ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Лабораторная работа №1.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: освоить метод аналитического решения систем дифференциальных уравнений на основе преобразования Лапласа, освоить численные методы решения дифференциальных уравнений с помощью стандартных функций MATLAB.

Постановка задачи

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t),\ x \in R^n, \tag{1.1}$$

где A – матрица постоянных коэффициентов. Вектор-функция $x(t)$, удовлетворяющая исходной системе уравнений, называется <u>*решением системы ДУ*</u>.

Существует бесконечное множество функций, удовлетворяющих системе (1.1), поэтому на практике обычно ставится <u>*задача Коши*</u> – определение <u>*частного*</u> решения системы ДУ, проходящего через заданную точку:

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.2}$$

Обычно в качестве известного момента времени выбирают $t_0 = 0$, а значение вектора x_0 называют <u>*начальным условием*</u>. Частное решение системы ДУ (1.1), удовлетворяющее известному начальному условию (1.2) является единственным решением системы.

Рассмотрим метод аналитического решения систем ДУ.

1.1 Аналитическое решение дифференциального уравнения 1 порядка методом преобразования Лапласа.

Преобразованием Лапласа функции времени $f(t)$, называется функция $F(s)$ комплексной переменной $\sigma + i\omega$, такая что:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \tag{1.3}$$

Удобство использования этого преобразования для решения дифференциальных уравнений заключается в том, что после преобразования по Лапласу дифференциальные уравнения преобразуются в алгебраические. Причиной описанного изменения свойств дифференциальных уравнений при использовании преобразования Лапласа являются следующие следствия (1.3):

$$f(t) \to F(s)$$
$$\frac{df(t)}{dt} \to sF(s) - f(t)_{t=0} \tag{1.4}$$

Таким образом, процесс решения дифференциального уравнения методом преобразования Лапласа заключается в выполнении следующего алгоритма:

1) преобразование исходного дифференциального уравнения в алгебраическое;

2) нахождение решения алгебраического уравнения;

3) определение решения дифференциального уравнения с помощью обратного преобразования Лапласа, применяемого к полученному ранее решению алгебраического уравнения.

Под обратным преобразованием Лапласа понимается следующее соотношение:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} e^{st}F(s)ds \tag{1.5}$$

При выполнении практических расчетов, требующих решения дифференциальных уравнений, используются таблицы преобразования Лапласа, которые позволяют выполнять операции прямого и обратного преобразований без выполнения операций интегрирования, предусмотренными выражениями (1.3) и (1.5). Функция времени, определенная через интеграл (1.5) или по таблице, называется функцией-оригиналом.

Преобразования Лапласа для основных функций сведены в таблицу 1.

Далее рассмотрим примеры решения систем ДУ.

1) уравнение 1-го порядка. Дано следующее уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = -2x$$
$$x(0) = 3$$

После преобразования по Лапласу в соответствии с (1.4) получаем следующее алгебраическое уравнение:

$$sx - 3 = -2x$$

Очевидно, что решением данного уравнения является выражение

$$x = \frac{3}{s+2}$$

Для получения оригинала $x(t)$ может быть использовано следующее табличное соотношение:

$$\frac{1}{s-a} \to e^{at}$$

После применения табличного соотношения к нашему случаю получаем искомое решение дифференциального уравнения:

$$x(t) = 3e^{-2t}$$

Таблица 1 – Таблица преобразований Лапласа

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$t^n,\ n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$t^\alpha\,(\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
$te^{\lambda t}$	$\frac{1}{(p-\lambda)^2}$	$\frac{\sin t}{t}$	$\mathrm{arcctg}\, p$
$t^n e^{\lambda t},\ n \in N$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	$\frac{1}{t}\left(1-e^{-t}\right)$	$\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$
$t^\alpha e^{\lambda t}, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$	$\delta(t)$	1
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\delta(t-a), a > 0$	e^{-ap}
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$		

2) Аналитическое решение дифференциального уравнения 2 порядка методом преобразования Лапласа. Рассмотрим следующее уравнение

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad x_1(0) = x_{10}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 3x_2 \quad x_2(0) = x_{20}$$

Переходим к алгебраическим уравнениям в s-области

$$sx_1 - x_2 = x_{10}$$
$$2x_1 + (s+3) = x_{20}$$

Системы линейных алгебраических уравнений малого порядка удобно решать методом Крамера. Решения можно найти через определители:

$$x_1(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$
$$x_2(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

