

«Нелинейное и адаптивное управление в технических системах» (НАУТС)

Тема 11

Лектор
Виктор Владимирович Путов,
д.т.н., профессор

ТЕМА 11

- ПРАКТИКУМ ПРИМЕНЕНИЯ
МЕТОДОВ АДАПТИВНОГО
РОБАСТНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО
УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ
НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ
ОБЪЕКТАМИ ПРИ НАЛИЧИИ
ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Источники

- 2.[2.Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами / Учебное пособие. - СПб: Наука, 2000. - 549 с.]
- ***Глава 6, п. 6.5 (управление по выходу неопределенными линейными объектами при наличии внешних возмущений), страницы 432-447 – основной.***

ТЕМА 11.1

- **ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ОБЪЕКТА
УПРАВЛЕНИЯ. РОБАСТНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
АЛГОРИТМОВ АДАПТАЦИИ
ВЫСОКОГО ПОРЯДКА (п.п.
6.5.1, 6.5.2 (с.с. 432 – 440))**

6.5. Управление по выходу неопределенными линейными объектами при наличии внешних возмущений

В настоящем параграфе будем полагать, что параметрически неопределенный объект управления подвержен воздействию внешнего неизмеряемого возмущения. Рассматриваемый класс линейных стационарных объектов описывается уравнением вида

$$y = b_m \frac{\beta(p)}{\alpha(p)} [u + \delta], \quad (6.343)$$

где y и u – регулируемая переменная и сигнал управления соответственно, δ – внешнее ограниченное возмущение, $\alpha(p)$ и $\beta(p)$ – нормированные полиномы с неизвестными коэффициентами такие, что

$$\begin{aligned} b_m \beta(p) &= b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0, \\ \alpha(p) &= p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0. \end{aligned}$$

Как и в п. 6.4, примем стандартные допущения 6.6 и определим желаемое поведение регулируемой переменной y с помощью эталонной модели

$$y^* = \frac{k^*}{\alpha^*(p)} r, \quad (6.344)$$

где y^* – эталонные выход, r – сигнал задания (ограниченная, кусочно-непрерывная функция времени), $\alpha^*(p)$ – нормированный гурвицев полином степени $\rho = n - m$, $k^* > 0$ – постоянный коэффициент.

В общем случае присутствие внешнего возмущения δ не позволяет обеспечить асимптотического слежения за эталонным выходом y^* . Поэтому в качестве цели управления потребуем обеспе-

чения ограниченности всех сигналов в замкнутой системе и слежения за эталонным выходом y^* с определенной степенью точности. Во многих практических случаях выполнение такой цели управления является вполне достаточным.

6.5.1. Параметризованная модель объекта управления

Присутствие внешнего возмущения δ несколько изменяет параметризованные модели, полученные в 6.4.2. Влияние внешнего возмущения определяется следующими двумя леммами.

Лемма 6.7. *Рассмотрим вместе с объектом (6.343) и эталонной моделью (6.344) вспомогательные фильтры (6.203) и (6.204). Тогда для любого нормированного гурвицева полинома $\gamma(p)$ степени $n - 1$ ошибка слежения $\varepsilon_1 = y - y^*$ может быть представлена в виде*

$$\varepsilon_1 = \frac{b_m}{\alpha^*(p)} [\theta^T \omega + \bar{\delta} + u] + \epsilon_y, \quad (6.345)$$

где ϵ_y — экспоненциально затухающая функция времени, $\theta \in \mathbb{R}^{2n}$ — вектор постоянных неизвестных параметров, $\bar{\delta}$ — ограниченная функция времени, зависящая от δ , и $\omega^T = [v_1^T, v_2^T, y, r]$.

Доказательство леммы 6.7. Подставляя $\bar{u} = u + \delta$ в доказательство леммы 6.5 вместо u , непосредственно получаем (6.345), где $\bar{\delta} = \frac{S(p)\beta(p)}{\gamma(p)}\delta$. Так как передаточная функция $\frac{S(p)\beta(p)}{\gamma(p)}$ является собственной и асимптотически устойчивой, то из ограниченности δ следует ограниченность $\bar{\delta}$. ■

Лемма 6.8. *Вместе с объектом (6.343) рассмотрим вспомогательные фильтры (6.209). Тогда регулируемая переменная y и ее первая производная \dot{y} могут быть представлены в форме следующих параметризованных моделей:*

$$y = \xi_{n,1} + \varphi^T \psi + \bar{\delta}_1 + \epsilon_1 \quad (6.346)$$

и

$$\dot{y} = \beta_1 + \vartheta^T \psi + \bar{\delta}_2 + \epsilon_2, \quad (6.347)$$

где, как и в лемме 6.6,

$$\beta_1 = -k_1 \xi_{n,1} + \xi_{n,2} + k_1 y,$$

$$\varphi = [\nu_{m,1}, \nu_{m-1,1}, \dots, \nu_{0,1}, \xi_{n-1,1}, \xi_{n-2,1}, \dots, \xi_{0,1}]^T,$$

$$\psi = [b_m, b_{m-1}, \dots, b_0, -a_{n-1}, -a_{n-2}, \dots, -a_0]^T,$$

$$\vartheta = [-k_1 \nu_{m,1} + \nu_{m,2}, -k_1 \nu_{m-1,1} + \nu_{m-1,2}, \dots, -k_1 \nu_{0,1} + \nu_{0,2},$$

$-k_1\xi_{n-1,1} + \xi_{n-1,2} + y, -k_1\xi_{n-2,1} + \xi_{n-2,2}, \dots, -k_1\xi_{0,1} + \xi_{0,2}]^T$,
 $\epsilon_1 = e_1^T \epsilon$ и $\epsilon_2 = e_1^T A_0 \epsilon$ экспоненциально затухают, $\bar{\delta}_1 = e_1^T \xi_\delta$ и $\bar{\delta}_2 = e_1^T A_0 \xi_\delta$ — ограниченные функции времени, зависящие от δ , а ϵ и ξ_δ удовлетворяют уравнениям $\dot{\epsilon} = A_0 \epsilon$ и

$$\dot{\xi}_\delta = A_0 \xi_\delta + \sum_{i=0}^m b_i e_{n-i} \delta. \quad (6.348)$$

Доказательство леммы 6.8. В рассматриваемом случае каноническая модель вход-состояние-выход (6.343) принимает вид

$$\dot{x} = Ex - \sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{n-i} y + \sum_{i=0}^m b_i e_{n-i} u + \sum_{i=0}^m b_i e_{n-i} \delta, \quad (6.349)$$

$$y = e_1^T x. \quad (6.350)$$

Дифференцируя вектор ошибки оценки состояния

$$\epsilon = x - \xi_n - \xi_\delta + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \xi_i - \sum_{i=0}^m b_i \nu_i$$

с учетом моделей (6.209) и (6.349), получаем $\dot{\epsilon} = A_0 \epsilon$, откуда следует (6.346). Равенство (6.347) доказывается непосредственным дифференцированием (6.346) с учетом (6.209) и (6.348). ■

6.5.2. Робастное управление с использованием алгоритмов адаптации высокого порядка

В настоящем параграфе для построения алгоритмов робастного управления линейным объектом по выходу в условиях присутствия внешних возмущений будут использованы методы синтеза, представленные теоремами 6.12 и 6.13.

