ЛЕКЦИЯ 5. СТОХАСТИЧЕСКИЕ, НЕЧЕТКИЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

5.1 Детерминированные и стохастические модели

Модели систем, о которых мы говорили до сих пор, были детерминированными (определенными), т.е. задание входного воздействия определяло выход системы однозначно. Однако на практике так бывает редко: описанию реальных систем обычно присуща неопределенность. Например, для статической модели неопределенность можно учесть, записывал вместо (4.1) соотношение

$$y(t) = F(u(t)) + \varphi(t), \tag{5.1}$$

где $\varphi(t)$ - погрешность, приведенная к выходу системы. Причины неопределенности разнообразны:

– погрешности и помехи измерений входов и выходов системы (естественные погрешности);

– неточность самой модели системы, учитываемая путем искусственного введения в модель погрешности;

– неполнота информации о параметрах системы и т.д.

Среди различных способов уточнения и формализации неопределенности наибольшее распространение получил стохастический (вероятностный) подход, при котором неопределенные величины считаются случайными. Развитый понятийный и вычислительный аппараты теории вероятностей и математической статистики позволяют дать конкретные рекомендации по выбору структуры системы и оценке ее параметров. Классификация стохастических моделей систем и методов их исследования представлена в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Стохастические модели систем

	Статические	
	Дискретные по *U, Y*	Непрерывные по *U, Y*
Математический аппарат описания	Схема независимых испытаний	Регрессионные модели
Методы оценки параметров и анализа	Статистические оценки вероятности, дисперсионный анализ	Регрессионный анализ
Методы синтеза	Стохастическое программирование	Планирование эксперимента, стохастическое программирование
Области применения	Задачи выбора из конечного числа вариантов (испытания, управление)	Обработка результатов измерений и испытаний
	Динамические, дискретные по *T*	
	Дискретные по *U, Y*	Непрерывные по *U, Y*
Математический аппарат описания	Марковские цепи, стохастические автоматы	Стохастические разностные уравнения
Методы оценки параметров и анализа	Стохастическое моделирование, оценка переходных вероятностей	Статистическое оценивание состояний и параметров, анализ стохастической устойчивости
Методы синтеза	Динамическое программирование	Динамическое программирование
Области применения	Компьютеры	Импульсные и цифровые САУ
	Динамические, непрерывные по *T*	
	Дискретные по *U, Y*	Непрерывные по *U, Y*
Математический аппарат описания	Системы массового обслуживания, полумарковские процессы	Стохастические дифференциальные уравнения
Методы оценки параметров и анализа	Теория массового обслуживания, имитационное моделирование	Теория устойчивости
Методы синтеза	Перебор, методы оптимального управления	Оптимальное и адаптивное управление
Области применения	Системы обслуживания (вычислительные, производственные)	САУ, механические, тепловые, электронные и другие процессы

Выводы и рекомендации основаны на эффекте усреднения: случайные отклонения результатов измерения некоторой величины от ее ожидаемого значения при суммировании взаимно уничтожаются и среднее арифметическое большого числа измерений оказывается близким к ожидаемому значению. Математические формулировки этого эффекта даются законом больших чисел и центральной предельной теоремой. Закон больших чисел гласит, что если $\xi_1, \cdots \xi_N$ – случайные величины с математическим ожиданием (среднее значение) $M\xi_i = a$ и дисперсией $M(\xi_1 - a)^2 = \sigma^2$, то

$$\frac{1}{N}(\xi_1 + \ldots + \xi_N) - a \approx 0, \tag{5.2}$$

при достаточно больших N. Это говорит о принципиальной возможности сколь угодно точной оценки $M\xi_i$ по измерениям.

Центральная предельная теорема, уточняя (5.2), утверждает, что

$$\frac{1}{N}(\xi_1 + \ldots + \xi_N) - a \approx \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\xi, \tag{5.3}$$

где ξ – стандартная ($M\xi = 0,\ M\xi^2 = 1$) нормально распределенная случайная величина.

