Заметим, что при проектировании систем управления могут быть применены два подхода к обеспечению астатизма (или, что то же самое, к обеспечению выполнения условия (8.5)), именуемые соответственно позиционной и скоростной астатической коррекцией.

а) Астатические позиционные алгоритмы стабилизации.

Эти алгоритмы формируются на базе (8.7) путем введения дополнительного адаптивного корректирующего (балансировочного) сигнала:

$$u = Kz - \delta + K_\Delta y. \tag{8.8}$$

С учетом соотношения $y = F(p)(x - z)$, уравнение (8.8) принимает вид

$$u = Kz - \delta + K_\Delta F(p)(x - z),$$

откуда следует, что в данном случае мы имеем

$$W_{uz}(s) = K - K_\Delta F(s), W_{ux}(s) = K_\Delta F(s), W_{u\delta}(s) = -I_2 \tag{8.9}$$

Подставляя соотношения (8.9) в формулы (8.6), а затем в условие (8.5), получим систему из четырех неоднородных линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными – компонентами матрицы коррекции.

Замечание. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для более общего способа введения позиционной астатической коррекции в виде

$$u = Kz - \delta + K_\Delta(p)y.$$

б) Астатические скоростные алгоритмы стабилизации.

При данном способе обеспечения астатизма алгоритмы также формируются на базе (8.7). Однако здесь вместо введения дополнительного аддитивного корректирующтего сигнала используется эквивалентное линейное выражение векторного слагаемого $Kx - \delta$ через производные $\dot{x}$ и регулируемые координаты в силу уравнений объекта при $f \equiv 0$. Этот подход приводит к переходу от (8.7) к эквивалентному (в определенном смысле) регулятору

$$u = L\dot{x} + Nx \tag{8.10}$$

Синтез настраиваемых фильтров волновых помех в канале управления

Дополнительные фильтры (ДФ) являются вспомогательным элементом штатных алгоритмов управления, который не функционирует постоянно и включается лишь по мере необходимости. ДФ рационально использовать в тех режимах движения, при которых ДС подвергается существенному воздействию высокочастотного возмущения (волнения). Как известно, характерной особенностью этих режимов, как правило, является малая скорость хода. Это обстоятельство определяет недостаточную эффективность исполнительных органов в плане повышения точности стабилизации заданного движения при наличии волнения. В связи с отмеченным обстоятельством, введение ДФ должно обеспечить максимальное подавление бесполезного сигнала (волновой помехи), порождаемой волнением и поступающей в канал управления через измерительный комплекс.

В отличие от грубой инерционной фильтрации. Обеспечиваемой ОНФ. дополнительные фильтры являются адаптивно настраиваемым элементом, который в ходе функционирования приспосабливается к частотным свойствам волнения.

Детальное рассмотрение задачи синтеза ДФ будет осуществлено ниже, а здесь приведем лишь основные положения применяемого подхода.

Считая матрицы $A, B, C_f, R, Q, P, \Gamma, K$ и K_Δ заданными как в предшествующем подпункте, рассмотрим линейные уравнения системы, замкнутой астатическим позиционным регулятором

$$u = Kz - \delta + K_\Delta(p)y \tag{8.11}$$

В соответствии с общей структурой штатных алгоритмов управления, введем в состав математической модели замкнутой системы уравнение дополнительного фильтра в нормальной форме

$$\dot{\zeta} = A_\zeta \zeta + B_\zeta y,\ \xi = C_\zeta \zeta$$

или в операторной форме

$$\xi = E_d(p)y.$$

Выходной сигнал ξ дополнительного фильтра аддитивно включим в алгоритм управления, переходя от (7.49) к уравнению

$$u = Kz - \delta + K_\Delta(p)y + \xi = Kz - \delta + K_\Delta(p)y + E_d(p)y$$

или

$$u = Kz - \delta + E(p)y, \tag{8.12}$$

где

$$E(p) = K_\Delta(p) + E_d(p). \tag{8.13}$$

Теперь рассмотрим линейные уравнения замкнутой дополненной системы, которые представим в матричной форме, предварительно исключив из состава переменных вектор управляющих сигналов u:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax + B\delta + C_f\, f(t), \\
&\dot{\delta} = Kz - \delta + E(p)y, \\
&\dot{z} = Az + B\delta + Ry + Q(x - z), \\
&\dot{y} = \Gamma y + P(x - z).
\end{aligned} \tag{8.14}$$

Переходя к изображениям по Лапласу при нулевых начальных условиях, систему (8.14) можно представить в матричной форме

$$\begin{pmatrix} I_4 s - A & -B & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)I_2 & -K & -E(s) \\ -Q & -B & I_4 S - A + Q & -R \\ -P & 0 & P & I_2 s - \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \delta \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot f(s). \tag{8.15}$$

В соответствии с уравнениями (8.15), запишем передаточную матрицу $W_{f\delta}$ замкнутой дополненной системы от возмущения f к управляющих воздействиям δ:

$$W_{f\delta} = W_{f\delta}(s, E) = \det \begin{pmatrix} I_4 s - A & C_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K & -E(s) \\ -Q & 0 & I_4 s - A + Q & -R \\ -P & 0 & P & I_2 s - \Gamma \end{pmatrix} \tag{8.16}$$

Введем в рассмотрение функционал $J(E)$, зависящий от задания матрицы $E(s)$ и определяемый некоторой матричной нормой передаточной матрицы $\|W_{f\delta}\|$, представленной формулой (8.16).

