

# **«Нелинейное и адаптивное управление в технических системах» (НАУТС)**

## **Тема 5**

**Лектор**  
**Виктор Владимирович Путов,**  
**д.т.н., профессор**

## ТЕМА 5

- НЕЛИНЕЙНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, СИНТЕЗИРОВАННЫЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СКОРОСТНОГО ГРАДИЕНТА

# Источники

- 1. [6. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.  
Избранные главы теории автоматического  
управления с примерами на языке MATLAB.  
– СПб: Наука, 1999. – 467 с.)]
- *Глава 12, п.п. 12.3 – 12.6, страницы 307-339.*

## Тема 5.1

- Методы адаптивного управления: задачи, структуры, методика ( п. 12.3 (с.с. 307-314))

## 12.3. Методы адаптивного управления

### 12.3.1. Задача адаптивного управления

В конце XX столетия развитие теории систем автоматического управления и ее практических приложений характеризовалось интенсивной разработкой методов адаптивного управ-

---

<sup>5</sup> Выше, на с. 300, уже отмечено, что в скользящем режиме система описывается уравнениями пониженного порядка.

вления. Эти методы служат для построения систем управления при значительной неопределенности параметров объекта управления и условий его функционирования (характеристик среды), имеющейся на стадии проектирования или до начала эксплуатации системы. Рассматриваются такие задачи управления, при которых динамические свойства объекта могут изменяться в широких пределах неизвестным заранее образом. Имеющейся начальной (*априорной*) информации недостаточно для построения систем управления с оптимальными (или заданными) показателями качества. В адаптивных системах управления недостаток априорной информации восполняется в процессе ее функционирования на основе текущих данных о поведении объекта. Эти данные обрабатываются в реальном масштабе времени (в темпе протекания управляемого процесса) и используются для повышения качества системы управления.

Применение принципов адаптации позволяет:

- обеспечить работоспособность системы в условиях значительного изменения динамических свойств объекта;
- произвести оптимизацию режимов работы объекта при изменении его параметров;

- снизить технологические требования к изготовлению отдельных узлов и элементов системы;
- унифицировать отдельные регуляторы или блоки регуляторов, приспособив их для работы с различными видами однотипных объектов;
- сократить сроки конструкторских испытаний;
- повысить надежность системы.

В настоящее время этот раздел теории управления достиг высокой степени зрелости. Ниже рассматриваются основные положения теории адаптивных систем. Более подробно об этой теории можно прочесть в книгах [64, 103, 106], а также в трудах санкт-петербургских симпозиумов по теории адаптивных систем [186].

### *12.3.2. Структура адаптивных систем управления*

Процесс адаптивного управления можно рассматривать как процесс взаимодействия трех подсистем [74, 75, 93, 103, 106]:  
- объекта;

- настраиваемого регулятора основного контура (собственно регулятора);
- блока адаптации ("адаптора").

Два последних блока объединяются в *адаптивный регулятор*, который имеет двухуровневую иерархическую структуру. Регулятор основного контура непосредственно формирует управляющее воздействие  $u(t)$ , поступающее на объект управления. Закон (алгоритм) управления в основном контуре зависит от некоторого набора *настраиваемых параметров* регулятора  $\theta$ . Настройка этих параметров производится на втором уровне в соответствии с некоторым законом, называемым *алгоритмом адаптации* на основе доступной текущей информации и без непосредственного использования значений параметров, априорно не известных.

Располагаемая априорная информация о значениях параметров характеризуется заданием некоторого множества  $\Xi$  их возможных значений [103]. Конкретный набор параметров объекта (и характеристик среды) образует вектор *неизвестных параметров*  $\xi \in \Xi$ . Считается заданной некоторая *цель управления*. Адаптивный регулятор должен привести к выполнению поставленной цели управления для любого  $\xi \in \Xi$ . Если то условие выполнено, то система называется *адаптивной в классе  $\Xi$*  [103] (или просто *адаптивной*).<sup>6</sup>

Цель управления обычно задается с помощью некоторого функционала качества, значения которого вычисляются по измеряемым выходам объекта. В зависимости от конкретной задачи цель управления считается достигнутой, если указанный функционал либо принимает экстремальное значение, либо его величина находится в заданных пределах.

Кроме цели управления используется и цель адаптации. Она также формализуется с помощью некоторого функционала и может либо совпадать с целью управления, либо отличаться от нее, являясь некоторой вспомогательной целью, служащей для решения основной задачи управления. Такой целью может быть, например, *идентификация объекта* – полу-

---

<sup>6</sup> Ниже для конкретных типов систем это общее определение будет уточнено и в некоторых случаях модифицировано. Например, имеются системы с *сигнальной адаптацией* (см. п. 12.4), у которых задача адаптивного управления решается с помощью дополнительного сигнала управления, а не путем настройки параметров регулятора. Кроме того, для систем других типов возможно использование других обозначений.

чение оценок  $\hat{\xi}$  неизвестных параметров  $\xi$ .

При аналоговой реализации адаптивного регулятора процессы в системе описываются в виде функций непрерывного аргумента (времени). Такие системы называются *непрерывными* адаптивными системами. При цифровой реализации процессы в системе являются дискретными последовательностями и такие системы называются *дискретными* адаптивными системами. Впрочем, такое разделение не означает, что непрерывный алгоритм адаптивного управления не может быть реализован цифровым регулятором. Это значит только, что при синтезе адаптивного регулятора процессы считаются непрерывными и не учитывается их квантование по времени при реализации системы, а синтез регулятора выполняется на основе *аналогового прототипа*. Существенным является сохранение с заданной точностью свойств системы при дискретизации закона управления. Достаточно общие результаты по обоснованию такого перехода получены в рамках *метода непрерывных моделей* [36, 59].

### *12.3.3. Методика решения задач адаптивного управления*

Пусть задача адаптивного управления поставлена на содержательном уровне и формализована. Это означает, что задано математическое описание объекта управления и внешних воздействий с точностью до неизвестных параметров  $\xi$ . Указано также множество  $\Xi$  значений этих параметров, дана спецификация управляющих воздействий и измеряемых выходов объекта. Кроме того, должна быть сформулирована цель управления.

Процесс синтеза адаптивного регулятора можно разбить на следующие этапы [2, 7, 74, 93, 103, 106].

**Этап 1. Выбор "идеального" закона управления.** Найдется закон управления, обеспечивающий принципиальную возможность достижения указанной цели управления. Вектор параметров  $\xi$  предполагается известным. Полученный закон управления непосредственно реализован быть не может, так как он зависит, в общем случае, от неизвестных параметров объекта. В этом смысле его можно назвать *идеальным законом управления*. Например, такой закон управления может строиться на основе решения задачи оптимального управления [2, 47, 93]. Но и не оптимальные (в обще-

принятом смысле этого слова) законы управления также могут рассматриваться как "идеальные", поскольку речь идет о том, что при их синтезе предполагается наличие достаточно точной информации о параметрах объекта и среды.

Обычно при синтезе идеального закона управления делают некоторые упрощающие предположения относительно динамики объекта, а также пренебрегают некоторыми возмущениями и помехами измерений.

Иногда основную цель управления заменяют некоторой вспомогательной (*вторичной*) целью, выполнение которой косвенно позволяет достигнуть и исходную цель.

**Этап 2. Выбор настраиваемых параметров и цели адаптации.** Неизвестные параметры, от которых зависит найденный идеальный закон управления заменяются *настраиваемыми параметрами*. В результате получается алгоритм управления, в который уже не входят неизвестные параметры, поэтому он может быть реализован регулятором.

Известны два подхода к синтезу адаптивных регуляторов.

При прямом подходе настраиваемыми параметрами являются непосредственно коэффициенты закона управления (т.е. регулятора нижнего уровня). Количество настраиваемых параметров выбирается по возможности наименьшим.

При идентификационном (непрямом) подходе выполняется оценивание значений, необходимых для синтеза регулятора неизвестных параметров объекта и характеристик внешних воздействий. Далее выполняется процедура совмещенного синтеза – оценки параметров используются для вычисления коэффициентов, входящих в закон управления.

Когда настраиваемые параметры выбраны, ставится цель адаптации. Это – некоторое вспомогательное целевое условие, являющееся основой для последующей разработки алгоритма адаптации. При прямом подходе цель адаптации совпадает с исходной, либо вспомогательной, целью управления. При идентификационном подходе цель адаптации обычно сводится к обеспечению совпадения, или близости, оценок неизвестных параметров к их "истинным" значениям. Вспомогательная цель адаптации при таком подходе может выражаться, например, как совпадение реакций объекта управления и настраиваемой модели объекта на внешнее воздействие. Настраиваемая модель описывается уравнением

ями, аналогичными уравнениям объекта управления, в которых неизвестные параметры заменены их (настраиваемыми) оценками.

Требуемые свойства системы управления обычно задаются *эталонной моделью* [2, 74, 75, 93]. Эта модель может включаться в систему явно, в виде некоторого динамического звена, обладающего заданной реакцией на командное (задающее) воздействие, либо неявно – присутствовать в виде некоторых "установок" (параметров) алгоритма адаптации. Соответственно, системы первого типа называются системами с *явной эталонной моделью*, а системы второго типа – с *неявной эталонной моделью*. Оба типа систем рассмотрены в п. 12.4, 12.5.

Системы с явной эталонной моделью могут быть подразделены, в свою очередь, исходя из способа достижения цели на системы с *параметрической и сигнальной адаптацией*.\*

В системах с сигнальной настройкой эффект адаптации достигается без изменения параметров регулятора путем увеличения его коэффициентов или обеспечением скользящих режимов (см. п. 12.1). Такие системы безусловно проще в реализации, однако они обеспечивают желаемое поведение только в относительно узком диапазоне значений параметров объекта.

В системах с параметрической адаптацией цель достигается изменением параметров регулятора. Эти системы более универсальны, однако обладают более сложной структурой. Алгоритмы адаптации используют сигнал рассогласования между выходами системы и эталонной модели. Сложность этих систем определяется количеством настраиваемых параметров.

Для повышения точности систем и скорости адаптации можно использовать сигнально-параметрические алгоритмы, в которых сочетается сигнальная и параметрическая адаптация. В таких системах сигнальная адаптация обеспечивается обычно быстрым релейным алгоритмом. Параметрическая адаптация имеет "узкую полосу пропускания" и служит для стабилизации коэффициентов передачи в заданных пределах. Такие системы, кроме быстродействия и точности, также более просты в реализации, поскольку присутствие сигнальной компоненты позволяет уменьшить число настраиваемых па-

раметров.

Идентификационный подход ("метод настраиваемой модели") рассмотрен в п. 12.6. Заметим, что здесь также можно использовать явную и неявную настраиваемые модели.

**Этап 3. Выбор алгоритма адаптации.** Как правило, алгоритмы адаптации представляют собой рекуррентные процедуры, относящиеся к классу методов последовательного улучшения [2, 78, 93, 103]. Так как в условиях неопределенности добиться сразу выполнения цели управления, вообще говоря, невозможно, то алгоритм адаптации осуществляется последовательное изменение настраиваемых параметров, приближаясь к выполнению цели. Такого рода алгоритмы обычно строятся на основе процедур градиентного типа.