Сначала, как и в 6.4.4, выберем передаточную функцию $W(p)$ с относительной степенью $\rho - 1$ такую, что

$$W(p) = \frac{p + \lambda}{\alpha^*(p)},$$

где λ – произвольная положительная константа. Тогда модель (6.345) может быть представлена в виде

$$\epsilon_1 = \frac{b_m}{p + \lambda} [\varpi(t)^T \theta + W(p)[u] + \delta_\epsilon] + \epsilon_\epsilon, \quad (6.351)$$

где

$$\varpi(t) = W(p)[\omega(t)], \quad (6.352)$$

$\delta_\epsilon = W(p)\bar{\delta}(t)$, а ϵ_ϵ экспоненциально затухает.

Настраиваемый регулятор выбирается в стандартном виде

$$u = -W(p)^{-1} [\varpi(t)^T \hat{\theta}], \quad (6.353)$$

что ведет к получению следующей замкнутой модели ошибки

$$\varepsilon_1 = \frac{b_m}{p + \lambda} [\varpi(t)^T \tilde{\theta} + \delta_\epsilon] + \epsilon_\epsilon, \quad (6.354)$$

где $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$. Тогда структура робастного алгоритма адаптации высокого порядка будет определяться следующими уравнениями (см. теорему 6.11):

$$\dot{\eta} = \mu(1 + \varpi^T \varpi)(\bar{A}\eta + \bar{b}\varepsilon_1), \quad (6.355)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \varpi \bar{c}^T \eta - \sigma \hat{\theta}, \quad (6.356)$$

где $(\bar{c}, \bar{A}, \bar{b})$ – минимальная реализация передаточной функции $\bar{\alpha}(0)/\bar{\alpha}(p)$, $\bar{\alpha}(p)$ – произвольный асимптотически устойчивый полином степени $\rho - 2$, а μ , γ и σ – постоянные коэффициенты.

Свойства устойчивости замкнутой системы сформулируем в виде следующей теоремы [233].

Теорема 6.18. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из объекта (6.343), эталонной модели (6.344), вспомогательных фильтров (6.203), (6.204), регулятора (6.353) и робастного алгоритма адаптации высокого порядка (6.355), (6.356). Если

$$\mu \geq \mu_1 + \mu^*, \quad (6.357)$$

где

$$\mu_1 = \max \left\{ \frac{3}{4} \lambda |P \bar{A}^{-1} \bar{b}|^2, \quad \frac{3\gamma}{4\sigma} \bar{b}_m \left(|\bar{c}| + |P \bar{A}^{-1} \bar{b}| \right)^2 \right\},$$

μ^* – любая положительная константа, \bar{b}_m – верхняя оценка коэффициента b_m , а симметрическая положительно определенная матрица P является решением уравнения $\bar{A}^T P + P \bar{A} = -2I$, то для любых $\gamma > 0$ и $\sigma > 0$ и произвольных начальных условий все сигналы в замкнутой системе являются ограниченными и, кроме того, $\varepsilon_1(t)$, $z(t) = \eta + \bar{A}^{-1} \bar{b} \varepsilon_1$ и $\tilde{\theta}(t)$ экспоненциально сходятся к установившемуся множеству

$$D_R = \left\{ \varepsilon_1, z, \tilde{\theta} : V(\varepsilon_1, z, \tilde{\theta}) \leq \kappa_1 \|\bar{\delta}\|_\infty^2 + \kappa_2 |\theta|^2 \right\}, \quad (6.358)$$

где κ_1 и κ_2 – некоторые положительные константы и

$$V(\varepsilon_1, z, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}z^T P z + \frac{b_m}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}. \quad (6.359)$$

Доказательство теоремы 6.18. Из теоремы 6.12 непосредственно следует ограниченность ε_1 , y , z и $\tilde{\theta}$, а также экспоненциальная сходимость $\varepsilon_1(t)$, $z(t)$ и $\tilde{\theta}(t)$ к множеству (6.358), где

$$\kappa_1 = \frac{1}{4\kappa} \left(\frac{3}{\lambda} + \frac{1}{\mu_2} |P \bar{A}^{-1} \bar{b}|^2 \right), \quad \kappa_2 = \frac{3b_m}{4\kappa\gamma} \sigma,$$

$$\kappa = \min \left\{ \frac{2\lambda}{3}, \frac{2\mu_3}{\lambda_P}, \frac{2}{3} b_m \sigma \right\},$$

μ_2 и μ_3 – любые положительные константы такие, что $\mu_2 + \mu_3 = \mu^*$, λ_P – максимальное собственное значение матрицы P . Далее, используя тот же подход, что и при доказательстве теоремы 6.16, можно показать ограниченность всех сигналов в замкнутой системе. ■

Пример 6.6. Изменим условия примера 6.4, добавив внешнее возмущение. То есть, рассмотрим следующий объект управления

$$y = \frac{b_0}{p(p^2 + a_2 p + a_1)}[u + \delta], \quad (6.360)$$

где параметры $b_0 = 2.5$, $a_2 = 3$ и $a_1 = -1$ полагаются неизвестными, в то время как верхняя оценка $\bar{b}_0 = 4$ считается априорно известной.

Используем следующий робастный алгоритм адаптации высокого порядка, общий вид которого определяется уравнениями (6.355), (6.356):

$$\dot{\eta} = \mu(1 + \varpi^T \varpi)(-3\eta + 3\varepsilon_1), \quad (6.361)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \gamma \varpi_i \eta - \sigma \hat{\theta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (6.362)$$

Выберем $\gamma = 50$, $\sigma = 15$. Из условия (6.357) получаем $\mu > 22.5$. Выберем $\mu = 100$.

Необходимо отметить, что при реализации закона управления (6.266) производные $\dot{\hat{\theta}}_i$ заменяются их аналитическими выражениями из (6.362), а производные $\ddot{\hat{\theta}}_i$ могут быть выражены в виде

$$\ddot{\hat{\theta}}_i = \gamma \dot{\varpi}_i \eta + \mu \varpi_i \dot{\eta} - \sigma \dot{\hat{\theta}}_i, \quad (6.363)$$

где сигнал $\dot{\varpi}$ непосредственно доступен из (6.352), а производные $\dot{\eta}$ и $\dot{\hat{\theta}}_i$ заменяются их аналитическими выражениями.

Таким образом, структура регулятора с робастным алгоритмом адаптации высокого порядка полностью описывается уравнениями (6.263)–(6.266), (6.361)–(6.363). Общий динамический порядок регулятора равен 23 и, следовательно, является более низким по сравнению с неробастным регулятором из примера 6.4.