Выбор конкретной нормы указанной передаточной матрицы порождает различные классы задач оптимального синтеза стабилизирующих управлений, среди которых в настоящее время наиболее популярными являются следующие:

задачи о минимизации нормы $\|H\|_2$ (типичный представитель -‹ задача LQG-оптимального синтеза):

задачи о минимизации нормы $\|H\|_\infty$ (задача H_∞-оптимального синтеза);

задачи о минимизации указанных выше норм для «взвешенных» передаточных матриц HS_1, где $S_1(s)$ – заданная весовая матричная функция (например, задачи средне-квадратичного оптимального синтеза и синтеза гарантирующих регуляторов соответственно).

Приведенные нормы вводятся следующими соотношениями:

а) норма $\|H\|_2$:

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr\left[H^T(-j\omega)H(j\omega)\right]d\omega},$$

в частности, для SISO-задачи (со скалярными входом (d и выходом e) получим

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega.}$$

б) норма $\|H\|_\infty$:

$$\|H\|_\infty = \max_{\omega\in(0,\infty)} \overline{\sigma}(\omega),$$

где $\overline{\sigma}(\omega)$ – максимальное сингулярное число матрицы $H(j\omega)$ (корень квадратный из максимального собственного значения эрмитовой матрицы $H^T(-j\omega)H(j\omega)$, в частности, для SISO-задачи имеем

$$\|H\|_\infty = \max_{\omega\in(0,\infty)} |H(j\omega)|,$$

в) взвешенная норма $\|HS_1\|_2$

$$\|HS_1\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr\left[S_1^T(-j\omega)H^T(-j\omega)H(j\omega)S_1(j\omega)\right]d\omega} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} tr\left[H(j\omega)S_\nu(\omega)H^T(-j\omega)\right]d\omega}$$

где $S_\nu(\omega) = S_1(j\omega)S_1^T(-j\omega)$; в частности, для SISO-задачи –

$$\|HS_1\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_\nu(\omega)d\omega}$$

где $S_\nu(\omega) = |S_1(j\omega)|^2$;

г) взвешенная норма $\|HS_1\|_\infty$

$$\|HS_1\|_\infty = \max_{\omega\in(0,\infty)} \overline{\sigma}_\nu(\omega),$$

где $\overline{\sigma}_\nu(\omega)$, – максимальное сингулярное число матрицы $H(j\omega)S_1(j\omega)$,

Для целей фильтрации чаще всего используется взвешенная матричная норма $\|HS_1\|_2$ передаточной матрицы $W_{f\delta}$. Здесь в качестве весовой матрицы S_1 принимается результат факторизации матрицы $S_f(\omega)$ спектральных плотностей возмущения, определяемого высокочастотным возмущением $S_f(\omega) = S_1(j\omega)S_1^T(-j\omega)$. В соответствии с выбором нормы $\|HS_1\|_2$, функционал, определяемый этой нормой и задающий качество фильтрации, можно представить в следующем виде:

$$J(E) = \left\| W_{f\delta} S_1 \right\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} tr\left[W_{f\delta}(j\omega) S_\nu(\omega) W_{f\delta}{}^T(-j\omega) \right] d\omega} \qquad (8.17)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что введенный функционал (8.17) характеризует интенсивность функционирования исполнительных органов в условиях высокочастотного возмущения. В связи с этим представляется целесообразным поставить задачу об обеспечении минимума этого функционала за счет выбора матрицы $E(s)$ в уравнении (8.16) для основного управляющего сигнала:

$$J(E) = \left\| W_{f\delta} S_1 \right\|_2 \to \min_{E \in \Omega_E} \qquad (8.18)$$

Сформулированная оптимизационная задача по существу является задачей о поиске оптимальной передаточной функции дополнительного фильтра. Действительно, если найдена оптимальная матрица – решение задачи (8.18):

$$E_0(s) = \arg\min_{E \in \Omega_E} J(E) = \arg\min_{E \in \Omega_E} \left\| W_{f\delta} S_1 \right\|_2$$

то оптимальная передаточная матрица $E_{d0}(s)$ ДФ, в соответствии с (8.13), может быть найдена по формуле

$$E_{d0}(s) = E_0(s) - K_\Delta(s).$$

Допустимое множество Ω_E в задаче (7.56) определяется требованиями, предъявляемыми к динамическим свойствам замкнутой системы, аналогично рис. 7.1. В наиболее простом варианте его можно принять в виде

$$\Omega_E = \left\{ E : \Delta_i \in C_\Delta,\ \Phi_d(\Delta_i) = 0,\ i = 1 \ldots n_d \right\},$$

где $\Phi_d(\Delta_i)$ – характеристический полином ДФ, n_d – степень этого полинома, C_Δ – область на комплексной плоскости, описанная выше и представленная на рисунке 7.1.

Необходимо отметить, что сформулированная оптимизационная задача (8.18) на допустимом множестве Ω_E является исключительно сложной в аналитическом плане. В настоящее время разработана теория и численные методы решения подобных задач, относящихся к области многоцелевой стабилизации динамических объектов.

Следует отметить, что введение дополнительных фильтрующих сигналов сохраняет устойчивость и не нарушает свойство астатизма замкнутой системы по регулируемым координатам.