Решающее влияние на работоспособность алгоритма адаптации оказывает выбор коэффициента усиления (параметра шага) алгоритма. Для решения этой задачи известны такие методы, как метод наименьших квадратов, метод стохастической аппроксимации и метод рекуррентных целевых неравенств.<sup>7</sup>

Этап 4. Исследование работоспособности адаптивной системы. Заключительным этапом синтеза адаптивного регулятора, предваряющим разработку его технической реализации, является исследование работоспособности системы с учетом характера возмущений, внешних воздействий, ограничений на переменные состояния объекта и других факторов, которые не учитывались при синтезе. На этом этапе также уточняются параметры алгоритма адаптации и, возможно, выполняется его модификация.

Значительную роль в обосновании работоспособности адаптивных систем управления играет прямой метод Ляпунова [30, 66, 64, 76, 93, 103]. Но этот метод является в основном инструментом для теоретических исследований и не может дать ответы на все вопросы, касающиеся устойчивости и качества работы адаптивных регуляторов в реальных условиях. Поэтому большое место в исследовании адаптивных систем управления играет моделирование. Особенно велико значение моделирования на этапе получения количественных характеристик системы. Для упрощения процедуры модели-

---

<sup>7</sup> Некоторые сведения о методе рекуррентных целевых неравенств приведены в Приложении В, с. 413.

рования и многовариантного анализа систем применяются проблемно-ориентированные пакеты прикладных программ. В настоящее время получили наибольшее распространение пакеты MATLAB и Simulink [32, 72, 81, 82], часто используемые и в данной книге (см. также [10]).

Надо заметить, что характерной особенностью процесса проектирования адаптивных систем управления является его цикличность. Как правило, алгоритм адаптации удается синтезировать при значительном упрощении модели объекта, и на следующих стадиях проектирования может оказаться, что выбранный алгоритм, или даже метод адаптивного управления, не отвечает условиям поставленной задачи и процесс проектирования повторяется.

Обратимся к задаче адаптивного управления непрерывными объектами.<sup>8</sup> Основное число беспоисковых алгоритмов адаптации, для которых имеются условия работоспособности, являются алгоритмами *скоростного градиента* (см. [9, 103, 106] и Приложение А, с. 407). Поэтому изложение будет вестись на основе указанной схемы, хотя многие из рассмотренных алгоритмов были получены независимо.

↗ Обширная библиография на данную тему содержится в обзорах [9, 141], а также в монографиях [23, 74, 93, 103, 106] и учебной литературе [2, 7, 8]. Более формализованное изложение, содержащее также ряд новых алгоритмов адаптивного управления по выходу (без измерения производных), см. в [64].

Как отмечено выше, целью применения методов адаптивного управления является обеспечение заданных динамических свойств системы в условиях априорной неопределенности параметров объекта и характеристик внешних возмущений.

## Тема 5.2.

- Адаптивные системы с явной эталонной моделью:  
алгоритмы параметрической,  
сигнальной и сигнально-  
параметрической адаптации  
( п. 12.4. ( с.с. 314-320))

## 12.4. Адаптивные системы с явной эталонной моделью

### *12.4.1. Алгоритмы параметрической адаптации*

1. Настройка коэффициентов уравнений состояния

Рассматривается обобщенный настраиваемый объект (ОНО)

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)r(t), \quad (12.25)$$

<sup>8</sup> Более точно было бы сказать "к алгоритмам управления непрерывного действия," так как дискретные алгоритмы управления применяются и для непрерывных объектов.

где  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  – вектор состояния обобщенного объекта;  $r(t) \in \mathcal{R}^m$  – внешнее командное (задающее) воздействие;  $A, B$  –  $n \times n$ - и  $n \times m$ -матрицы неизвестных параметров ОНО;  $\Delta A, \Delta B$  –  $n \times n$ - и  $n \times m$ -матрицы настраиваемых параметров. Цель управления – совпадение вектора состояния ОНО  $x(t)$  с вектором состояния  $x_M(t) \in \mathcal{R}^n$  (явной) эталонной модели, которая задается уравнением

$$\boxed{\dot{x}_M(t) = A_M x_M(t) + B_M r(t),} \quad (12.26)$$

где  $A_M, B_M$  –  $n \times n$ - и  $n \times m$ -матрицы, описывающие желаемую динамику замкнутой системы (матрица  $A_M$  гурвицева).

Алгоритмы адаптивного управления для решения поставленной задачи получены в ряде известных публикаций по теории беспоисковых самонастраивающихся систем с эталонной моделью (БСНС с ЭМ) [41, 42, 74, 75]. Покажем, как выводится алгоритм адаптации по методу скоростного градиента [9, 103, 106].

Для этого введем целевой функционал  $Q_t \triangleq \frac{1}{2} e(t)^T P e(t)$ , где  $e(t) \triangleq x(t) - x_M(t)$  – вектор ошибки;  $P = P^T > 0$  – некоторая  $n \times n$ -матрица, выбор которой будет описан ниже. Вычислим  $\omega(x, \theta, t) \equiv \dot{Q}_t = e(t)^T P ((A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)r(t) - A_M x_M(t) + B_M r(t))$ .<sup>9</sup> Тогда

$$\begin{aligned}\nabla_{\Delta A} \omega(x, \theta, t) &= Pe(t)x(t)^T, \\ \nabla_{\Delta B} \omega(x, \theta, t) &= Pe(t)r(t)^T.\end{aligned}\quad (12.27)$$

Алгоритм скоростного градиента в дифференциальной форме (A.14) в данном случае имеет вид

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dt} \Delta A(t) &= -\gamma Pe(t)x(t)^T, \\ \frac{d}{dt} \Delta B(t) &= -\gamma Pe(t)r(t)^T.\end{aligned}}\quad (12.28)$$

Проверка работоспособности алгоритма производится исходя из указанных выше условий (при  $\psi(x, \theta, t) \equiv 0$ ). Условие выпуклости выполнено в силу линейности ОНО (линейности правой части (12.25) по  $\theta$ ). Условие достижимости также, очевидно, выполнено при  $\theta_* = \text{col}\{A_M - A, B_M - B\}$ . Матрица

---

<sup>9</sup> Вектором настраиваемых параметров  $\theta$  в данном случае является набор элементов матриц  $\Delta A(t), \Delta B(t)$ .

$P = P^T > 0$  должна удовлетворять уравнению Ляпунова <sup>10</sup>  
 $PA_M + A_M^T P = -G$  для некоторой  $G = G^T > 0$ . Действительно,  
тогда существует некоторое  $\alpha_0 > 0$  такое что

$$\omega(x, \theta, t) = e(t)^T P A_M e(t) = -0.5 e(t)^T G e(t) \leq -\alpha_0 Q_t.$$

Условие роста выполнено для ограниченного  $x_M(t)$ , т.е. для ограниченного командного сигнала  $r(t)$ .

При влиянии возмущений может возникнуть неограниченный рост значений параметров регулятора. Для его предотвращения целесообразно использовать *регуляризованный* алгоритм адаптации [9, 103, 106]. Регуляризованный АСГ с функцией  $\xi(\theta)$  вида  $\xi(\theta) = \alpha(\theta - \hat{\theta})$  выглядит как

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta A(t) &= -\gamma \left( Pe(t)x(t)^T + \alpha(\Delta A(t) - \Delta \hat{A}) \right), \\ \frac{d}{dt} \Delta B(t) &= -\gamma \left( Pe(t)r(t)^T + \alpha(\Delta B(t) - \Delta \hat{B}) \right), \end{aligned} \right\} \quad (12.29)$$

где  $\Delta \hat{A}, \Delta \hat{B}$  – некоторые априорные оценки настраиваемых параметров (подробнее см. в [64]).

Скорость настройки параметров можно увеличить, если использовать АСГ в конечно-дифференциальной форме (A.6), (A.8), которая дает следующие *пропорционально-дифференциальные* алгоритмы адаптации

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \Delta A(t) = -\gamma P e(t) x(t)^T - \gamma_1 \frac{d}{dt} (P e(t) x(t)^T), \\ \frac{d}{dt} \Delta B(t) = -\gamma P e(t) r(t)^T - \gamma_1 \frac{d}{dt} (P e(t) r(t)^T), \end{array} \right| \quad \gamma_1 > 0. \quad (12.30)$$

Можно убедиться, что алгоритмы адаптации (12.28), (12.30) обладают идентифицирующими свойствами, т.е.  $A + \Delta A(t) \rightarrow A_M$ ,  $B + \Delta B(t) \rightarrow B_M$  при  $t \rightarrow \infty$ , если вектор-функция  $\text{col}\{x_M(t), r(t)\}$  обладает достаточным разнообразием, т.е. модель (12.26) достаточно полно возбуждается входным сигналом (например,  $r(t)$  содержит не менее  $n$  различных по частоте гармоник, а модель полностью управляемая).

## 2. Настройка коэффициентов регулятора

Пусть уравнения объекта имеют вид

$$\left| \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \right| \quad (12.31)$$

<sup>10</sup> Вывод этого уравнения из условий существования у линейной системы квадратичной функции Ляпунова приведен в 11.4.4 на с. 274.

где  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  – вектор состояния,  $u(t) \in \mathcal{R}^m$  – управляющее воздействие. Через  $r(t) \in \mathcal{R}^m$  по-прежнему обозначим командное (задающее) воздействие.

Снова возьмем целевую функцию в виде  $Q_t \triangleq \frac{1}{2} e^T P e$ ,  $e = e(t) \triangleq x(t) - x_M(t)$ ,  $P = P^T > 0$ , где  $x_M(t)$  – вектор состояния эталонной модели (12.26). Пользуясь схемой скоростного градиента, получаем

$$\dot{Q}_t = \omega(x, \theta, t) = e(t)^T P (Ax(t) + Bu(t) - A_M x_M(t) - B_M r(t)). \quad (12.32)$$

Пусть для любых  $x, x_M \in \mathcal{R}^n$ ,  $r \in \mathcal{R}^m$  уравнение

$$Ax(t) + Bu_*(t) - A_M x_M(t) - B_M r(t) = A_M e(t) \quad (12.33)$$

разрешимо относительно  $u_* \in \mathcal{R}^m$ . Тогда  $u_*(t)$  удовлетворяет соотношению

$$u_*(t) = K_r^* r(t) + K_x^* x(t). \quad (12.34)$$

Здесь  $K_r^* = B^+ B_M$ ,  $K_x^* = B^+ (A_M - A)$ , т.е.  $A_M - A \subset \mathcal{L}(B)$ ,  $B_M \subset \mathcal{L}(B)$ , где  $\mathcal{L}(B)$  – линейное подпространство, порожденное столбцами матрицы  $B$ . Это в свою очередь эквивалентно соотношению

$$\text{rank } B = \text{rank}\{B, B_M\} = \text{rank}\{B, A_M - A\}. \quad (12.35)$$

Условия (12.35) называются *условиями Эрцбергера*, *условиями адаптируемости, совместности или точного соответствия модели*".

