ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Лабораторная работа №3

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Цель работы – ознакомиться с методом синтеза модального управления, освоить процедуру оптимизации для выбора стандартных полиномов

Основные положения

Рассмотрим динамическую систему со скалярным управлением, заданную матричным уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), x \in R^n, u \in R^1 \qquad (3.1)$$

где A, B – матрицы с постоянными коэффициентами.

Данная система должна обладать свойством управляемости, т. е. способностью к изменению своего состояния $x(t)$ из любого начального положения в любое конечное положение за ограниченное время. Определение функции $u(t)$, которая осуществляет это изменение, в широком смысле и является *задачей управления*.

Модальное управление имеет своей целью определение таких параметров K регулятора $u(t) = Kx(t)$, которые обеспечивают заданные значения корней характеристического полинома замкнутой системы управления. Из теории управления известно, что корни характеристического полинома в значительной степени определяют характер переходных процессов и показатели качества динамики в системе. Поэтому принципиальным вопросом является выбор состава желаемых корней характеристического полинома.

В общем случае выбор корней может быть произвольным. Однако, исходя из практики применения модального управления, были выбраны так называемые стандартные полиномы, распределение корней в которых удовлетворяет инженерным требованиям качества переходных процессов (полиномы Ньютона, Баттерворта и т.п.).

Общий вид стандартных полиномов:

$$A_n(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \omega_0^{\,n-i} \cdot s^i , \qquad (3.2)$$

где ω_0 – базовая частота. Коэффициенты некоторых стандартных полиномов можно найти ниже, в таблице 3.2.

Особенностью подхода к проектированию систем управления на основе стандартных полиномов является то, что эти полиномы определены с точностью до базовой частоты, т. е. до масштабного коэффициента, характеризующего время протекания переходных процессов. Таким образом, для решения задачи модального управления необходимо не только выбрать желаемый характер переходных процессов (выбрать тип стандартного полинома), но и определить целесообразное значение базовой частоты для выбранного полинома.

Таким образом, хотя модальное управление по сути своей не является оптимальным, базовую частоту можно определить с помощью процедуры оптимизации, выбрав некоторый показатель качества динамики в качестве основного, и определив для него некоторую целевую функцию. Логично таким показателем выбрать время переходного процесса.

Опора на время переходного процесса вполне конструктивна для реальных объектов управления, т.к. физически реализуемые объекты всегда содержат ограничения на максимальные значения параметров движения (скоростей, ускорений, сил, …) и, следовательно, их динамика существенно зависит от масштаба времени.

С другой стороны, важно помнить, что для реальных систем характерна ограниченная мощность средств управления, поэтому задача оптимизации по времени переходного процесса становится разрешимой.

Для уточнения процедуры решения задачи модального управления рассмотрим следующий пример. Задан объект управления:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = x_2 \\
&\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + 2x_3 \\
&\frac{dx_3}{dt} = -x_3 + u \\
&|u| \le u_{max} = 1 \\
&x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Для заданного объекта управления требуется определить базовую частоту стандартного полинома Ньютона, обеспечивающую минимум времени переходного процесса, переводящего объект в точку $x_1(\infty) = 0,\quad x_2(\infty) = 0,\ x_3(\infty) = 0$. Закон управления имеет вид:

$$u = K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 \tag{3.4}$$

На первом этапе решения задачи определяем характеристический полином замкнутой системы, которая получается при использовании заданного закона управления объектом:

Динамика замкнутой системы без учета ограничения на величину управления описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + 2x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_3 + K_1x_1 + K_2x_2 + K_3x_3$$

Характеристический полином замкнутой системы:

$$D(s) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & -2 \\ -K_1 & -K_2 & s+1-K_3 \end{vmatrix} =$$

$$\left(s^2 + 2s\right)\left(s + 1 - K_3\right) - 2K_1 - 2sK_2 = s^3 + \left(3 - K_3\right)s^2 + \left(2 - 2K_2 - 2K_3\right)s - 2K_1$$

Характеристический полином должен совпадать со стандартным полиномом Ньютона 3 порядка

$$A_3(s) = \omega_0^3 + 3\omega_0^2 s^1 + 3\omega_0^1 s^2 + s^3 .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов обратной связи:

$$3 - K_3 = 3\omega_0$$

$$2 - 2K_2 - 2K_3 = 3\omega_0^2$$

$$-2K_1 = \omega_0^3$$

Преобразуем уравнения к матричной форме

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\omega_0 - 3 \\ 3\omega_0^2 - 2 \\ \omega_0^3 \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

На втором этапе требуется найти такое значение базовой частоты, которому соответствует минимальное значение времени переходного процесса в замкнутой системе управления, состоящей из объекта управления (3.3), управляемого по закону (3.4), параметры которого находятся из решения системы уравнений (3.5).

Рассмотрим определение необходимого значения базовой частоты методом ручного поиска. Для этого первоначально создадим MATLAB – программу, которая позволяет рассчитать время переходного процесса, соответствующего произвольно заданному значению базовой частоты.

