

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

## Лабораторная работа №8.

### **ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ. МАКСИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ДЛЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ОБЪЕКТА**

**Цель работы:** исследовать задачу максимального быстродействия, особенности ее решения для колебательного объекта 2-го порядка, освоить численные методы решения.

#### **Основные положения**

Особенностью оптимального по быстродействию управления колебательными объектами является то, что на эти объекты не распространяется теорема об  $N$  интервалах. Количество переключений зависит не только от порядка дифференциальных уравнений, но и от взаимного положения заданных начального и конечного состояний объекта управления.

Подтверждение этой особенности управления колебательными объектами можно получить на основе принципа максимума.

В соответствии с этим принципом оптимальное управляющее воздействие зависит от сопряженных переменных следующим образом:

$$U_0 = \text{sign}(F(\psi_1, \psi_2, \dots))$$

Однако у колебательных систем сопряженные переменные, как функции времени, содержат гармонические составляющие с такими же частотами. Следовательно, по отношению к колебательным объектам 2 порядка принцип максимума позволяет сделать следующие выводы:

- количество переключений знака управляющего воздействия может быть больше 1;
- оптимальные по быстродействию траектории состоят из нескольких фрагментов, время движения по каждому из которых не может превышать половину периода свободных колебаний объекта управления.

Построение оптимальных траекторий рассмотрим на примере консервативного колебательного звена 2 порядка.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; & x_1(0) &= -1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + u; & x_2(0) &= -4 \end{aligned} \quad |u| \leq 1$$

Задаче максимального быстродействия для приведенного выше объекта управления соответствует следующий гамильтониан

$$H = \psi_1 x_2 - \psi_2 x_1 + \psi_2 u - 1$$

Очевидно, что оптимальное управление зависит от сопряженных переменных следующим образом

$$u_o = \text{sign}(\psi_2)$$

Система сопряженных уравнений

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \psi_2$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1$$

Поскольку уравнения относительно сопряженных переменных не зависят от состояний объекта, выражение для  $\psi_2(t)$  может быть найдено из решения только системы сопряженных уравнений

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{bmatrix}$$

По правилу Крамера:

$$\psi_2(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \Delta(s) = s^2 + 1, \quad \Delta_2(s) = s\psi_{20} - \psi_{10}$$

$$\psi_2(s) = \frac{s\psi_{20} - \psi_{10}}{s^2 + 1} \rightarrow \psi_2(t) = \psi_{20} \cos(t) - \psi_{10} \sin(t)$$

Полученное выражение для  $\psi_2(t)$  показывает, что управляющее воздействие может иметь неограниченное количество переключений знака, но интервал постоянства знака не может превышать  $\pi$  секунд. Для определения оптимальных моментов переключения можно использовать графический метод построения линий переключения в фазовом пространстве.

На первом этапе строится фрагмент линии переключения первого порядка, который является траекторией движения объекта управления, приводящей его к конечному состоянию под действием постоянного управления. Эта линия, как и в предыдущих работах, определяется путем интегрирования системы в обратном времени из конечного состояния. Длительность этого фрагмента не может превышать  $\pi$  секунд. Можно параллельно построить траекторию в прямом времени длительностью  $\pi$  секунд из начального состояния с обратным управлением, и, если траектории не пересекаются, убедиться, что требуется большее число переключений.

Далее нужно построить фрагмент линии переключения второго порядка, который соответствует предпоследнему переключению (или второму в обратном времени). Для этого линия переключения первого порядка разбивается на  $N$  точек, и для каждой точки траектории строится своя промежуточная линия переключения длительностью  $\pi$  секунд. Крайние точки этих промежуточных линий образуют фрагмент линии переключения второго порядка.

Далее можно опять сделать проверку, требуются ли еще переключения, путем отрисовки траектории в прямом времени из начальной точки. Только важно помнить, что траектория в прямом времени, построенная на первом этапе, нас уже не устраивает, так как она построена для другого знака управления. При формировании траекторий в прямом и обратном времени нужно внимательно следить за изменением знака управляющего воздействия.

Если точка пересечения опять не найдена, процедура повторяется, линия второго порядка разбивается на  $N$  точек, ищется линия переключения третьего порядка, и так далее.

Описанный выше алгоритм построения линии переключения реализован в следующей MATLAB программе.

