

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

---

Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет «ЛЭТИ»

---

"

"

Ю. А. ЛУКОМСКИЙ А. Н. МИРОШНИКОВ А. Г. ШПЕКТОРОВ

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

Учебное пособие

Рекомендовано учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по образованию в области радиотехники, электроники, биомедицинской техники и автоматизации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 220400 «Управление в технических системах»

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
2012

УДК 519.711.3  
ББК 3 965с11я7  
Л 84

**Лукомский Ю. А., Мирошников А. Н., Шпекторов А. Г.**

Л 84 Моделирование объектов и систем управления: учеб. пособие по дисциплине «Моделирование объектов и систем управления» / СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2012. 128 с.

ISBN 978-5-7629-1221-1

Содержит теоретические сведения по процедурам исследования и моделирования линейных и нелинейных динамических систем. Приведены теоретические основы и практические рекомендации к построению математических моделей объектов и систем управления.

Предназначено для бакалавров, обучающихся по направлению 220400.62 «Управление в технических системах», а также для магистров, обучающихся по направлению 220400.68 «Управление в технических системах».

УДК 621.372  
ББК 32.818

Рецензенты: кафедра компьютерного проектирования аэрокосмических измерительно-вычислительных комплексов (СПбГУАП), А. Е. Пелевин, д-р. техн. наук (Концерн «ЦНИИ “Электроприбор”»).

Утверждено  
редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7629-1221-1

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2012

## Список сокращений

ДС – динамическая система;  
ДФ – дополнительный фильтр;  
ЛДУ – линейное дифференциальное уравнение;  
ММ – математическая модель;  
МНК – метод наименьших квадратов;  
ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение;  
ОНФ – обобщенный наблюдатель-фильтр;  
ПФ – передаточная функция;  
РА – регрессионный анализ;  
САУ – система автоматического управления;  
СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений;  
СЛОДУ – система линейных однородных дифференциальных уравнений;  
СЛНДУ – система линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

## Введение

Математическое моделирование – это методология научной и практической деятельности людей, основанная на построении, исследовании и использовании математических моделей (ММ). В самостоятельную научную дисциплину математическое моделирование сложилось в последние несколько десятилетий в связи с широким применением компьютеров. Оно связано с прикладной математикой и общей теорией систем, но не совпадает с ними, поскольку теория систем, как и другие разделы математики, имеет дело лишь с математическими объектами. Предмет математического моделирования шире и включает, кроме исследования математических объектов, формализацию постановки практической задачи и интерпретацию полученных результатов.

Исходя из определения, выделяют три этапа математического моделирования: построение ММ (формализация задачи), исследование ММ (анализ модели), использование ММ (синтез решения).

Этап формализации задачи связан с научно-инженерной дисциплиной, именуемой системным анализом. На этапе анализа решаются, так называемые, прямые задачи, т. е. по заданным значениям входов системы определяются ее выходы. Для этапа синтеза характерны обратные задачи, а именно определение входов системы по заданным (желаемым) значениям ее выходов. Использование ММ возможно для различных целей: прогнозирования, исследования, проектирования, управления.

Данное пособие посвящено рассмотрению первых двух этапов математического моделирования. Задача синтеза имеет ряд особенностей, позволяющих ее изучать отдельно от построения и исследования математических моделей.

В настоящее время применение математического моделирования и изучение его приемов уже немыслимы без компьютеров и программного обеспечения. Поэтому целесообразно не разделять математическое моделирование и его программную поддержку, а предполагать моделирование в той или иной программной среде, предоставляющей набор функциональных (расчетных) и сервисных возможностей и допускающей расширение с учетом специфики решаемых задач. В данном пособии рассматривается моделирование

в среде MATLAB, одной из наиболее популярных сред, предназначенных для инженерного и исследовательского проектирования.

Пособие предназначено для формирования у студентов знаний о правилах и особенностях построения математических моделей, а также практических навыков их исследования с применением среды MATLAB. Полученные студентами знания и умения могут быть использованы в дальнейшем при изучении методов и алгоритмов синтеза систем управления. Особое внимание уделено моделированию линейных статических и динамических моделей, как базовой процедуре исследования моделей. Отдельный раздел посвящен нелинейным моделям и системам, исследованием и моделированием которых научное сообщество занимается сравнительно недавно. В последнем разделе пособия излагаются основные принципы моделирования систем управления.