При выполнении этих условий существуют матрица  $P = P^T > 0$  и вектор-функция  $u_*(t)$  такие, что  $\omega(x, \theta, t) \leq -e(t)^T Ge(t) \leq -\alpha_0 Q_t$ , т.е. условие достижимости (A.10) выполнено при  $\rho(Q_t) = \alpha_0 Q_t$ . Матрица  $P$  может быть найдена из решения уравнения Ляпунова

$$PA_M + A_M^T P = -G, \quad G = G^T > 0.$$

Возьмем в качестве вектора настраиваемых параметров  $\theta \triangleq \text{col}\{K_x, K_r\}$ . Скоростной градиент получается в виде

$$\begin{aligned} \nabla_{K_x} \omega(x, \theta, t) &= B^T Pe(t) x(t)^T, \\ \nabla_{K_r} \omega(x, \theta, t) &= B^T Pe(t) r(t)^T. \end{aligned} \tag{12.36}$$

Тогда АСГ в дифференциальной форме записывается как [41, 75]

$$\left| \begin{array}{l} u(t) = K_r(t)r(t) + K_x(t)x(t), \\ \frac{d}{dt}K_x(t) = -\gamma B^T P e(t)x(t)^T, \\ \frac{d}{dt}K_r(t) = -\gamma B^T P e(t)r(t)^T. \end{array} \right| \quad (12.37)$$

С.Д. ЗЕМЛЯКОВ,  
1967 г.

Алгоритмы вида (12.37) были получены в работах [38, 41, 75].

Известны результаты, согласно которым число производных от выхода объекта с передаточной функцией  $W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ , используемых в алгоритме управления, можно снизить до  $n - k - 1$ , где  $k = \deg B(s)$ . При этом требуется минимально-фазовость объекта, т.е. гурвицевость полинома  $B(s)$  (по этому поводу см. также п. 12.1. утверждение относительно передаточной функции (12.18) на с. 304).

Кроме того, начиная с 70-х годов появилось большое число публикаций, посвященных задаче адаптивного управления без измерения производных от выхода [39, 64, 69]. В 12.6.5. кратко описывается применение для этой цели адаптивных наблюдающих устройств. Другой подход, основанный на методах неявной эталонной модели и шунтирования, представлен в п. 12.7.

### 12.4.2. Алгоритмы сигнальной адаптации

Алгоритмы сигнальной адаптации [74, 75, 170] не предполагают настройки параметров регулятора. Они относятся к АСГ в конечной форме.

Рассмотрим снова задачу слежения с явной эталонной моделью (12.26). Уравнения объекта возьмем в виде (12.31).

Используя целевую функцию  $Q_t \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2} e(t)^T P e(t)$ ,  $P = P^T > 0$ , мы получаем (12.32):  $\dot{Q}_t = \omega(x, \theta, t) = e(t)^T P (Ax(t) + Bu(t) - A_M x_M(t) - B_M r(t))$ . Как и выше, матрица  $P$  находится из уравнения Ляпунова  $PA_M + A_M^T P = -G$  для некоторой  $G = G^T > 0$ . Используем теперь в качестве вектора настраиваемых параметров непосредственно сигнал управления  $u(t)$  ( $\theta(t) \equiv u(t)$ ), и получим алгоритм управления в виде АСГ в конечной форме (A.15), (A.9). Для этого вычислим скоростной градиент

$$\nabla_u \omega(x, \theta) = B^T P e(t).$$

Отсюда алгоритм (A.15) принимает (при  $\theta_0 = 0$ ) вид

$$\boxed{u(t) = -\gamma \text{sign}(B^T P e(t))} \quad (12.38)$$

Алгоритмы вида (12.38) обладают высоким быстродействием, но у них отсутствуют идентифицирующие свойства (это очевидно, так как нет настраиваемых параметров). При изменении параметров объекта в широких пределах целесообразно использовать сигнально-параметрические алгоритмы, описанные в ниже.

#### 12.4.3. Алгоритмы сигнально-параметрической адаптации

В системах с сигнально-параметрической адаптацией [43, 75] сигнальная составляющая вводится обычно для обеспечения высокой скорости настройки и компенсации быстрого изменения параметров. Параметрическая адаптация включает интегральную составляющую для компенсации параметрических и координатных возмущений, которые меняются достаточно медленно, но в широких пределах.

В качестве примера рассмотрим систему, в которую входят объект управления (12.31) и эталонная модель (12.26). Цель управления:  $e(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Функционал качества зададим в виде  $Q_t = \frac{1}{2} e(t)^T P e(t)$ . Тогда выражение для  $\dot{Q}$  имеет вид (12.32). Можно убедиться, что выполнение условий (12.35) обеспечивает единственность решения (12.33) относительно  $u_* \in \mathcal{R}^m$  для всех  $x, x_M \in \mathcal{R}^n$  и  $r \in \mathcal{R}^m$ . Для  $u_*$  имеем соотношение

$$u_* = K_{x_M}^* x_M + K_r^* r + u_s, \quad (12.39)$$

где  $K_{x_M}^* = B^+ (A_M - A)$ ,  $K_r^* = B^+ B_M$ ,  $u_s^* = B^+ (A_M - A)$ .

Таким образом, при выполнении условий адаптируемости имеются матрица  $P = P^T > 0$  и вектор-функция  $u^*(t)$  вида (12.39) такие, что выполняется условие достижимости (A.10). Матрица  $P$  находится как решение уравнения Ляпунова  $PA_M + A_M^T P = -G$ , где  $G = G^T > 0$ .

По аналогии с выражением (12.39) выберем алгоритм управления в основном контуре в виде

$$u(t) = K_{x_M}(t)x_M(t) + K_r(t)r(t) + u_s(t), \quad (12.40)$$

где  $K_{x_M}(t)$ ,  $K_r(t)$ ,  $u_s(t)$  – настраиваемые параметры, образующие вектор  $\theta(t) = \text{col}\{K_{x_M}(t), K_r(t), u_s(t)\}$ . Задаваясь матрицей  $\Gamma$  в блочно-диагональной форме

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 I_{mn} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 I_{mm} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

получим алгоритм управления

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= K_{x_M}(t)x_M(t) + K_r(t)r(t) - \gamma \text{sign}(B^T Pe(t), ), \\ \frac{d}{dt}K_{x_M}(t) &= -\gamma_1 B^T Pe(t)x_M(t)^T, \\ \frac{d}{dt}K_r(t) &= -\gamma_2 B^T Pe(t)r(t)^T, \end{aligned}} \quad (12.41)$$

где  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma > 0$ .

Наиболее сложной задачей при построении систем с явной эталонной моделью является построение основного контура системы, обеспечивающего выполнения условий адаптируемости (12.35). Это приводит к сложной структуре системы для объектов высокого порядка и многосвязных (MIMO) объектов [74, 93]. Рассмотренные в следующем параграфе алгоритмы с неявной моделью, а также близкие к ним алгоритмы систем с переменной структурой (см. главу 12.1) лишены этого недостатка. Поэтому такие системы могут быть рекомендованы, когда системы с явной моделью нереализуемы либо слишком сложны для использования.

## Тема 5.3.

- Адаптивные системы с неявной эталонной моделью: алгоритмы с параметрической, сигнальной и сигнально-параметрической адаптацией, пример (адаптивное управление летательным аппаратом)  
( п. 12.5. ( с.с. 320-329))

## 12.5. Адаптивные системы с неявной эталонной моделью

Рассмотрим теперь методы прямого адаптивного управления, в которых модель не включена в систему "явно" – в виде некоторого динамического звена (аналогового или цифрового), а присутствует "неявно" в качестве некоторого "эталонного уравнения". Применение таких систем снижает требования к структуре основного контура и полноте наблюдаемых данных.

Как и для систем с явной эталонной моделью, будут рассмотрены алгоритмы параметрической и сигнально-параметрической адаптации. Что касается сигнальных алгоритмов, то, как нетрудно видеть, они ничем не отличаются от алгоритмов СПС, уже рассмотренных в п. 12.1.

### 12.5.1. Алгоритмы параметрической адаптации

Рассмотрим уравнения обобщенного настраиваемого объекта в виде

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \\ u(t) &= K(t)^T y(t),\end{aligned}} \quad (12.42)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathcal{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}^l$ ,  $K(t) \in \mathbb{R}^l$  – вектор настраиваемых параметров регулятора.

Используем целевой функционал  $Q_t \triangleq \frac{1}{2}x(t)^T Px(t)$ , где  $P = P^T > 0$ . Применим метод скоростного градиента. Получим, что

$$\dot{Q}_t = \omega(x, \theta, t) = x(t)^T P(Ax(t) + BK^T y(t)), \quad \nabla_{\theta} \omega(x, \theta, t) = x(t)^T PB y(t).$$

Так как выражение  $x(t)^T PB y(t)$  должно зависеть только от измеряемых переменных (иначе неизмеряемые переменные войдут в закон управления), получаем условие  $PB = C^T g$  для некоторого  $l$ -мерного вектора  $g$ . Предполагая это условие выполненным, запишем АСГ в виде [36]

$$\dot{K}(t) = -\sigma(y(t))\Gamma y(t), \quad \sigma(y) = g^T y, \quad (12.43)$$

где матрица коэффициентов усиления  $\Gamma = \Gamma^T > 0$ .

Для проверки работоспособности алгоритма следует установить только выполнение условия разрешимости (A.10). Оно удовлетворяется, если существует вектор  $K_*$  такой, что  $x^T P A_* x < 0$ , где  $A_* = A + BK_*^T C$ . Таким образом, должны существовать матрица  $P = P^T > 0$  и вектор  $K_*$  такой, что

$$PA_* + A_*^T P < 0, \quad PB = C^T g, \quad A_* = A + BK_*^T C. \quad (12.44)$$

Решение этой задачи дает следующая теорема (*частотная теорема с обратной связью* или *теорема о пассивизации*) [64, 104, 106].

**Теорема.** Для существования матрицы  $P = P^T > 0$  и вектора  $K_*$ , удовлетворяющих (12.44), необходимо и достаточно, чтобы функция  $g^T W(s)$  была строго-минимально-фазовой.<sup>11</sup>

<sup>11</sup> Напомним, что передаточная функция  $W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$  соответствует строго-минимально-фазовой системе, если  $B(s)$  – гурвицев (устойчивый) многочлен степени  $n - 1$ ,  $n = \deg A(s)$  с положительными коэффициентами [36, 106].

Здесь  $W(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$  – передаточная функция объекта управления.

Таким образом, при выполнении указанного условия на  $g^T W(s)$ , обеспечивается выполнение цели управления  $x(t) \rightarrow 0$ ,  $K(t) \rightarrow \text{const}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

При практическом использовании алгоритма (12.43) существенно, что в процессе адаптации величина  $\sigma(t)$  затухает достаточно быстро (обычно быстрее, чем переходный процесс в системе). Полагая  $\sigma(t) \equiv 0$ , мы можем интерпретировать уравнение  $g^T y(t) = 0$  как некоторое "эталонное уравнение", которое задает желаемую динамику замкнутой системы<sup>12</sup>.

Описанный подход можно распространить и на системы слежения за задающим воздействием  $r(t)$  [7, 103]. В [120] описан адаптивный пропорционально-интегральный (ПИ) регулятор с неявной эталонной моделью для решения задачи слежения.

