omega$).

4.3. Модели состояния динамических систем

4.3.1 Модели общего вида

Важнейшую роль при описании динамических систем играет понятие состояния. Состояние – это совокупность величин (вектор) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, которые вместе с входным воздействием однозначно определяют будущее поведение системы. Например, для RC-цепочки переменная состояния есть E_1 , поскольку значения $E_1(t)$ и входного воздействия $E_0(s)$ при $s \leq t$ однозначно определяют (в силу (4.5)) значение $E_1(s)$ при $s = t$. Для модели динамики популяций (4.7) состоянием является вектор $x = (y_1 \ y_2)^T$.

В общем случае уравнения состояний – это системы дифференциальных или разностных уравнений первого порядка вместе с уравнениями для выходных величин. Начальное состояние представляет «память» системы о прошлом. Модель состояния непрерывной динамической системы записывается в виде.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \\ \dots \\ \dot{x}_n = F_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \\ y_1 = G_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \\ \dots \\ y_l = G_l(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \end{cases} \quad (4.12)$$

где u_1, \dots, u_m – входные переменные, y_1, \dots, y_l – выходные переменные, x_1, \dots, x_n – переменные состояния. Вводя векторные обозначения, можно записать (4.12) в более компактном виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u, t), \\ y &= G(x, u, t), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $u = (u_1, \dots, u_m)^T$, $y = (y_1, \dots, y_l)^T$. Для моделей состояния справедлив следующий факт: любая нелинейная динамическая система. может быть представлена как соединение линейных динамических и нелинейных статических звеньев. Доказательство очевидно из рис 4.2, где в качестве линейного звена взят интегратор.

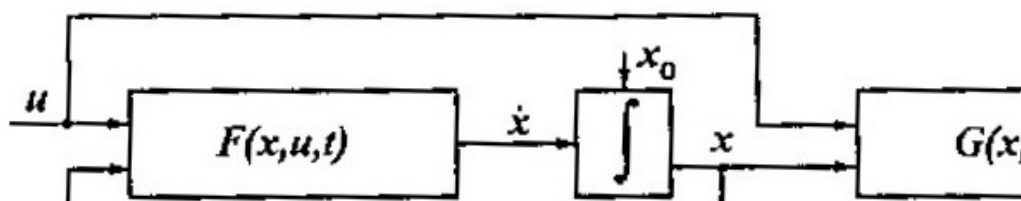


Рисунок 4.2 – Схема интегрирования нелинейных систем

Еще более общей формой описания динамических систем являются сингулярные дифференциальные (алгебро-дифференциальные) системы

$$\begin{aligned} \Phi(\dot{x}, x, u, t) &= 0, \\ G(x, y, u, t) &= 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

частным случаем которых являются неявные системы

$$\Phi(\dot{y}, y, u, t) = 0. \quad (4.15)$$

4.3.2. Линейные модели и линеаризация

Линеаризация является одним из простейших методов изучения нелинейных систем. Суть ее состоит в замене нелинейной системы на эквивалентную ей линейную. Линеаризованная модель не может полностью заменить нелинейную систему, но в некоторых отношениях ее поведение может быть (с определенным расхождением) идентичным поведению нелинейной системы. Поэтому существует возможность применить хорошо разработанные методы анализа линейных систем к линеаризованной модели, а полученные результаты интерпретировать для исходной нелинейной системы.

В технических науках, включая теорию управления, предполагается, что отклонения от некоторой рабочей точки малы, что позволяет нелинейные характеристики заменить эквивалентными линейными. В этом случае говорят о линеаризации вблизи рабочей точки, или о касательной аппроксимации. Линеаризованную модель далее исследуют при малых входных воздействиях.

Помимо касательной аппроксимации существуют и другие методы линеаризации, каждый из них для определенных задач обладает своими преимуществами. Например, метод гармонической линеаризации анализирует нелинейную систему не во временной области, а в частотной. Суть его в том, что рассматривается только основная составляющая выходного сигнала нелинейной системы, а высшие гармоники отбрасываются. Применение этого метода оправдано, когда нелинейная система имеет характеристику фильтра низких частот. Метод статистической линеаризации применяется во временной области. Эквивалентная линейная модель строится в предположении, что возмущения имеют гауссовское распределение. Существуют также комбинированные методы линеаризации.

