

Лекция 2. Системы линейных алгебраических уравнений

2.1 Решение систем линейных алгебраических уравнений

2.1.1 Определения и основные свойства матриц

Для начала напомним некоторые сведения из линейной алгебры.

Рассмотрим систему из n линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными x_1, \dots, x_n :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Запишем СЛАУ в матричной форме, для этого введем векторы

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ и матрицу } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда СЛАУ примет вид

$$Ax = b.$$

Определение: A^{-1} — обратная матрица для квадратной матрицы A , если $AA^{-1} = I$, где I — единичная матрица.

Определение: A — невырожденная, если для A существует A^{-1} .

Теорема: следующие утверждения эквивалентны:

1. A — невырождена;
2. $\det(A) \neq 0$;
3. линейная однородная система $Ax = 0$ имеет единственное решение $x = 0$;
4. для любого b система $Ax = b$ имеет единственное решение;
5. столбцы (строки) матрицы A линейно независимы, то есть для любой комбинации чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все из которых равны нулю, линейная комбинация

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Определение: ранг матрицы — $\text{rank}(A)$ — число линейно независимых столбцов (строк).

Следствие: A — невырожденная, если и только если A — полного ранга ($\text{rank}(A)=n$).

Определение: комплексное или вещественное число λ и вектор $x \neq 0$, $x \in R^n$ называются собственным значением и собственным вектором матрицы A , если они удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$Ax = \lambda x$$

Собственный вектор — это такой вектор, который, будучи умножен на матрицу A , изменяет лишь свою длину.

Из определения собственного значения следует:

$$Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0.$$

Так как x — собственный вектор и по определению $x \neq 0$, то в соответствии с теоремой $A - \lambda I$ — вырожденная матрица, а $\det(A - \lambda I) = 0$. Левая часть последнего выражения — полином степени n относительно комплексной переменной λ , называемый характеристическим полиномом матрицы, следовательно собственные значения матрицы есть корни характеристического полинома матрицы A , их ровно n с учетом кратности.

Определение: совокупность всех собственных значений $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ матрицы A называется спектром матрицы A , а величина

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

называется спектральным радиусом.

Определение: нормой матрицы A называется

$$\|A\| = \sup_{x \in R^n} \frac{|Ax|}{|x|} = \rho(A^T A)^{1/2}.$$

Решение СЛАУ методом исключения

Одной из наиболее распространенных задач является задача решения СЛАУ

$$Ax = b,$$

для заданных квадратной матрицы A и вектора b .

Если A — невырожденная матрица, то для нее существует обратная A^{-1} . Умножая СЛАУ на A^{-1} слева, получим решение:

$$x = A^{-1}b.$$

Полученный метод решения СЛАУ неэффективен в силу большого времени вычислений.

Рассмотрим более эффективный алгоритм решения СЛАУ – метод исключения Гаусса. Этот алгоритм с некоторыми модификациями используют для решения СЛАУ до двухсотого порядка.

Вначале продемонстрируем работу алгоритма на примере следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \end{cases}$$

которую запишем в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Введем расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

На первом шаге алгоритма исключим x_1 из второго и третьего уравнений системы. Для исключения x_1 во втором уравнении, из второго

уравнения вычтем первое, умноженное на $l_{21} = 2/4$. Для исключения x_1 в третьем уравнения из него вычтем первое, умноженное на $l_{31} = -1/4$. В результате после первого шага исключения получим

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 3 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

На втором шаге алгоритма исключим x_2 в третьем уравнении, для чего из третьего уравнения вычтем первое, умноженное на $l_{32} = -1/2$. После второго шага исключения получим

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

За два шага закончилась первая часть алгоритма — приведение системы к треугольной форме. Решение полученной треугольной системы осуществляется снизу вверх

$$x_3 = \frac{4}{4} = 1;$$

$$x_2 = 2(3 - 3x_3) = 0;$$

$$x_1 = \frac{1}{4}(6 - 2x_3 + 9x_2) = 1.$$

Перейдем к построению алгоритма исключения для СЛАУ общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Шаг 1: исключим x_1 из уравнений с номерами $2, \dots, n$ путем вычитания:

из второго уравнения первого, умноженного на $l_{21} = a_{21}/a_{11}$;

...