Рассмотрим задачу слежения за эталонной моделью (6.201) с $\alpha^*(p) = (p + 1)^3$, $k^* = 1$ и $r(t) = 2.5 \sin 0.8t$ при идеальных условиях (т. е. при отсутствии внешнего возмущения δ). Как видно из представленных графиков (рис. 6.5,а), робастный регулятор обеспечивает достаточно точное слежение за эталонным выходом с малой установившейся ошибкой при небольшой амплитуде сигнала управления. Добавим теперь внешнее возмущение

$$\delta(t) = 2 \sin 1.5t. \quad (6.364)$$

Результаты моделирования представлены на рис. 6.5,б. Сравнивая графики на рис. 6.5,а и 6.5,б, убеждаемся, что наличие возмущения существенно не повлияло на величину установившейся ошибки и, следовательно, представленный регулятор обеспечивает эффективную компенсацию внешних возмущений. \square

Динамический порядок робастного регулятора может быть уменьшен, если воспользоваться результатами теоремы 6.13 и вместо робастного алгоритма адаптации высокого порядка (6.356) использовать нелинейную обратную связь вида

$$\dot{\eta} = \mu(1 + \varpi^T \varpi)(\bar{A}\eta + \bar{b}\varepsilon_1), \quad (6.365)$$

$$\hat{\theta} = \gamma \varpi \bar{c}^T \eta, \quad (6.366)$$

где тройка $(\bar{c}, \bar{A}, \bar{b})$ является минимальной реализацией передаточной функции $\bar{\alpha}(0)/\bar{\alpha}(p)$ с произвольным гурвицевым полиномом $\bar{\alpha}(p)$ степени $\rho - 1$, а μ и γ – постоянные коэффициенты. В этом случае свойства устойчивости замкнутой системы определяются следующей теоремой.

Теорема 6.19. *Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из объекта (6.343), эталонной модели (6.344), вспомогательных фильтров (6.203), (6.204), настраиваемого регулятора (6.353) и нелинейного робастного алгоритма высокого порядка (6.365), (6.366). Если*

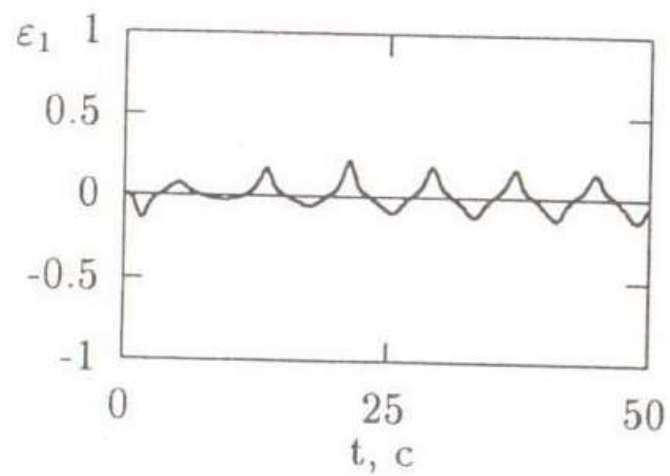
$$\mu \geq \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \quad (6.367)$$

где

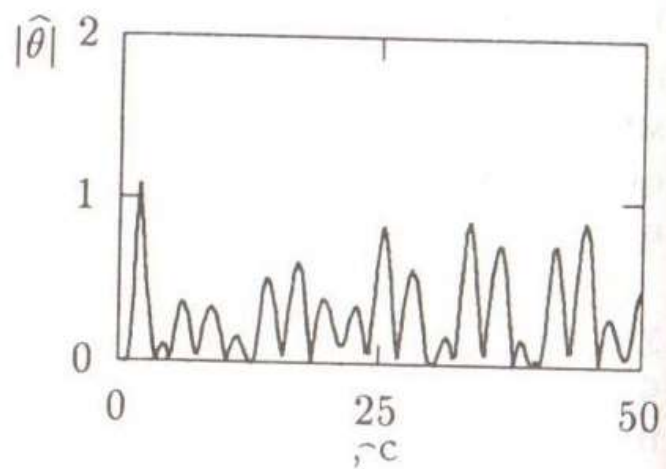
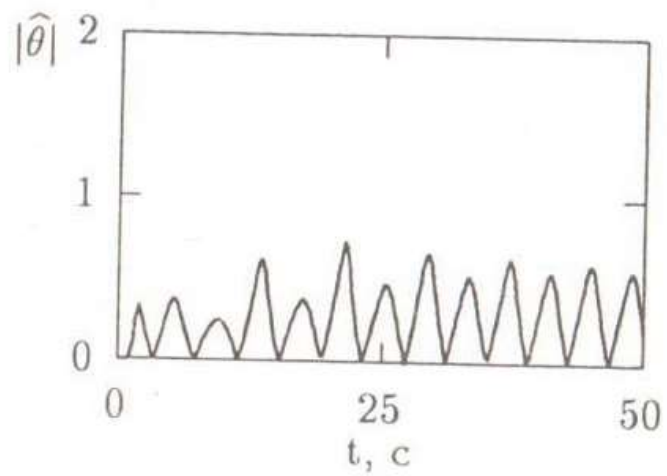
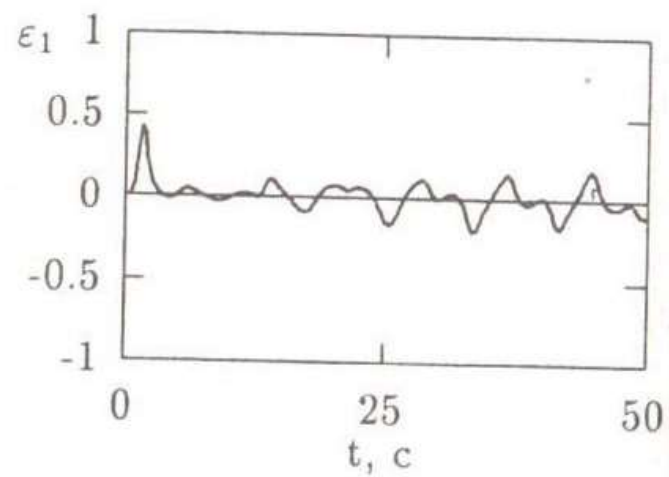
$$\mu_1 = \max \left\{ \bar{b}_m \gamma |P \bar{A}^{-1} \bar{b}| |\bar{c}|, \quad \frac{3}{4} \lambda |P \bar{A}^{-1} \bar{b}|^2 \right\},$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2} \bar{b}_m \gamma \left(|\bar{c}| + |P \bar{A}^{-1} \bar{b}| \right)^2,$$

