МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра САУ

ОТЧЕТ

по практической работе № 1

по дисциплине «Нелинейное и адаптивное управление в технических системах»

Студент гр. 9492	____________________	Викторов А.Д.
Преподаватель	____________________	Соколов П.В.

Санкт-Петербург

2024

Задача 1

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{y} = -y^3 + x^2 \\ \dot{x} = -x + 2y^2 + xy \end{cases} \tag{1.1}$$

Положение равновесия находится в точке (0,0).

Определим функцию Ляпунова следующим образом:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \tag{1.2}$$

Эта функция положительно определена и равна нулю в точке (0,0).

Найдем производную функции Ляпунова:

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} = \dot{x} \cdot x + \dot{y} \cdot y \tag{1.3}$$

Подставим производные переменных состояния из уравнения системы:

$$\dot{V}(x, y) = x(-x + 2y^2 + xy) + y(-y^3 + x^2) = -x^2 + 2xy^2 + 2x^2 y - y^4 \tag{1.4}$$

Для некоторых сочетаний x и y производная функции Ляпунова будет положительной, что свидетельствует о том, что система (1.1) не является асимптотически устойчивой.

В листинге 1 представлен код для Matlab, который позволяет вычислить траектории системы из некоторых начальных точек и построить графики переходных процессов и фазовые портреты.

```
clc, clear, close all
tspan = [0 20];

initial_conditions = [0.8, 0.02; 0.01, -0.7; 0.05, -0.05];

[t1, y1] = ode45(@system, tspan, initial_conditions(1,:));
[t2, y2] = ode45(@system, tspan, initial_conditions(2,:));
[t3, y3] = ode45(@system, tspan, initial_conditions(3,:));

figure;
subplot(2,1,1);
plot(t1, y1(:,1), 'DisplayName', 'x, нач. усл. = [0.8, 0.02]');  % x(t)
hold on;
xlabel('Время, t');
ylabel('x(t)');
title('Переходные процессы для x(t)');

subplot(2,1,2);
plot(t1, y1(:,2), 'DisplayName', 'y, нач. усл. = [0.8, 0.02]');  % y(t)
hold on;
xlabel('Время, t');
ylabel('y(t)');
title('Переходные процессы для y(t)');
subplot(2,1,1);
plot(t2, y2(:,1), 'DisplayName', 'x, нач. усл. = [0.01, -0.7]');  % x(t)
hold on;
subplot(2,1,2);
plot(t2, y2(:,2), 'DisplayName', 'y, нач. усл. = [0.01, -0.7]');  % y(t)
hold on;
subplot(2,1,1);
plot(t3, y3(:,1), 'DisplayName', 'x, нач. усл. = [0.05, -0.05]');  % x(t)
legend show;
hold on;

subplot(2,1,2);
plot(t3, y3(:,2), 'DisplayName', 'y, нач. усл. = [0.05, -0.05]');  % y(t)
legend show;
hold off;

% Построение фазовых траекторий для всех наборов начальных условий
figure;
plot(y1(:,1), y1(:,2), 'DisplayName', 'Фазовая траектория, нач. усл. = [0.8, 0.02]');
hold on;
plot(y2(:,1), y2(:,2), 'DisplayName', 'Фазовая траектория, нач. усл. = [0.01, -
0.7]');
hold on;
plot(y3(:,1), y3(:,2), 'DisplayName', 'Фазовая траектория, нач. усл. = [0.05, -
0.05]');
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Фазовые траектории');
legend show;
hold off;

function dydt = system(t, y)
    dydt = zeros(2,1);
    dydt(1) = -y(1) + 2*y(2)^2 + y(1)*y(2);
    dydt(2) = -y(2)^3 + y(1)^2;
end
```

Графики переходных процессов и фазовые траектории представлены на рисунках 1 – 6.

Начальные условия (0, 0.02).

