

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

## Лабораторная работа №5.

### **ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ. МАКСИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЕ**

**Цель работы:** исследовать задачу максимального быстродействия, особенности ее решения на основе принципа максимума Понтрягина, освоить аналитические и численные методы решения.

#### **Основные положения**

Основная информация о принципе максимума Понтрягина изложена в теоретической части к лабораторной работе 4. Рассмотрим особенности решения задачи максимального быстродействия.

Специфика задач на максимальное быстродействие начинает сказываться при записи критерия качества. Для этих задач критерием качества является следующий функционал

$$J = \int_0^T dt \quad (5.1)$$

Таким образом, требуется найти такое управление, при котором перевод объекта управления из начального состояния в конечное выполняется за минимально возможное время.

Последовательность решения рассматриваемых задач не отличается от процедуры решения других задач, решаемых на основе принципа максимума:

- составление гамильтониана;
- определение зависимости оптимального управляющего воздействия от сопряженных переменных на основе максимизации гамильтониана;
- составление сопряженной системы дифференциальных уравнений;
- составление общей системы дифференциальных уравнений, среди решений которой и находится искомое управляющее воздействие.

При рассмотрении объектов управления, описываемых линейными уравнениями, задачи максимального быстродействия имеют некоторую особенность. Дело в том, что соответствующая этим задачам функция Гамильтона содержит управление в степени не выше первой и, следовательно, определение максимального значения гамильтониана не может быть выполнено путем приравнивания нулю его первой производной по управлению. Поиск макси-

максимального значения гамильтониана в этом случае производится путем анализа возможных комбинаций между управлением и переменными сопряженной системы уравнений. При этом оказывается, что оптимальное управление должно быть максимально по модулю внутри интервала управления и в некоторых его точках мгновенно менять знак в соответствии со знаком некоторой функции от сопряженных переменных. В условиях такого слабого влияния сопряженной системы уравнений на управляющее воздействие возникает возможность вообще отказаться от решения сопряженной системы уравнений и рассматривать моменты смены знака управления (моменты переключения) как самостоятельные переменные.

Более подробно рассмотрим решение задачи максимального быстродействия на следующем примере.

Объект управления:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; & x_1(0) &= 1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= u; & x_2(0) &= 0 \\ |u| &\leq u_{\max} = 1 & x_1(T) &= 0 \\ & & x_2(T) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Критерий качества имеет вид (5.1). Гамильтониан динамической системы:

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - 1$$

Как видно, гамильтониан линейно зависит от функции управления, и найти оптимальное управление путем вычисления производной от гамильтониана не удастся. Однако по условию функция управления ограничена значением  $u_{\max}$ , поэтому максимум гамильтониана будет соответствовать максимальному по модулю значению функции управления, а знак будет зависеть от сопряженной переменной  $\psi_2$ :

$$u_0 = u_{\max} \operatorname{sign}(\psi_2). \quad (5.3)$$

Сопряженная система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= 0 \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\psi_1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Общая система уравнений получается путем объединения (5.2), (5.3), (5.4):

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\
\frac{dx_2}{dt} &= \text{sign}(\psi_2) \\
\frac{d\psi_1}{dt} &= 0 \\
\frac{d\psi_2}{dt} &= -\psi_1
\end{aligned} \quad (5.5)$$

Поскольку в системе уравнений (5.5) уравнения для сопряженных переменных не зависят от состояний объекта управления, то выражения для  $\psi_i(t)$  можно найти только из системы сопряженных уравнений (5.4). Применяя метод преобразования Лапласа получаем (подробнее решение приведено в лабораторной работе 4):

$$\begin{aligned}
\psi_1(t) &= \psi_1(0) \\
\psi_2(t) &= \psi_2(0) - t\psi_1(0)
\end{aligned}$$

Анализируя полученные выражения можно сделать вывод о том, что искомое управляющее воздействие имеет вид прямоугольной волны, которая меняет знак не более одного раза. Очевидно, что момент смены знака управления (*момент переключения*) должен выбираться из условия обеспечения заданных граничных условий для состояний объекта управления.

Таким образом, можно упростить задачу, и вместо системы (5.5) рассматривать систему (5.2), в которой функция управления имеет вид:

$$u_0(t) = \begin{cases} -u_{\max}, & t \leq t_1 \\ u_{\max}, & t_1 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad \text{или} \quad u_0(t) = \begin{cases} u_{\max}, & t \leq t_1 \\ -u_{\max}, & t_1 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

где  $t_1$  - момент переключения, который необходимо определить.