В процессе выполнения расчетов оказалось, что функция `ode23s` выполняет численное решение рассматриваемых дифференциальных уравнений гораздо точнее, чем функция `ode45`

***%% Скрипт Test8.m***

```
%Построение фрагмента линии переключения первого порядка
% для положительного управления в обратном времени
rp_ode_p = @(t, x) [x(2); -x(1)+1];
[Tr1, Yr1] = ode23s(rp_ode_p, [pi 0], [0;0]);
% Построение траектории движения в прямом времени из
% начальной точки для отрицательного управления
rp_ode_m = @(t, x) [x(2); -x(1)-1];
[Tr1, Ys1] = ode23s(rp_ode_m, [0 pi], [-1;-4]);
plot(Yr(:,1), Yr(:,2), 'r', Ys(:,1), Ys(:,2));
% пересечение отсутствует, нужно искать линию
% переключения второго порядка
plot(Yr(:,1), Yr(:,2)), hold on
%N - количество точек, на которые разбивается линия
% переключения первого порядка
```

```
% Для каждой точки на экран выводится конечная точка
% траектории после переключения управления (знак минус)
```

```
N=20;
for i=1:N
    T = pi+i*pi/N; t1 = T - i*pi/N;
    u_t1 = @(t, t1) [(t>=t1)-(t<t1)];
    rp_ode = @(t,x) [x(2);-x(1)+u_t1(t,t1)];
    [Ttemp,Ytemp]=ode23s(rp_ode,[T 0],[0 0]);
    plot(Ytemp(end,1),Ytemp(end,2),'r*')
end
```

```
% построение траектории в прямом времени из начального
% состояния (для ручного поиска моментов переключения)
% знак на первом и третьем интервале – положительный
```

```
t1 = 1.32; % подбор первого момента в интервале 0...pi
t2 = t1 + pi;
T=6.41; % также можно подобрать
u_t_all = @(t) [(t<t1)-(t>=t1)+2*(t>=t2)];
rp_ode = @(t,x) [x(2);-x(1)+u_t_all(t)];
[Ts2,Ys2]=ode23s(rp_ode,[0 t1],[-1 -4]);
plot(Ys(:,1),Ys(:,2),'b')
% заменяя верхний предел интегрирования на t2, можно
% определить точку достижения линии переключения
% первого порядка, затем, заменяя на T – подобрать
% момент выключения
```

С помощью приведенной выше программы были получены следующие параметры оптимального процесса:  $t_1 = 1.32$ ;  $t_2 = 4.46$ ;  $T = 6.41$ .

Фазовая траектория оптимального процесса и графики фрагментов линии переключения показаны на рис. 8.1

Использование встроенных методов оптимизации (fminsearch) для поиска моментов переключения является достаточно непростым: заранее в системе неизвестно количество моментов переключения. Решив задачу предварительно графическим методом, можно определить количество переключений, но целевая функция должна отслеживать, что интервал между соседними пе-

реключениями не должен превышать полупериода колебаний системы. Для этого на целевую функцию нужно накладывать дополнительные штрафы за превышение интервала, что значительно усложняет ее и обуславливает появление новых локальных экстремумов.

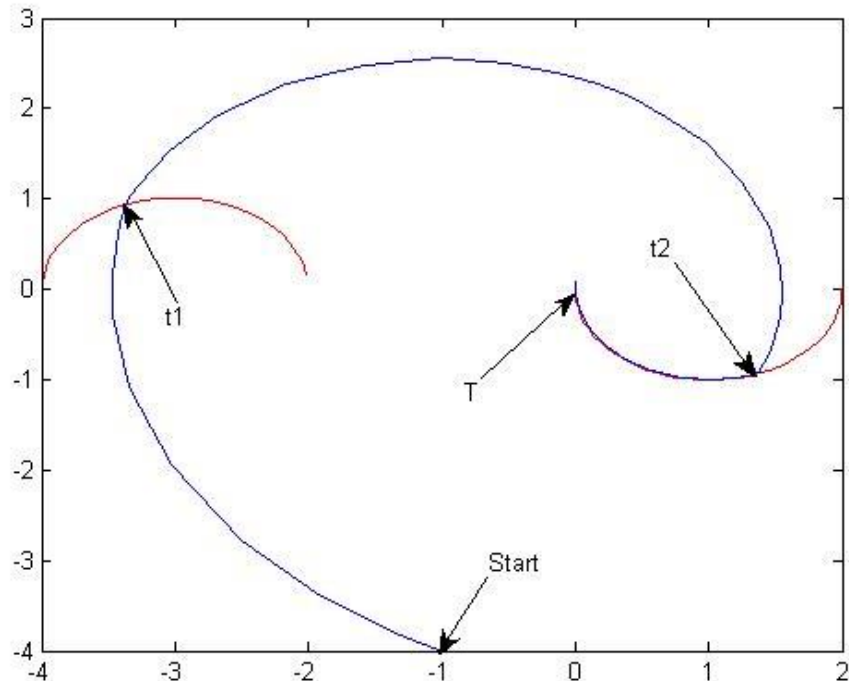


Рис. 8.1. Фазовая траектория оптимального процесса

Однако никто не мешает использовать для поиска систему с сопряженными координатами и автоматически настраивать начальные условия сопряженных координат  $\psi_{10}$ ,  $\psi_{20}$  и длительность интегрирования  $T$ . За несколько итераций можно определить с приемлемой точностью функцию  $\psi_2(t)$ , а заодно и моменты изменения ее знака. При этом заранее количество моментов переключения остается неизвестным.