В качестве примера далее рассмотрим только касательную аппроксимацию, причем когда коэффициенты линеаризованной модели получаются разложением в ряд.

В заключение приведем пример задачи, когда целесообразен переход от нелинейной модели к линеаризованной.

Пусть для некоторого объекта построена его математическая модель в виде системы НДУ, записанной в форме Коши:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ y(t) &= g(x(t), u(t)).\end{aligned}\tag{4.16}$$

В такой модели выделяют вектор состояния x , вектор входных воздействий u , вектор выходных (измеряемых, управляемых) координат y . Ясно, что на произвольном интервале времени T вид функций $x(t), y(t)$ будет зависеть от начальных условий и от вида функции на этом интервале. В таком случае задачей моделирования (или исследования) может быть построение функций $x(t), y(t)$ на интервале T , когда начальные условия и вид $u(t)$ на T заданы. Такая задача решается численным интегрированием системы НДУ, линеаризованная модель здесь является излишней.

Ясно, что вид $x(t), y(t)$ на интервале T будет зависеть от начальных условий и от вида $u(t)$ на T . Поэтому может быть поставлена следующая задача: выбрать такой вид $u_c(t)$, чтобы при заданных (или произвольных) начальных условиях и некотором (известном или неизвестном) виде $u_f(t)$ функция $x(t)$ (или $y(t)$) удовлетворяла бы на T заданным требованиям.

В этом случае целесообразно перейти к линейной модели, например, путем разложения в ряд Тейлора в окрестности статического режима. Переменные x, y, u_c, u_f заменяют их приращениями, а систему НДУ — системой ЛДУ с постоянными коэффициентами.

Если нелинейности в исходной системе НДУ достаточно гладкие, то нелинейный и линейный объекты имеют схожую динамику, что дает основание проводить исследования и синтез регуляторов для линейных систем и полученные результаты переносить на нелинейные, но уже с некоторой погрешностью. В большинстве случаев эта погрешность

оправдана широким набором готовых методов исследования линейных систем и синтеза линейных регуляторов.

В качестве примеров преимуществ линейных объектов перед нелинейными можно назвать следующие: выполнение принципа суперпозиции для входных воздействий; простота определения реакции линейной системы на типовые воздействия, что в совокупности с принципом суперпозиции позволяет использовать, например, методы спектрального анализа; наличие мощного математического аппарата для получения аналитических решений для линейных систем и др.

Вернемся к нелинейному объекту (4.16). Обозначив $z = (x, u)^T$, получим его запись в виде:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(z(t)), \\ y(t) &= g(z(t)).\end{aligned}\tag{4.17}$$

Левая часть первого уравнения (4.17) – функция $\dot{x}(t): R \rightarrow R^n$. Правая часть этого уравнения – сложная функция, т.е. композиция функций: $z(t): R \rightarrow R^{n+l}$ и $f(z(t)): R^{n+l} \rightarrow R^n$. Следует понимать, что функция $f(z)$ задана раз и навсегда, но вид функций $x(t)$ и $\dot{x}(t)$, удовлетворяющих уравнению на некотором интервале времени, зависит от значения $x(t_0)$ и вида $u(t)$ на этом интервале. Уравнение является дифференциальным и нелинейным, т.к. функция $f(z)$ в общем случае нелинейная. Аналогично рассматривается второе уравнение, но оно уже является алгебраическим и нелинейным.

Рассмотрим функцию $f(z): R^{n+l} \rightarrow R^n$. Предполагаем f непрерывной и дифференцируемой в некоторой области из R^{n+l} , содержащей любые допустимые значения вектора z . В этом случае можно построить ряд Тейлора функции f для любой точки z_0 из рассматриваемой области:

$$f(z) = f(z_0) + D_f(h) + o(h),$$

где вектор h вычисляется как $h = z - z_0$, а функция D_f есть линейная функция $D_f: R^{n+l} \rightarrow R^n$. Под $o(h)$ понимают некоторую функцию, значение которой на h пренебрежимо мало по сравнению со значением D_f на h . Смысл этого следующий: если требуется вычислить значение известной функции f в некоторой точке z , а ряд Тейлора задан, то с некоторой погрешностью значение $f(z)$ может быть вычислено как

$$f(z) \approx f(z_0) + D_f(h),$$

где z_0 известно, а $h = z - z_0$. При этом чем меньше значение (норма) h , тем качество приближения лучше. Отсюда следует выражение

$$f(z) - f(z_0) \approx D_f(h),$$

означающее, что изменение функции f относительно значения $f(z_0)$ при отклонении аргумента z от значения z_0 есть почти то же самое, что и значение функции D_f на $h = z - z_0$.