из n -ого уравнения первого, умноженного на $l_{n1} = a_{n1}/a_{11}$.

После первого шага система уравнений преобразуется к виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}. \end{cases}$$

где $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - l_{i1}a_{1j}$, $b_i^{(1)} = b_i - l_{i1}b_1$, $l_{i1} = a_{i1}/a_{11}$, $i, j = 2, \dots, n$

Шаг 2: исключим x_2 из уравнений с номерами $3, \dots, n$ путем вычитания:

Из третьего уравнения второго, умноженного на $l_{32} = a_{32}/a_{22}$

....

Из n -ого уравнения второго, умноженного на $l_{n2} = a_{n2}/a_{22}$.

После второго шага получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \vdots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}. \end{cases}$$

После $n-1$ шага исключения исходная система придет к треугольной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

где

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - l_{ik}b_k^{(k-1)}, a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - l_{ik}a_{ij}^{(k-1)},$$

$k=1, \dots, n-1$ – номер шага исключения, $i=k+1, \dots, n$ – номер строки, $j=k+1, \dots, n$ – номер столбца.

Решение треугольной системы осуществляется путем обратной подстановки $k=n, n-1, \dots, 1$.

$$x_k = \left(b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k-1)} x_j \right) / a_{kk}^{(k-1)}.$$

При реализации алгоритма в виде программы элементы $a_{ij}^{(k)}$ и $b_i^{(k)}$ обычно хранят на месте исходных элементов a_{ij} , b_i , поэтому их прежние значения будут изменены. Приведем программу, реализующую алгоритм решения СЛАУ методом исключения.

LU-факторизация матриц

В процессе исключения по Гауссу исходная матрица СЛАУ A приведена к верхней треугольной матрице

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

где элементы матрицы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю. Введем в рассмотрение нижнюю треугольную матрицу, на главной диагонали которой расположены единицы, а под главной диагональю помещены l_{ij} , полученные в процессе приведения A к верхнетреугольному виду

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что

$$A = LU,$$

то есть в процессе решения СЛАУ с использованием метода исключения получено разложение (факторизация) исходной матрицы на нижнетреугольную с единичной главной диагональю и верхнетреугольную.

Если проведена LU-факторизация матрицы СЛАУ $Ax = b$, то решение системы может быть получено следующим образом. Исходную систему перепишем в виде

$$LUx = b.$$

Введем обозначение $Ux = y$, тогда исходная система сведется к двум СЛАУ

$$Ly = b, Ux = y,$$

каждая из которых проще, чем исходная, так как имеет треугольную матрицу.

Решение первой системы -

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

легко вычисляется прямой подстановкой

$$y_1 = b_1,$$

$$y_2 = b_2 - l_{21}y_1,$$

...

$$y_n = b_n - l_{n1}y_1 - \dots - l_{n,n-1}y_{n-1},$$

или, в общем виде:

$$y_k = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}y_i$$

После того как получен вектор y , можно решить вторую треугольную систему

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

путем обратной подстановки

$$x_n = \frac{1}{u_{nn}} y_n,$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1,n-1}} (y_{n-1} - u_{n-1,n} x_n),$$

...

$$x_1 = \frac{1}{u_{11}} \left(y_1 - \sum_{j=2}^n u_{1j} x_j \right).$$

или, в общем виде:

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left(y_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j \right), \quad k = n, n-1, \dots, 1.$$

Таким образом, применение LU-факторизации сводит решение исходной СЛАУ к последовательному решению двух СЛАУ с треугольными матрицами. Если требуется решить несколько СЛАУ о одной и той же матрицей A и различными правыми частями

$$Ax_i = b_i; x_i, b_i \in R^n, \quad i = 1, \dots, n,$$

то предварительная LU-факторизация матрицы системы A позволяет существенно сократить трудоемкость решения n систем, сводя задачу к решению $2n$ СЛАУ с треугольными матрицами

$$Ly_i = b_i,$$

$$Ux_i = y_i.$$

Вычисление определителя и обратной матрицы

Определитель матрицы A является побочным продуктом

LU-факторизации матрицы A , действительно:

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U).$$

Второе равенство получено на основании того, что определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей.

