

$n = 10$ по (5.9) получается всего в 2.7 раза меньше, чем по (5.10), причем она верна лишь в 95% случаев и при труднопроверяемых предположениях.

5.3 Хаотические модели

5.3.1 От колебаний — к хаосу

Сравнительно недавно, в 70–х годах XX века, в науку о математических моделях вошло новое понятие, перевернувшее многие привычные представления, - понятие хаоса (точнее, детерминированного хаоса). Хаотические системы предоставили исследователям новый класс моделей неопределенности, отличающихся по своим свойствам как от стохастических, так и от нечетких моделей. Если в детерминированной модели будущую траекторию можно предсказать на сколь угодно большое время вперед, зная текущее состояние системы, а в стохастической модели точный прогноз, вообще говоря, невозможен даже на сколь угодно малое время, то в хаотической модели ошибка прогноза растет экспоненциально и, следовательно, возможен прогноз на ограниченное время вперед, определяемое допустимой ошибкой прогноза. Процессы в хаотических моделях имеют вид нерегулярных колебаний, в которых меняется, «плавает», как частота, так и амплитуда.

Колебательные процессы часто встречаются в природе и технике, поэтому формы их описания непрерывно развиваются и совершенствуются. В течение многих лет, до начала XX в. основным видом математических моделей колебаний в механических, электрических и других системах считались дифференциальные уравнения, например

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0, 0 \leq t \leq \infty. \quad (5.11)$$

Решениями (5.11) являются гармонические колебания

$$y(t) = A_0 \sin \omega t + A_1 \cos \omega t, \quad (5.12)$$

с круговой частотой ω и периодом $T = 2\pi/\omega$, амплитуда которых $A = \sqrt{A_0^2 + A_1^2}$ зависит от начальных условий: $A_1 = y(0), A_0 = \dot{y}(0)/\omega$ (рис. 5.2, а, для $\omega = 1$).