где

$\Delta = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & (s+3) \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2$ - характеристический полином системы;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_{10} & -1 \\ x_{20} & (s+3) \end{vmatrix} = x_{10}s + 3x_{10} + x_{20}; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} s & x_{10} \\ 2 & x_{20} \end{vmatrix} = x_{20}s - 2x_{10}$$

Очевидно, что у системы 2-го порядка могут быть вещественные или комплексно-сопряженные корни. В данном примере – корни вещественные. Для определения решения необходимо разложить дробно-рациональные функции $x_1(s), x_2(s)$ на простые слагаемые, и тогда можно перейти к оригиналу.

$$x_1(s) = \frac{x_{10}s + 3x_{10} + x_{20}}{s^2 + 3s + 2} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{B_1}{s+2}$$
$$x_{10} = A_1 + B_1$$
$$3x_{10} + x_{20} = 2A_1 + B_1$$

$$3x_{10} + x_{20} = 2x_{10} - 2B_1 + B_1$$

$$B_1 = -x_{10} - x_{20}$$
$$A_1 = 2x_{10} + x_{20}$$

$$x_2(s) = \frac{x_{20}s - 2x_{10}}{s^2 + 3s + 2} = \frac{A_2}{s+1} + \frac{B_2}{s+2}$$
$$x_{20} = A_2 + B_2$$
$$-2x_{10} = 2A_2 + B_2$$

$$-2x_{10} = 2x_{20} - 2B_2 + B_2$$

$$B_2 = 2x_{10} + 2x_{20}$$
$$A_2 = -2x_{10} - x_{20}$$

В соответствии с таблицей преобразования Лапласа

$$x_1(t) = (2x_{10} + x_{20})e^{-t} - (x_{10} + x_{20})e^{-2t}$$
$$x_2(t) = (-2x_{10} - x_{20})e^{-t} + (2x_{10} + 2x_{20})e^{-2t}$$

3) система 2-го порядка с комплексно-сопряженными корнями. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad x_1(0) = x_{10}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 2x_2 \quad x_2(0) = x_{20}$$

Получаем систему алгебраических уравнений

$$sx_1 - x_2 = x_{10}$$

$$2x_1 + (s+2) = x_{20}$$

В соответствии с методом Крамера

$$x_1(s) = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$x_2(s) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

где

$\Delta = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & (s+2) \end{vmatrix} = s^2 + 2s + 2$ - характеристический полином системы;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_{10} & -1 \\ x_{20} & (s+2) \end{vmatrix} = x_{10}s + 2x_{10} + x_{20}\,; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} s & x_{10} \\ 2 & x_{20} \end{vmatrix} = x_{20}s - 2x_{10}$$

Функция $x_1(s)$ имеет вид:

$$x_1(s) = \frac{x_{10}s + 2x_{10} + x_{20}}{s^2 + 2s + 2}$$

Разбиение на простые дроби приведет к появлению комплексно-сопряженных коэффициентов. Для удобства применения таблиц преобразования Лапласа представим $x_1(s)$ в виде следующей суммы:

$$x_1(s) = \frac{A}{s^2 + 2\cdot 1\cdot s + \left(1^2 + 1^2\right)} + \frac{B(s+1)}{s^2 + 2\cdot 1\cdot s + \left(1^2 + 1^2\right)}$$

слагаемые которой соответствуют следующим табличным выражениям:

$$\frac{1}{s^2 + 2\delta s + \left(\delta^2 + \omega^2\right)} \rightarrow \frac{1}{\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t$$

$$\frac{s+\delta}{s^2 + 2\delta s + \left(\delta^2 + \omega^2\right)} \rightarrow e^{-\delta t} \cos \omega t$$

что позволит представить $x_1(t)$ в следующем виде:

$$x_1(t) = \frac{A}{1} e^{-t} \sin t + Be^{-t} \cos t$$

Использование описанного выше разложения на дроби позволяет получить следующие выражения:

$$x_1(s)=\frac{x_{10}s+2x_{10}+x_{20}}{s^2+2s+2}=\frac{A_1}{s^2+2\cdot1\cdot s+\left(1^2+1^2\right)}+\frac{B_1(s+1)}{s^2+2\cdot1\cdot s+\left(1^2+1^2\right)}$$

$$x_{10}s+2x_{10}+x_{20}=B_1s+A_1+B_1$$

$$B_1=x_{10}$$

$$A_1=x_{10}+x_{20}$$

$$x_2(s)=\frac{x_{20}s-2x_{10}}{s^2+2s+2}=\frac{A_2}{s^2+2\cdot1\cdot s+\left(1^2+1^2\right)}+\frac{B_2(s+1)}{s^2+2\cdot1\cdot s+\left(1^2+1^2\right)}$$