### 12.5.2. Алгоритмы сигнально-параметрической адаптации

Рассмотрим объект управления, выходной сигнал которого непосредственно представляет собой "ошибку" (рассогласование)  $\sigma(t)$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad \sigma(t) = g^T x(t), \quad (12.45)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t), \sigma(t) \in \mathcal{R}$ .

Пусть цель управления имеет вид  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . Возьмем целевую функцию в виде  $Q_t = \frac{1}{2}\sigma(t)^2$  и вспомогательную цель управления  $Q_t = 0$  при  $t \geq t_*$ . Такая вспомогательная цель характерна для рассмотренных в главе 12 систем с переменной структурой на скользящих режимах.

Следуя схеме скоростного градиента, получим

$$\dot{Q}_t = \omega(x, \theta, t) = g^T x (g^T A x + g^T B u(t)). \quad (12.46)$$

Закон управления в основном контуре возьмем в виде

$$u(t) = K(t)x(t) + u_s(t), \quad (12.47)$$

---

<sup>12</sup> Как отмечено в главе 12,  $n - 1$  корней характеристического уравнения замкнутой системы при  $\sigma(t) \equiv 0$  совпадает с корнями числителя передаточной функции  $g^T W(s)$ , а  $n$ -й корень стремится к  $-\infty$  [30, 106].

где вектор настраиваемых параметров  $\theta(t) \triangleq \text{col}\{K(t), u_s(t)\}$ .

Далее получим

$$\begin{aligned}\nabla_K \omega(x, \theta, t) &= (g^T B) g^T x x^T, \\ \nabla_{u_s} \omega(x, \theta, t) &= (g^T B) g^T x.\end{aligned}\quad (12.48)$$

Тогда алгоритм адаптивного управления для АСГ в конечной форме (A.15) принимает вид

$$\begin{aligned}u(t) &= K(t)x(t) - \gamma \text{sign}(g^T B)\sigma(t), \\ K(t) &= -\gamma_1(g^T B)\sigma(t)x(t)^T.\end{aligned}\quad (12.49)$$

Отметим, что в системе (12.45), (12.48) возникает скользящий режим (см. п. 12.1) на поверхности  $g^T x = 0$ , следовательно, для достижения цели управления  $\lim_{t \rightarrow \infty} g^T x(t) = 0$  требуется строгая минимально-фазовость передаточной функции  $W(s) = g^T (sI - A)^{-1} B$ .

Рассмотрим теперь АСГ в дифференциальной форме. Используем структуру закона управления в виде (A.6) с матрицей

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где } \gamma_1 > 0.$$

Получим алгоритм управления

$$\begin{aligned} u(t) &= K(t)x(t) + K_r(t)r(t) - \gamma \text{sign}(g^T B)\sigma(t), \\ \frac{d}{dt}K(t) &= -\gamma_1(g^T B)\sigma(t)x(t)^T, \end{aligned} \quad (12.50)$$

где  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma > 0$ .

Для повышения скорости настройки параметров имеет смысл использовать алгоритм настройки  $K(t)$  в конечно-дифференциальной форме [9]

$$\frac{d}{dt}K(t) = -\gamma_1(g^T B)\sigma(t)x(t)^T - \gamma_2 \frac{d}{dt}(g^T B)\sigma(t)x(t)^T. \quad (12.51)$$

Сигнально-параметрический алгоритм управления, использующий только выход  $y(t)$  объекта [119], приведен в 12.1 (формула (12.19), с. 305).

### 12.5.3. Пример. Адаптивное управление летательным аппаратом

В качестве примера рассмотрим задачу управления углом тангажа летательного аппарата (ЛА). Для описания динами-



Рис. 12.1. Блок-диаграмма модели адаптивной системы управления ЛА.

ки объекта используем приведенную в 1.5.3 на с. 42 передаточную функцию, которая относительно угла тангензажа имеет вид<sup>13</sup>

$$W_{\vartheta}^{\delta_{\text{в}}}(s) = \frac{\delta_{\text{в}} m_z (s - a_y^\alpha)}{s(s^2 + (a_{m_z}^{\omega_z} + a_y^\alpha)s + a_{m_z}^\alpha + a_y^\alpha a_{m_z}^{\omega_z})}.$$

Требуется обеспечить заданную динамику процесса слежения  $\vartheta(t)$  за командным (задающим) воздействием  $\vartheta(t)^*$  при неопределенности параметров ЛА (коэффициентов  $a_{m_z}^{\delta_B}$ ,  $a_y^\alpha$ ,  $a_{m_z}^{\omega_z}$ ,  $a_{m_z}^\alpha$ ,  $a_y^\alpha$ ) Покажем применение алгоритма адаптивного управления с неявной эталонной моделью (12.43) и алгоритма систем с переменной структурой (СПС) для решения этой задач.

Пусть угол  $\vartheta$  и угловая скорость тангажа  $\omega_z$  измеряются и могут быть использованы в алгоритме управления. Для работоспособности систем с неявной моделью как и СПС, требуется соблюдение условия строгой минимально-фазовости. Как нетрудно убедиться, в рассматриваемой задаче оно может быть выполнено, если числитель передаточной функции  $W_\vartheta^{\delta_B}(s)$  – гурвицев многочлен. Это значит, что должно выполняться неравенство  $a_y^\alpha < 0$ . Оно соответствует физике движе-

---

<sup>13</sup> Чтобы соблюсти привычное для работ по теории управления правило знаков, числитель  $W_\vartheta^{\delta_B}(s)$  взят со знаком "плюс".

ния тела в атмосфере [19, 23]. Кроме того, коэффициенты  $g$  в (12.43) должны выбираться положительными (при  $a_{m_z}^{\delta_B} > 0$ ). Используя регуляризацию (более подробно см. [103, 106], а также [64]) и перейдя к рассогласованию  $\varepsilon \stackrel{\Delta}{=} \vartheta^* - \vartheta$ , получим из (12.43) алгоритм адаптивного управления для рассматриваемой задачи в виде

$$\begin{aligned}\dot{k}_\vartheta(t) &= -\gamma\sigma(t)\varepsilon(t) - \alpha(k_\vartheta(t) - k_\vartheta^o), \quad k_\vartheta(0) = k_\vartheta^o, \\ \dot{k}_\omega(t) &= \gamma\sigma(t)\omega_z(t) - \alpha(k_\omega(t) - k_\omega^o), \quad k_\omega(0) = k_\omega^o, \\ \sigma(t) &= \tau\omega_z(t) - \varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) = \vartheta(t)^* - \vartheta(t), \\ \delta_B(t) &= k_\vartheta(t)\varepsilon(t) - k_\omega(t)\omega_z(t).\end{aligned}\quad (12.52)$$

Здесь  $\gamma > 0$  – коэффициент усиления алгоритма,  $\alpha > 0$  – коэффициент регуляризации, (параметрической обратной связи),  $\tau > 0$  – постоянная времени неявной модели. Параметры  $k_\vartheta^o, k_\omega^o$  находятся на основе априорной информации об объекте для некоторого "расчетного" режима. Заметим, что они могут быть заданы весьма приблизительно и их выбор не оказывает принципиального влияния на работоспособность адаптивной системы.

Выражение  $\sigma = \tau\omega_z - \varepsilon$  соответствует вектору  $g$  в (12.43) равному  $g = [1, \tau]^T$ . Оно задает желаемую динамику замкнутой системы. Эталонное уравнение получается при  $\sigma(t) \equiv 0$  и имеет вид

$$\tau \dot{\vartheta}(t) \vartheta(t) = \vartheta(t)^*$$

SIMULINK-диаграмма моделирования адаптивной системы управления ЛА приведена на рис. 12.1 – 12.3, а некоторые результаты моделирования – на рис. 12.4, 12.5. Использованы следующие значения параметров объекта и алгоритма адаптации:  $a_y^\alpha = -1.3c^{-1}$ ,  $a_{m_z}^\alpha = -12.5c^{-2}$ ,  $a_{m_z}^{\omega_z} = 0.5c^{-1}$ ,  $a_{m_z}^{b_\alpha} = 15.2c^{-2}$ ,  $\gamma = 150$ ,  $\alpha = 0.02$ ,  $\tau = 0.5c$ .<sup>14</sup> Заметим, что процесс изменения коэффициентов регулятора протекает в темпе с процессом углового движения ЛА и *невязка адаптации*  $\sigma(t)$  затухает достаточно быстро. Вместе с тем заметно перерегулирование по углу тангажа, которое не описывается эталонным уравнением. Это связано с влиянием нуля передаточной функции ЛА.

---

<sup>14</sup> Данные параметры соответствуют одному из наборов значений, приведенных ниже в таблице 12.1 на с. 350.

Рассмотрим теперь управление углом тангажа с помощью регулятора с переменной структурой (12.9), описанного в п. 12.1. Поверхность скольжения определим выражением  $\sigma = \tau\omega_z - \varepsilon$ , ( $\varepsilon = \vartheta^* - \vartheta$ ), которое совпадает с выражением для невязки в алгоритме (12.52).

Тогда уравнение СПС-регулятора угла тангажа принимает вид

$$\sigma(t) = \tau\omega_z(t) - \varepsilon(t), \quad \varepsilon(t) = \vartheta(t)^* - \vartheta(t),$$

$$\delta_B(t) = k_\vartheta \varepsilon(t) - k_\omega \omega_z(t),$$

$$k_\vartheta = \begin{cases} k_\vartheta^+, & \text{при } \varepsilon\sigma \geq 0, \\ k_\vartheta^-, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$k_\omega = \begin{cases} k_\omega^+, & \text{при } \varepsilon\sigma \geq 0, \\ k_\omega^-, & \text{иначе.} \end{cases}$$

SIMULINK блок-диаграмма модели регулятора с переменной структурой представлена на рис. 12.6. Графики переходных процессов по углу тангажа и управлению для указанных выше параметров ЛА в системе с переменной структурой приведены на рис. 12.7. Приняты следующие значения параметров закона управления: <sup>15</sup>  $k_\vartheta^+ = 2$ ,  $k_\vartheta^- = -1$ ,  $k_\omega^+ = 0.5c$ ,  $k_\omega^- = -0.25c$ ,  $\tau = 0.5c$ .

Сравнивая результаты моделирования систем с параметрической адаптацией и СПС-регулятором, видим, что для второй системы вид переходных процессов одинаков, в то время как система с параметрической адаптацией имеет некоторый период "настройки". В то же время скользящие режимы приводят к более форсированной нагрузке исполнительных органов (см. процесс  $\delta_b$ ). Возникающие при реальном скользящем режиме автоколебания, имеющие относительно высокую частоту и малую амплитуду, во многих случаях нежелательны для работы рулевых машин.

Рассмотрение данной задачи управления будет продолжено в 12.7, где рассматривается возможность уменьшения числа измеряемых переменных.

Обратимся теперь к идентификационному подходу к синтезу адаптивных систем управления, который основан на идентификации неизвестных параметров объекта и одновременном синтезе регулятора. Такой метод получил также название *метода настраиваемой модели*.

---

<sup>15</sup> Заметим, что при выбранные коэффициентов СПС-регулятора удовлетворяют приведенным на с. 302 условиям (12.10).

