$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

путем обратной подстановки

$$x_n = \frac{1}{u_{nn}} y_n ,$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1,n-1}} \left(y_{n-1} - u_{n-1,n} x_n \right),$$

$$\dots$$

$$x_1 = \frac{1}{u_{11}} \left(y_1 - \sum_{j=2}^{n} u_{1j} x_j \right).$$

или, в общем виде:

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left(y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j \right), \ k = n, n-1, \dots, 1 .$$

Таким образом, применение LU-факторизации сводит решение исходной СЛАУ к последовательному решению двух СЛАУ с треугольными матрицами. Если требуется решить несколько СЛАУ о одной и той же матрицей A и различными правыми частями

$$Ax_i = b_i ; \, x_i , b_i \in R^n , \qquad i = 1, \dots , n,$$

то предварительная LU-факторизация матрицы системы A позволяет существенно сократить трудоемкость решения n систем, сводя задачу к решению $2n$ СЛАУ с треугольными матрицами

$$Ly_i = b_i ,$$

$$Ux_i = y_i .$$

Вычисление определителя и обратной матрицы

Определитель матрицы A является побочным продуктом

LU-факторизации матрицы A, действительно:

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U).$$

Второе равенство получено на основании того, что определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей.

Вычислим определитель каждого из сомножителей. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\det\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn},$$

следовательно

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} u_{ii} .$$

В MATLAB реализована функция вычисления определителя матрицы

D = det(A).

Перейдем к рассмотрению вопроса о вычислений обратной матрицы. По определению обратная матрица X удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению

$$AX = I$$

Представим матрицы X и I в виде наборов их столбцов

$$X = (x_1 \,|\, x_2 \,|\, \ldots \,|\, x_n); \quad x_i \in R^n;$$

$$I = (e_1 \,|\, e_2 \,|\, \ldots \,|\, e_n); \quad e_i \in R^n;$$

где e_i – вектор, который имеет все нулевые элементы за исключением i-ого, равного 1. Тогда матричное уравнение для обратной матрицы можно переписать в виде

$$A(x_1 \,|\, x_2 \,|\, \ldots \,|\, x_n) = (e_1 \,|\, e_2 \,|\, \ldots \,|\, e_n),$$

то есть представляет собой n СЛАУ вида

$$Ax_i = e_i, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Таким образом, для вычисления обратной матрицы необходимо решить n СЛАУ и составить из полученных решений матрицу. Учитывая, что все n СЛАУ имеют одинаковую матрицу А, целесообразно произвести ее LU-факторизацию и свести задачу вычисления обратной матрицы к решению $2n$ СЛАУ с треугольными матрицами

$$Ly_i = e_i,$$
$$Ux_i = y_i, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Обусловленность СЛАУ. Анализ ошибок решения СЛАУ

Определение: СЛАУ плохо обусловлена, если малые изменения элементов матрицы A или вектора b приводят к большим изменениям в решении.

Рассмотрим пример плохо обусловленной СЛАУ:

$$0{,}8x_1 + 0{,}4x_2 = 1,$$
$$0{,}79x_1 + 0{,}41x_2 = \varepsilon.$$

Решения этой системы x_0 для $\varepsilon = 0$ и x_ε для малого значения ε будут сильно отличаться. Это связано с тем, что на плоскости x_1x_2 уравнения системы задают “почти” параллельные прямые 1 и 2 (рис. 2.1). Следовательно, уравнения являются “почти” линейнозависимыми, и при их малом изменении относительно друг друга точка пересечения прямых будет значительно меняться.