ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

1. ***U* – универсальное множество**, $U = \{u\}$, $u \in U$.

Пример 1. Пусть дано множество из 10 цифр: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = U$, множество четных цифр $\underline{A} = \{0,2,4,6,8\}$.

Будем обозначать: $\underline{A}$ – четкое подмножество универсального множества ***U***, A – нечеткое подмножество ***U***.

Способы записи множества:

а) справа от вертикальной черты записываются все свойства множества:

$$\underline{A} = \{u \mid u - \text{четное число от } 0 \text{ до } 8\};$$

б) определение множества заданием *характеристической функции* (рис. 1).

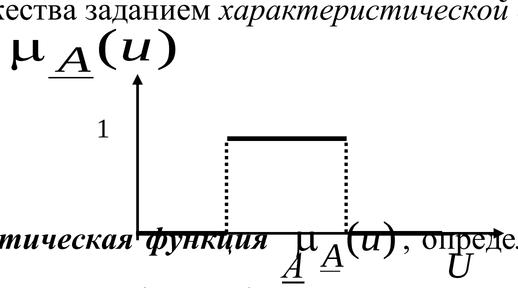


Рис. 1

2. ***Характеристическая функция*** $\mu_{\underline{A}}(u)$, определяющая подмножество $\underline{A}$ в универсальном множестве *U*, представляет собой отображение, для которого *U* – область определения, а двузначное множество из 0 и 1 $\{0,1\}$ есть область значений

$$\mu_{\underline{A}}(u) : U \to \{0,1\}: \ \mu_{\underline{A}}(u) = \begin{cases} 1, & u \in \underline{A} \\ 0, & u \notin \underline{A} \end{cases},$$

$\mu_{\underline{A}}(u) = 1$ (если элемент удовлетворяет свойствам $\underline{A}$),

$\mu_{\underline{A}}(u) = 0$ (если элемент не удовлетворяет свойствам $\underline{A}$).

1, 0 – степени принадлежности элемента *u* множеству *A*.

$\varnothing \in U$ – ***пустое множество***, характеристическая функция пустого множества $\mu_0(u) = 0, \forall u \in U$.

Характеристическая функция ***универсального множества*** $\mu_U(u) = 1, \forall u \in U$.

3. Число элементов множества называется ***мощностью множества,*** или ***кардинальным числом.***

Обозначения: # , card.

Пример 2. Для примера 1: $\#U = 10$, $\#\underline{A} = 5$. Если $\#\underline{A} = 1$, то $\underline{A}$ – ***синглтон (***singleton).

4. Объединение всех подмножеств универсального множества *U* называется ***степенным множеством*** и обозначается 2^U.

Пример 3: $\{a,b,c\} = U$, тогда $2^U = \{0,\{a\},\{b\},\{c\},\{ab\},\{bc\},\{ac\},\{abc\}\}$.

Кардинальное число степенного множества $\#2^U = 2^{\#U} = \text{card}2^U = 2^{\text{card}U}$. В примере $2^{\text{card}U} = 2^3 = 8$.

5. Понятие "***расстояние***" в математике.

Если определяется расстояние *d* между двумя элементами *u*, *v*, то должны выполняться условия $\forall u, v, w \in U$:

1) $d(u, v) \geq 0$ – неотрицательность;
2) $d(u, v) = d(v, u)$ – симметричность;
3) $d(u, w) \leq d(u, v) * d(v, w)$ – транзитивность, где $*$ – оператор , связанный с понятием "расстояние";
4) $d(u, u) = 0$.

Расстояние Хемминга (линейное расстояние):

$$d(\underline{A}, \underline{B}) = \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_{\underline{A}}(u_i) - \mu_{\underline{B}}(u_i) \right|.$$

Евклидово (квадратичное) ***расстояние***:

$$e(\underline{A}, \underline{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_{\underline{A}}(u_i) - \mu_{\underline{B}}(u_i))^2}\,.$$

6. ***Прямое (декартово) произведение*** $U \times V$ – множество, состоящее из упорядоченных пар элементов (u, v),

$$U \times V = \{(u,\ v) \mid u \in U,\ \ v \in V\}.$$

$U_1 \times U_2 ... \times U_n$ – множество всех упорядоченных n-к $(u_1,\ u_2, ..., u_n)$ с элементами $u_i \in U_i\ (i = 1, 2, ... n)$ (рис. 3).

