ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Лабораторная работа №2

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДОМ ПОИСКА

Цель работы: освоить машинный метод оптимизации Нелдера-Мида для решения статических и динамических задач оптимизации, освоить графические способы представления результатов оптимизации.

Основные положения

Под оптимизацией в широком смысле понимается выбор одного варианта из множества допустимых вариантов, который является лучшим в некотором заранее определенном смысле. Для формальной постановки задачи оптимизации основным понятием является *целевая функция* $f(x_1, x_x, \ldots, x_n)$, определяющая цель оптимизации. Как правило, целевая функция является скалярной $(f \in R^1)$. Если значением целевой функции является вектор, говорят о векторной оптимизации, которая в настоящей работе не рассматривается.

Аргументы целевой функции $x_1, \ldots, x_n$ называются *проектными параметрами*, их как раз необходимо определить в ходе оптимизации. Оптимальным значениям параметров соответствует экстремум целевой функции.

Если проектными параметрами являются числа, векторы или матрицы чисел, тогда целевая функция представляет собой алгебраическое выражение, и такая задача оптимизации является *статической*.

В динамических задачах оптимизации проектными параметрами являются функции времени. Целевая функция в этом случае имеет как правило вид интегральной функции, и называется *интегральным функционалом* качества, или просто функционалом.

Также следует отметить, что в англоязычной литературе целевую функцию часто называют “*cost function*” – функцией цены или функцией потерь. Это уточняет задачу оптимизации как минимизацию функции цены.

Одним из распространенных машинных методов решения задач оптимизации является метод Нелдера-Мида. Далее рассмотрим, как с его помощью решаются статические и динамические задачи оптимизации.

2.1. Статическая задача оптимизации

В одномерной статической задаче оптимизации задана некоторая целевая функция одного аргумента $f(x), x \in R^1$. Задача оптимизации, т. е. определения числа, при котором функция достигает экстремума, может быть сравнительно легко решена аналитически путем вычисления производной целевой функции и далее корня полученной производной: $\partial f / \partial x \Big|_{x^*} = 0$.

Многомерную статическую задачу $\left(x \in R^n\right)$ аналитически решить уже сложнее, так как для этого необходимо вычислять решение системы нелинейных алгебраических уравнений, поэтому целесообразно использовать численные методы.

Для примера рассмотрим задачу определения значений параметров x_1 и x_2 таких, которые обеспечивают минимальное значение следующей функции:

$$f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 100\left(x_2 - x_1^2\right)^2$$

Для решения задачи будут использованы средства пакета программ MATLAB, а именно функция FMINSEARCH, в которой реализован метод Нелдера-Мида (или метод деформируемого многогранника).

Реализация метода приведена ниже:

%% Скрипт Main2_1.m

```
X=fminsearch('costfunc',[0,0])
```

Параметрами функции FMINSEARCH являются:

costfunc – имя функции, которая вычисляет значения целевой функции $f(x_1, x_2)$ в процессе поиска;

[0,0] – вектор значений параметров, соответствующий начальной точке поиска.

%% Файл costfunc.m

```
function f=costfunc(x)
f=(1-x(1))^2+100*(x(2)-x(1)^2)^2;
```

Как и в предыдущей работе, можно использовать указатели на функцию вместо отдельных функций-файлов:

%% Скрипт Main2_2.m

```
h_costf = @(x) [(1-x(1))^2+100*(x(2)-x(1)^2)^2];
X=fminsearch(' h_costf',[0,0])
```

После окончания процесса поиска найденная комбинация параметров отображается в виде вектора $\mathbf{X}$ в командном окне системы MATLAB.

Для наглядного представления поведения целевой функции в найденной точке целесообразно построить графики поверхностей и линий равного уровня функции $f(x_1, x_2)$ в рассматриваемой области. Дополнительный анализ целевой функции с помощью графиков линий равного уровня целесообразен по следующим причинам:

- проверка нахождения глобального минимума;
- оценка чувствительности величины целевой функции к изменению параметров.

Для построения графиков функций нескольких переменных могут оказаться полезными следующие функции MATLAB:

MESHGRID – формирование «сетки» значений аргументов функции нескольких переменных;

SURF – построение трехмерной поверхности;

CONTOUR – построение линий равного уровня на плоскости.