a



б



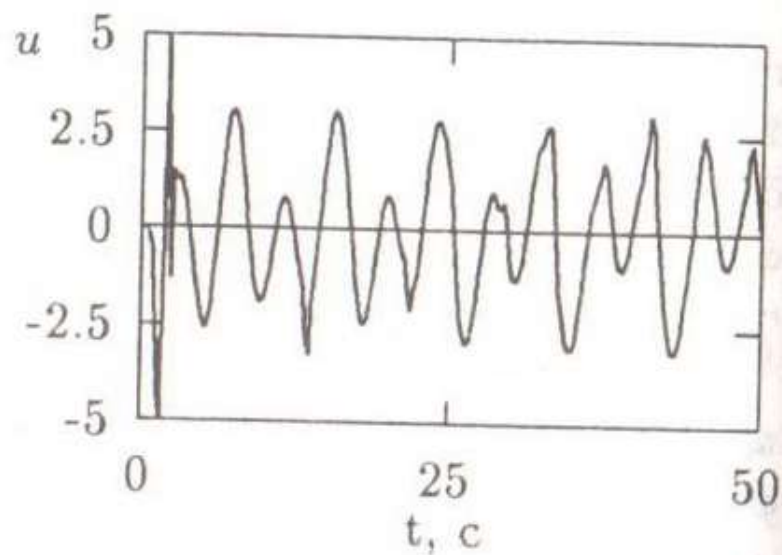
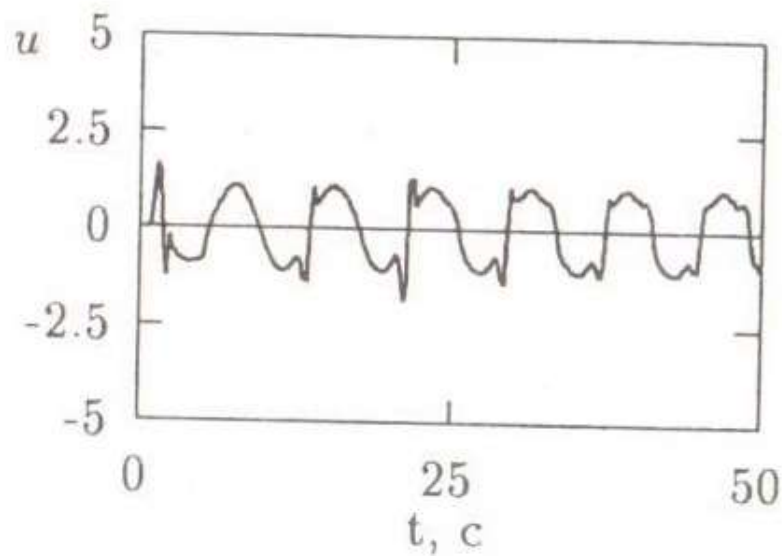


Рис. 6.5. Процессы в замкнутой системе с робастным алгоритмом адаптации высокого порядка:

а – при отсутствии возмущения,
 б – при возмущении $\delta(t) = 2 \sin 1.5t$.

μ_3 – произвольная положительная константа, \bar{b}_m – верхняя оценка параметра b_m , а симметрическая положительно определенная матрица P является решением уравнения $\bar{A}^T P + P \bar{A} = -2I$, то для любых $\gamma > 0$ и произвольных начальных условий все сигналы являются ограниченными и дополнительно $\varepsilon_1(t)$, $z(t) = \eta + \bar{A}^{-1} \bar{b} \varepsilon_1$ экспоненциально сходятся к установившемуся множеству

$$D_R = \left\{ \varepsilon_1, z : V(\varepsilon_1, z) \leq \kappa_1 \|\bar{d}\|_\infty^2 + \kappa_2 |\theta|^2 \right\}, \quad (6.368)$$

где κ_1 и κ_2 – некоторые положительные константы и

$$V(\varepsilon_1, z) = \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} z^T P z.$$

Доказательство теоремы 6.19. В силу теоремы 6.13, непосредственно получаем ограниченность ε_1 , y , z и экспоненциальную сходимость ε_1 и z к установившемуся множеству (6.368), где

$$\kappa_1 = \frac{1}{4\kappa} \left(\frac{3}{\lambda} + \frac{1}{\mu_2} |P \bar{A}^{-1} \bar{b}|^2 \right), \quad \kappa_2 = \frac{1}{2\kappa} \left(\frac{b_m}{\gamma} + \frac{1}{2\mu_3} \bar{b}_m^2 |P \bar{A}^{-1} \bar{b}|^2 \right),$$

$$\kappa = \min \left\{ \frac{2}{3} \lambda, \quad \frac{2\mu_3}{\lambda_P} \right\},$$

а λ_P – максимальное собственное значение матрицы P .

Далее, используя тот же подход, что и в теореме 6.18, можно показать ограниченность ϖ , ω и u . ■

Пример 6.7. Рассмотрим объект (6.360), эталонную модель (6.201) с $\alpha^*(p) = (p + 1)^3$, $k^* = 1$ и $r(t) = 2.5 \sin 0.8t$ и настраиваемый регулятор (6.265). Робастный алгоритм адаптации высокого порядка (6.365), (6.366) определим уравнениями

$$\dot{\eta}_1 = \mu(1 + \varpi^T \varpi) \eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = \mu(1 + \varpi^T \varpi)(-\eta_1 - 2\eta_2 + \varepsilon_1), \quad (6.369)$$

$$\hat{\theta}_i = \gamma \varpi_i \eta_1, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (6.370)$$

Тогда условия (6.367) принимают вид $\mu > 173$; выбираем $\mu = 250$.

С учетом (6.369) и (6.370) производные $\dot{\hat{\theta}}_i$ и $\ddot{\hat{\theta}}_i$, необходимые для реализации управления (6.266), могут быть представлены в виде

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \gamma \dot{\varpi}_i \eta_1 + \gamma \mu \varpi_i (1 + \varpi^T \varpi) \eta_2, \quad (6.371)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{\theta}}_i = & \gamma \ddot{\varpi}_i \eta_1 + 2\gamma \mu \dot{\varpi}_i (1 + \varpi^T \varpi) \eta_2 + \\ & + 2\gamma \dot{\varpi}^T \varpi \varpi_i \eta_2 + \gamma \mu^2 \varpi_i (1 + \varpi^T \varpi)^2 (-\eta_1 - 2\eta_2 + \varepsilon_1). \end{aligned} \quad (6.372)$$