**Аналитический способ определения момента переключения.** При использовании этого способа нужна получить аналитическое выражение для реакции системы на управляющей воздействие прямоугольной формы. Для этого можно использовать метод преобразований Лапласа.

Преобразованная по Лапласу система уравнений объекта управления, учитывающая воздействие прямоугольной волны имеет вид:

$$\begin{aligned}
sx_1 - x_2 &= 1 \\
sx_2 - u(s) &= 0 \\
u(s) &= -\frac{1}{s} + \frac{2e^{-st_1}}{s}
\end{aligned}$$

Из этой системы уравнений можно получить следующие выражения для изображений по Лапласу переменных состояния объекта управления:

$$x_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^3} + \frac{2e^{-st_1}}{s^3}$$

$$x_2(s) = -\frac{1}{s^2} + \frac{2e^{-st_1}}{s^2}$$

затем, после выполнения обратного преобразования Лапласа, собственно аналитические выражения для переходных процессов во времени:

$$x_1(t) = 1 - 0.5t^2 + 1(t - t_1) \cdot (t - t_1)^2;$$

$$x_2(t) = -t + 2 \cdot 1(t - t_1) \cdot (t - t_1)$$

где  $1(t)$  – единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда).

Путем подстановки в решения граничных условий, можно найти и значение момента переключения  $t_1$ , и значение момента времени перевода объекта управления в требуемое состояние  $T$ .

$$\begin{aligned} x_1(T) = 1 - 0.5T^2 + (T - t_1)^2 &= 0 \\ x_2(T) = -T + 2(T - t_1) &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} t_1 &= 1 \\ T &= 2 \end{aligned}$$

**Численный способ определения момента переключения** можно реализовать через процедуру оптимизации.

Для возможности применения при решении задачи оптимального управления алгоритмов поиска минимума задачу максимального быстродействия сформулируем следующим образом:

Допустим, что управляющее воздействие является кусочно-постоянной функцией времени, которая меняет знак в момент времени  $t_1$ , а перевод объекта управления в конечное состояние происходит в момент времени  $T$ . Требуется определить такие значения параметров  $t_1$  и  $T$  при которых достигается минимальное значение невязки между фактическими и требуемыми значениями состояний объекта управления в момент  $T$ . Значение невязки вычисляется как сумма квадратов разностей между фактическими и заданными значениями состояний объекта управления в момент времени  $T$ .

Вычисление параметров оптимального управления методом поиска минимума может быть выполнено с помощью следующей MATLAB-программы:

```
%% Скрипт Main5.m
```

```
%вектор начальных приближений для моментов
```

```
переключения и завершения интервала управления
```

```

ti0=[1.5 1.8];
T=fminsearch('costfunc5',ti0)

%%Файл-функция costfunc.m
function f=costfunc5(T)
global t1
t=[]; x=[]; u=[];
t1=T(1);
h_u=@(t) (t>t1)-(t<=t1); % прямоугольная волна
h_odefun = @(t,x) [x(2);h_u(t)];
[t,x]=ode45(h_odefun,[0 abs(T(2))],[1 0]);
%вычисление невязки
f=x(end,1)^2+x(end,2)^2;
plot(t,x(:,1),t,x(:,2),t,h_u(t))
pause(0.5)

```

Стоит отметить, что данный способ не гарантирует хороший результат, так как функция FMINSEARCH чувствительна к начальным условиям, и может работать нестабильно, если в качестве проектного параметра указан интервал интегрирования. Оптимизация будет работать эффективно, если начальные условия для поиска выбраны сравнительно близко к оптимальным значениям.

**Графический способ определения моментов переключения** основан на единственности решения дифференциального уравнения.

Этот способ отличается большой наглядностью, но применим к объектам управления малого порядка, т.к. поведение только таких объектов полностью описывается фазовым портретом. При использовании этого способа задача оптимального управления решается путем построения линии переключения – геометрического места точек фазового пространства объекта управления, из которых перевод объекта в конечное состояние возможен без переключения знака управления. В том случае, когда линия переключения найдена, процедура управления объектом заключается в следующем:

- к объекту прикладывается управление некоторого знака и под действием этого управления объект движется до тех пор, пока его изображающая точка не окажется на линии переключения

- при попадании изображающей точки на линию переключения выполняется смена знака управляющего воздействия и его изображающая точка начинает двигаться по линии переключения к целевому состоянию.