$$x_{20}s-2x_{10}=B_2s+A_2+B_2$$

$$B_2=x_{20}$$

$$A_1=-2x_{10}-x_{20}$$

Тогда аналитическое решение имеет вид:

$$x_1(t)=(x_{10}+x_{20})e^{-t}\sin(t)+x_{10}e^{-t}\cos(t)$$

$$x_2(t)=-(2x_{10}+x_{20})e^{-t}\sin(t)+x_{20}e^{-t}\cos(t)$$

4) система дифференциальных уравнений 3-го порядка. Рассмотрим следующую систему

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2 \qquad x_1(0)=1$$

$$\frac{dx_2}{dt}=x_3 \qquad x_2(0)=0$$

$$\frac{dx_3}{dt}=-3x_3-4x_2-2x_1 \qquad x_3(0)=0$$

Такие уравнения соответствуют системе (1.1) с матрицей A

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}$$

Из примеров (2) и (3) видно, что решения в основном определяются корнями характеристического полинома системы. Корни можно найти в MATLAB с помощью функции eig():

```
A=[0,1,0;0,0,1;-2,-4,-3]
eig(A)
ans =
    -9.999999999999991e-001
    -9.999999999999994e-001 +1.000000000000002e+000i
    -9.999999999999994e-001 -1.000000000000002e+000i
```

В данном примере система имеет один вещественный корень и два комплексно-сопряженных корня. Значит, функции $x_1(s), x_2(s), x_3(s)$ нужно разбить на три дроби – простую, с оригиналом в виде функции экспоненты, и две сложные дроби, соответствующие синусно-косинусным функциям-оригиналам, как в примере (3).

Иногда аналитическое решение можно найти с помощью функций символьной алгебры MATLAB:

```
S=dsolve('Dx1=x2','Dx2=x3',' Dx3=-3*x3-4*x2-
2*x1','x1(0)=1','x2(0)=0','x3(0)=0')
S =
    x1: [1x1 sym]
    x2: [1x1 sym]
    x3: [1x1 sym]
>> S.x1
ans =
-exp(-t)*(-2-sin(t)+cos(t))
>> S.x2
ans =
exp(-t)*(2*cos(t)-2)
>> S.x3
ans =
-exp(-t)*(2*sin(t)+2*cos(t)-2)
```

Однако данный способ не всегда позволяет получить компактное решение – функция может оказаться очень сложной. Поэтому **при выполнении лабораторной работы функцию dsolve применять не рекомендуется**.

Поэтому при решении систем с помощью компьютера чаще применяют не аналитические, а численные методы.

1.2. Численное решение дифференциальных уравнений с помощью функции ODE45 пакета MATLAB

В численных методах решения ДУ (1.1) не ставится задача нахождения аналитического выражения для функции $x(t)$. Вместо этого нужно определять значения этой функции для множества моментов времени t, выбираемых автоматически либо задаваемых пользователем.

Наиболее популярной является функция ode45, которая эффективно работает с обыкновенными дифференциальными уравнениями в широком диапазоне функций и параметров.

Рассмотрим пример численного решения уравнения первого порядка из примера 1. Основная программа (скрипт) в данном случае может состоять из одной строки (также добавлены комментарии):

%%Скрипт Main1.m

```
[t,y]=ode45('odefun1',[0 3],3);
% При вызове ODE45 используются следующие параметры:
% odefun1 – имя файл-функции, которая вычисляет
% значения правой части решаемого ДУ
% [0 3] – значения границ временного интервала,
% в котором ищется решение ДУ
```

Вторая строка скрипта используется для построения графика переходного процесса:

```
plot(t,y);
```

Для вызова функции ode45 также требуется создать отдельный файл-функцию:

%%Функция Odefun1.m

```
function f=odefun1(t,y)
% При вызове рассматриваемой функции из ode45,
% ей передаются через фактические параметры
% текущие значения t и y, по которым производится
% вычисление значения правой части ДУ, которое
% присваивается возвращаемому значению f
f=-2*y;
```

Если функция правой части может быть записана простым выражением, можно не создавать для нее отдельный файл, а использовать тип function-handle, определяя его в основном скрипте:

```
h_odefun1 = @(t, y) -2*y;
[t,y]=ode45(h_odefun1,[0 3],3);
plot(t, y)
```

