называется числом обусловленности матрицы. Как следует из полученного неравенства, это число характеризует относительное изменение нормы решения СЛАУ в зависимости от относительного изменения нормы правой части системы.

Для вычисления числа обусловленности матрицы воспользуемся определением нормы матрицы

$$\|A\|^2 = \rho\left(A^T A\right) = \max_{1 \le i \le n} \left|\lambda_i\left(A^T A\right)\right|,$$

где $\lambda_i\left(A^T A\right)$ – собственное число матрицы $A^T A$. Вычислим

$$\left\|A^{-1}\right\| = \rho\left(\left(A^{-1}\right)^T A^{-1}\right)$$

Учитывая симметричность $\left(A^{-1}\right)^T A^{-1}$ и коммутативность операций транспонирования и обращения, получим:

$$\left(A^{-1}\right)^T A^{-1} = \left(A^T A\right)^{-1}.$$

Поэтому

$$\left\|A^{-1}\right\|^2 = \rho\left(\left(A^{-1}\right)^T A^{-1}\right) = \max_{1 \le i \le n} \frac{1}{\lambda_i\left(A^T A\right)} = \frac{1}{\min\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i\left(A^T A\right)}.$$

Из определения числа обусловленности

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| = \left[\frac{\max\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i\left(A^T A\right)}{\min\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i\left(A^T A\right)}\right]^{1/2} \ge 1.$$

Вычисление собственных значений матрицы

Рассмотрим наиболее простой алгоритм вычисления собственных значений матрицы, основанный на вычислении корней характеристического полинома матрицы – алгоритм А. Н. Крылова. Алгоритм является следствием теоремы Гамильтона-Кэли.

Теорема: квадратная матрица A является корнем своего характеристического полинома

$$p(s) = \det(Is - A) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \ldots + p_1 s + p_0,$$

то есть матрица A удовлетворяет матричному уравнению

$$A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \ldots + p_1 A + p_0 I = 0.$$

Алгоритм А.Н. Крылова основан на вычислении коэффициентов характеристического полинома $p(s)$ матрицы, а собственные значения вычисляют как корни характеристического полинома

$$p(s_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Для вычисления коэффициентов характеристического полинома воспользуемся матричным уравнением, следующим из теоремы Гамильтона-Кэли. Умножим обе части этого уравнения на произвольный $x_0 \neq 0 \in R^n$

$$A^n x_0 + p_{n-1}A^{n-1}x_0 + \ldots + p_1 A x_0 + p_0 x_0 = 0,$$

введем обозначения $x_i = A^i x_0$, после чего исходное матричное уравнение сведется к векторному уравнению:

$$x_n + p_{n-1}x_{n-1} + \ldots + p_1 x_1 + p_0 x_0 = 0.$$

Из коэффициентов $\{p_i\}_{i=0}^{i=n-1}$ составим вектор

$$p = (p_{n-1}\ p_{n-2} \cdots p_1\ p_0)^T,$$

а из векторов $\{x_i\}_{i=0}^{i=n-1}$ матрицу

$$X = (x_{n-1} \mid x_{n-2} \mid \ldots \mid x_1 \mid x_0).$$

В результате получена СЛАУ относительно вектора неизвестных коэффициентов характеристического полинома

$$Xp = -x_n$$

Решая эту СЛАУ, получим характеристический полином, корни которого есть собственные значения матрицы.