Вычислим определитель каждого из сомножителей. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\det \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \dots \cdot u_{nn},$$

следовательно

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n u_{ii}.$$

В MATLAB реализована функция вычисления определителя матрицы $D = \det(A)$.

Перейдем к рассмотрению вопроса о вычислений обратной матрицы. По определению обратная матрица X удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению

$$AX = I$$

Представим матрицы X и I в виде наборов их столбцов

$$X = (x_1 | x_2 | \dots | x_n); \quad x_i \in R^n;$$

$$I = (e_1 | e_2 | \dots | e_n); \quad e_i \in R^n;$$

где e_i – вектор, который имеет все нулевые элементы за исключением i -ого, равного 1. Тогда матричное уравнение для обратной матрицы можно переписать в виде

$$A(x_1 | x_2 | \dots | x_n) = (e_1 | e_2 | \dots | e_n),$$

то есть представляет собой n СЛАУ вида

$$Ax_i = e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, для вычисления обратной матрицы необходимо решить n СЛАУ и составить из полученных решений матрицу. Учитывая, что все n СЛАУ имеют одинаковую матрицу A , целесообразно произвести ее LU-факторизацию и свести задачу вычисления обратной матрицы к решению $2n$ СЛАУ с треугольными матрицами

$$Ly_i = e_i,$$

$$Ux_i = y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обусловленность СЛАУ. Анализ ошибок решения СЛАУ

Определение: СЛАУ плохо обусловлена, если малые изменения элементов матрицы A или вектора b приводят к большим изменениям в решении.

Рассмотрим пример плохо обусловленной СЛАУ:

$$0,8x_1 + 0,4x_2 = 1,$$

$$0,79x_1 + 0,41x_2 = \varepsilon.$$

Решения этой системы x_0 для $\varepsilon = 0$ и x_ε для малого значения ε будут сильно отличаться. Это связано с тем, что на плоскости x_1x_2 уравнения системы задают “почти” параллельные прямые 1 и 2 (рис. 2.1). Следовательно, уравнения являются “почти” линейнозависимыми, и при их малом изменении относительно друг друга точка пересечения прямых будет значительно меняться.

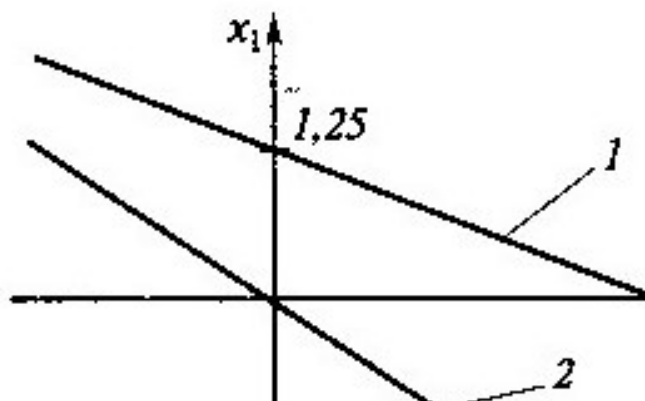


Рисунок 2.1

Получим количественную характеристику обусловленности СЛАУ. Рассмотрим исходную систему

.