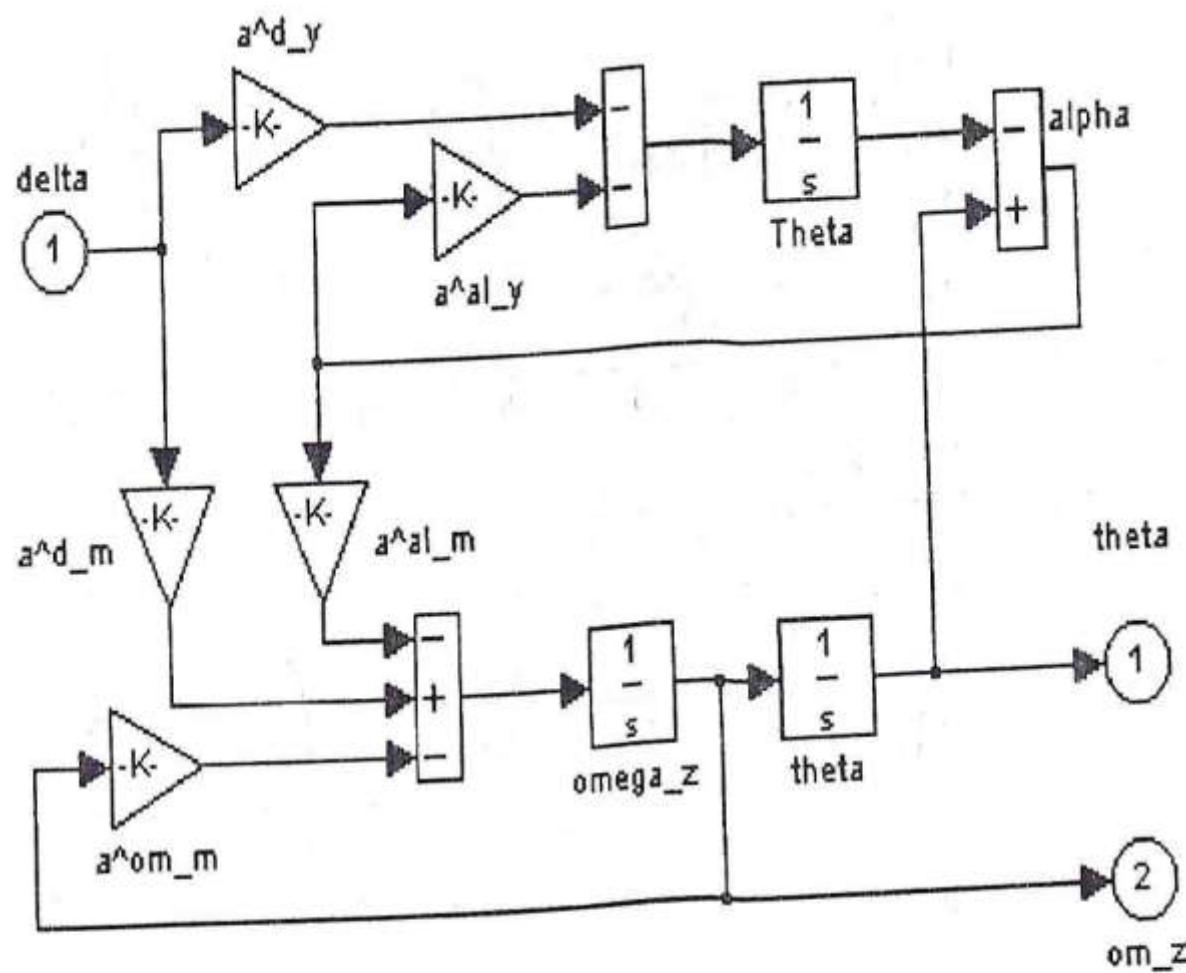


Рис. 12.2. Блок-диаграмма модели динамики углового движения ЛА.

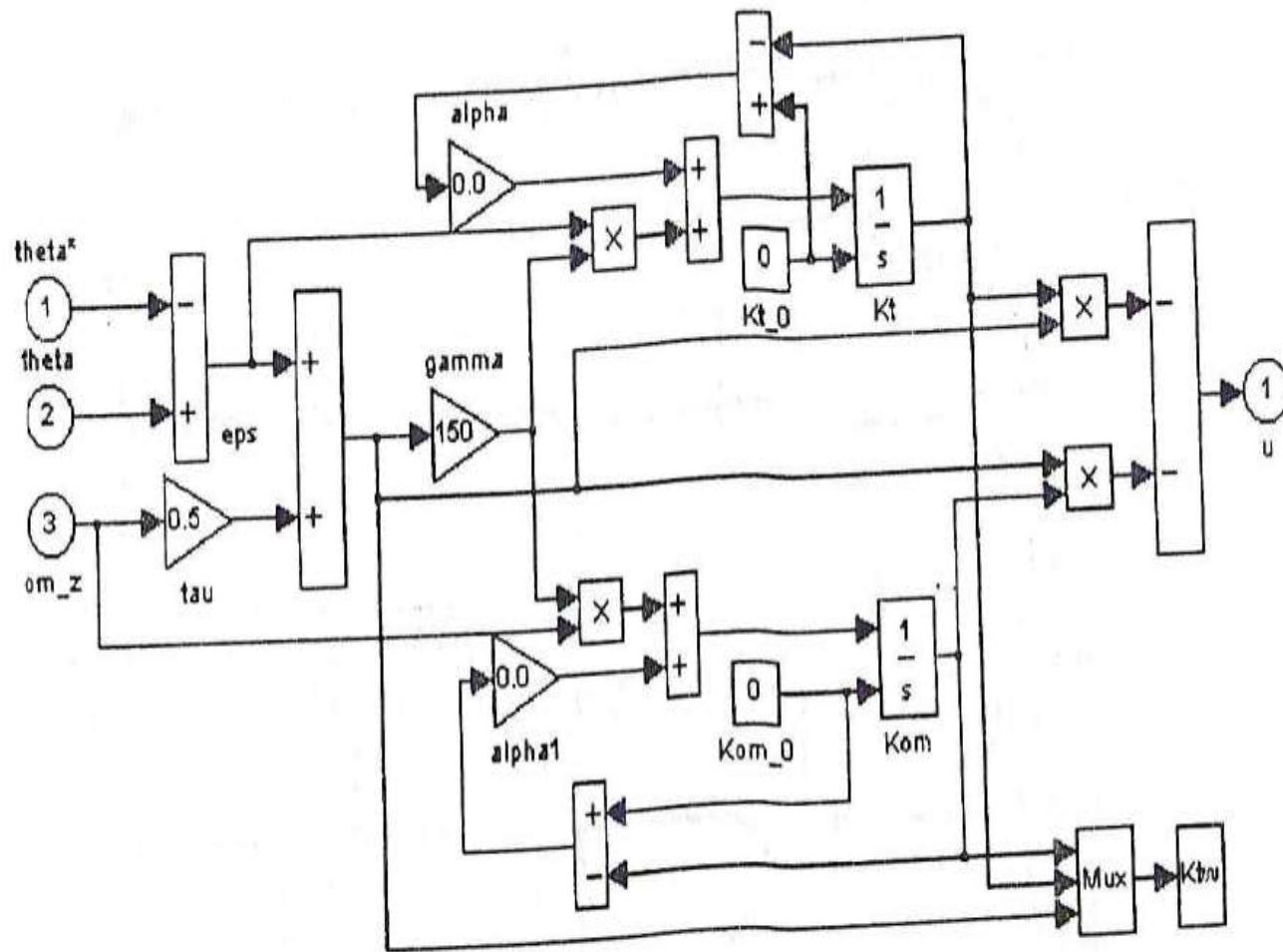


Рис. 12.3. Блок-диаграмма алгоритма адаптивного управления с неявной моделью.

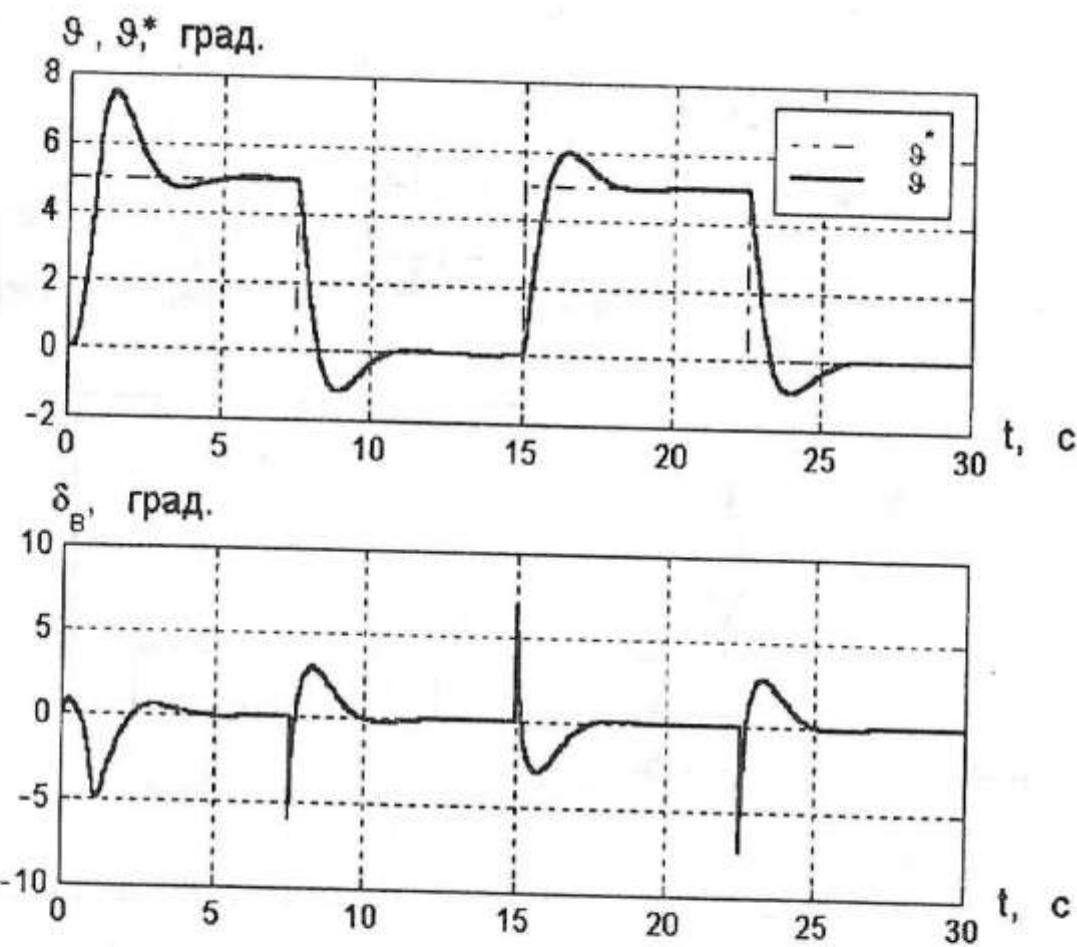


Рис. 12.4. Переходные процессы по углу тангажа  $\vartheta$  и управлению  $\delta_B$  в адаптивной системе с неявной моделью.