## **1. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

### **1.1. Понятие математической модели**

Центральным понятием математического моделирования является понятие математической модели – совокупности математических объектов и отношений, которые отображают объекты и отношения некоторой области реального мира (предметной области) [1].

Рассмотрим в качестве примера один из простейших видов математических моделей – линейное соотношение между двумя числовыми переменными. Если обозначить входную (независимую) переменную через  $u$ , а выходную (зависимую) через  $y$ , то такая модель имеет вид

$$y = ku, \quad (1.1)$$

где  $k$  – некоторый числовой параметр (коэффициент), выражающий свойства модели. Соотношение (1.1) является формальным выражением прямой пропорциональной зависимости между величинами  $u$  и  $y$ . Подобными зависимостями описываются многие процессы в физических, биологических и других реальных (естественных или искусственных) объектах. Соотношение (1.1) (или другое аналогичное соотношение) может описывать как связь между конкретными переменными конкретного объекта, так и целый класс зависимостей, одинаковых для различных объектов.

Наиболее общие и универсальные зависимости в естественных науках называются законами. Например, закон Ньютона в механике выражает тот факт, что ускорение тела прямо пропорционально приложенной к телу силе. Согласно закону Ома в физике, сила тока, протекающего через участок электрической цепи, прямо пропорциональна падению напряжения на этом участке и т. д.

С точки зрения математического моделирования и закон Ньютона, и закон Ома являются примерами линейных статических математических моделей (1.1). Таким образом, математическая модель – это более общее понятие, чем закон, поскольку оно носит междисциплинарный характер. Успехи прикладной математики и математического моделирования основаны на том, что одними и теми же математическими моделями могут описываться совершенно различные по природе процессы, т. е. одни и те же приемы и методы построения и исследования математических моделей пригодны для различных объектов (задач).

С другой стороны, законы естественных наук часто являются «кирпичиками» для построения математической модели реального объекта (так называемые, теоретические модели, или модели на основе первичных принципов). Такой подход является основным в теоретической и прикладной механике, а также в теоретической и прикладной физике, где модели конкретных процессов и объектов выводятся из общих вариационных принципов – законов (подробнее см., например, [2]). Однако готовых «кирпичиков» может оказаться недостаточно, и тогда при построении математической модели добавляются дополнительные соотношения – связи. В частности, такая ситуация возникает, когда реальный объект состоит из нескольких частей (элементов, компонентов) или требуется описать взаимодействие нескольких различных по природе процессов, протекающих в объекте. Правила соединения отдельных частей в единую математическую модель, отражающие структуру взаимодействия этих частей, часто называются структурно-топологическими уравнениями (связями). Такие правила могут основываться на законах естественных наук, например на законе д’Аламбера для механических систем и аналогичном (в силу электромеханической аналогии) законе Кирхгофа для электрических цепей. В общем случае для составления моделей целого из моделей отдельных частей используется аппарат теории графов и теории матриц.

Однако даже если уравнения отдельных частей и уравнения связей построены, задачу построения математической модели рано считать решенной, поскольку модель может содержать ряд параметров, которые недоступны или трудно определяемы в реальной системе. Их определение может потребовать дополнительных экспериментов с реальной системой с целью определения (идентификации) параметров математической модели. Например, в линейной модели (1.1) требуется оценить коэффициент  $k$  по результатам экспериментов.

Хотя методы оценки параметров достаточно хорошо разработаны, их применение имеет принципиальные ограничения в силу невозможности построения абсолютно точной модели реальной системы. Наличие неустранимых погрешностей и помех создает ситуацию неопределенности, когда выходные переменные однозначно не определяются входными переменными и параметрами модели. Наличие неопределенности приводит к тому, что может существовать несколько или даже бесконечно много математических моделей для одного и того же объекта или процесса.

## 1.2. Математическое моделирование и теория систем

Важным понятием математического моделирования является понятие «система» [3]. Система в абстрактном смысле – эквивалент понятия математической модели и задается парой множеств  $U, Y$  ( $U$  – множество входов,  $Y$  – множество выходов) и отношением на множестве  $U \times Y$ , формализующим связь (зависимость) между входами и выходами. Отношением  $R$  на множестве  $X \times Y$  (или отношение между  $X$  и  $Y$ ) называется подмножество множества  $X \times Y$ , т. е. некоторый набор пар  $R = \{(x, y)\}$ , где  $x \in X, y \in Y$ .