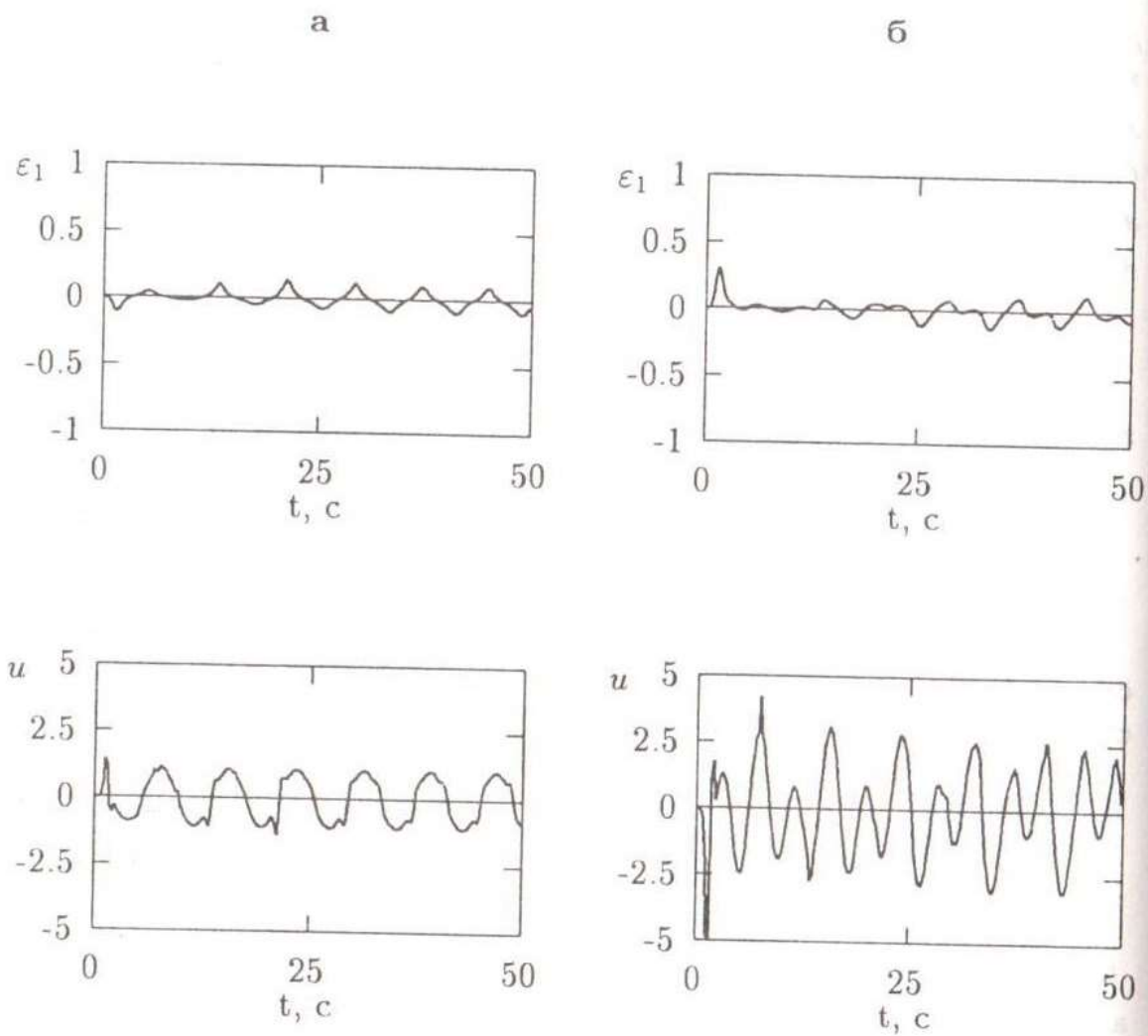


Рис. 6.6. Процессы в замкнутой системе с нелинейным робастным алгоритмом высокого порядка:
а – при отсутствии внешнего возмущения,
б – при внешнем возмущении $\delta(t) = 2 \sin 1.5t$.

Структура робастного регулятора полностью описывается уравнениями (6.263)–(6.266), (6.369)–(6.372). Общий динамический порядок регулятора равен 18.

Результаты моделирования при $\delta(t) \equiv 0$ и $\gamma = 5$ представлены на рис. 6.6,а и демонстрируют хорошее качество переходных процессов и небольшую установившуюся ошибку слежения. Графики на рис. 6.6,б иллюстрируют процессы в замкнутой системе при наличии внешнего возмущения $\delta(t) = 2 \sin 1.5t$. Как видно из рис. 6.6,б, появление внешнего возмущения практически не повлияло на величину установившейся ошибки слежения. \square

ТЕМА 11.2

- **НЕЛИНЕЙНЫЙ РОБАСТНЫЙ
РЕГУЛЯТОР (п. 6.5.3 (с.с.
441 – 447))**

6.5.3. Нелинейный робастный регулятор

В настоящем параграфе представлен альтернативный подход к проблеме робастного управления по выходу параметрически неопределенным объектом (6.343). Данный подход основан на применении метода синтеза из теоремы 6.5. При этом синтезируемый закон управления не использует каких-либо процедур идентификации неизвестных параметров объекта или адаптивной настройки коэффициентов регулятора, а компенсация параметрических и сигнальных возмущений достигается за счет специальных нелинейных обратных связей. Процедура синтеза базируется на использовании параметризации (6.347) и состоит из следующих шагов [91].

Шаг 1. Дифференцируя ошибку слежения $\varepsilon_1 = y - y^*$ с учетом (6.347), имеем

$$\dot{\varepsilon}_1 = \beta_1 + \vartheta_0^T \psi + b_m(-k_1 \nu_{m,1} + \nu_{m,2}) - \dot{y}^* + \epsilon_2 + \bar{\delta}_2, \quad (6.373)$$

где вектор ϑ_0 получен из ϑ посредством обнуления первого элемента.

Предположим на время, что переменная $\nu_{m,2}$ является управлением в (6.373) и выберем первую функцию стабилизации

$$U_1 = -c_1 \varepsilon_1 + k_1 \nu_{m,1} - \beta_1 + \dot{y}^* + \Theta_1,$$

где Θ_1 – дополнительная нелинейная обратная связь, структура которой будет определена позже. Подставляя $\nu_{m,2} = U_1$ в (6.373), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \beta_1 + \vartheta_0^T \psi + \bar{\delta}_2 + \varepsilon_2 - \dot{y}^* + b_m(-c_1 \varepsilon_1 - \beta_1 + \dot{y}^* + \Theta_1) = \\ &= -b_m c_1 \varepsilon_1 + b_m(\Delta_1^T \bar{\vartheta}_1 + \Theta_1), \end{aligned} \quad (6.374)$$

где нестационарный неизвестный вектор Δ_1 и вектор известных функций $\bar{\vartheta}_1$ имеют вид

$$\Delta_1^T = \left[\frac{1}{b_m} \psi^T, \quad \frac{1}{b_m} - 1, \quad \frac{1}{b_m}(\bar{\delta}_2 + \varepsilon_2) \right], \quad \bar{\vartheta}_1^T = [\vartheta_0^T, \quad \beta_1 - \dot{y}^*, \quad 1].$$

Анализ модели (6.374) мотивирует следующий выбор нелинейной обратной связи (см. теорему 6.3):

$$\Theta_1 = -\gamma \bar{\vartheta}_1^T \bar{\vartheta}_1 \varepsilon_1, \quad (6.375)$$

где $\gamma > 0$ – постоянный коэффициент. Подставляя (6.375) в (6.374), имеем

$$\dot{\varepsilon}_1 = -b_m c_1 \varepsilon_1 + b_m[\Delta_1^T \bar{\vartheta}_1 - \gamma \bar{\vartheta}_1^T \bar{\vartheta}_1 \varepsilon_1]. \quad (6.376)$$