### Содержание работы

1. Определить графическим способом управляющее воздействие для объекта управления, заданного в соответствии с вариантом. Привести график фазовой траектории, переводящей объект в конечное состояние.
2. Определить управляющее воздействие с помощью методов численной оптимизации.

## Индивидуальные задания

Для всех вариантов уравнения объекта управления имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; & x_1(0) &= x_{10}; & x_1(T) &= 0; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -(\delta^2 + \omega^2)x_1 - 2\delta x_2 + u & x_2(0) &= x_{20}; & x_2(T) &= 0; \end{aligned} \quad |u| \leq U_{\max}$$

Вариант	Параметры объекта управления	Вариант	Параметры объекта управления
1	$\delta = 0.3$ $\omega = 1$ $x_{10} = -10$ $x_{20} = -3.5$ $U_{\max} = 1.1$	13	$\delta = 0.3$ $\omega = 0.8$ $x_{10} = -10$ $x_{20} = -5.5$ $U_{\max} = 1.2$
2	$\delta = 0.3$ $\omega = 0.5$ $x_{10} = -60$ $x_{20} = -20$ $U_{\max} = 1.3$	14	$\delta = 0.3$ $\omega = 0.6$ $x_{10} = -80$ $x_{20} = -15$ $U_{\max} = 1.4$
3	$\delta = 0.4$ $\omega = 0.8$ $x_{10} = -18$ $x_{20} = -14$ $U_{\max} = 1.8$	15	$\delta = 0.4$ $\omega = 1$ $x_{10} = -30$ $x_{20} = -14$ $U_{\max} = 2.4$
4	$\delta = 0.4$ $\omega = 0.6$ $x_{10} = -50$ $x_{20} = -20$ $U_{\max} = 2.5$	16	$\delta = 0.4$ $\omega = 0.5$ $x_{10} = -80$ $x_{20} = -40$ $U_{\max} = 1.8$
5	$\delta = 0.5$ $\omega = 1$ $x_{10} = -10$ $x_{20} = -4$ $U_{\max} = 1.1$	17	$\delta = 0.5$ $\omega = 0.8$ $x_{10} = -10$ $x_{20} = -4$ $U_{\max} = 0.8$

Вариант	Параметры объекта управления	Вариант	Параметры объекта управления
6	$\delta = 0.5$ $\omega = 0.5$ $x_{10} = -300$ $x_{20} = -100$ $U_{\max} = 1.4$	18	$\delta = 0.5$ $\omega = 0.6$ $x_{10} = -350$ $x_{20} = -100$ $U_{\max} = 1.2$
7	$\delta = 0.25$ $\omega = 1$ $x_{10} = -4$ $x_{20} = -2$ $U_{\max} = 1.1$	19	$\delta = 0.25$ $\omega = 0.9$ $x_{10} = -4$ $x_{20} = -2$ $U_{\max} = 0.9$
8	$\delta = 0.25$ $\omega = 0.5$ $x_{10} = -10$ $x_{20} = -40$ $U_{\max} = 1.6$	20	$\delta = 0.25$ $\omega = 0.7$ $x_{10} = -10$ $x_{20} = -40$ $U_{\max} = 1.4$
9	$\delta = 0.5$ $\omega = 1$ $x_{10} = 10$ $x_{20} = 2$ $U_{\max} = 1.3$	21	$\delta = 0.5$ $\omega = 0.7$ $x_{10} = 40$ $x_{20} = 16$ $U_{\max} = 1.8$
10	$\delta = 0.5$ $\omega = 0.5$ $x_{10} = -200$ $x_{20} = -50$ $U_{\max} = 1.2$	22	$\delta = 0.5$ $\omega = 0.8$ $x_{10} = -130$ $x_{20} = -30$ $U_{\max} = 2.2$
11	$\delta = 0.25$ $\omega = 1$ $x_{10} = 4$ $x_{20} = 2$ $U_{\max} = 1.1$	23	$\delta = 0.25$ $\omega = 0.8$ $x_{10} = 6$ $x_{20} = 2$ $U_{\max} = 1.1$
12	$\delta = 0.25$ $\omega = 0.5$ $x_{10} = 70$ $x_{20} = 50$ $U_{\max} = 1.2$	24	$\delta = 0.25$ $\omega = 0.4$ $x_{10} = 50$ $x_{20} = 10$ $U_{\max} = 1.4$