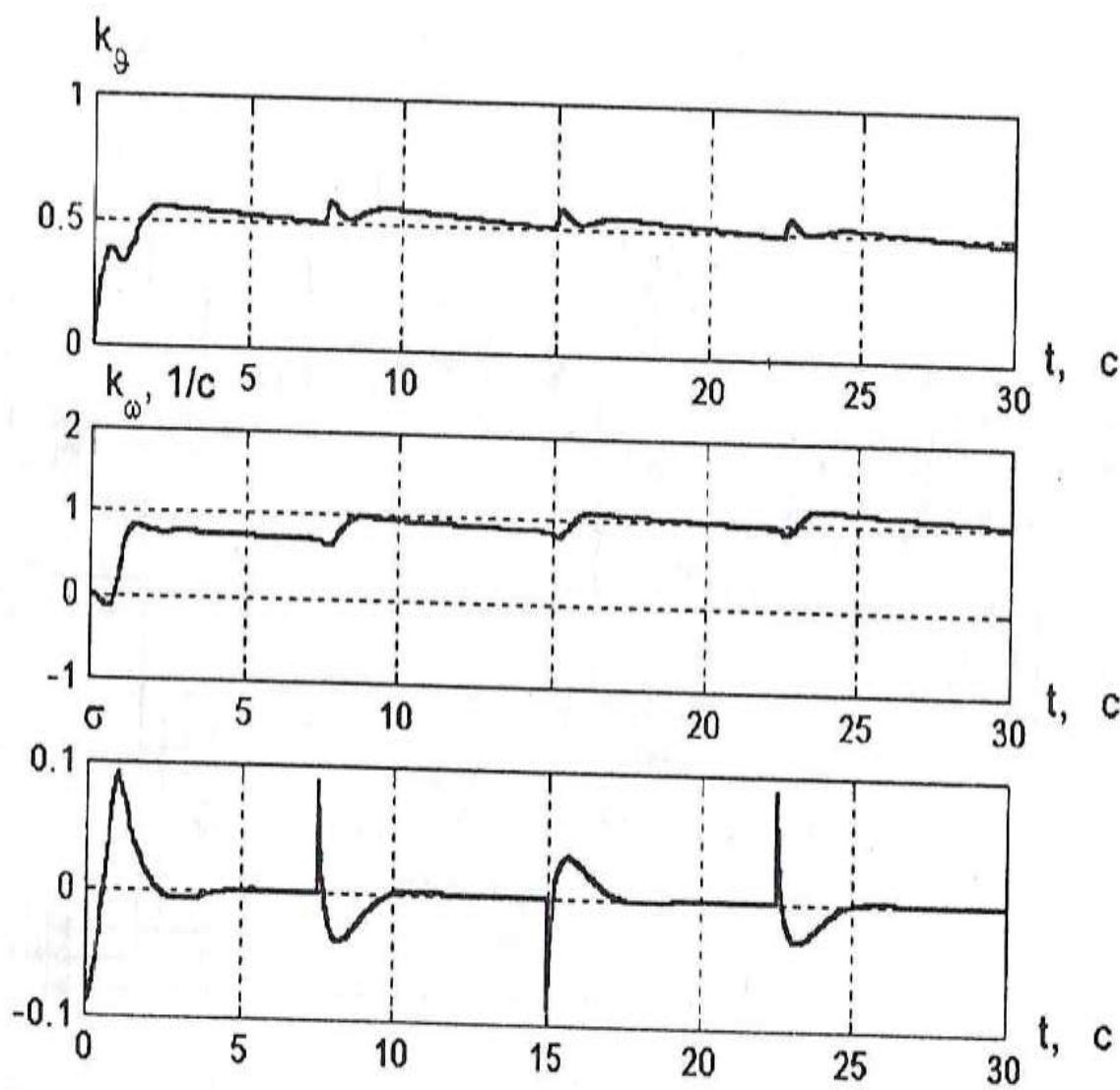


Рис. 12.5. Процесс настройки параметров и невязка алгоритма адаптации в адаптивной системе с неявной моделью.

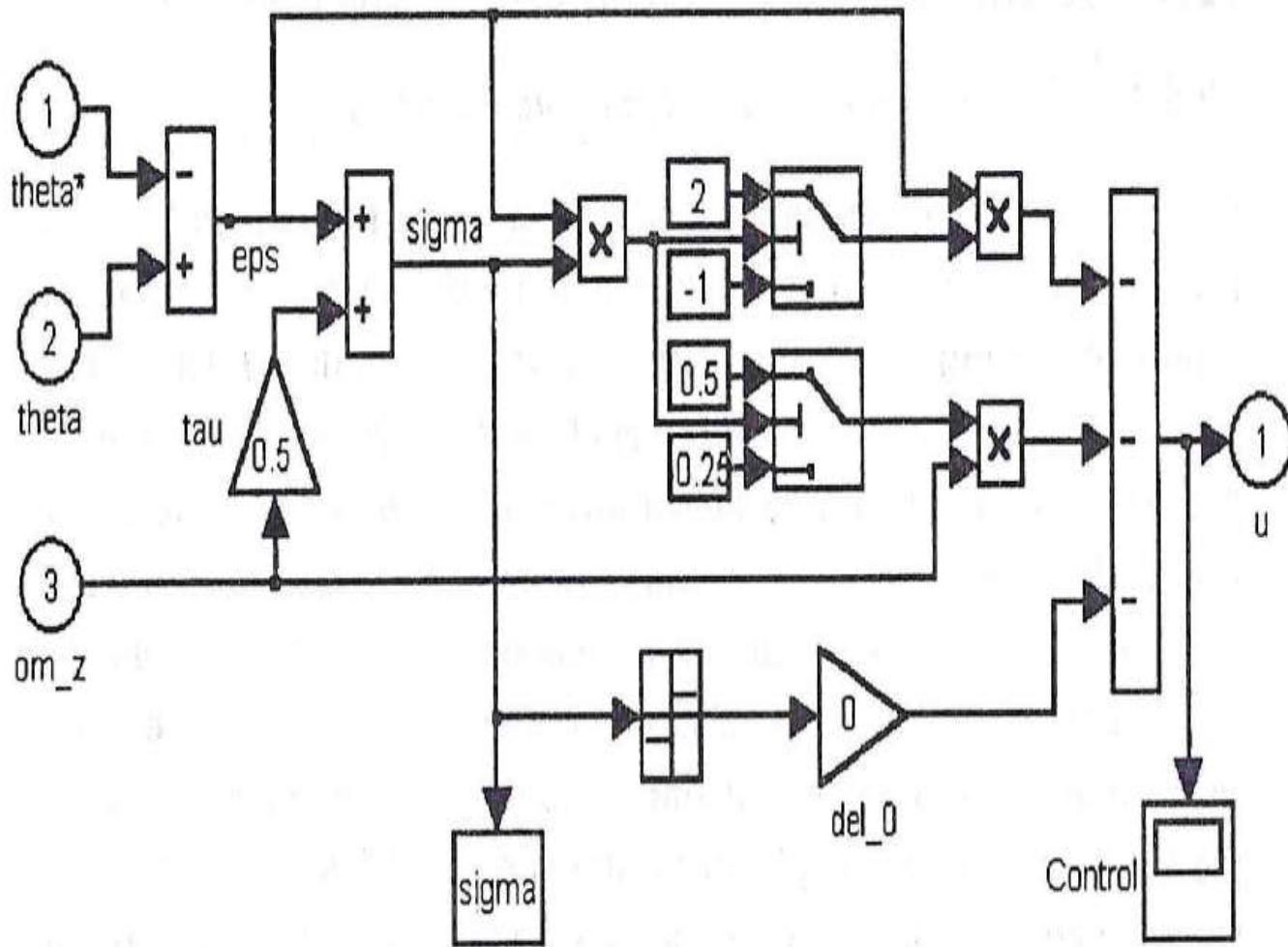


Рис. 12.6. Блок-диаграмма модели регулятора с переменной структурой.

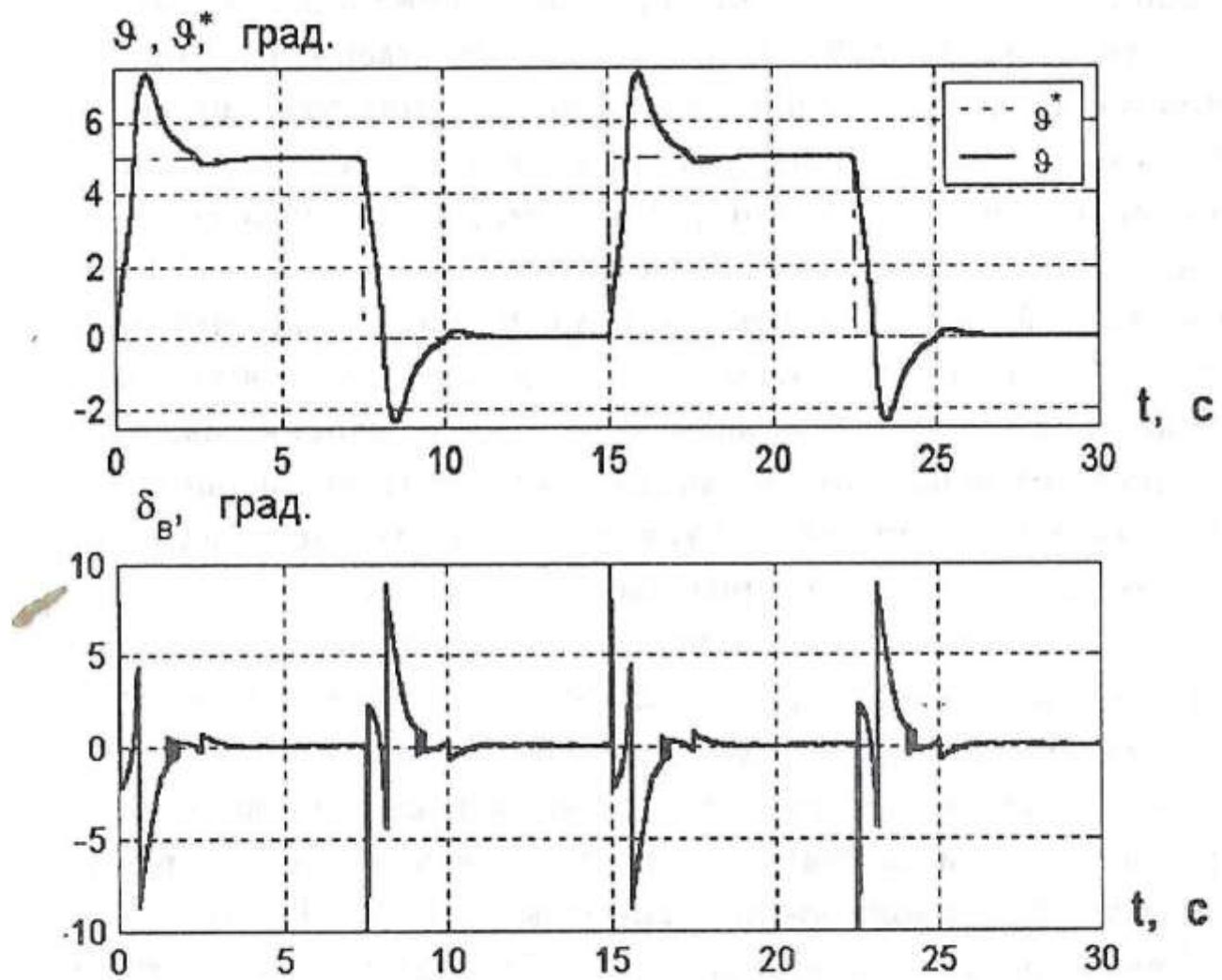


Рис. 12.7. Переходные процессы по углу тангажа  $\vartheta$  и управлению  $\delta_B$  в системе с переменной структурой.