Примечание: время переходного процесса, в принципе, можно выбирать по-разному. В данном примере будем считать время, после которого ненулевая в начальный момент величина $x_1(t)$ *перестает выходить за пределы 5% от величины начального отклонения.*

Программа включает один скрипт и функцию:

%%Скрипт main3.m

```
% вектор коэффициентов обратной связи K объявлен
% глобальным для возможности передачи его в функцию
% odefun3
global K
umax=1;
om0=6; %исследуемое значение базовой частоты
x10=1; %начальное отклонение по x1
%матрицы системы уравнений (3.5)
A=[0 0 -1; 0 -2 -2; -2 0 0];
b=[3*om0-3;3*om0^2-2;om0^3];
%решение системы уравнений (3.5)
K=A\b;
%решение системы уравнений (3.3)
 [t,x]=ode45('odefun',[0 10],[x10; 0; 0]);
%вычисление времени переходного процесса tm
for i=length(t):-1:1
    if abs(x(i,1))>0.05*x10
        tm=t(i);
        break
    end
end
% отображение вычисленного значения времени
% переходного процесса в окне команд MATLAB
disp(tm)
plot(t,x);
```

%%Файл odefun3.m

```
function f=odefun3(t,x)
% вспомогательная функция для вычисления
% правой части системы дифф. уравнений (3.3)
global K
%вычисление значения управляющего воздействия
%в соответствии с законом управления
u=-K(1)*x(1)-K(2)*x(2)-K(3)*x(3);
%учет ограничения на управляющее воздействие
u = (u>1)-(u<-1) + u*(abs(u)<=1);
% расчет вектора-столбца значений правых частей (3.3)
f=[x(2);-2*x(2)+2*x(3);-x(3)+u];
```

Очевидно, что однократное выполнение скрипта main3.m позволяет вычислить время переходного процесса в исследуемой замкнутой системе, соответствующего заданному значению базовой частоты полинома Ньютона $(\omega_0 = 6)$. Выполнение серии расчетов для разных значений базовой частоты позволяет выполнить поиск базовой частоты, обеспечивающей минимальное время переходного процесса.

Организацию автоматического поиска базовой частоты с помощью функции FMINSEARCH предлагается выполнить самостоятельно. Для этого целесообразно преобразовать скрипт main3.m в файл-функцию, у которой входным параметром является значение базовой частоты, а выходным – значение времени переходного процесса. Для запуска процесса поиска достаточно задать начальное значение базовой частоты и вызвать функцию FMINSEARCH, которая ссылается на разработанную ранее файл-функцию.

Содержание работы

1. Получить аналитические выражения для матрицы коэффициентов обратной связи в соответствии с заданным динамическим объектом (таблица 3.1) и типом характеристического полинома (таблица 3.2).

2. Написать программу расчета базовой частоты стандартного полинома, обеспечивающей минимальное время переходного процесса при заданных ограничениях на управление и начальному условию $x(0)$=[1;0;0].

3. Привести результаты: значения базовой частоты, закон управления, графики переходных процессов.

Индивидуальные задания

Таблица 3.1 Исходные данные

Вариант	Матрицы объекта управления	Ограничение u_{max}	Тип ст. полинома	Вариант	Матрицы объекта управления	Ограничение u_{max}	Тип ст. полинома
1	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	1.5	1	13	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	0.6	1
2	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	0.8	2	14	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	1.5	2
3	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	1.2	3	15	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	1.6	3
4	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	1.6	4	16	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$	1.2	4
5	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$	0.5	1	17	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$	1.4	1
6	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$	1.4	2	18	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$	0.5	2

Вариант	Матрицы объекта управления	Ограничение u_{max}	Тип ст. полинома	Вариант	Матрицы объекта управления	Ограничение u_{max}	Тип ст. полинома
7	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$	0.8	3	19	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$	1.1	3
8	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}$	1.1	4	20	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}$	0.8	4
9	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$	0.6	1	21	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$	1.2	1
10	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$	1.2	2	22	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$	0.6	2
11	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}$	0.7	3	23	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}$	1.4	3
12	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$	1.4	4	24	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$	0.7	4

Таблица 3.2 Коэффициенты стандартных полиномов

1. Биноминальные полиномы (Полиномы Ньютона) $A_n(s) = (s + \omega_0)^n$

n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

2. Полиномы Баттерворта

n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1	1							
2	1	1.4	1						
3	1	2	2	1					
4	1	2.6	3.4	2.6	1				
5	1	3.24	5.24	5.24	3.24	1			
6	1	3.86	7.46	9.13	7.46	3.86	1		
7	1	4.5	10.1	14.6	14.6	10.1	4.5	1	
8	1	5.12	13.14	21.84	25.69	21.84	13.14	5.12	1

3. Полиномы, минимизирующие функционал $I = \int\limits_0^\infty [1 - h_1(t)]^2 dt$

n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1	1							
2	1	1	1						
3	1	2	1	1					
4	1	2	3	1	1				
5	1	3	3	4	1	1			
6	1	3	6	4	5	1	1		
7	1	4	6	10	5	6	1	1	
8	1	4	10	10	15	6	7	1	1

4. Полиномы, минимизирующие функционал $I = \int_0^\infty t\left|1 - h_1(t)\right|dt$

n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1	1							
2	1	1.4	1						
3	1	2.15	1.75	1					
4	1	2.7	3.4	2.1	1				
5	1	3.4	5.5	5	2.8	1			
6	1	3.95	7.45	8.60	6.60	3.25	1		
7	1	4.58	10.64	15.54	15.08	10.42	4.475	1	
8	1	5.15	13.3	22.20	25.75	21.60	12.80	5.20	1