Изменим вектор правой части таким образом, что $b = b_0 + \Delta b$, при этом изменится решение СЛАУ $x = x_0 + \Delta x$. Найдем зависимость Δx от Δb :

$$A(x_0 + \Delta x) = b_0 + \Delta b,$$

$$Ax_0 + A\Delta x = b_0 + \Delta b.$$

Учитывая, что $Ax_0 = b_0$ имеем

$$A\Delta x = \Delta b,$$

$$\Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

Вычислим зависимость норм векторов $\|\Delta x\|$ и $\|\Delta b\|$. По правилу треугольников имеем

$$\|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\|,$$

поэтому, если $\|A^{-1}\|$ мала, то большие изменения $\|\Delta b\|$ приведут к малым изменениям $\|\Delta x\|$. Удобно иметь дело с относительными величинами

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x_0\|} \text{ и } \frac{\|\Delta b\|}{\|b_0\|}.$$

Учитывая, что $\|b_0\| = \|Ax_0\|$, умножая полученное неравенство на $\|b_0\|$, получим:

$$\|\Delta x\| \cdot \|b_0\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \|b_0\| = \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \|Ax_0\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \|A\| \cdot \|x_0\|$$

Разделим обе части неравенства на $\|x_0\| \cdot \|b_0\|$:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x_0\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b_0\|}.$$

Величина

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$$

называется числом обусловленности матрицы. Как следует из полученного неравенства, это число характеризует относительное изменение нормы решения СЛАУ в зависимости от относительного изменения нормы правой части системы.

Для вычисления числа обусловленности матрицы воспользуемся определением нормы матрицы

$$\|A\|^2 = \rho(A^T A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A^T A)|,$$

где $\lambda_i(A^T A)$ – собственное число матрицы $A^T A$. Вычислим

$$\|A^{-1}\| = \rho\left((A^{-1})^T A^{-1}\right)$$

Учитывая симметричность $(A^{-1})^T A^{-1}$ и коммутативность операций транспонирования и обращения, получим:

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T A)^{-1}.$$

Поэтому

$$\|A^{-1}\|^2 = \rho\left((A^{-1})^T A^{-1}\right) = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\lambda_i(A^T A)} = \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^T A)}.$$

Из определения числа обусловленности

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \left[\frac{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^T A)}{\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^T A)} \right]^{1/2} \geq 1.$$

Вычисление собственных значений матрицы

Рассмотрим наиболее простой алгоритм вычисления собственных значений матрицы, основанный на вычислении корней характеристического полинома матрицы – алгоритм А. Н. Крылова. Алгоритм является следствием теоремы Гамильтона-Кэли.

Теорема: квадратная матрица A является корнем своего характеристического полинома

$$p(s) = \det(Is - A) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0,$$

то есть матрица A удовлетворяет матричному уравнению

$$A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \dots + p_1A + p_0I = 0.$$

Алгоритм А.Н. Крылова основан на вычислении коэффициентов характеристического полинома $p(s)$ матрицы, а собственные значения вычисляют как корни характеристического полинома

$$p(s_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для вычисления коэффициентов характеристического полинома воспользуемся матричным уравнением, следующим из теоремы Гамильтона-Кэли. Умножим обе части этого уравнения на произвольный $x_0 \neq 0 \in R^n$

$$A^n x_0 + p_{n-1}A^{n-1}x_0 + \dots + p_1Ax_0 + p_0x_0 = 0,$$

введем обозначения $x_i = A^i x_0$, после чего исходное матричное уравнение сведется к векторному уравнению:

$$x_n + p_{n-1}x_{n-1} + \dots + p_1x_1 + p_0x_0 = 0.$$

Из коэффициентов $\{p_i\}_{i=0}^{i=n-1}$ составим вектор

$$p = (p_{n-1} \ p_{n-2} \ \dots \ p_1 \ p_0)^T,$$

а из векторов $\{x_i\}_{i=0}^{i=n-1}$ матрицу

$$X = (x_{n-1} \mid x_{n-2} \mid \dots \mid x_1 \mid x_0).$$

В результате получена СЛАУ относительно вектора неизвестных коэффициентов характеристического полинома

$$Xp = -x_n$$

Решая эту СЛАУ, получим характеристический полином, корни которого есть собственные значения матрицы.