Шаг 2. Учитывая, что переменная $\nu_{m,2}$ не является сигналом управления, продолжим процедуру синтеза, введя в рассмотрение новую регулируемую переменную $\varepsilon_2 = \nu_{m,2} - U_1$. Ее производная по времени имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_2 = \nu_{m,3} + \beta_2 - \frac{\partial U_1}{\partial y} \vartheta^T \psi - \frac{\partial U_1}{\partial y} (\bar{\delta}_2 + \varepsilon_2), \quad (6.377)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_2 = & -k_2 \nu_{m,1} - \frac{\partial U_1}{\partial y} \beta_1 - \frac{\partial U_1}{\partial \xi_n} (A_0 \xi_n + ky) - \\ & - \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial U_1}{\partial \nu_{l,j}} (\nu_{l,j+1} - k_j \nu_{l,1}) - \frac{\partial U_1}{\partial \nu_{m,1}} (\nu_{m,2} - k_1 \nu_{m,1}) - \\ & - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial U_1}{\partial \xi_j} (A_0 \xi_j + e_{n-j} y) - \frac{\partial U_1}{\partial y^*} \dot{y}^* - \frac{\partial U_1}{\partial \dot{y}^*} \ddot{y}^*. \end{aligned} \quad (6.378)$$

Рассматривая $\nu_{m,3}$ в качестве сигнала управления в модели (6.377), выберем вторую функцию стабилизации

$$U_2 = -c_2 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \beta_2 + \Theta_2,$$

где дополнительная нелинейная обратная связь Θ_2 будет определена позже. Тогда поведение переменных ε_1 и ε_2 описывается следующей моделью (при условии, что $\nu_{m,3} = U_2$):

$$\begin{vmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b_m c_1 & b_m \\ -b_m & -c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varrho_1(\Delta_1^T \bar{v}_1 - \gamma \bar{v}_1^T \bar{v}_1 \varepsilon_1) \\ \varrho_2(\Delta_2^T \bar{v}_2 + \Theta_2) \end{vmatrix}, \quad (6.379)$$

где нестационарный неизвестный вектор Δ_2 и регрессор \bar{v}_2 имеют вид

$$\Delta_2^T = [\psi^T, (\bar{\delta}_2 + \varepsilon_2), (b_m - 1)], \quad \bar{v}_2^T = \left[-\frac{\partial U_1}{\partial y} \bar{v}^T, -\frac{\partial U_1}{\partial y}, \varepsilon_1 \right],$$

а коэффициенты $\varrho_1 = b_m$ и $\varrho_2 = 1$ использованы для унификации системы обозначений.

С учетом теоремы 6.3 выбираем

$$\Theta_2 = -\gamma \bar{v}_2^T \bar{v}_2 \varepsilon_2. \quad (6.380)$$

Шаг i ($3 \leq i \leq \rho$). Вводя последовательно новые регулируемые переменные $\varepsilon_i = \nu_{m,i} - U_{i-1}$, получим выражения для их производных:

$$\dot{\varepsilon}_i = \nu_{m,i+1} + \varrho_{ui} u - \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \bar{v}^T \psi - \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} (\bar{\delta}_2 + \varepsilon_2) + \beta_i,$$

где

$$\begin{aligned}\beta_i = & -k_i \nu_{m,1} - \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \beta_1 - \frac{\partial U_{i-1}}{\partial \xi_n} (A_0 \xi_n + e_n y) - \\ & - \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=1}^i \frac{\partial U_{i-1}}{\partial \nu_{l,j}} (\nu_{l,j+1} - k_j \nu_{l,1}) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial U_{i-1}}{\partial \nu_{m,j}} (\nu_{m,j+1} - k_j \nu_{m,1}) - \\ & - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial U_{i-1}}{\partial \xi_j} (A_0 \xi_j + e_{n-j} y) - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y^{*(j)}} y^{*(j+1)},\end{aligned}$$

$\varrho_{ui} = 0$ для всех $i < \rho$, а $\varrho_{u\rho} = 1$ (так как $\dot{\epsilon}_\rho$ зависит в явном виде от u).

Для всех $3 \leq i \leq \rho$ функции стабилизации U_i и дополнительные нелинейные обратные связи Θ_i выбираются в виде

$$\begin{aligned}U_i &= -c_i \epsilon_i - \epsilon_{i-1} - \beta_i + \Theta_i, \\ \Theta_i &= -\gamma \bar{\vartheta}_i^T \bar{\vartheta}_i \epsilon_i,\end{aligned}$$

где

$$\bar{\vartheta}_i^T = \left[-\frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \vartheta^T, -\frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \right]^T, \quad \Delta_i^T = [\psi^T, (\bar{\delta}_2 + \epsilon_2)].$$

Действительное управление определяется на ρ -том шаге в виде

$$u = U_\rho - \nu_{m,\rho+1}. \quad (6.381)$$

Тогда замкнутая система управления в координатах вектора $\varepsilon = \text{col}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\rho)$ будет иметь вид

$$\dot{\varepsilon} = A_\varepsilon \varepsilon + \Phi(\varepsilon, \Delta_i, t), \quad (6.382)$$

где

$$A_\varepsilon = \begin{vmatrix} -b_m c_1 & b_m & 0 & \dots & 0 \\ -b_m & -c_2 & 1 & & 0 \\ 0 & -1 & -c_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & -c_\rho \end{vmatrix}, \quad (6.383)$$

$$\Phi(\varepsilon, \Delta_i, t) = \begin{vmatrix} \varrho_1(\bar{\vartheta}_1^T \Delta_1 - \gamma \bar{\vartheta}_1^T \bar{\vartheta}_1 \varepsilon_1) \\ \varrho_2(\bar{\vartheta}_2^T \Delta_2 - \gamma \bar{\vartheta}_2^T \bar{\vartheta}_2 \varepsilon_2) \\ \vdots \\ \varrho_\rho(\bar{\vartheta}_\rho^T \Delta_\rho - \gamma \bar{\vartheta}_\rho^T \bar{\vartheta}_\rho \varepsilon_\rho) \end{vmatrix}$$

и $\varrho_1 = b_m$, а $\varrho_i = 1$ для всех $2 \leq i \leq \rho$.

Свойства устойчивости замкнутой системы в данном случае определяются следующей теоремой.

Теорема 6.20 [91]. Рассмотрим замкнутую систему управления, состоящую из объекта (6.343), эталонной модели (6.344), вспомогательных фильтров (6.209) и робастного регулятора (6.381). Тогда для любых $\gamma > 0$ и произвольных начальных условий все сигналы являются ограниченными и $\varepsilon(t)$ экспоненциально сходится к установившемуся множеству

$$D_\varepsilon = \left\{ \varepsilon : |\varepsilon| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{c_0 \gamma}} \Delta_* \right\}, \quad (6.384)$$

где

$$\Delta_* > \max_i \{ \varrho_i \|\Delta_i(t)\|_\infty \}, \quad i = 1, 2, \dots, \rho, \quad (6.385)$$

$$c_0 = \min \{ b_m c_1, c_2, \dots, c_\rho \}. \quad (6.386)$$

Радиус множества (6.384) может быть сделан произвольно малым за счет увеличения γ или c_0 .