Линейная функция D_f называется дифференциалом функции f в точке z_0 . Функция D_f имеет вид:

$$D_f(h) = Jh,$$

где матрица J носит название матрицы Якоби функции f в точке z_0 .

Известно, что

$$J = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_{n+l}} \right|_{z=z_0} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial z_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial z_{n+l}} \right|_{z=z_0} \end{pmatrix}.$$

В другой точке будет другая матрица, т.е. другой дифференциал. Теперь рассмотрим, как вышесказанное применимо к построению линейного аналога нелинейного уравнения. Пусть статический режим задан, т.е. найдено такое значение вектора z , при котором $\dot{x}(t) = 0 \forall t$. Выбираем это значение z в качестве z_0 .

Строим ряд Тейлора функции $f(z)$ в точке z_0

$$f(z) = f(z_0) + J(z - z_0) + o(z - z_0)$$

и отбрасываем последнее слагаемое. Полученное соотношение следует понимать так: если значения функции $z(t)$ в любой момент времени t не очень сильно отличаются от фиксированного значения z_0 , то значение сложной функции $f(z(t))$ в этот момент времени может быть приближенно получено как сумма вектора z_0 и произведения матрицы J на значение функции $h(t) = z(t) - z_0$ в этот момент времени. При этом матрица J фиксирована, т.е. значение $f(z)$ зависит от значения z , но не связано с моментом времени, в который z имеет это значение.

Функция $h(t)$ суть вектор-функция отклонений значений $z(t)$ от значения z_0 : $h(t) = (\Delta x(t), \Delta u(t))^T$. Итак, имеем:

$$\dot{x}(t) = f(z) \approx f(z_0) + J(\Delta x(t), \Delta u(t))^T$$

Далее отметим, что $f(z_0) = 0$, а также что $x(t) = x_0 + \Delta x(t)$, т.е. $\dot{x}(t) = \Delta \dot{x}(t)$.

Следовательно,

$$\Delta \dot{x}(t) = J(\Delta x(t), \Delta u(t))^T. \quad (4.18)$$

Полученное выражение есть система линейных дифференциальных уравнений, причем неоднородных (т.к. $\Delta u(t) \neq 0$).

Матрицу Якоби J разбивают на две части $J = [A \mid B]$:

$$A = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial x_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial x_n} \right|_{z=z_0} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial x_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial x_n} \right|_{z=z_0} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial u_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial u_l} \right|_{z=z_0} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial u_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial u_l} \right|_{z=z_0} \end{pmatrix}$$

Эти матрицы называют матрицами состояния и входных воздействий соответственно. Причем, если входные воздействия разделены на

возмущающие и управляющие, то матрицу B также разбивают на матрицу возмущения B_1 и матрицу управления B_2 .

Для алгебраического уравнения поступают следующим образом: раскладывают $g(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0

$$g(z) = g(z_0) + J_1(z - z_0) + o(z - z_0)$$

и рассматривают только $\Delta y(z) = J_1(z - z_0)$, называемое приращением выходных координат. Последнее соотношение представляет собой систему линейных алгебраических уравнений.

В результате получили:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}(t) &= A \Delta x(t) + B u(t), \\ \Delta y(t) &= C \Delta x(t) + D u(t).\end{aligned}$$

Это и есть линеаризованный объект, то есть линейный аналог нелинейного объекта. Матрица C называется матрицей выхода, матрица D – матрицей обхода.