# Тема 5.4.

- Алгоритмы адаптивной идентификации: задачи параметрической идентификации, идентификация с явной и неявной настраиваемыми моделями ( п. 12.6. ( с.с. 330-339))

## 12.6. Алгоритмы адаптивной идентификации

### 12.6.1. Задача параметрической идентификации

Считая задачу синтеза закона управления при известных параметрах объекта решенной, сосредоточимся на алгоритмах идентификации. Рассмотрим задачу адаптивной идентификации, при решении которой требуется получать оценки параметров объекта в реальном времени (в одном темпе с процессом) и в процессе нормального функционирования объекта. Заметим, что эта задача далека от полного решения из-за сложности обеспечения работоспособности систем, в которых оценки параметров вырабатываются в замкнутом контуре, а синтез регулятора выполняется по найденным оценкам. Основные результаты относятся к системам дискретного времени [103]. Ниже рассматриваются некоторые непрерывные алгоритмы идентификации [2, 7, 9, 23, 93, 106, 116].

Задача идентификации имеет как самостоятельное значение для построения математических моделей объектов управления [2, 59, 72, 93, 87], так и при построении адаптивных систем управления [2, 9, 93, 106, 103]. Существенная разница в этих областях применения заключается в том, что в процессе адаптивного управления процесс идентификации должен про-

исходить при нормальном функционировании системы в реальном масштабе времени (что называется *адаптивной идентификацией*). Обеспечить сходимость оценок параметров к их значениям в последнем случае оказывается значительно сложнее. Алгоритмы неадаптивной идентификации также будут рассмотрены ниже, поскольку они имеют весьма широкое применение и часто используются в качестве исходных при синтезе адаптивных алгоритмов.

*Идентификация систем* заключается, как известно, в построении их моделей в результате обработки входных и выходных данных, полученных в результате эксперимента с системой, который может быть *активным* (планироваться направленно), или *пассивным* – осуществляться в процессе нормального функционирования системы [2, 8, 59, 93].

Реальная система всегда ведет себя не так, как ее математическая модель, поэтому с практической точки зрения следует оценивать достоверность модели не в плане ее "истинности", а скорее в плане "полезности". В дальнейшем изложе-

ний термин "истинная система" означает математическую модель некоторой идеализированной системы, которая описывается однозначно определенной совокупностью правил и является источником полученных в эксперименте данных наблюдений [59].

Создание моделей по результатам наблюдений включает следующие основные компоненты [8, 59, 72, 87]: 1) данные, 2) множество моделей-кандидатов, 3) правило оценки степени соответствия исследуемой модели данным наблюдений.

При проведении целенаправленных экспериментов решается задача *планирования эксперимента*, в ходе которой пользователь определяет состав входных сигналов и моменты их измерения, чтобы получить наиболее полную информацию о свойствах системы. В других случаях пользователю (процедуре идентификации) приходится опираться на данные нормальной эксплуатации системы.

Множество *моделей-кандидатов* устанавливается посредством фиксации той группы моделей, в пределах которой ищется наиболее подходящая. На этом этапе знание формальных свойств моделей следует соединить с априорным знанием, инженерным искусством и интуицией. Иногда множество моделей становится результатом тщательного моде-

лирования, после чего с использованием физических законов формируется модель, включающая физические параметры с еще неопределенными значениями. Другая возможность состоит в том, чтобы использовать стандартные линейные модели, которые могут рассматриваться как результат линеаризации нелинейных моделей физических процессов. Часто оказывается полезным не задавать структуру (порядок) линейной модели заранее, на основе физических соображений, а получать наряду с остальными параметрами в результате идентификации. Множества моделей, у которых параметры рассматриваются как средства "подстройки" моделей к располагаемым экспериментальным данным и не отражают физики процесса, называются "черными ящиками", а множества моделей с настраиваемыми параметрами, допускающим физическую интерпретацию, называются "серыми ящиками".

Определение наилучшей модели из выбранного множества на основе имеющихся данных и собственно является процедурой идентификации. В результате выполнения всех трех

этапов идентификации получается некоторая конкретная модель, которая по выбранному критерию воспроизводит данные наблюдений. Далее требуется выполнить процедуры подтверждения (*валидации*) модели – оценивания соответствия модели данным наблюдений, априорной информации и поставленной прикладной цели.

Хорошее функционирование модели по указанным критериям создает определенную степень доверия к ней, а неудовлетворительное функционирование приводит к отказу от полученной модели. Имеется ряд причин несовершенства моделей: – численный метод не позволяет найти наилучшую модель по данному критерию; – критерий выбран неудачно; – множество моделей "неполноценено" в том смысле, что в нем нет подходящего описания системы; – множество данных наблюдения недостаточно информативно для того, чтобы обеспечить выбор хороших моделей.

Отказ от модели приводит к пересмотру некоторых шагов процедуры идентификации, что обуславливает ее итеративный характер. Полезным инструментом здесь является диалоговое программное обеспечение [72, 81, 82, 87, 139].

Отметим, что во многих случаях реализация процедуры подтверждения модели оказывается неосуществимой, или затруднительной. В первую очередь это относится к системам адаптивного управления, в которых идентификация проходит в темпе с управляемым процессом и служит для настройки параметров регулятора при нормальной эксплуатации системы.

Перейдем непосредственно к описанию методов и алгоритмов идентификации систем непрерывного времени.

### 12.6.2. Идентификации с явной настраиваемой моделью

Рассмотрим алгоритм настройки модели для системы с полностью измеряемым вектором состояния

$$\dot{x}(t) = A_*x(t) + B_*u(t), \quad (12.53)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ . Используем явную настраиваемую модель, имеющую вид

$$\dot{x}_M(t) = Gx_M(t) + (A(t) - G)x(t) + B(t)u(t), \quad (12.54)$$

где  $x_M(t) \in \mathcal{R}^n$  – вектор состояния модели,  $G$  – некоторая  $n \times n$ -матрица.

Определим цель управления  $\lim_{t \rightarrow \infty} Q_t = 0$ ,  
где  $Q_t \triangleq \frac{1}{2} e(t) P e(t)^T$ ,  $e(t) \triangleq x_M(t) - x(t)$ ,  $P = P^T > 0$ . Очевидно,

$$\dot{Q}_t = e(t)^T P (G e(t) + (A(t) - A_*) x(t) + (B(t) - B_*) u(t)). \quad (12.55)$$

Вычисляя скоростной градиент, получим алгоритм идентификации в дифференциальной форме

$$\frac{d}{dt} A(t) = -\gamma P e(t) x(t)^T, \quad \frac{d}{dt} B(t) = -\gamma P e(t) u(t)^T. \quad (12.56)$$

Для выполнения условия достижимости (A.10) матрица  $P$  должна удовлетворять неравенству Ляпунова  $P G + G^T P < 0$ . Тогда при ограниченном  $x(t)$  (что имеет место, например, для устойчивого объекта с ограниченным управлением) удовлетворяется цель  $Q_t \rightarrow 0$ .

Для рассматриваемой задачи существенно выполнение более сильной цели:

$$A(t) \rightarrow A_*, \quad B(t) \rightarrow B_*, \quad (12.57)$$

которая означает сходимость оценок к истинным значениям параметров. Как следует из 13.5.3 (см также приложение А), для этого достаточно (при выполнении указанных выше условий достижимости) интегральной невырожденности вектор-функции  $\text{col}\{x(t), u(t)\}$ .<sup>16</sup> Например, цель (12.57) достигается, если объект (12.53) полностью управляем, а спектр функции  $u(t)$  содержит не менее  $n$  гармоник.

### 12.6.3. Идентификация на скользящих режимах

Рассмотрим линейный объект (12.53) и настраиваемую модель

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) + v(t), \quad (12.58)$$

где матрицы  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  должны быть получены по измеряемым вектору состояния  $x(t)$  и входу  $u(t)$ ;  $v(t)$  есть дополнительный

---

<sup>16</sup> Говорят также, что данная функция является *постоянно возбуждающей*, или что система подвержена *неисчезающему возбуждению* (см. также с. 412).

сигнал, введение которого обеспечивает скользящий режим на многообразии  $\sigma = 0$ , где  $\sigma \stackrel{\Delta}{=} x(t) - \tilde{x}(t)$ .

Основываясь на схеме скоростного градиента с целевой функцией  $Q_t \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2} \sigma^T \sigma$ , получим

$$\dot{Q}_t = \sigma^T ((A - \tilde{A}(t))x(t) + (B - \tilde{B}(t))u(t) - v(t)), \quad (12.59)$$

Возьмем в качестве вектора настраиваемых параметров  $\theta \stackrel{\Delta}{=} \text{col}\{\tilde{A}, \tilde{B}, v\}$ . Получим алгоритм идентификации на скользящих режимах в конечно-дифференциальной форме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{A}(t) &= -\gamma \sigma(t) x(t)^T, \\ \frac{d}{dt} \tilde{B}(t) &= -\gamma \sigma(t) u(t)^T, \\ v(t) &= -\gamma_1 \text{sign} \sigma(t), \quad \text{где } \sigma(t) = x(t) - \tilde{x}(t), \quad \gamma, \gamma_1 > 0. \end{aligned} \quad (12.60)$$

Алгоритмы идентификации такого типа рассмотрены, например, в [102]. Условия сходимости оценок параметров к их истинным значениям аналогично рассмотренным в предыдущем параграфе.

#### *12.6.4. Идентификация с неявной настраиваемой моделью*

Рассмотренные выше алгоритмы параметрической идентификации, в принципе, позволяют получить оценки матриц уравнений состояния объекта, но при этом предполагается, что весь вектор состояния объекта доступен измерению (и, кроме того, выполнено условие "неисчезающего возбуждения").

На практике возможность измерения полного вектора состояния обычно отсутствует, поэтому актуальной является задача получения алгоритмов идентификации, основанных на измерении только выхода и входа объекта управления. Некоторые методы такого типа рассмотрены в данном и следующем параграфах.

Рассмотрим SISO-объект управления (стационарный и линейный). Поскольку при синтезе регулятора выбор базиса уравнений состояния для SISO систем несуществен, можем ограничиться моделью объекта в виде входо-выходных соотношений, т.е. его передаточной функцией  $W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$  и идентифицировать коэффициенты многочленов  $A(s), B(s)$ .