Входы (входные сигналы) формализуют воздействия, которые можно прикладывать к системе, а выходы (выходные сигналы) – это совокупность всех данных (величин), доступных наблюдению или измерению.

Соединение систем также является системой и задается отношением. Например, последовательное соединение систем  $S_1 \subset U_1 \times Y_1$  и  $S_2 \subset U_2 \times Y_2$  есть отношение  $S \subset U_1 \times Y_2$ , такое что  $(u_1, y_2) \in S$ , если существуют  $y_1 \in Y_1, u_2 \in U_2$ , удовлетворяющие условиям  $(u_1, y_1) \in S_1, (y_1, u_2) \in R, (u_2, y_2) \in S_2$ , где  $R \subset Y_1 \times U_2$  – отношение, определяющее связь между  $y_1$  и  $u_2$ . Таким образом можно определять сколь угодно сложные системы, исходя из простых, которые становятся частями (подсистемами) составной системы.

Приведенное определение отражает в абстрактном виде особенности, присущие интуитивному представлению о системе целостности и структурированности [3]. Целостность (единство) означает, что система отделена от внешней среды; среда может оказывать на нее действие (акцию) через входы и воспринимать отклик (реакцию) на эти действия через выходы. Структурированность означает, что система может быть разделена внутри на несколько подсистем, связанных и взаимодействующих между собой так же, как целая система взаимодействует с внешней средой.

Третье свойство, присущее системе, – целенаправленность, требует задания некоторой цели, достижение которой говорит о правильной работе системы. Цель также задается некоторым отношением, которое иногда может быть включено в математическую модель реальной системы.

Указанное формальное определение слишком неконкретно; под него подпадают практически все виды математических моделей систем: дифференциальные и разностные уравнения, регрессионные модели, системы массового обслуживания, конечные и стохастические автоматы, дедуктивные системы (исчисления) и т. д. В дальнейшем будут рассматриваться так называемые временные системы, функционирование которых – это процесс, разворачивающийся во времени, т. е. множества возможных входов и выходов  $U, Y$  – это множества функций времени со значениями соответственно во множествах  $U, Y$ :

$$U = \{u : T \rightarrow U\}, Y = \{y : T \rightarrow Y\},$$

где  $T$  – множество моментов времени, на котором рассматривается система.

Система называется функциональной (определенной), если каждой входной функции  $u(t)$  соответствует единственная выходная функция  $y(t)$ . В противном случае система называется неопределенной. Неопределенность обычно возникает из-за неполноты информации о внешних условиях работы системы. Важным свойством, присущим реальным системам, является причинность. Она означает, что если входные функции  $u_1(s)$  и  $u_2(s)$  совпадают при  $s \leq t$ , т. е.  $u_1(s) = u_2(s)$  при  $s \leq t$ , то соответствующие выходные функции удовлетворяют условию  $y_1(t) = y_2(t)$ , т. е. «настоящее не зависит от будущего при заданном прошлом».

Числовые величины, связанные с системой, делятся на переменные и параметры. Параметры – это величины, которые можно считать постоянными



в промежутке времени рассмотрения системы. Остальные числовые величины являются переменными. Значения переменных и параметров определяют количественную информацию о системе. Оставшаяся информация, качественная, определяет структуру системы. Различие между переменными и параметрами, а также между параметрами и структурой может быть условным, однако знание о нем может быть полезным в методическом отношении. Так, типовым приемом построения математической модели системы является параметризация – выбор в качестве математической модели семейства соотношений, зависящих от конечного (обычно небольшого) количества чисел – параметров.

На ранних этапах развития теории систем и кибернетики был популярен подход к рассмотрению системы как «черного ящика» («black box»), когда существующая внутренняя структура системы игнорировалась, а структура и соответствующие параметры ее математической модели выбирались по результатам экспериментов с этой системой, исходя из наилучшей точности описания ее поведения. При отсутствии априорной информации о системе такой подход является единственно возможным. Однако при наличии априорной информации более предпочтителен и современен подход «серого ящика» («grey box»), при котором структура модели задается из физических соображений, а цель экспериментов с объектом состоит в определении параметров модели.