или используя анонимную функцию без имени:

```
ode45(@(t, y) -2*y,[0 3],3);
```

Рассмотрим пример сравнения аналитического и численного решения системы уравнений второго порядка (пример 2). Пусть начальные условия $x_{10} = 0.5, x_{20} = -1$. Тогда скрипт имеет вид:

%%Скрипт Main2.m

```
h_odefun2 = @(t, x) [x(2);-2*x(1)-3*x(2)];
t0=0;
tm=10;
x10=0.5;
x20=-1;
[t,x]=ode45(h_odefun2,[t0 tm],[x10;x20]);
%вычисление переменных y1 и y2 необходимо для сравнения
% графиков аналитического и численного решений
y1=(2*x10+x20)*exp(-t)-(x10+x20)*exp(-2*t);
y2=(-2*x10-x20)*exp(-t)+(2*x10+2*x20)*exp(-2*t);
plot(t,x(:,1),'r',t,x(:,2),'g',t,y1,'bo',t,y2,'ko');
```

Следует отметить, что набор экспонент в решении дифференциального уравнения существенно зависит от начальных условий. При выбранных начальных условиях, например, в решении отсутствует слагаемое e^{-t}.

Рассмотрим аналогичный пример для системы уравнений второго порядка (пример 3). Пусть начальные условия $x_{10} = 2, x_{20} = 1$. Скрипт имеет вид:

%%Скрипт Main3.m

```
h_odefun3 = @(t, x) [x(2);-2*x(1)-2*x(2)];
x10=2;
x20=1;
t0=0;
tm=10;
[t,x]=ode45(h_odefun3,[t0,tm],[x10;x20]);
%вычисление переменных y1 и y2 необходимо для сравнения
% графиков аналитического и численного решений
y1=(x10+x20)*exp(-t).*sin(t)+(x10)*exp(-t).*cos(t);
```

```
y2=-(2*x10+x20)*exp(-t).*sin(t)+(x20)*exp(-t).*cos(t);
plot(t,x(:,1),'r',t,x(:,2),'g',t,y1,'bo',t,y2,'ko');
```

Следует отметить, что в MATLAB необходимо различать умножение матриц (*) и поэлементное умножение элементов массивов (.*).

Рассмотрим пример для системы уравнений третьего порядка (пример 4).

%% Скрипт Main4.m

```
h_odefun4 = @(t, x) [x(2);x(3);-3*x(3)-4*x(2)-2*x(1)];
x10=1;
x20=0;
x30=0;
tm=4;
[t,x]=ode45(@odefun4,[0 tm],[x10;x20;x30]);
y1=-exp(-t).*(-2-sin(t)+cos(t));
y2= exp(-t).*(2*cos(t)-2);
y3=-exp(-t).*(2*sin(t)+2*cos(t)-2);
plot(t,x(:,1),'r',t,x(:,2),'g',t,x(:,3),'b',
t,y1,'ro',t,y2,'go',t,y3,'bo')
```

Содержание работы

1. Определение аналитического решения системы дифференциальных уравнений, соответствующих системе (1.1) и вектору начальных условий x_0 с помощью метода преобразований Лапласа (путем ручных преобразований).
2. Вычисление численного решения системы ДУ с помощью функции ode45.
3. Сравнение графиков аналитического и численного решения.

Индивидуальные задания

Вариант	Матрица **A**	x_0	Вариант	Матрица **A**	x_0
1	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0.5\\-2&-4&-3\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$	13	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0.5\\-2&-4&-3\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
2	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-3&-4&-2\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$	14	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-3&-4&-2\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}$
3	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\-2&-4&-3\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$	15	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&2\\-2&-4&-3\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
4	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\-3&-4&-2\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$	16	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&2\\-3&-4&-2\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}$
5	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&0.5\\-2&-4&-3\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$	17	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&0&0.5\\-2&-4&-3\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
6	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&1\\-3&-4&-2\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$	18	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&0&1\\-3&-4&-2\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}$
7	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&2\\-2&-4&-3\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$	19	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&0&2\\-2&-4&-3\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
8	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&2\\-3&-4&-2\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$	20	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&0&2\\-3&-4&-2\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}$
9	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&0&2\\-2&-4&-3\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$	21	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&0&2\\-3&-4&-2\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
10	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&0&2\\-2&-4&-3\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$	22	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&1\\-3&-4&-2\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}$
11	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&1\\-3&-4&-2\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$	23	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&1\\-3&-4&-2\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
12	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&0&2\\-3&-4&-2\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$	24	$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&2\\-3&-4&-2\end{bmatrix}$	$x_0=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}$