Итак, рассмотрим модель объекта в виде дифференциального уравнения

$$A(p)y(t) = B(p)u(t), \quad (12.61)$$

где  $p = \frac{d}{dt}$  – оператор дифференцирования, операторные многочлены  $A(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i$ ,  $B(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i$ , ( $m \leq n$ ) содержат  $n+m+1$  неизвестных параметров  $a_i$ ,  $b_j$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $j = 0, \dots, m$ .

Требуется провести идентификацию этих параметров, используя только измерения  $u(t)$ ,  $y(t)$ .

Для решения задачи можно ввести два дополнительных "фильтра состояния" – звена с передаточными функциями  $W_f(s) \triangleq \frac{1}{G(s)}$ , где  $G(s)$  – некоторый гурвицев многочлен, причем  $\deg G(s) \geq n - 1$ .

Подавая на входы фильтров  $W_f(s)$  сигналы  $u(t)$  и  $y(t)$  с выходов, получаем "отфильтрованные" процессы  $u_f(t)$  и  $y_f(t)$ , которые являются решениями уравнений

$$G(p)y_f(t) = y(t), \quad G(p)u_f(t) = u(t). \quad (12.62)$$

Сформируем сигнал "невязки" (ошибки) модели

$$\sigma(\theta, t) = \hat{A}(s, \theta)y_f(t) - \hat{B}(s, \theta)u_f(t). \quad (12.63)$$

Здесь вектор настраиваемых параметров  $\theta$  состоит из оценок коэффициентов  $a_i, b_j, i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, m$ , т.е.  $\theta \triangleq [\hat{a}_{n-1}, \dots, a_0, \hat{b}_m, \dots, \hat{b}_0]^T$ . Многочлены  $\hat{A}(s, \theta), \hat{B}(s, \theta)$  описывают неявную настраиваемую модель. Эта модель не входит в систему как динамическое звено, а присутствует в виде своих коэффициентов. (Заметим, что близкая ситуация имеет место для большинства методов идентификации дискретных систем). Указанные операторные многочлены имеют вид

$$\hat{A}(p, \theta) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \hat{a}_i p^i, \quad \hat{B}(p, \theta) = \sum_{i=0}^m \hat{b}_i p^i, \quad (12.64)$$

Основываясь на методе скоростного градиента, получаем следующий алгоритм идентификации [171]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{a}_i(t) &= -\gamma \sigma(t) y_f^{(i)}(t)^T, \quad i = 0, \dots, n-1, \\ \frac{d}{dt} \hat{b}_j(t) &= -\gamma \sigma(t) u_f^{(j)}(t)^T, \quad j = 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (12.65)$$

Здесь  $\gamma > 0$  – коэффициент усиления алгоритма,  $\sigma(t)$  определяется выражением (12.63), а сигналы  $u_f(t)$ ,  $y_f(t)$  – уравнениями (12.62). Заметим, что для реализации алгоритма не требуется дифференцировать сигналы  $u_f(t)$ ,  $y_f(t)$ , так как производные  $y_f^{(i)}(t)$ ,  $u_f^{(j)}(t)$  могут быть получены как "промежуточный сигнал" фильтров без дифференцирования.

#### 12.6.5. Адаптивные наблюдатели

Аналогичный по постановке рассмотренному выше алгоритм *адаптивных наблюдающих устройств* предназначен для совместного решения взаимосвязанных проблем идентификации параметров (при недостаточной текущей информации о состоянии объекта) и оценивания состояния (при недостаточной априорной информации о его параметрах).

В 8.2 (с. 183) описаны наблюдающие устройства, позволяющие при наличии достаточно точной модели объекта (который предполагается полностью наблюдаемым) получить асимптотическую оценку состояния по измерениям только входа и выхода.

В [2, 7, 116] описаны адаптивные наблюдатели, в которых процесс оценивания состояния совмещен с процедурой идентификации параметров.<sup>17</sup> Рассмотрим один из таких алгоритмов более подробно.

Пусть имеется линейный SISO-объект. Преобразуем его уравнения состояния к специальному базису (см. 1.8), в котором матрицы  $A, B, C$  имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -a_2 & -\lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & -\lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & -\lambda_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad (12.66)$$

$$C = [1, 0, 0, \dots, 0].$$

Здесь  $\lambda_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) – заданные константы;  $a_j, b_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) – подлежащие идентификации неизвестные параметры объекта.

---

<sup>17</sup> Различные адаптивные наблюдатели предложены также в работах [134, 165, 166, 167, 173, 179].

Адаптивное наблюдющее устройство описывается уравнением

$$\dot{\hat{x}}(t) = (\hat{A}(t) - LC)\hat{x}(t) + \hat{B}(t)u(t) + Ly(t), \quad (12.67)$$

где  $\hat{A}(t)$  – матрица оценки  $A$ ;  $\hat{B}(t) \in \mathcal{R}$  – вектор оценки  $B$ , вектор-столбец  $L = [\hat{a}_1(t) - \lambda_1, \hat{a}_2(t), \dots, \hat{a}_n(t)]^T$ ;  $\lambda_1$  – заданная константа;  $\sigma(t) \in \mathcal{R}^n$  – так называемый дополнительный сигнал ошибки, формируемый с помощью системы фильтров.

Алгоритм настройки параметров наблюдателя  $\hat{A}(t)$ ,  $\hat{B}(t)$  имеет вид алгоритмов скоростного градиента и здесь не приводится [2]. Этот алгоритм можно получить исходя из общей идеи, лежащей в основе рассматриваемых здесь адаптивных наблюдателей и описанного выше в 12.6.4. алгоритма Лайона [171] идентификации с неявной настраиваемой моделью [7].

Действительно, рассмотрим дифференциальное уравнение, записанное в операторной форме:

$$(p+\lambda_1)(p+\lambda_2) \cdots (p+\lambda_n)y(t) + \alpha_n(p+\lambda_1) \cdots (p+\lambda_{n-1})y(t) + \cdots \quad (12.68)$$

$$\cdots + \alpha_1y(t) = \alpha_n(p+\lambda_1) \cdots (p+\lambda_{n-1})u(t) + \cdots + \alpha_1u(t),$$

где  $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$  – заданные константы;  $p = \frac{d}{dt}$ .

Раскрывая скобки и приводя подобные члены в (12.68), не-  
трудно получить (при  $m < n$ ) систему линейных уравнений  
для  $\alpha_j$ ,  $\hat{\alpha}_j$  из условия совпадения передаточной функции си-  
стемы (12.68) с исходной передаточной функцией

$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ , числитель и знаменатель которой имеют вид

$$A(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i, B(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i \text{ (ср. с (12.61))}. \text{ Такое преобра-}$$

зование фактически означает переход в пространстве много-  
членов [3] от степенного базиса  $1, s, s^2, \dots, s^n$  к базису из мно-  
гочленов  $1, s + \lambda_1, (s + \lambda_1)(s + \lambda_2), \dots, (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \cdots (s + \lambda_n)$ ,  
или, что то же самое, переход от реализации системы в ви-  
де набора интегрирующих звеньев к набору апериодических  
звеньев.

Введем настраиваемую модель, структура которой опре-  
деляется (12.68), а вместо  $\alpha_j$ ,  $\hat{\alpha}_j$  взяты настраиваемые па-  
раметры  $\hat{\alpha}_j(t)$ ,  $\hat{\alpha}_j(t)$ . Аналогично (12.63) определим *невязку* мо-  
дели, используя в качестве фильтрующего многочлен

$$G(s) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \cdots (s + \lambda_n).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}\delta(t) = & y(t) + \frac{\hat{\alpha}_n(t)}{s + \lambda_n} y(t) + \frac{\hat{\alpha}_{n-1}(t)}{(s + \lambda_n)(s + \lambda_{n-1})} y(t) + \dots \\ & + \frac{\hat{\alpha}_1(t)}{(s + \lambda_n) \dots (s + \lambda_1)} y(t) - \frac{\hat{\alpha}_n(t)}{s + \lambda_n} u(t) - \\ & - \frac{\hat{\alpha}_{n-1}(t)}{(s + \lambda_n)(s + \lambda_{n-1})} u(t) - \dots - \frac{\hat{\alpha}_1(t)}{(s + \lambda_n) \dots (s + \lambda_1)} u(t).\end{aligned}\quad (12.69)$$

Каждое слагаемое в правой части (12.69) может быть получено в результате последовательного "пропускания" сигналов  $u(t)$ ,  $y(t)$  через цепочку ("каскад") фильтров с передаточными функциями  $\frac{1}{s + \lambda_i}$ .

Используя метод скоростного градиента с целевой функцией  $Q_t = \frac{1}{2} \delta^2$ , получим алгоритм адаптации (идентификации)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \alpha_i &= -\gamma \delta(t) \tilde{y}_i(t), \\ \frac{d}{dt} \alpha_i &= -\gamma \delta(t) \tilde{u}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,\end{aligned}\quad (12.70)$$

где  $\tilde{y}_i(t)$ ,  $\tilde{u}_i(t)$  – сигналы на выходах звеньев фильтрующей цепи.

Отличие алгоритма (12.69), (12.70) от (12.62)–(12.65) заключается в различном способе формирования дополнительных сигналов ошибки (переменных  $\tilde{y}_i(t)$ ,  $\tilde{u}_i(t)$ ). В алгоритме (12.62)–(12.65) переменная  $\tilde{y}_i(t)$  является  $i$ -й производной от  $\tilde{y}_1(t)$ , а в (12.69)  $\tilde{y}_i(t)$  получается пропусканием  $y(t)$  через цепочку из  $i$  фильтрующих апериодических звеньев. Другими словами, в (12.69) выбран иной базис для реализации фильтров состояния. Заметим, что для получения оценок  $\hat{a}_i$ ,  $\hat{b}_i$  коэффициентов знаменателя и числителя передаточной функции объекта  $W(s)$  по алгоритму (12.70) требуется выполнять пересчет оценок  $\hat{\alpha}_j(t)$ ,  $\hat{\beta}_j(t)$ , в то время, как алгоритм (12.65) дает оценки  $\hat{a}_i$ ,  $\hat{b}_i$  непосредственно.

Для использования адаптивных наблюдателей в замкнутых системах управления, как и других идентификационных алгоритмов, имеется ряд препятствий.

Во-первых, из сходимости оценки состояния не следует, вообще говоря, асимптотическая сходимость оценок параметров к их истинным значениям. Как и в других алгоритмах, для этого требуется наличие "неисчезающего возбуждения", требуется, чтобы объект достаточно полно возбуждал-

ся входным сигналом. Для замкнутых систем следует применять дополнительные меры обеспечения этого условия. Кроме того, на процесс идентификации могут сильно влиять помехи в системе. Наконец, использование оценок состояния в законе управления затрудняется тем, что в адаптивных наблюдателях они получаются в некотором специальном базисе, пересчет от которого к заданному (исходному) базису зависит от параметров объекта; оценки последних, как отмечено выше, могут значительно отличаться от истинных значений.



# Благодарю за внимание

Заслуженный профессор СПбГЭТУ «ЛЭТИ»,  
д.т.н., профессор В.В. Путов

Кафедра систем автоматического управления  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)  
Санкт-Петербург, Россия  
[vputov@mail.ru](mailto:vputov@mail.ru)