Пример скрипта с построением линий равного уровня приведен ниже:

%%Скрипт Main2_3.m

```
% Задание диапазона построения графиков
x1=-4:0.01:5;
x2=x1;
[X1,X2]=meshgrid(x1,x2);
Z=(1-X1).^2+100*(X2-X1.^2).^2;
contour(X1,X2,Z,[0.5 4 20]);
% Последний параметр функции contour определяет
% количество линий на графике и значения функции,
% для которых выполняются построения (См. справку
% MATLAB)
```

2.2. Динамическая задача оптимизации

В качестве первого примера динамической задачи оптимизации рассмотрим следующую задачу:

Задан динамический объект, описываемый дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = -0.5x + u$$
$$x(0) = 10$$

Входным воздействием на объект является функция времени, содержащая неизвестный параметр U_m. Функция $u(t)$ является кусочно-постоянной, и её вид определяется следующей формулой:

$$u(t) = U_m \cdot 1(t) - 2 \cdot U_m \cdot 1(t-2) + U_m \cdot 1(t-4),$$

где $1(t)$ – единичная ступенчатая функция.

Требуется найти такое значение параметра входного воздействия (U_m), при котором $x(4)=0$ (*<u>граничное условие</u>*).

Строго говоря, приведенная задача не является задачей оптимизации. Ее можно решить аналитически, найдя по методу преобразования Лапласа решение дифференциального уравнения, которое будет зависеть от U_m. Искомый параметр будет найден из граничного условия.

Но для численного решения данную задачу целесообразно переформулировать как задачу оптимизации при сохранении исходной цели. Новая формулировка заключается в том, что требуется найти такое значение параметра входного воздействия U_m, которое обеспечит минимальное отклонение значения функции $x(4)$ от требуемого по граничному условию значения 0. Такая постановка задачи позволяет использовать при решении поставленной задачи MATLAB – функцию FMINSEARCH.

Поскольку целевая функция будет зависеть от решения дифференциального уравнения, внутри целевой функции необходимо осуществлять вызов функции ODE45. Один из вариантов решения представлен следующими функциями:

%%Скрипт Main2_4.m

```
% основной скрипт задачи дин. оптимизации
global t t1 t2 x x0 u
t1 = 2; t2 = 4;
x0 = 10;
um = fminsearch(@costfunc,1)
plot(t,x,t,u)
```

%%Файл costfunc.m

```
function f=costfunc(um)
% целевая функция для задачи дин. оптимизации
global t t1 t2 x x0 u umax
umax=um;
t=[];
x=[];
u=[];
[t,x]=ode45(@odefun,[0 t2],[x0]);
for i=1:length(t),
```

```
    if t(i)<t1
        u(i) = um;
 else
        u(i) = -um;
    end
end
f=x(end)*x(end);
```

%% Файл odefun.m

```
function f=odefun(t,x)
global t1 umax
if t<t1
    u=umax;
else
    u=-umax;
end
f=-0.5*x+u;
```

Содержание работы

1.. Определение глобального максимума заданной функции (таблица 2.1).

2. Исследование поведения функции в районе экстремума (построение поверхностей, линий равного уровня).

3. Решение динамической задачи оптимизации для заданной кусочно-линейной функции входного воздействия (таблица 2.2).

Задания на лабораторную работу

Таблица 2.1. Исходные данные для статической задачи.

Вариант	Функция	Вариант	Функция
1	$z = x^2 + y^2 + x + y + 1$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$	13	$z = x^2 + y^2 - 4x + 4$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$
2	$z = x^2 + y^2 - x + y + 1$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$	14	$z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$
3	$z = x^2 + y^2 - 2y + 1$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$	15	$z = x^2 + y^2 - 4y + 4$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$
4	$z = x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$	16	$z = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$

5	$z = x^2 + y^2 + x - y + 1$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$	17	$z = x^2 + y^2 + 4x + 4$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$
6	$z = x^2 + y^2 - x - y + 1$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$	18	$z = x^2 + y^2 + 4y + 4$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$
7	$z = x^2 + y^2 - x - 2y + 2$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$	19	$z = x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$
8	$z = x^2 + y^2 - 2x + y + 2$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$	20	$z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$
9	$z = x^2 + y^2 - 2x + 1$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$	21	$z = x^2 + y^2 + 2x + 1$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$
10	$z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$	22	$z = x^2 + y^2 + 2y + 1$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$
11	$z = x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$	23	$z = x^2 + y^2 - 4x + y + 3$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$
12	$z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$	24	$z = x^2 + y^2 + x - 4y + 3$ $f = e^{-0.1z}\cos(z)$

Таблица 2.2. Исходные данные для статической задачи.