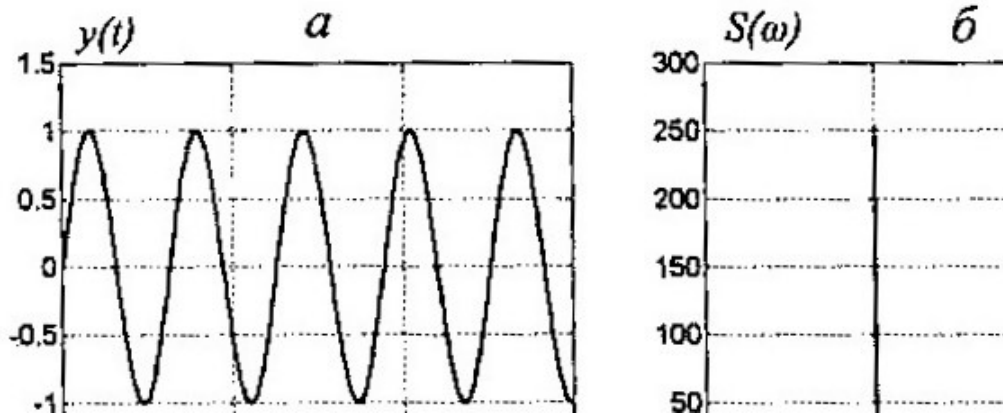


Рисунок 5.2 – Гармонические колебания

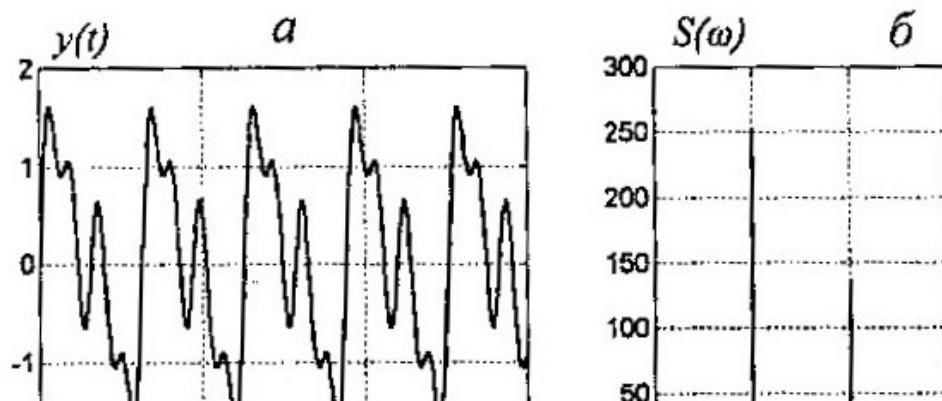


Рисунок 5.3 – Периодические колебания

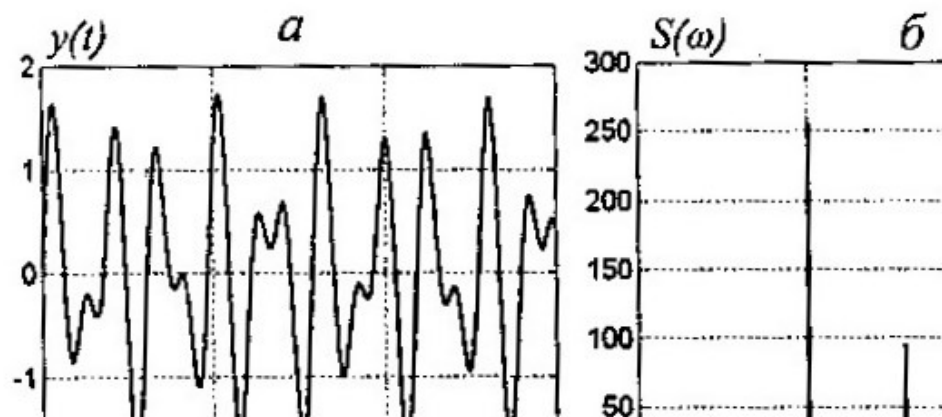


Рисунок 5.4 – Квазипериодические колебания

Очевидно, решение (5.12) непрерывно зависит от начальных условий, т.е. малое изменение величин $y(0), \dot{y}(0)$ приводит к равномерно малому

изменению решения $y(t)$ на всей временной полуоси $0 \leq t \leq \infty$. Частотный спектр функции (5.12) дискретен и состоит из одной точки $\omega/2\pi$ (рис. 5.2, б).

Для описания колебаний более сложной формы можно соединять модели вида (5.11) с различными частотами колебаний $\omega_1, \dots, \omega_r$. Например, последовательное соединение двух моделей вида (5.11) описывается соотношениями

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) &= 0, \\ \ddot{y}_2(t) + \omega_2^2 y_2(t) &= y_1(t),\end{aligned}$$

и имеет частные решения вида $y_2(t) = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$, где коэффициенты A_1, A_2 зависят от начальных условий. Если частоты $\omega_1, \dots, \omega_r$ соизмеримы (являются целыми кратными некоторой частоты ω_0), то колебания будут периодическими с периодом $2\pi/\omega$ (рис. 5.3 для $r=3$, $\omega_1=1$, $\omega_2=2$, $\omega_3=4$). Если же частоты ω_i несоизмеримы, то такие колебания не являются периодическими; они относятся к классу квазипериодических (рис. 5.4, где $r=2$, $\omega_1=1$, $\omega_2=5/\pi$). В обоих случаях решение непрерывно зависит от начальных условий, а его спектр является дискретным конечным множеством.

Заметим, что «на глаз» различить периодические и квазипериодические колебания может быть затруднительно, поскольку реальные измерения (в том числе измерение частоты колебаний) выполняются с конечной точностью и отличить рациональное отношение частот от иррационального оказывается практически невозможным.

На рубеже XIX-XX веков выяснилось, что линейных моделей колебаний недостаточно для описания новых явлений и процессов в физике и технике. Важнейшим в теории нелинейных колебаний является понятие устойчивого предельного цикла – периодической траектории, к которой сходятся все другие траектории (но крайней мере, траектории с близкими начальными условиями).