Доказательство теоремы 6.20. Выберем функцию Ляпунова $V_\rho(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\rho} \varepsilon_i^2$. Ее производная по времени на решениях системы (6.382) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{V}_\rho &= -2 \sum_{i=1}^{\rho} \varrho_i c_i \varepsilon_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{\rho} \varrho_i (\Delta_i^T \bar{\vartheta}_i \varepsilon_i - \gamma \bar{\vartheta}_i^T \bar{\vartheta}_i \varepsilon_i^2) \leq \\ &\leq -2c_0 V_\rho - 2 \sum_{i=1}^{\rho} \varrho_i (\gamma^{1/2} |\bar{\vartheta}_i| |\varepsilon_i| - \frac{1}{2\gamma^{1/2}} |\Delta_i|)^2 + \frac{1}{2\gamma} \sum_{i=1}^{\rho} \varrho_i |\Delta_i|^2 \leq \\ &\leq -2c_0 V_\rho + \frac{\rho}{2\gamma} \Delta_*^2. \end{aligned}$$

Последнее неравенство означает ограниченность ε (и, следовательно, ограниченность y и ξ_i , $0 \leq i \leq n$) и экспоненциальную сходимость ε к установившемуся множеству (6.384). Используя тот же подход, что и при доказательстве теоремы 6.17, можно показать ограниченность ν_i ($0 \leq i \leq m$) и, следовательно, ограниченность u и x . Так как Δ_* не зависит от γ , то из (6.384) непосредственно следует возможность уменьшения радиуса установившегося множества за счет увеличения γ или c_0 . ■

Пример 6.8. Рассмотрим объект (6.360)

$$y = \frac{b_0}{p(p^2 + a_2 p + a_1)} [u + \delta] \quad (6.387)$$

с неизвестными параметрами $b_0 = 2.5$, $a_2 = 3$, $a_1 = -1$ и эталонную модель (6.201) с $\alpha^*(p) = (p+1)^3$, $k^* = 1$ и $r(t) = 2.5 \sin 0.8t$. С использованием вспомогательных фильтров (6.335)–(6.338), производная ошибки слежения $\epsilon_1 = y - y^*$ может быть представлена в виде (см. также (6.339))

$$\dot{\epsilon}_1 = \beta_1 + \psi_1(-k_1\nu_{0,1} + \nu_{0,2}) + \psi_2\vartheta_2 + \psi_3\vartheta_3 - \dot{y}^* + \bar{\delta}_2\epsilon_2. \quad (6.388)$$

На первом шаге процедуры синтеза сигнал $\nu_{0,2}$ рассматривается в качестве управления в (6.388) и выбирается первая функция стабилизации

$$U_1 = -c_1\epsilon_1 + k_1\nu_{0,1} - \beta_1 + \dot{y}^* + \Theta_1,$$

где нелинейная обратная связь имеет вид

$$\Theta_1 = -\gamma\left(\vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 + (\beta_1 - \dot{y}^*)^2 + 1\right)\epsilon_1.$$

На втором шаге вводится новая регулируемая переменная $\varepsilon_2 = \nu_{0,2} - U_1$ и выбирается вторая функция стабилизации

$$\begin{aligned}
 U_2 = & -c_2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + \frac{\partial U_1}{\partial y}\beta_1 + k_2\nu_{0,1} + \frac{\partial U_1}{\partial y^*}\dot{y}^* + \frac{\partial U_1}{\partial \dot{y}^*}\ddot{y}^* + \\
 & + \frac{\partial U_1}{\partial \xi_{3,1}}\dot{\xi}_{3,1} + \frac{\partial U_1}{\partial \xi_{3,2}}\dot{\xi}_{3,2} + \frac{\partial U_1}{\partial \xi_{2,1}}\dot{\xi}_{2,1} + \frac{\partial U_1}{\partial \xi_{2,2}}\dot{\xi}_{2,2} + \frac{\partial U_1}{\partial \xi_{1,1}}\dot{\xi}_{1,1} + \\
 & + \frac{\partial U_1}{\partial \xi_{1,2}}\dot{\xi}_{1,2} + \frac{\partial U_1}{\partial \nu_{0,1}}\dot{\nu}_{0,1} + \Theta_2,
 \end{aligned}$$

где нелинейная обратная связь имеет вид

$$\Theta_2 = -\gamma \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right) (\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 + 1) + \varepsilon_1 \right] \varepsilon_2.$$

Действительное управление выбирается на третьем шаге в виде

$$\begin{aligned}
 u = & -c_3\varepsilon_3 - \varepsilon_2 + \frac{\partial U_2}{\partial y}\beta_1 + k_3\nu_{0,1} + \frac{\partial U_2}{\partial y^*}\dot{y}^* + \frac{\partial U_2}{\partial \dot{y}^*}\ddot{y}^* + \frac{\partial U_2}{\partial \ddot{y}^*}y^{*(3)} + \\
 & + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{3,1}}\dot{\xi}_{3,1} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{3,2}}\dot{\xi}_{3,2} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{3,3}}\dot{\xi}_{3,3} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{2,1}}\dot{\xi}_{2,1} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{2,2}}\dot{\xi}_{2,2} + \\
 & + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{2,3}}\dot{\xi}_{2,3} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{1,1}}\dot{\xi}_{1,1} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{1,2}}\dot{\xi}_{1,2} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{1,3}}\dot{\xi}_{1,3} + \\
 & + \frac{\partial U_2}{\partial \nu_{0,1}}\dot{\nu}_{0,1} + \frac{\partial U_2}{\partial \nu_{0,2}}\dot{\nu}_{0,2} + \Theta_3,
 \end{aligned} \tag{6.389}$$