Пример 4: $\{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$, (не произведение в обычном смысле, а "сборка" участников).

1.1 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Отличие НМ – степень принадлежности элемента множеству любым числом единичного интервала $[0,\ 1]$.

1. ***Нечеткое множество*** (НМ) – совокупность упорядоченных пар, составленных из элементов u универсального множества U и значений характеристической ***функции принадлежности*** $A = \{(u, \mu_A(u))\}$, $A \subset U$.

2. ***Функция принадлежности*** (ФП) $\mu_A(u)$, определяющая нечеткое подмножество A в универсальном множестве U, представляет собой отображение, для которого U – область определения, а интервал [0, 1] есть область значений $\mu_A(u) : U \rightarrow [0, 1]$.

Четкое множество

Нечеткое множество

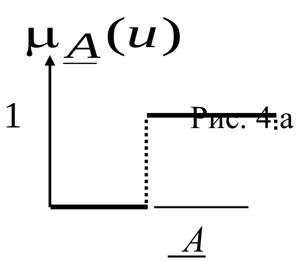


Рис. 4 а

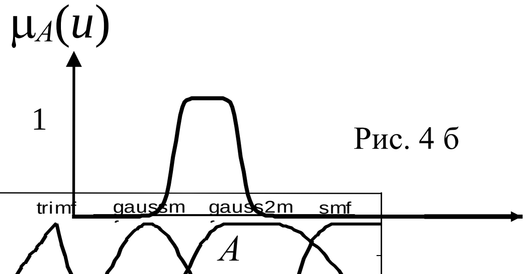


Рис. 4 б

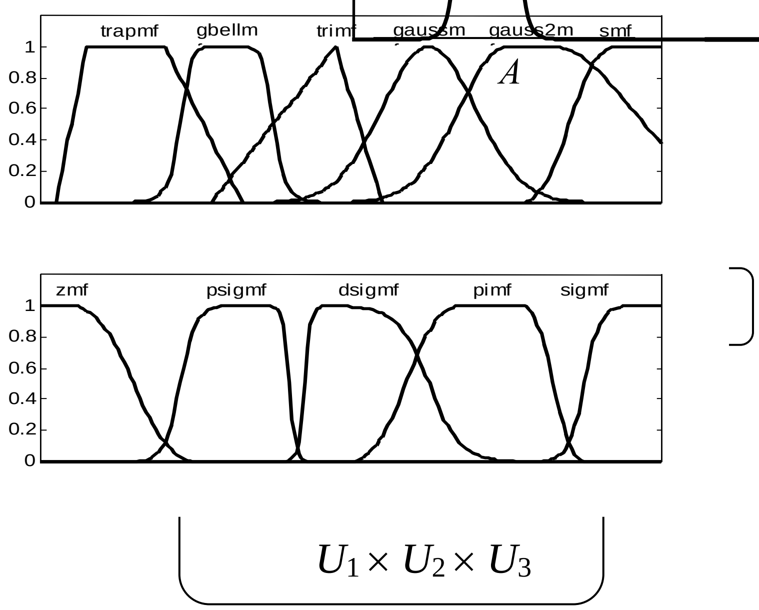


Рис. 3

ТИПЫ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

3. ***Нечетким синглтоном*** называется одноточечное НМ $A = (u_0,\ \mu_A(u_0))$, $\mu_A(u_0) \in (0, 1]$.

4. ФП ставит в соответствие каждому элементу $u_0 \in U$ число $\mu_A(u_0)$ из интервала [0,1], характеризующее ***степень принадлежности*** элемента u_0 нечеткому множеству *А*.

Примеры 5. Сравнение четких и нечетких множеств: четкое множество $\underline{A}$ – температура ниже 0 градусов (рис. 5 *а*);

нечеткое множество *А* – низкая температура (рис. 5 *б*).

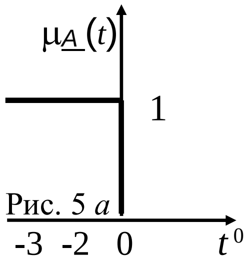


Рис. 5 *а*

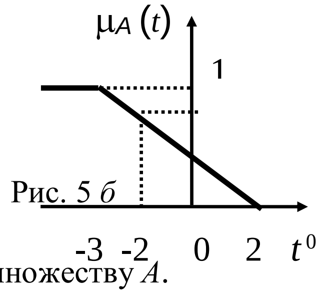


Рис. 5 *б*

$\mu_A(u_0)$ – субъективная оценка степени принадлежности u_0 множеству *А*.