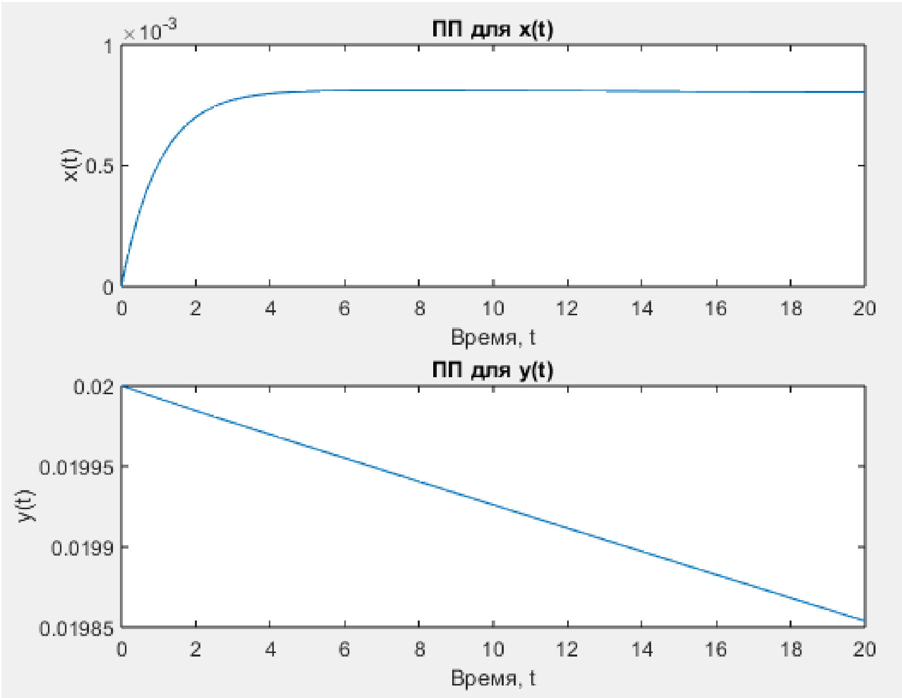

Рисунок 1 - График переходного процесса

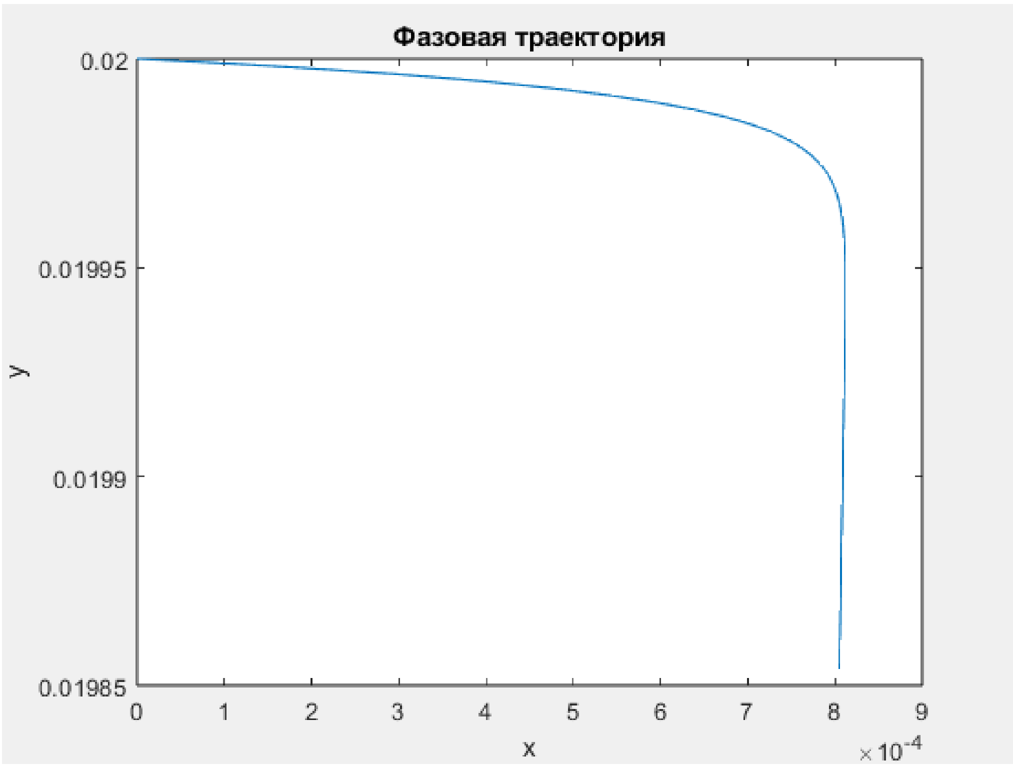

Рисунок 2 - Фазовая траектория

Начальные условия (0, -0.7).

