Действительно:

$$\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(X(t)X^{-1}(t_0)\right) = \frac{dX(t)}{dt}X^{-1}(t_0) = AX(t)X^{-1}(t_0) = A\Phi(t,t_0).$$

Из свойств 3 и 1 следует, что $\Phi(t,t_0)$ – фундаментальная матрица, для которой $X(t_0) = I$.

4. $\Phi^{-1}(t,t_0) = \Phi(t_0,t)$.

Действительно

$$\Phi^{-1}(t,t_0) = \left(X(t)X^{-1}(t_0)\right)^{-1} = X(t_0)X^{-1}(t) = \Phi(t_0,t).$$

Переходную матрицу используют для построения решения систем линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений.

Решение задачи Коши систем линейных однородных дифференциальных уравнений через фундаментальную матрицу

Рассмотрим следующую задачу Коцш:

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x \in R^n, \; t \in [t_0, T]$$

Докажем, что решение этой задачи имеет вид

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0, .$$

Доказательство. Продифференцируем по t левую и правую часть решения:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)x_0 = A\Phi(t,t_0)x_0 = Ax(t).$$

Второе равенство следует из свойства 3 переходной матрицы, третье равенство – из определения решения через переходную матрицу. Таким образом, предложенное решение удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений. Осталось показать, что предложенное решение удовлетворяет начальному условию, для чего вычислим

$$x(t_0) = \Phi(t_0,t_0)x_0 = Ix_0 = x_0$$

Следовательно, переходная матрица позволяет вычислить решение ЛОУ для любого момента времени t через решение в другой момент времени t_0.

Вычисление переходной матрицы

Переходная матрица удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt} = A\Phi(t,t_0).$$

с начальным условием $\Phi(t_0,t_0) = I.$.

Требуется найти аналитическое решение этого матричного уравнения. Используем следующий прием: проинтегрируем обе части уравнения в пределах $[t_0,t]$ по переменной t:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\Phi(\tau,t_0)}{d\tau} \cdot d\tau = \int_{t_0}^{t} A\Phi(\tau,t_0) d\tau \qquad (4.7).$$

Учитывая, что в левой части содержится полный дифференциал, а матрица A не зависит от τ, получим

$$\Phi(t,t_0) - \Phi(t_0,t_0) = \int_{t_0}^{t} A\Phi(\tau,t_0) d\tau,$$

или

$$\Phi(t,t_0) = I + A\int_{t_0}^{t} \Phi(\tau,t_0) d\tau,$$

Подынтегральное выражение можно представить по этой же формуле, то есть

$$\Phi(t,t_0) = I + A\int_{t_0}^{t}\left(I + A\int_{t_0}^{\tau} \Phi(\tau_1,t_0) d\tau_1 \right) d\tau = I + A(t - t_0) + A^2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} \Phi(\tau_1,t_0) d\tau_1 d\tau,$$

Подставив (4.7) в подынтегральное выражение, получим:

$$\Phi(t,t_0) = I + A(t-t_0) + A^2 \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}\left(I + A\int_{t_0}^{\tau_1}\Phi(\tau_2,t_0)d\tau_2 \right)d\tau_1 d\tau =$$

$$= I + A(t-t_0) + A^2\int_{t_0}^{t}(\tau - t_0)d\tau + A^3\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}\int_{t_0}^{\tau_1}\Phi(\tau_2,t_0)d\tau_2 d\tau_1 d\tau =$$

$$= I + A(t-t_0) + A^2\frac{(t-t_0)^2}{2!} + A^3\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}\int_{t_0}^{\tau_1}\Phi(\tau_2,t_0)d\tau_2 d\tau_1 d\tau.$$

продолжая итерационно этот процесс, получим выражение для переходной матрицы в виде сходящегося матричного ряда

$$\Phi(t,t_0) = I + A(t-t_0) + A^2\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \ldots + A^n\frac{(t-t_0)^n}{n!} + \ldots.$$

Рассмотрим скалярную функцию $y(t) = e^{at}$. Разложим ее в ряд Тейлора в окрестности точки t_0.

$$y(t) = y(t_0) + \frac{y'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{y''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + \ldots.$$