Пусть $t^0 = -2^0$, $\mu_A(t^0) = 0.8$, значит $t^0 = -2 \in A$ на 80% .

Примеры НМ:

- В заданном множестве людей – подмножество высоких людей.
- В множестве цветов – подмножество темно-зеленых цветов.

5. ***Варианты записи*** НМ:

- *U* – дискретное:

$$A = \{(u_1, \mu_A(u_1)), (u_2, \mu_A(u_2)), (u_3, \mu_A(u_3)), (u_4, \mu_A(u_4))\};$$

$$A = \mu_A(u_1)|u_1 + \mu_A(u_2)|u_2 + \mu_A(u_3)|u_3 + \mu_A(u_4)|u_4;$$

A =

u_1	u_2	u_3	u_4
$\mu_A(u_1)$	$\mu_A(u_2)$	$\mu_A(u_3)$	$\mu_A(u_4)$

.

- *U* – непрерывное: $A = \int_U \mu_A(u)|u$ ·

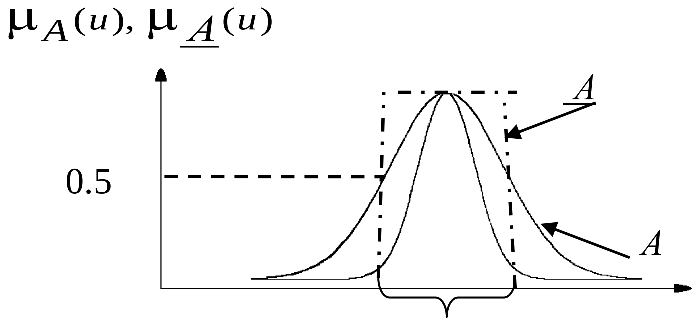
Здесь знаки "+" , $\int$ – объединение, а не арифметическое суммирование или интегрирование, НМ *А* – объединение составляющих его одноточечных множеств нечетких синглтонов.

6. ***Четкое множество $\underline{A}$, ближайшее к нечеткому А*** (т. е. расположенное на наименьшем линейном или евклидовом расстоянии от данного нечеткого множества)

$$\mu_{\underline{A}}(u) = \begin{cases} 0, \text{ если } \mu_A(u) < 0.5; \\ 1, \text{ если } \mu_A(u) > 0.5; \\ 0, \text{ или } 1, \text{ если } \mu_A(u) = 0.5. \end{cases}$$

Примем $\mu_{\underline{A}}(u) = 0$, если $\mu_A(u) = 0.5$.

Пример 6.

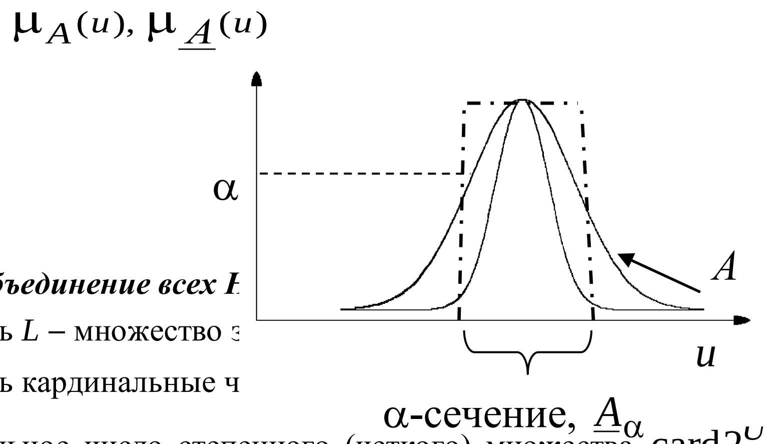


	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
A =	0.2	0	0.5	1.0	,
$\underline{A}$ =	0	1	0	0	1

7. ***Множество α-уровня (α-сечение)*** нечеткого множества A – четкое подмножество универсального множества U, если элементы нечеткого множества имеют степени принадлежности большие или равные α: $\underline{A}_\alpha = \{u \mid u \in U, \mu_A(u) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1]$.

Значение α называют α *– уровнем*.