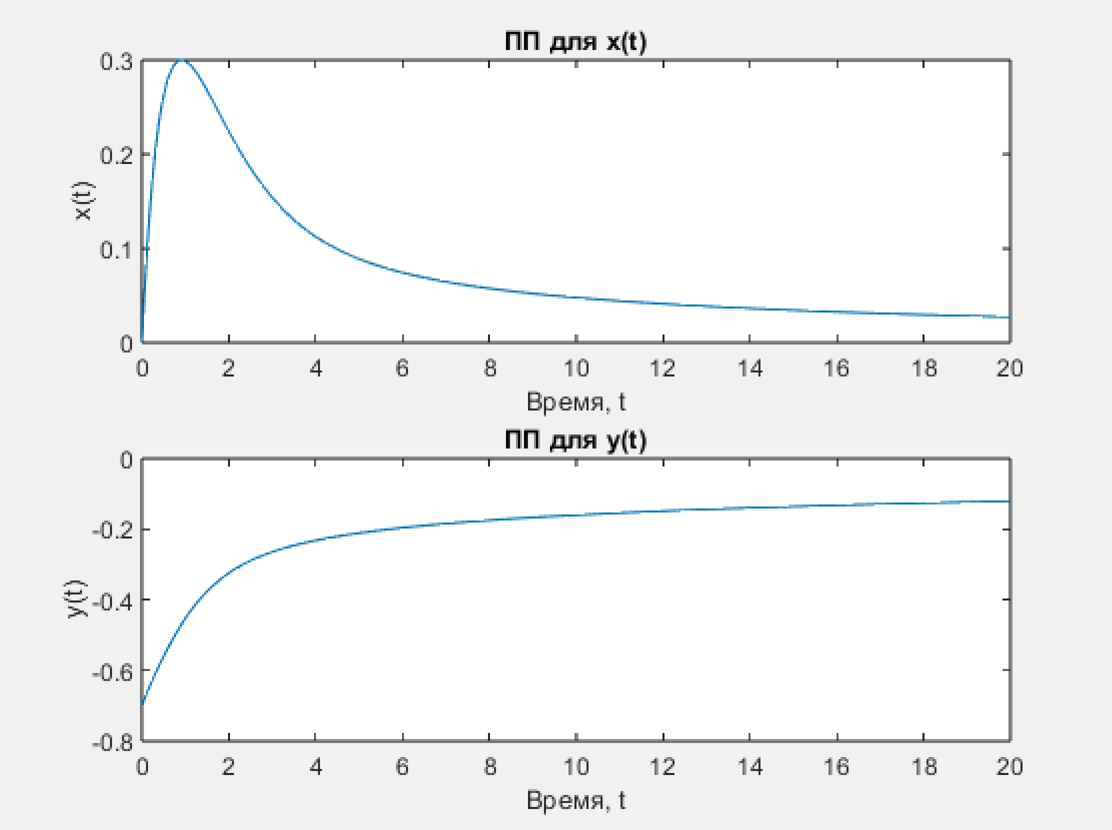

Рисунок 3 - График переходного процесса

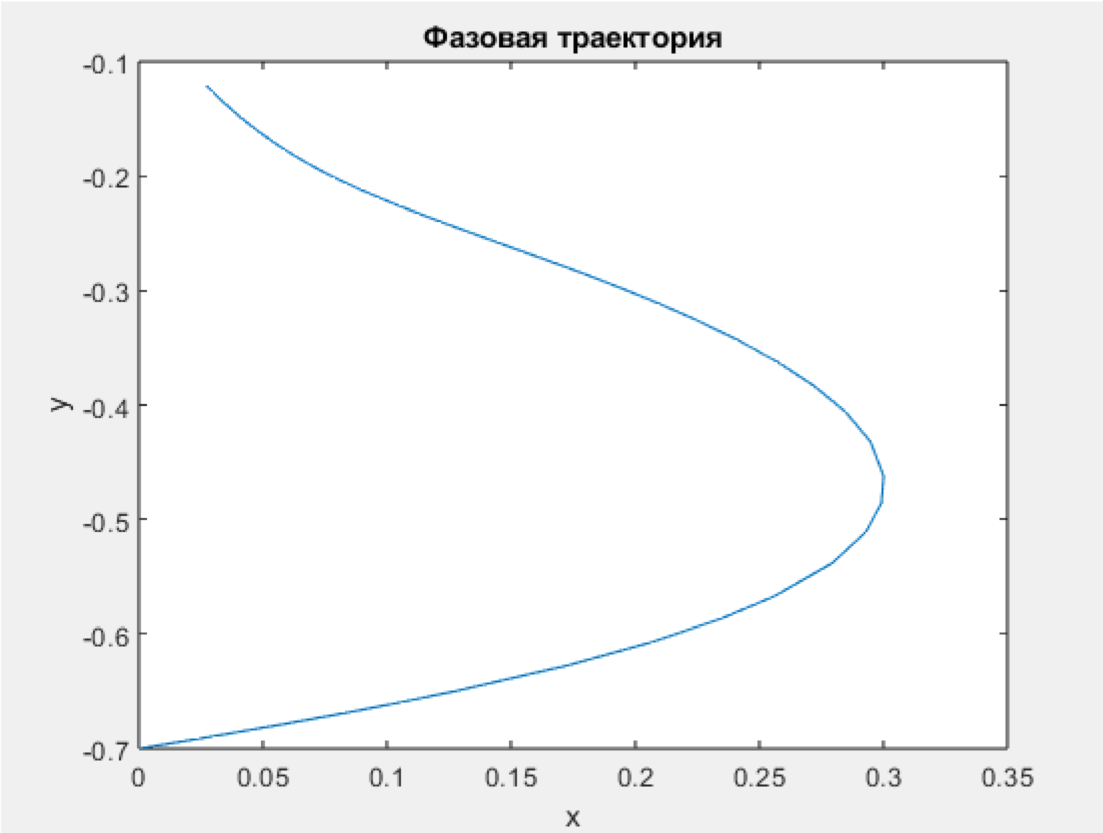

Рисунок 4 - Фазовая траектория

Начальные условия (0.05, -0.05).