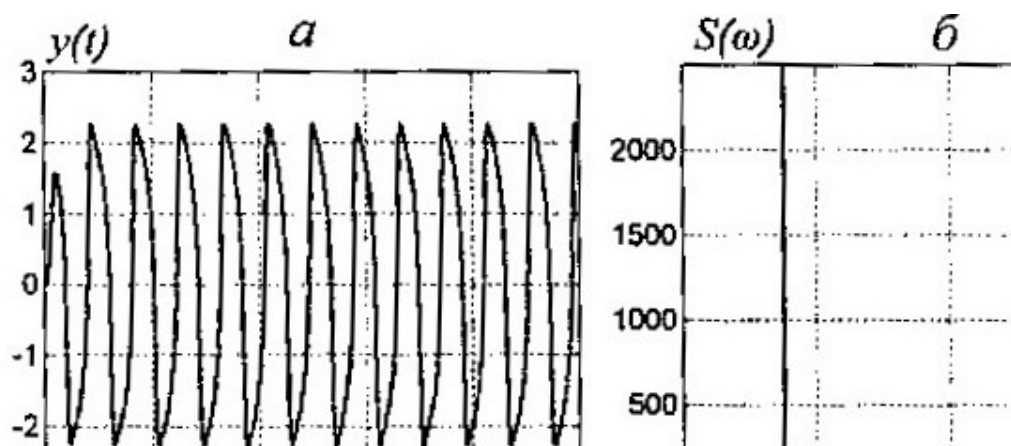


Рисунок 5.5 – Предельный цикл и его спектр

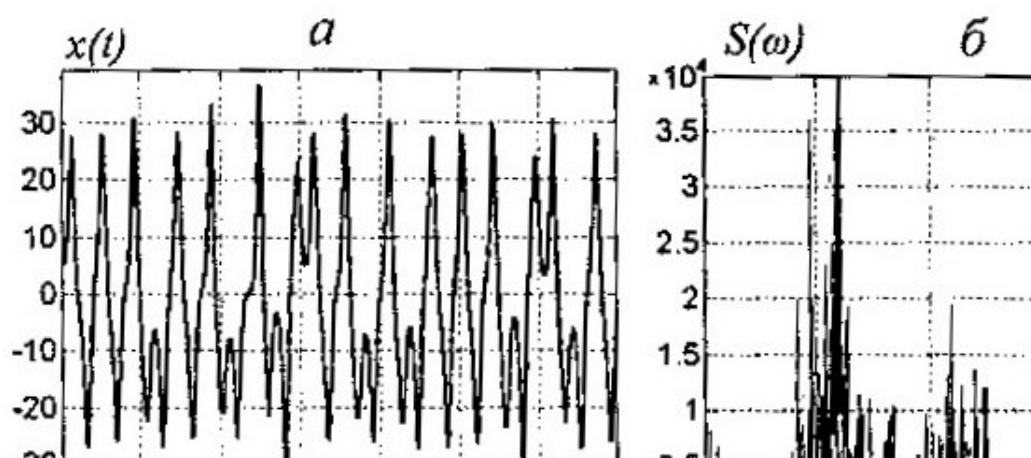


Рисунок 5.6 – Хаотический процесс в системе Лоренца и его спектр

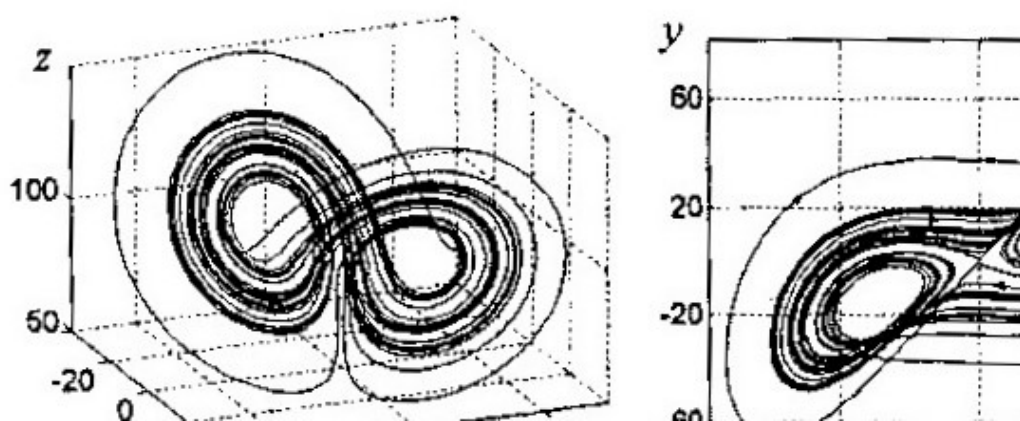


Рисунок 5.7 – Хаотический аттрактор в системе Лоренца

К числу классических примеров нелинейных дифференциальных моделей, обладающих предельным циклом, относятся уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{y} + \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (5.13)$$

где $\varepsilon > 0$; уравнение Дуффинга

$$\ddot{y} + p\dot{y} - qy + q_0y^3 = 0 \quad (5.14)$$

где $p > 0$, $q > 0$, $q_0 > 0$; система с релейным элементом

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy - \text{sign}(y) = 0. \quad (5.15)$$

Даже простые нелинейные модели позволяют описывать колебания сложной формы, например релаксационные (близкие к прямоугольным) колебания, учитывать изменение формы колебания в зависимости от начальных условий (системы с несколькими предельными циклами) и т.д. Теоремы о разложении периодической функции в ряд Фурье показывают, что спектр предельного цикла состоит из счетного набора частот, кратных некоторой основной частоте. На рис. 5.5, а приведен график решения системы (5.13) при $\varepsilon = 2.5$, $\omega = 1$ и начальных условиях $y(0) = 0.5$, $\dot{y}(0) = 0$. Соответствующий спектр изображен на рис. 5.5, б.

В течение нескольких десятилетий линейные модели колебаний и нелинейные модели с предельными циклами удовлетворяли потребности инженеров. Считалось, что они описывают все возможные типы колебаний детерминированных систем. Однако в середине XX века сами математики обнаружили, что уже для систем третьего порядка это не так: в системе становятся возможными весьма сложные движения — ограниченные непериодические колебания. Настоящий переворот начался с работы физика Е. Лоренца, опубликованной в 1963 г., где было показано, что качественный характер явлений атмосферной турбулентности, описываемых сложными уравнениями в частных производных Навье-Стокса, может быть передан простой нелинейной моделью третьего порядка (уравнение Лоренца):