П р и м е р 7: НМ A = 0,2|u_1 + 0| u_2 + 0,5| u_3 + 1| u_4 , множества α-уровня: $\underline{A}_{0,3} = \{u_3, u_4\}$, $\underline{A}_{0,7} = \{u_4\}$.



8. ***Объединение всех Н*** … начим $R(U)$.

Пусть L – множество …

Пусть кардинальные ч…

Кардинальное число степенного (четкого) множества $\text{card}\, 2^U = 2^k$, ***кардинальное число*** *объединения НМ*

$$\text{card}\, R(U) = m^k. \qquad (1.2)$$

Пример 7:

$$1)\ \{u_1, u_2\} = U,\ \text{card}\,\{u_1, u_2\} = 2,\ k = 2,\ 2^U = \{0, \{u_1\}, \{u_2\}, \{u_1, u_2\}\},$$

$$\text{card}\, 2^U = 2^k = 4;$$

Кардинальное число степенного множества.

$$2)\ \{u_1, u_2\} = U,\ L = \{0, 0.5, 1\}, \text{card}\, L = 3, m = 3,$$

Кардинальное число объединения НМ.

$$\text{card}\, R(U) = m^k = 3^2 = 9,$$

$$R(U)=\{\{(u_1|0),(u_2|0)\},\{(u_1|0),(u_2|0.5)\},\{(u_1|0.5),(u_2|0)\},$$

$$\{(u_1|0.5),(u_2|0.5)\},\{(u_1|0),(u_2|1)\},\{(u_1|1),(u_2|0)\},\{(u_1|1),(u_2|0.5)\},\{(u_1|0.5),(u_2|1)\},\{(u_1|1),(u_2|1)\}$$

9. НМ называется ***нормальным***, если верхняя граница ФП равна 1: $\sup \mu_A(u)=1$; в противном случае НМ называется ***субнормальным***. Непустое субнормальное множество можно привести (нормализовать) к нормальному по формуле

$$\mu_A'(u)=\frac{\mu_A(u)}{\sup\limits_{u\in U}\mu_A(u)}. \qquad (1.3)$$

Пример 8 (рис. 6). Нормализация нечеткого множества A' с функцией принадлежности $\mu_{A'}(x)=\dfrac{0.6}{1+(10-x)^2}$.

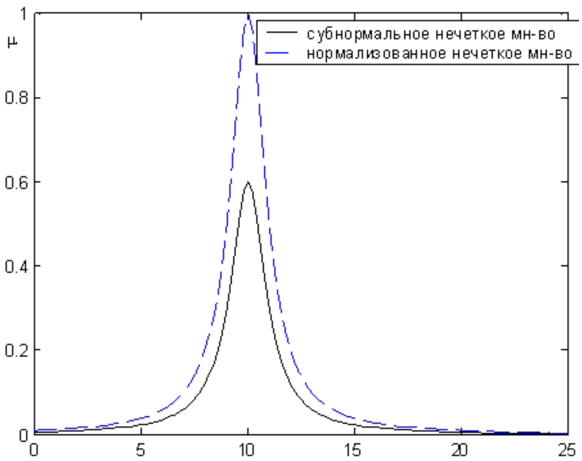


Рис. 6

Пример 9. Универсальное множество $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

НМ, обозначаемое словом «несколько»:

[несколько]= $\sum_i \mu_i \mid u_i$ =0.5|3 + 0.8|4 + 1|5 +1|6 +0.8|7 + 0.5|8, НМ – нормальное.

Нечеткое множество – «не малое и не большое»

[не малое и не большое]= $\sum_i \mu_i \mid u_i$ =0.2|2 + 0.3|3 + 0.5|5 +0.4|6 +0.3|7 + 0.2|8 . НМ – субнормальное.

$$\mu_A'(u)=\frac{\mu_A(u)}{\sup\limits_{u\in U}\mu_A(u)}$$

[не малое и не большое]= $\sum_i \mu_i \mid u_i$ =0.4|2 + 0.6|3 + 1|5 +0.8|6 +0.6|7 + 0.4|8. НМ – нормальное.

ОПЕРАЦИИ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

1. ***Равенство нечетких множеств*** .

$A, B \subset R(U)$ – НМ, $\mu_A(u),\ \mu_B(u)$ – ФП, соответственно, A, B.

A и *B* равны, если $\forall u \in U$ выполнено равенство $\mu_B(u) = \mu_A(u)$. Обозначение: *A* = *B*.