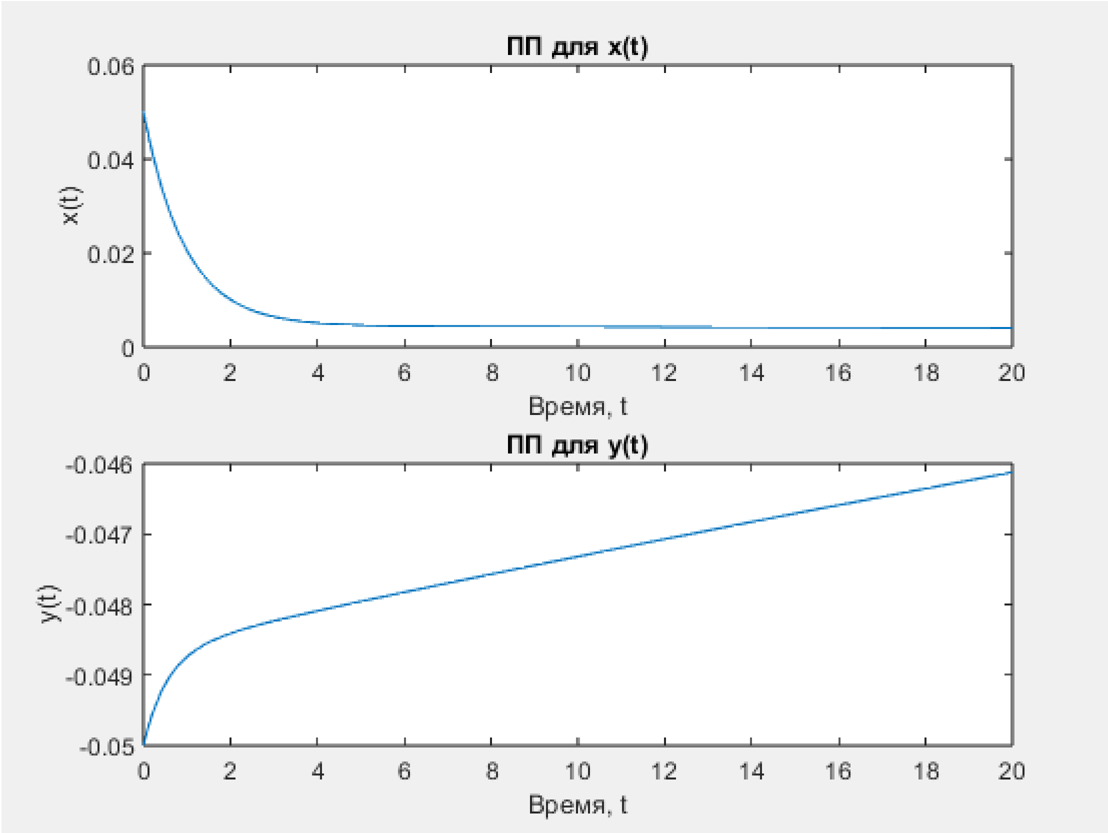

Рисунок 5 - График переходного процесса

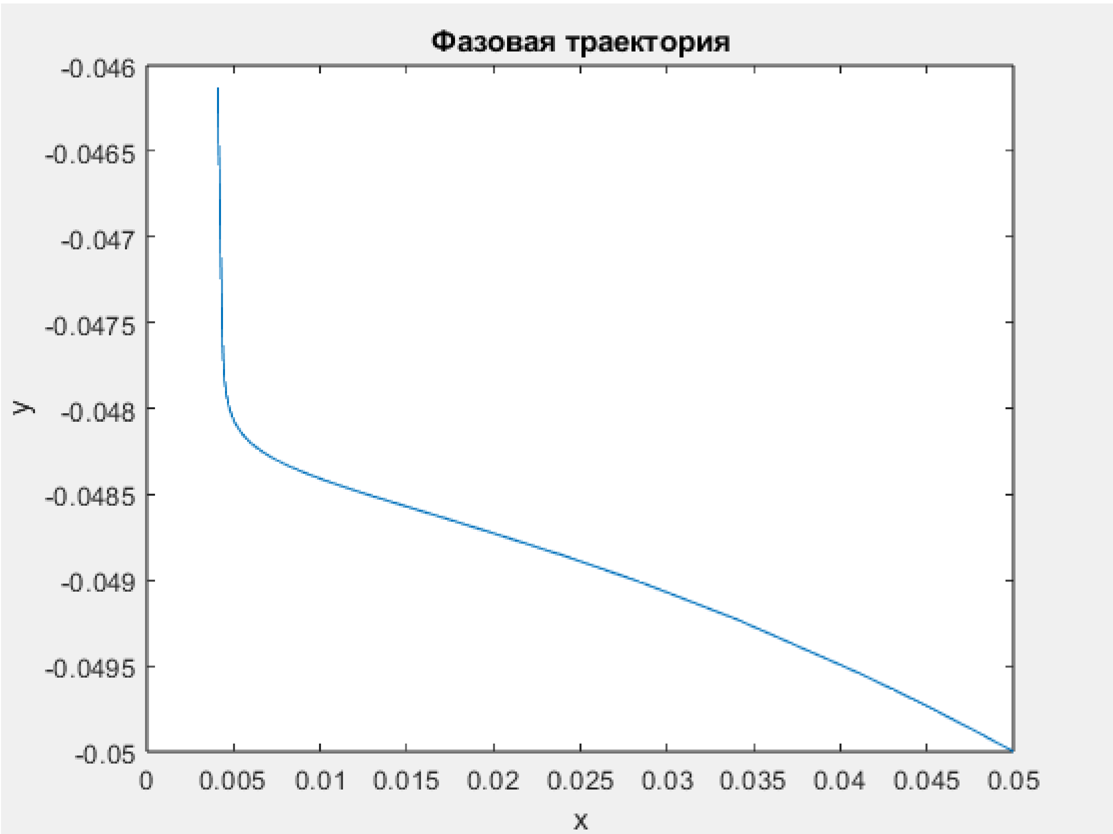

Рисунок 6 - Фазовая траектория

Задача 2

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2\dot{x}_1 + x_1 = -3x_1(1-e^{-t}) + x_2(1-e^{-t}), \\ 2\dot{x}_2 + x_2 = x_1(1-e^{-t}) - 3x_2(1-e^{-t}) \end{cases} \tag{1.5}$$

Найдем состояние равновесия, приравняем производные к нулю. Так как экспоненциальные члены обратятся в ноль имеем:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_1 + x_2 \\ x_2 = x_1 - 3x_2 \end{cases} \tag{1.6}$$

Состояние равновесия будет достигнуто при x=0, y=0.

Определим функцию Ляпунова следующим образом:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}) \tag{1.7}$$

Эта функция положительно определена и равна нулю в точке (0,0).