Часто вместо (4.16) используют упрощенные ММ, основанные на том, что процессы в системе протекают, мало отклоняясь от некоторой так называемой опорной траектории $\{\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{y}(t)\}$, удовлетворяющей уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= F(\bar{x}, \bar{u}), \\ \bar{y} &= G(\bar{x}, \bar{u}).\end{aligned}\tag{4.19}$$

Тогда можно записать приближенную линеаризованную модель в отклонениях от этого режима:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A(t)\tilde{x} + B(t)\tilde{u}, \\ \tilde{y} &= C(t)\tilde{x} + D(t)\tilde{u},\end{aligned}\tag{4.20}$$

где $\tilde{x} = x - \bar{x}, \tilde{u} = u - \bar{u}, \tilde{y} = y - \bar{y}$,

$$\begin{aligned}A(t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), B(t) = \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \\ C(t) &= \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), D(t) = \frac{\partial G}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)),\end{aligned}$$

Если расчетный режим является установившимся, т.е. не зависит от времени, то коэффициенты в (4.20) также не зависят от времени: $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$ и т.д. Такие системы называются стационарными. Особенно часто на практике встречаются стационарные линейные непрерывные системы, описываемые более простыми уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Матрицы A, B, C являются параметрами модели (4.21). Если линеаризация приводит к большим погрешностям, то стараются, по возможности, выбрать математическую модель, линейную по параметрам

$$\dot{x} = A\psi(x, u),$$

где A – матрица параметров порядка $n \times N$; $\psi(\cdot)$ – нелинейная вектор-функция. К этому классу относятся, в частности, билинейные объекты, например $\dot{x} = a_1x + a_2xu + a_3u$, где $A = [a_1, a_2, a_3]$; $\psi(x, u) = (x, xu, u)^T$.

Сказанное выше относится и к уравнениям дискретных по времени систем. Уравнения дискретной системы в общем случае имеют вид

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= F(x_k, u_k), \\ y_k &= G(x_k, u_k).\end{aligned}\tag{4.22}$$

Дискретным аналогом уравнений линейной стационарной системы (4.21) являются уравнения

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Px_k F + Qu_k, \\ y_k &= Rx_k.\end{aligned}\tag{4.23}$$

4.3.3 Дискретизация и континуализация

Дискретизация. Если исходное описание линейной системы непрерывно, можно перейти к дискретному описанию с помощью следующей процедуры.

Пусть состояние $x(t)$ системы (4.21) доступно измерению в дискретные моменты времени $t_k = kh$, $k = 0, 1, \dots$, где $h > 0$ – шаг дискретности. Пусть $u(t)$ постоянно на промежутках между моментами коррекции t_k . Тогда

динамику векторов $x_k = x(t_k)$ можно описать разностными уравнениями (3.23) в которых матрицы P и Q определяются соотношениями

$$\begin{aligned} P &= e^{Ah}, \\ Q &= A^{-1}(P - I_n)B. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Здесь e^{Ah} – экспоненциал матрицы A , определяемый формулой

$$e^{Ah} = I_n + Ah + \frac{1}{2}A^2h^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k A^k}{k!}. \quad (4.25)$$

Если предположение о кусочном постоянстве $u(t)$ не выполняется, то переход от (4.21) к (4.23) является приближенным, но его точность растет по мере уменьшения шага h , если скорость изменения входа (величина $\dot{u}(t)$) ограниченная. При достаточно малых h для вычисления e^{Ah} можно удерживать лишь первые несколько членов ряда (4.25) или аппроксимировать сумму (4.25) каким-либо способом.

Например, при переходе от (4.21) к (4.23) можно пользоваться формулой $e^{Ah} \approx I_n + Ah$, соответствующей численному интегрированию (4.21) методом Эйлера. При такой аппроксимации передаточные функции дискретной $W_d(z)$ и непрерывной $W_n(s)$ систем связаны соотношением

$$W_d(z) = W_n\left(\frac{1-z}{h}\right) \quad (4.26)$$

т.е. при переходе к дискретному времени в передаточной функции нужно

заменить s на $\frac{1-z^{-1}}{h}$. Целый ряд способов перехода от (4.21) к (4.24)

основан на аппроксимации матрицы e^{Ah} матричными дробями Паде (дробями, «числителем» и «знаменателем» которых являются матричные многочлены). Частными случаями этих способов является метод Тастина (формула Паде порядка (1,1)):

$$e^{Ah} \approx \left(I + \frac{Ah}{2}\right) \left(I - \frac{Ah}{2}\right)^{-1}, \quad (4.27)$$

приводящий к соотношению между передаточными функциями

$$W_d(z) = W_n \left(\frac{2}{h} \frac{1-z}{1+z} \right), \quad (4.28)$$

а также метод Дэвисона (формула Паде порядка (2,2)):

$$e^{Ah} \approx \left(I + \frac{Ah}{2} + \frac{A^2 h^2}{12} \right) \left(I - \frac{Ah}{2} - \frac{A^2 h^2}{12} \right)^{-1}. \quad (4.29)$$

Отметим, что формулы (4.27) и (4.29) дают устойчивые аппроксимации при $h > 0$ (разумеется, если A – гурвицева).