2. ***Операция вложения.***

B содержится в A (B –подмножество нечеткого множества A), $B \subseteq A$, если $\forall u \in U$:

$\mu_B(u) \le \mu_A(u)$.

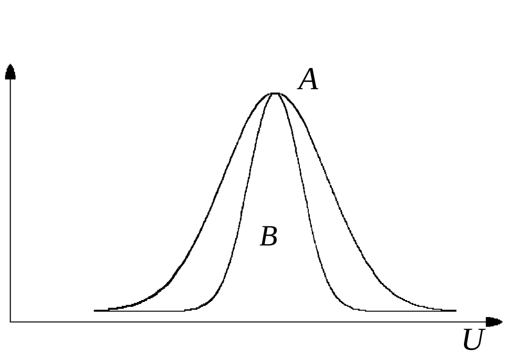
Пример 10:

$U = \{a, b, c\};\ A = \{(a, 0.7), (c, 0.3)\};$

$B = \{(a, 0.4), (c, 0.1)\};$

$C = \{(a, 0.7), (b, 0.2)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow B \subset A, C \not\subset A.$



3. ***Операция пересечения*** (рис. 8). Пересечением $A \bigcap B$ с функцией принадлежности

$$\mu_{A \bigcap B}(u) = \mu_A(u) \wedge \mu_B(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\},\ \forall u \in U, \quad (1.4)$$

где $\wedge$ – логическая операция конъюнкции.

Пример11:

$\{U = \{a, b, c\};$

$A = \{(a, 0.7), (c, 0.1)\};$

$B = \{(a, 0.4), (c, 0.5)\};$

$A \bigcap B = \{(a, 0.4), (c, 0.1)\}.$

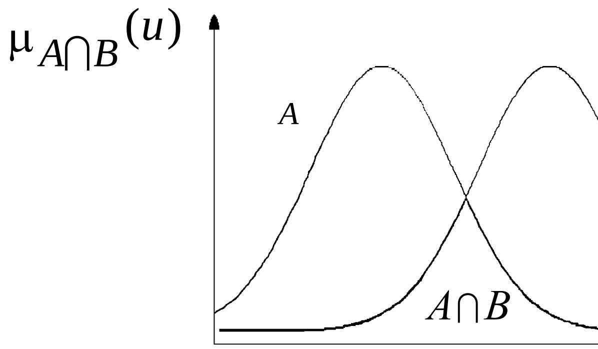


Рис. 7

4. ***Операция объединения.***

Объединением НМ $A, B \subset R(U)$ называется НМ $A \bigcup B$ (рис. 8) с ФП вида

$$\mu_{A \cup B}(u) = \mu_A(u) \vee \mu_B(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\},\quad \forall u \in U,$$

(1.5)

где $\vee$ – логическая операция дизъюнкции.

Пример 12:

$U = \{a, b, c\}$;

$A = \{(a, 0.7), (c, 0.1)\}$;

$B = \{(b, 1), (c, 0.5)\}$;

$A \bigcup B = \{(a,\ 0.7), (b, 1), (c, 0.5)\}$.

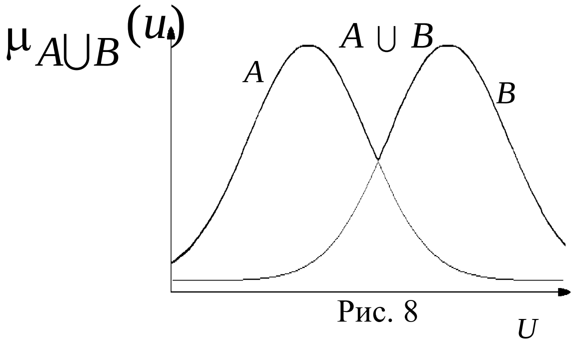


Рис. 8

5. ***Операция дополнения*** **(*отрицания*).**

Дополнением (отрицанием) НМ $A \subset R(U)$ называется НМ $\overline{A}$ (рис. 9) с ФП вида