Найдем производную функции Ляпунова:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 = \dot{x}_1 \cdot x_1 + \dot{x}_2 \cdot x_2 \tag{1.8}$$

Подставим производные переменных состояния из уравнения системы:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{-x^2{}_1 - x^2{}_2 + 2x_1x_2(1-e^{-t}) - 3x^2{}_1(1-e^{-t}) - 3x^2{}_2(1-e^{-t})}{2} \tag{1.9}$$

Исходя из анализа производной функции Ляпунова нельзя сделать вывод об асимптотической устойчивости системы из-за члена $2x_1x_2$. При разных знаках первой и второй переменной состояния система может считать асимптотически устойчивой из-за отрицательности производной функции Ляпунова. На рисунках 7 и 8 представлены переходные процессы и фазовые портреты, можно увидеть, что все они сходятся к точке (0,0). Код скрипта в Листинге 2.

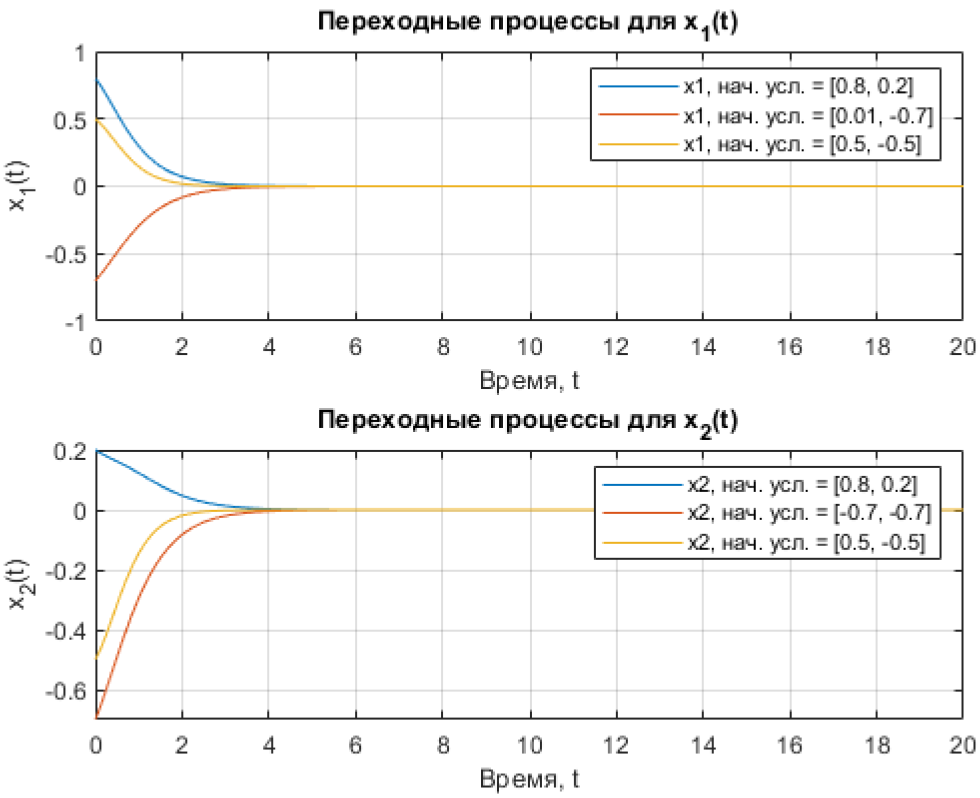

Рисунок 7 - Переходные процессы

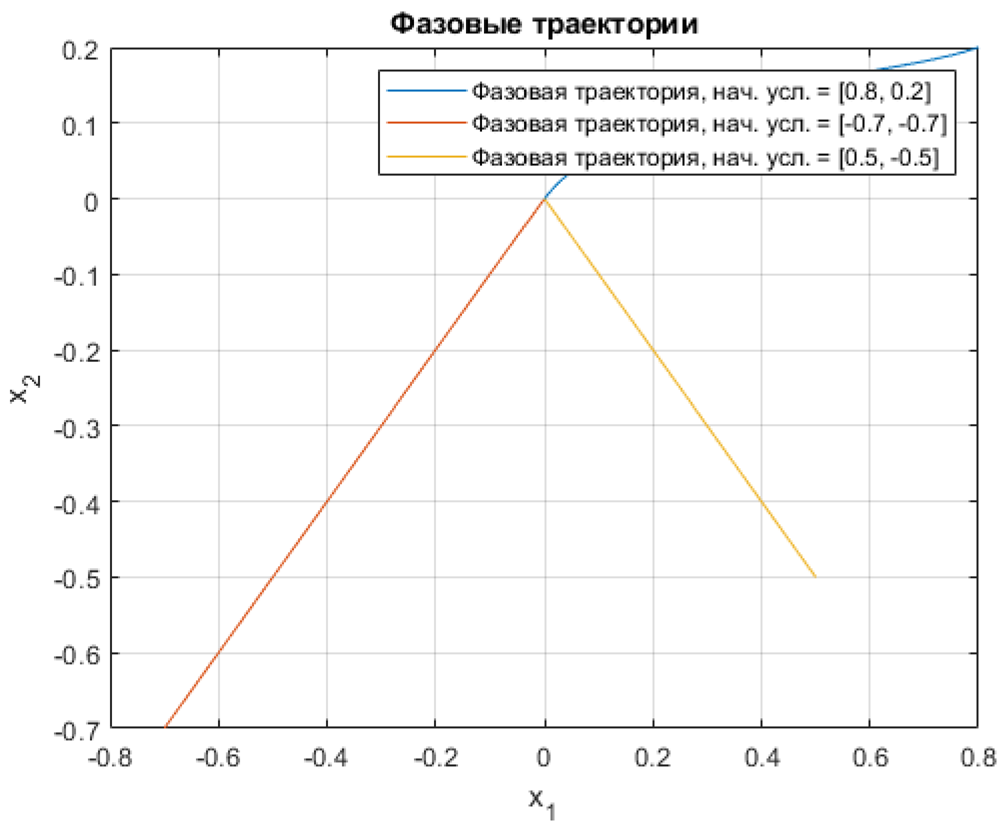

Рисунок 8 - Фазовые портреты

Листинг 2 – Код скрипта

```
tspan = [0 20];

initial_conditions = [0.8, 0.2; -0.7, -0.7; 0.5, -0.5];

[t1, y1] = ode45(@system, tspan, initial_conditions(1,:));
[t2, y2] = ode45(@system, tspan, initial_conditions(2,:));
[t3, y3] = ode45(@system, tspan, initial_conditions(3,:));

figure;
subplot(2,1,1);
plot(t1, y1(:,1), 'DisplayName', 'x1, нач. усл. = [0.8, 0.2]');
hold on;
xlabel('Время, t');
ylabel('x_1(t)');
title('Переходные процессы для x_1(t)');
legend;
grid on;
subplot(2,1,2);
plot(t1, y1(:,2), 'DisplayName', 'x2, нач. усл. = [0.8, 0.2]');
hold on;
xlabel('Время, t');
