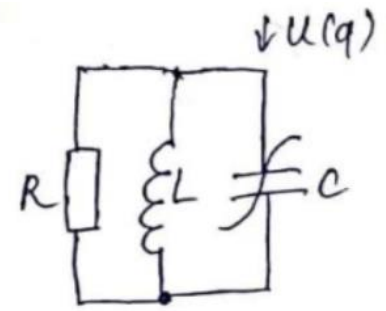
Колебательный контур с нелинейной емкостью при включении резистора параллельно катушке индуктивности

Схема:



$$I_C = \frac{dq}{dt}$$

$$U_C = U_L = U_R = U(q) \Rightarrow I_R = \frac{U(q)}{R}$$

$$U(q) = U_L = L\frac{dI_L}{dt} \Rightarrow \frac{dI_L}{dt} = \frac{U(q)}{L} \qquad (1.1)$$

$$I_R + I_L + I_C = 0$$

$$\frac{U(q)}{R} + I_L + \frac{dq}{dt} = 0$$

$$\left(\frac{U(q)}{R} + I_L + \frac{dq}{dt}\right)' = \frac{dq}{dt} \cdot U'(q)\frac{1}{R} + \frac{dI_L}{dt} + \frac{d^2q}{dt^2} = 0 \qquad (1.2)$$

$$(1.1)\, и\, (1.2) \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{dq}{dt} \cdot U'(q)\frac{1}{R} + \frac{U(q)}{L} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{U'(q)}{R}\dot{q} + \frac{U(q)}{L} = 0$$

Уравнение нелинейного диссипативного осциллятора:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + f(x) = 0$$

Пусть: $\dfrac{U'(q)}{R}=\gamma;\ \dfrac{U(q)}{L}=f(q)\Rightarrow \ddot{q}+\gamma\dot{q}+f(q)=0$

γ - параметр диссипации.

Перейдем к системе Д.У. 1-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\gamma x_2 - f(x) \end{cases}$$

Заменим $f(x_1)\approx x_1 g(x_1)$

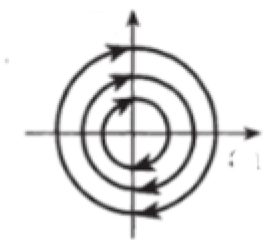
$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g(x_1) & -\gamma \end{bmatrix};$$

$$\det(A-\lambda I)=\lambda^2-\gamma\lambda+g(x_1)=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4g(x_1)}}{2}$$

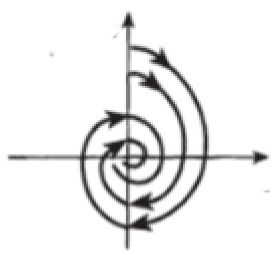
1) $\gamma=0\Rightarrow\gamma=\dfrac{U'(q)}{R}=0\Rightarrow R\to\infty$ (отсутствие резистора, без диссипации):

$$\lambda_{1,2}=\frac{\sqrt{-4g(x_1)}}{2}$$ - корни чисто мнимые – центр



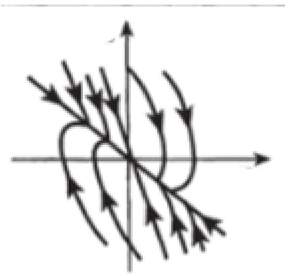
2) $\gamma^2<4g(x_1)$:

$\lambda_{1,2}=-\mathrm{Re}\pm\mathrm{Im}$ - Устойчивый фокус



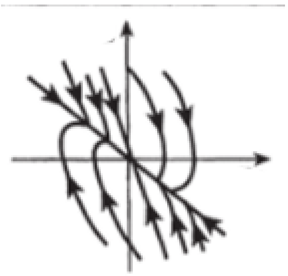
3) $\gamma^2 = 4g(x_1)$:

$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma}{2} < 0$ - Устойчивый узел



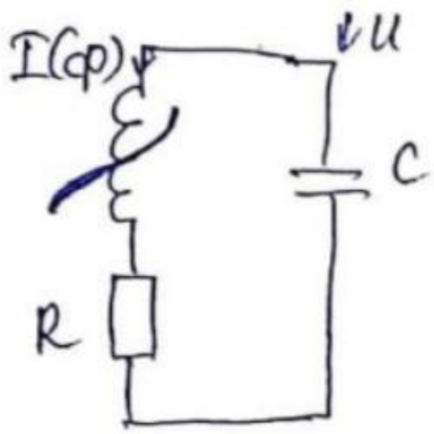
4) $\gamma^2 > 4g(x_1)$:

$\lambda_{1,2} = \mathrm{Re} < 0$ - Устойчивый узел



Колебательный контур с нелинейной индуктивностью при последовательном включении сопротивления.

Схема:



$$I(\Phi) = I_C = C\frac{dU_C}{dt} \Rightarrow \frac{dU_C}{dt} = \frac{I(\Phi)}{C} \qquad (1.3)$$

$$U_L + U_R + U_C = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d\Phi}{dt} + I(\Phi) + U_C = 0$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dt} + I(\Phi)\cdot R + U_C\right)' = \frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{d\Phi}{dt}\cdot I'(\Phi)\cdot R + \frac{dU_C}{dt} = 0$$

$$\ddot{\Phi} + \dot{\Phi}\cdot I'(\Phi)\cdot R + \frac{I(\Phi)}{C} = 0$$

Пусть: $\begin{cases} I'(\Phi)\cdot R = \gamma \\ \dfrac{I(\Phi)}{C} = f(\Phi) \end{cases} \Rightarrow \ddot{\Phi} + \dot{\Phi}\gamma + f(\Phi) = 0$ - уравнение нелинейного диссипативного осциллятора.

γ - параметр диссипации.

Перейдем к системе Д.У. 1-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\gamma x_2 - f(x) \end{cases}$$

Заменим $f(x_1) \approx x_1 g(x_1)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g(x_1) & -\gamma \end{bmatrix};$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \gamma\lambda + g(x_1) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4g(x_1)}}{2}$$

Собственные числа и фазовые портреты колебательного контура с нелинейной индуктивностью при последовательном включении сопротивления идентичны собственным числам и фазовым портретам колебательного контура с нелинейной емкостью включённой параллельно сопротивлению.