$$\mu_{\overline{A}}(u) = 1 - \mu_A(u). \tag{1.6}$$

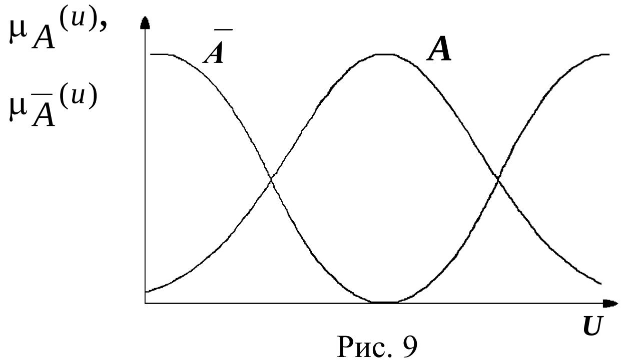


Рис. 9

В системе $(R(U), \subset, \bigcup, \bigcap, \bar{\ })$ выполняются законы тавтологии, коммутативности, ассоциативности, абсорбции (погашения), дистрибутивности, де Моргана, двойного отрицания. Не выполняется закон комплементарности, т. е.

$$A \bigcap \overline{A} \neq 0,\ \ A \bigcup \overline{A} \neq U$$

1. Коммутативность: $A \bigcap B = B \bigcap A$, $A \bigcup B = B \bigcup A$
2. Ассоциативность: $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$, $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$
3. Закон тавтологии: $A \bigcap A = A$, $A \bigcup A = A$
4. Закон поглощения: $A \bigcup (A \bigcap B) = A$, $A \bigcap (A \bigcup B) = A$
5. Дистрибутивный закон: $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.
6. Закон де Моргана: $\overline{(A \bigcap B)} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$.

Система $(R(U), \subset, \bigcup, \bigcap, \bar{\ })$ образует так называемую полную псевдобулеву алгебру.

Замечание. Система $(R(U), \subset, \bigcup, \bigcap, \bar{\ })$ четкого степенного множества образует булеву алгебру.

6. ***Операция концентрирования***.

Концентрированием НМ $A \subset R(U)$ называется НМ A^2 с ФП вида $\mu_{A^2}(u) = \mu_A^2(u)$.

7. ***Операция растяжения.***

Растяжением НМ $A \subset R(U)$ называется НМ $A^{0.5}$ с ФП вида $\mu_{A^{0.5}}(u) = \mu_A^{0.5}(u)$.

A^2 – сужает диапазон определения (уточняет); A^2 – "более чем A",

$A^{0.5}$ – расширяет диапазон определения НМ, "почти что A".

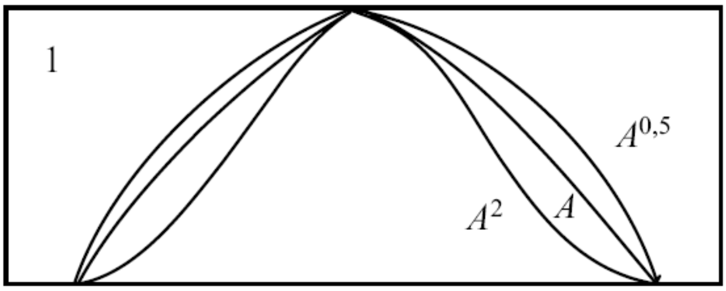


Рис. 10

8. ***Операция алгебраического произведения***.

Алгебраическим произведением НМ A и B называется НМ AB с ФП вида

$$\mu_{A\,B}(u) = \mu_A(u)\mu_B(u),\ \forall u \in U.$$

Пример 13: $U = \{a,b,c\}$ $U = \{a,b,c\}$; $A = \{(a,\ 0.7),\ (c,\ 0.1)\}$; $B = \{(a,\ 0.4),\ (c,\ 0.5)\}$; $AB = \{(a,\ 0.28),\ (c,\ 0.05)\}$.

9. ***Операция алгебраического суммирования***.

Алгебраическим суммированием НМ A и B называется НМ $A+B$ с ФП вида

$$\mu_{A+B}(u) = \mu_A(u) + \mu_B(u) - \mu_A(u)\,\mu_B(u),\quad \forall u \in U.$$

10.***Операция модуля разности*** $|A - B|$. ФП вида

$$\mu_{|A-B|}(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\} - \min\{\mu_A(u),\ \mu_B(u)\},\quad \forall u \in U.$$

(1.8)

Замечание. Основное свойство четкого множества, ближайшего к нечеткому:

$$\forall\ u\ \in U : \left| \mu_A(u) - \mu_{\underline{A}}(u) \right| = \mu_{A \cap \bar{A}}(u). \qquad (1.9)$$

Пример 14. Проверим утверждение.