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \quad (5.16)$$

Решения системы (5.16) при некоторых значениях параметров (например, при $\sigma = 10$, $r = 97$, $b = 8/3$ выглядят как нерегулярные колебания

(рис. 5.6, а, где изображен график $x(t)$). Траектории в пространстве состояний (фазовом пространстве) могут приближаться к предельному множеству (аттрактору), имеющему весьма причудливое строение (рис. 5.7, а). Внимание многих физиков и математиков, а затем и инженеров к подобным моделям было привлечено после работы Д. Рюэля и Ф. Такенса, опубликованной в 1971 г., которые называли такие аттракторы «странными», а также работы Т. Ли и Дж. Йорке (1975), которые ввели термин «хаос» для обозначения подобных нерегулярных явлений в детерминированных системах. Разработанные новые методы аналитического и численного исследования систем показали, что хаос – это отнюдь не исключительный вид поведения нелинейной системы. Грубо говоря, хаотические движения возникают, когда траектории системы глобально ограничены и локально неустойчивы. В хаотической системе сколь угодно малое начальное расхождение траекторий не остается малым, а в течение некоторого времени растет экспоненциально. Частотный спектр хаотической траектории является непрерывным (рис. 5.6, б, где изображен спектр функции $x(t)$). Во многих случаях подобные нерегулярные, непериодические колебания лучше отражают свойства процессов, протекающих в реальных системах. Опять-таки следует отметить, что «на глаз» отличить хаотический процесс от квазипериодического может быть не менее трудно, чем отличить квазипериодический процесс от периодического.