Вариант	Объект	Функция $u(t)$	Вариант	Объект	Функция $u(t)$
1	$\frac{dx}{dt} = -0.5x + u$ $x(0) = 10$	$u(0) = 0$ $u(1) = u_m$ $u(9) = 0$	13	$\frac{dx}{dt} = -0.5x + u$ $x(0) = -10$	$u(0) = 0$ $u(0.5) = u_m$ $u(9) = 0$
2	$\frac{dx}{dt} = -0.25x + u$ $x(0) = 8$	$u(0) = 0$ $u(2) = u_m$ $u(9) = 0$	14	$\frac{dx}{dt} = -0.25x + u$ $x(0) = -8$	$u(0) = 0$ $u(1.5) = u_m$ $u(9) = 0$
3	$\frac{dx}{dt} = -0.25x + u$ $x(0) = 10$	$u(0) = 0$ $u(3) = u_m$ $u(9) = 0$	15	$\frac{dx}{dt} = -0.25x + u$ $x(0) = -10$	$u(0) = 0$ $u(2.5) = u_m$ $u(9) = 0$
4	$\frac{dx}{dt} = -0.5x + u$ $x(0) = 8$	$u(0) = 0$ $u(4) = u_m$ $u(9) = 0$	16	$\frac{dx}{dt} = -0.5x + u$ $x(0) = -8$	$u(0) = 0$ $u(3.5) = u_m$ $u(9) = 0$
5	$\frac{dx}{dt} = -0.15x + u$ $x(0) = 8$	$u(0) = 0$ $u(5) = u_m$ $u(9) = 0$	17	$\frac{dx}{dt} = -0.15x + u$ $x(0) = -8$	$u(0) = 0$ $u(4.5) = u_m$ $u(9) = 0$
6	$\frac{dx}{dt} = -0.15x + u$ $x(0) = 10$	$u(0) = 0$ $u(6) = u_m$ $u(9) = 0$	18	$\frac{dx}{dt} = -0.15x + u$ $x(0) = -10$	$u(0) = 0$ $u(5.5) = u_m$ $u(9) = 0$
7	$\frac{dx}{dt} = -0.3x + u$ $x(0) = 8$	$u(0) = 0$ $u(5.5) = u_m$ $u(9) = 0$	19	$\frac{dx}{dt} = -0.3x + u$ $x(0) = -8$	$u(0) = 0$ $u(6) = u_m$ $u(9) = 0$
8	$\frac{dx}{dt} = -0.3x + u$ $x(0) = 10$	$u(0) = 0$ $u(3.5) = u_m$ $u(9) = 0$	20	$\frac{dx}{dt} = -0.3x + u$ $x(0) = -10$	$u(0) = 0$ $u(5) = u_m$ $u(9) = 0$
9	$\frac{dx}{dt} = -0.1x + u$ $x(0) = 8$	$u(0) = 0$ $u(4.5) = u_m$ $u(9) = 0$	21	$\frac{dx}{dt} = -0.1x + u$ $x(0) = -8$	$u(0) = 0$ $u(4) = u_m$ $u(9) = 0$
10	$\frac{dx}{dt} = -0.1x + u$ $x(0) = 10$	$u(0) = 0$ $u(5.5) = u_m$ $u(9) = 0$	22	$\frac{dx}{dt} = -0.1x + u$ $x(0) = -10$	$u(0) = 0$ $u(3) = u_m$ $u(9) = 0$
11	$\frac{dx}{dt} = -0.05x + u$ $x(0) = 10$	$u(0) = 0$ $u(7) = u_m$ $u(9) = 0$	23	$\frac{dx}{dt} = -0.05x + u$ $x(0) = -10$	$u(0) = 0$ $u(6.5) = u_m$ $u(9) = 0$
12	$\frac{dx}{dt} = -0.05x + u$ $x(0) = 8$	$u(0) = 0$ $u(8) = u_m$ $u(9) = 0$	24	$\frac{dx}{dt} = -0.05x + u$ $x(0) = -8$	$u(0) = 0$ $u(7.5) = u_m$ $u(9) = 0$
Граничное условие для всех вариантов: $x(9) = 0$					