Пусть $\mu_A(u) = 0.4,$ тогда из (1.1), $\mu_{\underline{A}}(u) = 0.$ Из (1.8)

$$\mu_{|A-\underline{A}|}(u) = \max\{\mu_A(u),\ \mu_{\underline{A}}(u)\} - \min\{\mu_A(u),\ \mu_{\underline{A}}(u)\} = 0.4 - 0 = 0.4.$$

Из (1.6), (1.4) $\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u) = 1 - 0.4 = 0.6,$ $\mu_{A \cap \bar{A}}(u) = \min(\mu_A(u),\ \mu_{\bar{A}}(u)) = 0.4.$

Утверждение (1.9) верно.

11. ***Операция прямого произведения***. Пусть $A = \{(u,\ \mu_A(u))\,|\ u \in U\},$

$B = \{(v,\ \mu_B(v))\,|\ v \in V\}$ – НМ в U и V.

Прямое произведение $A \times B$ НМ A и B в $U \times V$ – НМ вида

$$A \times B = \{((u,v),\ \mu_{A\times B}(u,v))\,|\,(u,v) \in U \times V\},$$

(1.11)

$$\mu_{A\times B}(u,v) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(v)\} \quad \text{или} \quad \mu_{A\times B}(u,v) = \mu_A(u)\ \mu_B(v).$$

ПОКАЗАТЕЛИ НЕЧЕТКОСТИ НМ

Показатели нечеткости, которые можно интерпретировать, как:

- меру отличия НМ от ближайшего к нему четкого множества;

• характеристику внутренней неопределенности, двусмысленности, обусловленной неполной принадлежностью объектов множеству.

Метрический подход к определению показателей нечеткости

Линейный показатель нечеткости

$$\nu(A) = \frac{2}{n} d(A, \underline{A}) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_A(u_i) - \mu_{\underline{A}}(u_i) \right|,$$

где $d(A, \underline{A})-$ обобщенное расстояние Хемминга, $\frac{d(A, \underline{A})}{n}$ – обобщенное относительное расстояние Хемминга. С учетом (1.9)

$$\nu(A) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_{A \cap \overline{A}}(u_i).$$

Таким образом, НМ и его дополнение имеют один и тот же показатель нечеткости.

Квадратичным показателем нечеткости

$$\varepsilon(A) = \frac{2}{\sqrt{n}} e(A, \underline{A}) = \frac{2}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_A(u_i) - \mu_{\underline{A}}(u_i))^2},$$

где $e(A, \underline{A})-$ обобщенное евклидово расстояние, $\frac{e(A, \underline{A})}{\sqrt{n}}$ – обобщенное относительное евклидово расстояние.

Замечание. Если *A*, *B* $\subset R(U)$, то нельзя определенно сказать: больше или меньше показатели нечеткости для $A \cup B,\ A \cap B,$ чем для *A* и для *B*.

Пример 15. Показатели нечеткости

	u_1	u_2	u_3		u_1	u_2	u_3
A =	0.2	0.6	0.1	*B* =	0.6	0.3	0.8

	u_1	u_2	u_3
$A \cap B$	0.2	0.3	0.1

$$\nu(A) = \frac{2}{n} d(A, \underline{A}) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_A(u_i) - \mu_{\underline{A}}(u_i) \right| = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_{A \cap \overline{A}}(u_i) =$$

= 2/3(0.2 + 0.4 + 0.1) =0.46,

$\nu(B) =$ 2/3(0.4 + 0.3 + 0.2) =0.6,

$\nu(A \cap B) =$ 2/3(0.2 + 0.3 + 0.1) =0.4.

Оценка нечеткости через энтропию

Известно, что энтропией системы измеряется степень беспорядка компонентов системы относительно вероятностей состояния. Рассмотрим N состояний $(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_N)$ системы, с которой связаны вероятности $p_1,\ p_2, ...,\ p_N$, тогда энтропия системы определяется выражением

$$H(p_1,\ p_2,...,\ p_N) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i \,.$$

По аналогии вводится энтропия НМ:

$$H(A) = k\sum_{i=1}^{N} s(\mu_A(u_i)) \,,$$

где $k = \text{const} > 0,$ s – функция Шеннона, $s(\mu_A(u_i)) = s(y)$.

Функция $s(y) = -y\ln y - (1-y)\ln(1-y),\ s(0) = s(1) = 0.$