ylabel('x_2(t)');
title('Переходные процессы для x_2(t)');
legend;
grid on;
subplot(2,1,1);
plot(t2, y2(:,1), 'DisplayName', 'x1, нач. усл. = [0.01, -0.7]');
hold on;
subplot(2,1,2);
plot(t2, y2(:,2), 'DisplayName', 'x2, нач. усл. = [-0.7, -0.7]');
hold on;
subplot(2,1,1);
plot(t3, y3(:,1), 'DisplayName', 'x1, нач. усл. = [0.5, -0.5]');
legend show;
hold on;
subplot(2,1,2);
plot(t3, y3(:,2), 'DisplayName', 'x2, нач. усл. = [0.5, -0.5]');
legend show;
hold off;
figure;
plot(y1(:,1), y1(:,2), 'DisplayName', 'Фазовая траектория, нач. усл. = [0.8, 0.2]');
hold on;
plot(y2(:,1), y2(:,2), 'DisplayName', 'Фазовая траектория, нач. усл. = [-0.7, -
0.7]');
hold on;
plot(y3(:,1), y3(:,2), 'DisplayName', 'Фазовая траектория, нач. усл. = [0.5, -0.5]');
xlabel('x_1');
ylabel('x_2');
title('Фазовые траектории');
legend show;
grid on;
hold off;

function dydt = system(t, y)
    dydt = zeros(2,1);
    dydt(1) = (-3*y(1)*(1 - exp(-t)) + y(2)*(1 - exp(-t)) - y(1)) / 2;  % dx1/dt
    dydt(2) = (y(1)*(1 - exp(-t)) - 3*y(2)*(1 - exp(-t)) - y(2)) / 2;   % dx2/dt
end
```

Задача 3

Имеем систему, описанную следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Матричное уравнение Ляпунова запишем следующим образом:

$$A^T P + PA = -Q \tag{1.11}$$

Где Q – единичная матрица, P – матричное уравнение Ляпунова.

Если подобрать матрицу P, и она будет положительно определенной, то систему можно считать устойчивой. Для вычисления матрицы P и ее определенности можно использовать скрипт Matlab приведенный в Листинге 3.