Производные от экспоненты вычисляют по формуле

$$y^{(k)}(t_0) = a^k e^{at_0},$$

В результате получим для экспоненты

$$e^{at} = e^{at_0} + e^{at_0}a(t-t_0) + e^{at_0}\frac{a^2(t-t_0)^2}{2!} + \ldots + e^{at_0}\frac{a^n(t-t_0)^n}{n!} + \ldots.$$

откуда

$$e^{a(t-t_0)} = 1 + a(t-t_0) + \frac{a^2(t-t_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n(t-t_0)^n}{n!} + \ldots.$$

Из сравнения полученного ряда с выражением для переходной матрицы следует, что переходная матрица представляет собой ряд для матричной экспоненты

$$\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)} = I + A(t-t_0) + \frac{A^2}{2!}(t-t_0)^2 + \ldots + \frac{A^n}{n!}(t-t_0)^n + \ldots.$$

Матричная экспонента обладает всеми свойствами, присущими скалярной экспоненциальной функции, в частности

$$\Phi(t,t_0)=e^{A(t-t_0)}=e^{At}e^{-At_0}.$$

Численное решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

Решение СЛОДУ определяется с помощью переходной матрицы $\Phi(t,t_0)=e^{A(t-t_0)}$ для вектора начальных условий $x(t_0)=x_0$ следующим выражением:

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0.$$

Пусть требуется получить решение СЛОДУ в узлах равномерной сетки

$$t_i=t_0+ih, \quad i=0,\ldots,N$$

с известным шагом h. Для этого рассмотрим решения в двух последовательных узлах сетки, например:

$$x(t_1)=x(t_0+h)=e^{A(t_0+h-t_0)}x(t_0)=e^{Ah}x_0,$$

$$x(t_2)=x(t_0+2h)=e^{A(t_0+2h-t_0)}x(t_0)=e^{2Ah}x_0=e^{Ah}e^{Ah}x_0=e^{Ah}x_1.$$

Продолжая вычисления указанным способом, получим общее выражение для решения СЛОДУ на узлах равномерной сетки:

$$x(t_{i+1})=e^{Ah}x(t_i).$$

Таким образом, решение СЛОДУ задается рекуррентным разностным уравнением с постоянной (для фиксированного шага сетки) матрицей системы

$$\Phi=e^{Ah}.$$

Для вычисления матрицы Φ можно воспользоваться тем, что матричный ряд

$$e^{Ah}=I+Ah+\frac{A^2h^2}{2!}+\ldots+\frac{A^nh^n}{n!}+\ldots$$

сходится абсолютно для любого h, в связи с чем величину $\Phi=e^{Ah}$ можно вычислять путем непосредственного суммирования ряда из N членов

$$\Phi=I+\sum_{i=1}^{N}\frac{A_1^i}{i!},$$

где $A_1 = Ah$.

Решение системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений

Как было выведено ранее, математическая модель линейной динамической системы представляет собой задачу Коши для СЛНДУ:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x \in R^n, u \in R^l.$$

где вектор-функция $u(t)$ известна для любого момента времени. Найдем решение СЛНДУ. Для этого произведем замену переменных

$$z(t) = \Phi(t_0, t)x(t),$$

где $x(t)$ – решение СЛНДУ, $\Phi(t_0, t) = e^{A(t_0 - t)} = \Phi(t, t_0)^{-1}$, $\Phi(t, t_0)$ – переходная матрица для СЛОДУ

$$\dot{x}(t) = Ax(t).$$

Продифференцировав величину

$$z(t) = e^{At_0} e^{-At} x(t)$$

по переменной t с учетом того, что $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ в силу СЛНДУ, получим:

$$\frac{dz}{dt} = e^{At_0}\left(- Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\left(Ax(t) + Bu(t)\right)\right) =$$
$$= e^{At_0}\left(- Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t)\right) = e^{At_0}e^{-At}Bu(t).$$

При переходе к последнему равенству воспользовались равенством

$$Ae^{-At} = e^{-At}A,$$

которое следует из представления e^{-At} в виде ряда.

Интегрируя выражение

$$\frac{dz}{dt} = e^{At_0}e^{-At}Bu(t)$$

на интервале $[t_0, t]$ получим:

$$z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t_0 - \tau)}Bu(\tau)d\tau.$$