где $A_1 = Ah$.

Решение системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений

Как было выведено ранее, математическая модель линейной динамической системы представляет собой задачу Коши для СЛНДУ:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x \in R^n, u \in R^l.$$

где вектор-функция $u(t)$ известна для любого момента времени. Найдем решение СЛНДУ. Для этого произведем замену переменных

$$z(t) = \Phi(t_0, t)x(t),$$

где $x(t)$ – решение СЛНДУ, $\Phi(t_0, t) = e^{A(t_0 - t)} = \Phi(t, t_0)^{-1}$, $\Phi(t, t_0)$ – переходная матрица для СЛОДУ

$$\dot{x}(t) = Ax(t).$$

Продифференцировав величину

$$z(t) = e^{At_0} e^{-At} x(t)$$

по переменной t с учетом того, что $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ в силу СЛНДУ, получим:

$$\frac{dz}{dt} = e^{At_0}\left(-Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\left(Ax(t) + Bu(t)\right)\right) =$$
$$= e^{At_0}\left(-Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t)\right) = e^{At_0} e^{-At} Bu(t).$$

При переходе к последнему равенству воспользовались равенством

$$Ae^{-At} = e^{-At}A,$$

которое следует из представления e^{-At} в виде ряда.

Интегрируя выражение

$$\frac{dz}{dt} = e^{At_0} e^{-At} Bu(t)$$

на интервале $[t_0, t]$ получим:

$$z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t_0 - \tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Подставив в него $z(t)=e^{At_0}e^{-At}x(t)$ и $z(t_0)=x(t_0)$ получим

$$e^{A(t_0-t)}x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t_0-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Окончательно решение СЛНДУ будет иметь вид:

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Формула для решения СЛНДУ носит название формулы Коши.

3.5 Численное решение СЛНДУ

Воспользуемся формулой Коши для построения алгоритма численного решения СЛНДУ, то есть решений $x(t_i)$, вычисленных в узлах равномерной сетки

$$t_i=t_0+hi,\quad i=0,1,\ldots,N.$$

Вычислим !!!!!!!!! $x(t_1)=x(t_0+h)$ в соответствии с формулой Коши:

$$x(t_0+h)=e^{A(t_0+h-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t_0+h}e^{A(t_0+h-\tau)}Bu(\tau)d\tau\,.$$

Считая величину h малой, можно пренебречь изменением входного сигнала на интервале $[t_0,t_0+h]$, то есть считать

$$u(\tau)=u(t_i)=const,\quad \tau\in[t_i,t_i+h],$$

тогда

$$x(t_1)=e^{Ah}x(t_0)+\int_{t_0}^{t_0+h}e^{A(t_0+h-\tau)}Bu(t_0)d\tau$$

Интеграл вычислим путем замены переменных

$$s=t_0+h-\tau,$$

откуда

$$ds=-d\tau,$$

$$\tau=t_0\to s=h,$$
$$\tau=t_0+h\to s=0,$$

тогда

$$x(t_1)=e^{Ah}x(t_0)+\int_0^h e^{As}dsBu(t_0).$$

Обозначив величины

$$A_d = e^{Ah}, B_d = \int_0^h e^{As} ds \cdot B,$$

получим выражение для решения в первом узле сетки:

$$x(t_1) = A_d x(t_0) + B_d u(t_0)..$$

Вычислив $x(t_2) = x(t_1 + h)$ по указанной методике, получим

$$x(t_2) = A_d x(t_1) + B_d u(t_1).$$

Аналогично для i-го узла сетки решение определяется следующей дискретной системой:

$$x(t_{i+1}) = A_d x(t_i) + B_d u(t_i), \quad i = 0,1,\ldots,N.$$

Матрицы A_d и B_d вычисляют разложением e^{Ah} в матричный ряд, тогда

$$\Psi = \int_0^h e^{As} ds = \int_0^h \left(I + \frac{As}{1!} + \frac{(As)^2}{2!} + \ldots + \frac{(As)^n}{n!} + \ldots \right) ds = I$$

$$= h + \frac{Ah^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n h^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots.$$

Отсюда

$$B_d = \Psi B,$$
$$A_d = I + \Psi A.$$

В MATLAB реализована команда вычисления матриц дискретной системы A_d и B_d по матрицам A, B исходной системы:

[sysd]=c2d(sysc,h);

где sysc – исходная непрерывная система, h – величина шага по времени, sysd –дискретная система.

Преобразование линейных моделей

Переход От СЛДУ к ЛДУ n-го порядка

Описание линейной динамической системы в виде СЛДУ -

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad x \in R^n, u \in R^l, y \in R^m.$$