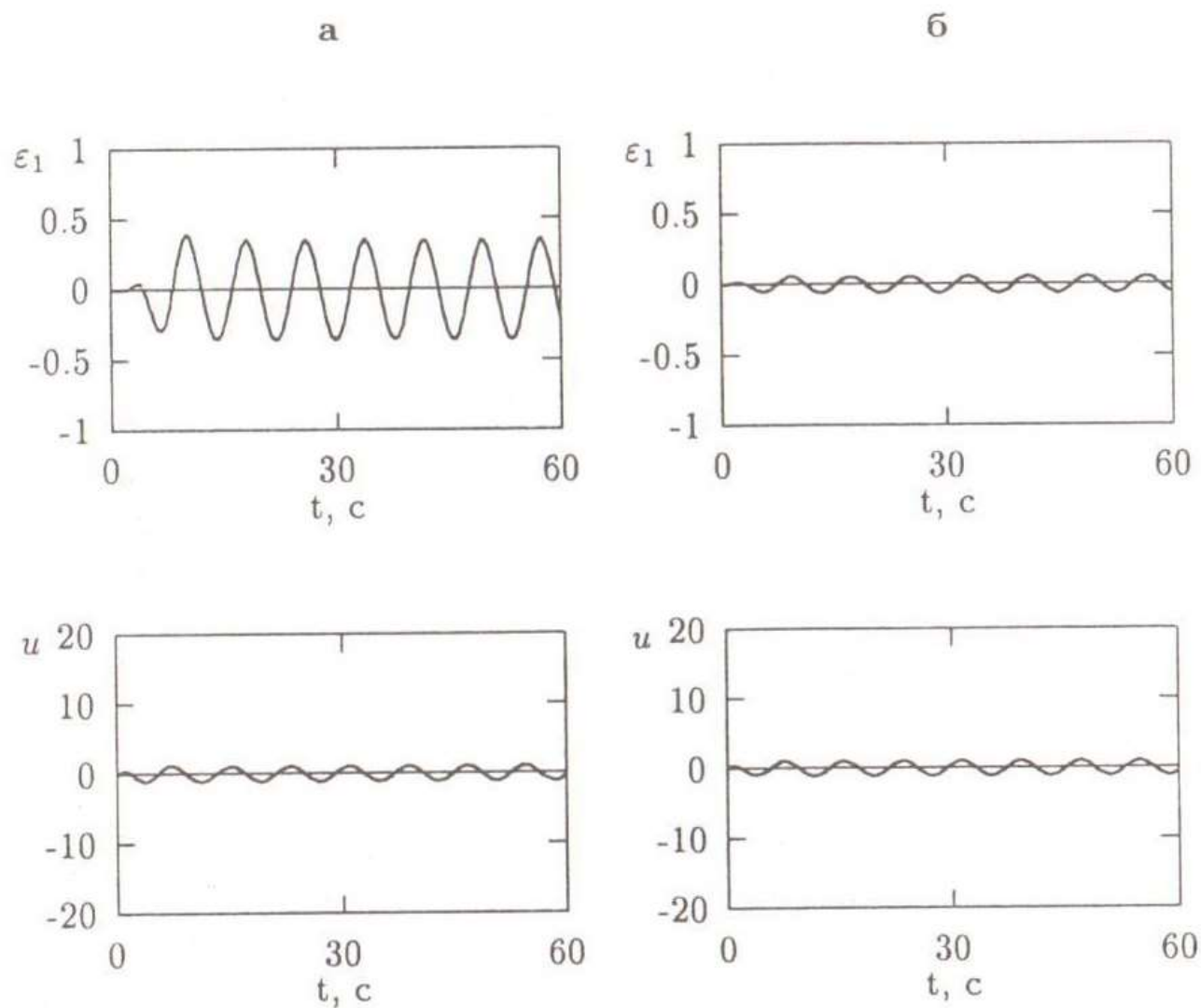


Рис. 6.7. Процессы в замкнутой системе с нелинейным робастным регулятором при отсутствии возмущения:
а - $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, $\gamma = 0.05$; б - $c_1 = c_2 = c_3 = 10$, $\gamma = 0.05$

где $\epsilon_3 = \nu_{0,2} - U_2$, а нелинейная обратная связь определяется выражением

$$\Theta_3 = -\gamma \left(\frac{\partial U_2}{\partial y} \right)^2 (\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + \vartheta_3^2 + 1) \epsilon_3. \quad (6.390)$$

Структура синтезированного регулятора полностью описывается уравнениями (6.335)–(6.338), (6.389), (6.390). Его общий динамический порядок равен 12 и может быть сокращен до 6 с использованием следствия 6.2. Однако из представленных выражений видно, что для формирования управления и необходимы существенные вычислительные затраты.

При проведении моделирования были использованы следующие значения коэффициентов вспомогательных фильтров $k_1 = 6$, $k_2 = 12$, $k_3 = 8$. Начальные значения объекта, эталонной модели и всех вспомогательных фильтров были установлены нулевыми.

Рассмотрим сначала процессы в замкнутой системе при от-

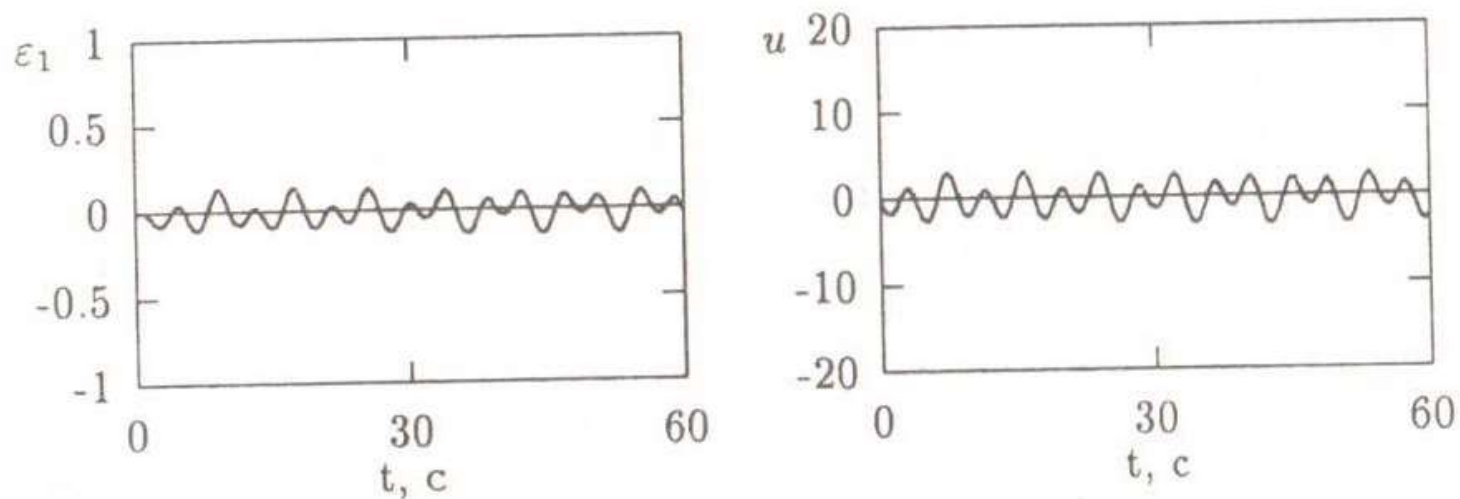


Рис. 6.8. Робастное слежение в условиях внешнего возмущения $\delta(t) = 2 \sin 1.5t$ ($c_1 = c_2 = c_3 = 10$, $\gamma = 0.05$)

сутствии внешнего возмущения (т. е., когда $\delta(t) \equiv 0$). Кривые на рис. 6.7 демонстрируют ограниченность ошибки слежения и возможность уменьшения ее установившегося значения за счет увеличения коэффициентов обратных связей c_i . В отличие от свойства параметрической робастности, установленного в п. 6.4.5 для адаптивного регулятора с отключенными цепями настройки, нелинейный робастный регулятор, рассмотренный в данном параграфе, обеспечивает ограниченность всех сигналов в замкнутой системе при *любых* (а не только при достаточно больших) значениях коэффициентов обратных связей $c_i > 0$ и $\gamma > 0$.

Рассмотрим теперь процессы в замкнутой системе (рис. 6.8.), подверженной влиянию внешнего неизмеряемого возмущения $\delta(t) = 2 \sin 1.5t$. Сравнивая графики на рис. 6.8 и рис. 6.7,б, приходим к выводу, что внешнее возмущение существенно не повлияло на величину установившейся ошибки слежения, и, таким образом, рассмотренный робастный регулятор обеспечивает эффективную компенсацию внешних возмущений. \square



Благодарю за внимание

Заслуженный профессор СПбГЭТУ «ЛЭТИ»,

д.т.н., профессор В.В. Путов

Кафедра систем автоматического управления

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

Санкт-Петербург, Россия

vvputov@mail.ru