Заметим, что формула (4.24) для вычисления матрицы Q применима, если $\det A \neq 0$. Трудностей, связанных с вычислением Q при вырожденной матрице A , можно избежать, если при формальной подстановке выражения для $P = e^{Ah}$, полученного из аппроксимаций Тейлора или Паде в (4.24), произвести «сокращение» матрицы A . Тогда в выражение для Q матрица A^{-1} входить не будет. Например, аппроксимация по методу Эйлера $P = I + Ah$ приводит к формуле $Q = h \cdot B$.

Если непрерывная система нелинейная, то для перехода к ее дискретному описанию также можно использовать методы численного интегрирования. Например, метод Эйлера дает для системы (4.16) дискретное описание:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + hF(x_k, u_k, t_k), \\ y_k &= G(x_k, u_k, t_k). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Континуализация – это переход от дискретной математической модели системы к непрерывной. Если дискретная модель системы имеет вид (4.23), то перейти к непрерывной модели (4.21) можно по формулам

$$A = \frac{1}{h} \ln P, \quad B = \frac{1}{h} \ln P (P - I)^{-1} Q, \quad (4.31)$$

вытекающим из (4.24), где $\ln P$ – логарифм матрицы, функция, обратная к экспоненциальной и также определяемая через ряд

$$\ln(I + X) = X - \frac{X^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n, \quad (4.32)$$

сходящийся при $\|X\| < 1$ (здесь $X = P - I$). С точностью до величин порядка h^2 можно ограничиться формулами

$$A = \frac{1}{h}(P - I), B = \frac{1}{h}Q,$$

соответствующими методу Эйлера. Однако удобнее всего переходить от дискретной передаточной функции к непрерывной по формулам (4.26) и (4.28). Например, по методу Эйлера (4.26) достаточно заменить в передаточной функции $W_d(z^{-1})$ переменную z^{-1} на $1 - hp$.

4.3.4. Редукция моделей

При исследовании линейных систем получили распространение также методы упрощения описаний систем путем редукции (понижение порядка).

Возможность редукции математической модели можно определять по собственным числам матрицы состояния линейной или линеаризованной системы. Вещественные части собственных значений характеризуют скорость затухания переходных процессов. Если одно из собственных чисел минимум на порядок больше остальных, соответствующий ему переходный процесс закончится быстро и не окажет существенного влияния на переходный процесс модели в целом. В этом случае можно уменьшить порядок системы. Применительно к таким системам можно говорить о принципе подчинения.

В качестве примера можно рассмотреть нелинейную систему 2-го порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \lambda_1 x_1 - x_1 x_2, \\ \dot{x}_2(t) &= -\lambda_2 x_2 + x_1^2,\end{aligned}$$

где коэффициент $\lambda_1 \geq 0$ и мал, а коэффициент $\lambda_2 \gg \lambda_1$

Если переменные x_1 и x_2 малы, то x_1 будет изменяться очень медленно. Поскольку $\lambda_2 \gg \lambda_1$, производной $\dot{x}_2(t)$ можно пренебречь в сравнении с величиной $\lambda_2 x_2$. Тогда исходную систему можно привести к виду

$$\dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1 - \frac{x_1^3}{\lambda_2}$$

где осуществлено алгебраическое исключение переменной x_2 . Поведение системы в основном определяется динамикой медленной подсистемы, которая как бы «управляет» быстрой подсистемой. При этом x_2 как бы подчинена x_1 . Медленная переменная x_1 в этом случае называется параметром порядка. В многомерных системах параметру порядка может быть подчинено весьма большое число других переменных. В общем случае параметров порядка может быть несколько, но часто это небольшое число, существенно меньшее размерности исходной системы.