Таким образом, для решения задачи требуется: 1) построить линию переключения; 2) определить момент переключения, как время достижения этой линии.

Для построения линии переключения можно применить так называемое интегрирование в обратном времени. Иначе говоря, если известна конечная точка траектории и функция управления постоянна, можно определить точку на фазовой плоскости, в которой система находилась в предыдущий момент времени. Значит, эта точка принадлежит линии переключения. Аналогично рассуждая, можно найти и все предыдущие точки линии переключения. Процедура интегрирования в обратном времени математически эквивалентна обычному интегрированию с заменой переменной  $t$  на  $-t$ . При применении процедуры численного интегрирования ode45 обратное интегрирование также осуществляется перестановкой начального и конечного времени во втором аргументе.

Можно отметить, что линия переключения имеет два ветви: одна из них соответствует положительному значению управляющего воздействия, а другая – отрицательному.

Программное обеспечение решения задачи максимального быстродействия включает:

- построение линии переключения путем численного решения его уравнений записанных в обратном времени из начальной точки, соответствующей конечному состоянию;
- построение фазовой траектории объекта путем численного решения его уравнений записанных в обычном времени из начальной точки, соответствующей начальному состоянию (знак управляющего воздействия противоположен знаку, использованному при построении линии переключения);
- определение точки пересечения фазовых траекторий на графике (например, функцией GINPUT, либо программным способом);
- определение момента достижения точки пересечения – момента переключения и общего времени управления.

Следует отметить, что данный способ может быть скомбинирован с численным: приблизительно можно найти момент переключения по графику и уточнить его значение методом оптимизации.

## Содержание работы

1. Аналитическое решение задачи быстродействия для параметров, заданных в соответствии с вариантом. Начальные и граничные условия:

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = 0, x_1(T) = 0, x_2(t) = 0.$$

2. Численное решение задачи методом оптимизации, построение графиков переходных процессов

3. Решение задачи графическим способом через линию переключения, построение графиков фазовых траекторий.

## Индивидуальные задания

Таблица 5.1. Исходные данные для лабораторной работы

Вариант	Объект управления	$u_{\max}$	$x_{10}$	Вариант	Объект управления	$u_{\max}$	$x_{10}$
1	$\frac{dx_1}{dt} = 1.5x_2$ $\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$	1.3	-1.6	13	$\frac{dx_1}{dt} = 0.5x_2$ $\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$	1.2	2
2	$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 1.5x_2$ $\frac{dx_2}{dt} = u$	1.6	1.3	14	$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 0.5x_2$ $\frac{dx_2}{dt} = u$	1.5	1.5
3	$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 1.5x_2$ $\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u$	1.4	-1.8	15	$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 0.5x_2$ $\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u$	1.2	-2
4	$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + 1.5x_2$ $\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$	1.6	1.1	16	$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + 0.5x_2$ $\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$	1.5	-1.5
5	$\frac{dx_1}{dt} = x_2$ $\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$	1.2	2	17	$\frac{dx_1}{dt} = 0.5x_2 + u$ $\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$	2	2
6	$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2$ $\frac{dx_2}{dt} = u$	1.5	1.5	18	$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 1.5x_2 + u$ $\frac{dx_2}{dt} = u$	1.4	1.6
7	$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2$ $\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u$	1.2	-2	19	$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 0.5x_2 + u$ $\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u$	1.5	-1.5
8	$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2$ $\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$	1.5	-1.5	20	$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + 0.5x_2 + u$ $\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u$	1.4	-1.6
9	$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + u$ $\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$	2	2	21	$\frac{dx_1}{dt} = 1.5x_2 + u$ $\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$	1.5	-1.2



Вариант	Объект управления	$u_{\max}$	$x_{10}$	Вариант	Объект управления	$u_{\max}$	$x_{10}$
10	$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2 + u$ $\frac{dx_2}{dt} = u$	1.4	1.6	22	$\frac{dx_1}{dt} = -0.5x_1 + 1.5x_2 + u$ $\frac{dx_2}{dt} = u$	1.4	2
11	$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + u$ $\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u$	1.5	-1.5	23	$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 1.5x_2 + u$ $\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u$	1.7	-1.3
12	$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2 + u$ $\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u$	1.4	-1.6	24	$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + 1.5x_2 + u$ $\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u$	1.3	1.7