Функция распределения нормальной случайной величины ξ хорошо известна и детально затабулирована. Имеются в книгах по статистике и таблицы функций распределения других часто встречающихся случайных величин, например стьюдентовой. Однако нет необходимости добывать статистические таблицы, если под рукой есть компьютер с установленной системой MATLAB. В составе тулбокса STATISTICS есть модули, вычисляющие функции распределения и другие характеристики более двадцати распространенных типов случайных величин. Проиллюстрируем применение MATLAB на простой статистической задаче.

Формулировкам (5.2), (5.3) можно придать более строгий вид и это легко достижимо с помощью понятий вероятностной сходимости. Однако при попытке проверить условия этих строгих утверждений могут возникнуть трудности. В частности, в законе больших чисел и центральной предельной теореме требуется независимость отдельных измерений (реализаций) случайной величины и конечность ее дисперсии. Если эти условия нарушаются, то могут нарушаться и выводы. Например, если все измерения совпадают: $\xi_1 = \ldots = \xi_N$, то, хотя все остальные условия выполняются, об усреднении не может быть и речи. Другой пример: закон больших чисел несправедлив, если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_N$ распределены по закону Коши (с плотностью распределения $p(x) = 1/\pi(1 + x^2)$), не обладающему конечным математическим ожиданием и дисперсией. А ведь такой закон встречается в жизни! Например, по Коши распределена интегральная освещенность точек прямолинейного берега равномерно вращающимся прожектором, находящимся в море (на корабле) и включающимся в случайные моменты времени.

Но еще большие трудности вызывает проверка обоснованности самого употребления термина «случайный». Что такое случайная величина, случайное событие и т.д.? Часто говорят, что событие A случайно, если в результате эксперимента оно может наступить (с вероятностью p) или не наступить (с вероятностью $1 - p$). Все, однако, не так просто. Сама вероятность события может быть связана с результатами экспериментов лишь через частоту наступления события в некотором ряде (серии) экспериментов: $\nu_N = N_A / N$, где N_A – число экспериментов, в которых событие наступило; N – общее число экспериментов. Если числа ν_N при достаточно большом N приближаются к некоторому постоянному числу p_A:

$$\nu_N \approx p_A, \tag{5.4}$$

то событие A можно назвать случайным, а число p_A – его вероятностью. При этом частоты, наблюдавшиеся в различных сериях экспериментов, должны быть близки между собой (это свойство называется статистической устойчивостью, или однородностью). Сказанное относится и к понятию случайной величины, поскольку величина ξ является случайной, если случайными являются события $\{a < \xi < b\}$ для любых чисел a, b. Частоты наступления таких событий в длинных сериях экспериментов должны группироваться около некоторых постоянных значений.

Итак, для применимости стохастического подхода должны выполняться следующие требования:

1) массовость проводимых экспериментов, т.е. достаточно большое их число;

2) повторяемость условий экспериментов, оправдывающая сравнение результатов различных экспериментов;

3) статистическая устойчивость.

Стохастический подход заведомо нельзя применять к единичным экспериментам: бессмысленны выражения типа "Вероятность того, что завтра будет дождь", "с вероятностью 0.8 «Зенит» выиграет кубок" и т.п. Но даже если массовость и повторяемость экспериментов имеются, статистической устойчивости может и не быть, а проверить это - непростое дело. Известные оценки допустимого отклонения частоты от вероятности основаны на центральной предельной теореме или неравенстве Чебышева и требуют дополнительных гипотез о независимости или слабой зависимости измерений.

Опытная же проверка условия независимости еще сложнее, так как требует дополнительных экспериментов.

Как же построить модель системы, если неопределенность в задаче есть, но стохастический подход неприменим? Далее кратко излагается один из альтернативных подходов, основанный на теории нечетких множеств.

5.2 Нечеткие модели

5.2.1. Нечеткие множества и лингвистические переменные

В 1965 г. американский математик П. Заде опубликовал статью под названием "Fuzzy sets", что можно перевести как «нечеткие множества». В статье было дано новое определение понятия множества, предназначенное для описания и исследования сложных, «плохо определенных» систем. К ним, в частности, относятся гуманистические системы, на поведение которых существенное влияние оказывают знания, суждения и эмоции человека. В таких системах наряду со строгими, объективными, количественными данными и результатами присутствуют неоднозначные, субъективные, качественные данные и результаты, что требует новых подходов.