Листинг 3 – Код скрипта

```
A = [-1 0 2; -3 -3 4; -2 0 -1];
Q = eye(3);
P = lyap(A', Q);
disp('Решение уравнения Ляпунова для матрицы P:');
disp(P);
eig_P = eig(P);
disp('Собственные значения матрицы P:');
disp(eig_P);

if all(eig_P > 0)
    disp('Матрица P является положительно определённой. Система устойчива.');
else
    disp('Матрица P не является положительно определённой. Система неустойчива.');
end
```

В результате выполнения этого скрипта имеем:

```
Решение уравнения Ляпунова для матрицы P:

    1.1167   -0.1667   -0.0583

   -0.1667    0.1667    0.0833

   -0.0583    0.0833    0.7167

Собственные значения матрицы P:

    0.1293

    0.7139

    1.1568


Матрица P является положительно определённой. Система устойчива.
```

Для наглядности проведем моделирование работы системы. Результаты моделирования представлены на рисунке 9.

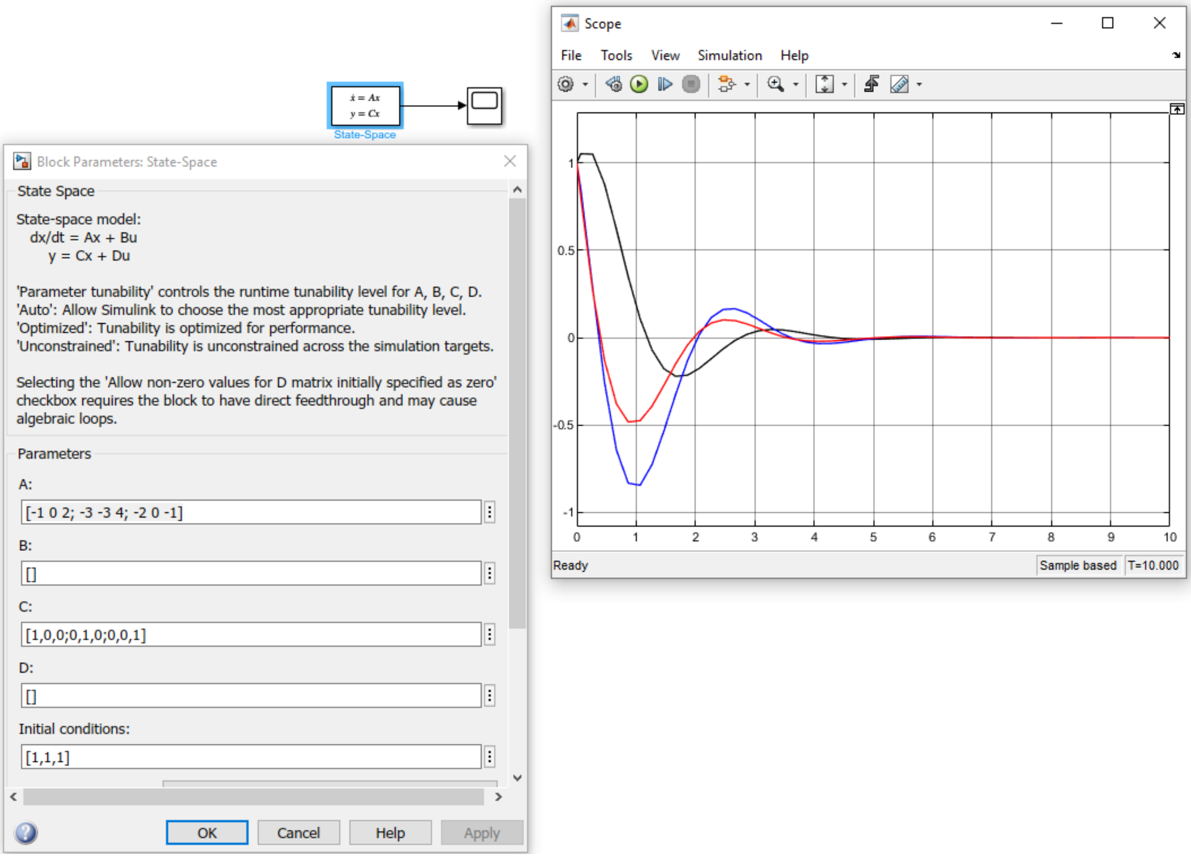

Рисунок 9 - Результаты моделирования