Для простых систем выбор структуры, например в виде (1.1), обычно не вызывает сомнений. Однако если количество соотношений, описывающих систему, велико, может оказаться разумным учесть только небольшое число основных из них, а остальные задать в упрощенном виде или вообще пренебречь ими. При этом из эксперимента будут определены как параметры, так и структура (частично), т. е. будет использовано сочетание подходов «серого ящика» и «черного ящика».

Что касается определенности системы, то может оказаться, что ее нет даже после определения всех параметров математической модели. Неопределенность устраняется, если ввести в математическую модель системы некоторые дополнительные скрытые (латентные) параметры  $a_1, a_2, \dots, a_N$ . В общем случае, формально, это означает, что выход модели задается некоторой функцией от входа системы и от набора скрытых параметров  $a = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ , т. е.

$$y = R(u, a). \quad (1.2)$$

Набор  $a$  называется также глобальным состоянием системы, а функция  $R$  – глобальной реакцией системы.

Для рассматриваемых систем представление (1.2) должно согласовываться с временной структурой системы, в частности – сохранять ее причинность. Обеспечить нужное согласование при фиксированных параметрах и часто не представляется возможным. Поэтому скрытые параметры должны изменяться во времени, т. е. быть переменными. Необходимо, чтобы зависимость скрытых параметров от времени поддавалась описанию, т. е. включалась в математическую модель системы. Таким образом, целесообразно ввести понятия переменных состояния и моделей состояния, играющих важную роль в естествознании и технике.

Системы, допускающие описание в пространстве состояний, называются системами с памятью, или динамическими системами.

Иногда при исследовании системы не удается однозначно определить, какие из переменных, связывающих систему с внешним миром, являются входными, а какие – выходными. Эти и другие соображения мотивировали появление более широкого, так называемого, бихевиористского подхода в теории систем.

Бихевиористская модель системы имеет вид  $m$ -арного отношения

$$S \subset W_1 \times W_2 \times \dots \times W_m \quad (1.3)$$

между явными (внешними) переменными сигналами  $w_1, w_2, \dots, w_m$ , среди которых могут быть как входные, так и выходные сигналы. При этом в системе могут быть и латентные (скрытые) переменные. Бихевиористские модели являются более общими, чем модели состояния [1].

### 1.3. Системный анализ и декомпозиция

Системный анализ в широком смысле – это методология (совокупность методических приемов) постановки и решения задач построения и исследования систем, тесно связанная с математическим моделированием. В более узком смысле системный анализ – методология формализации сложных (трудно формализуемых, плохо структурированных) задач. Системный анализ возник как обобщение приемов, накопленных в задачах исследования операций и управления в технике, экономике, в военном деле. Соответствующие модели и методы заимствовались из математической статистики, математического программирования, теории игр: теории массового обслуживания, теории авто-

математического управления. Фундаментом перечисленных дисциплин является теория систем.

Следует отметить различия в употреблении терминов «системный анализ» и «системный подход». Системный анализ – это целенаправленная творческая деятельность человека, на основе которой составляется представление исследуемого объекта в виде системы. Такой анализ характеризуется упорядоченным составом методических приемов исследования. Что касается термина «системный подход», то традиция его применения связана с исследованиями, проводимыми многоаспектно, комплексно или при изучении с разных сторон предмета или явления. Этот подход предполагает, что все частные задачи, решаемые на уровне подсистем, должны быть увязаны между собой и решаться с позиции целого (принцип системности). Системный анализ – более конструктивное направление, содержащее методику разделения процессов на этапы и подэтапы, систем на подсистемы, целей на подцели и т. д.

В обширной литературе по системному анализу содержится большое число рекомендаций и методических приемов построения математических моделей и принятия решений на их основе. Выделяя общие части различных приемов и рассматривая их во взаимодействии, можно сформулировать последовательность действий (этапов) при постановке и решении задач, которую будем называть методикой математического моделирования. В упрощенном виде один из возможных вариантов такой методики представлен на рис. 1.1. Эта методика помогает более осмысленно и грамотно ставить и решать прикладные задачи. Если на каком-либо этапе возникают затруднения, то нужно вернуться на один из предыдущих этапов и изменить (модифицировать) его.

Известно, что системный анализ родился как метод исследования и проектирования сложных систем. Что же такое «сложная» система? Понятие это неформальное, и обычно, говоря о сложных системах, перечисляют их основные особенности:

- наличие большого числа разнородных элементов (подсистем);
- сложный характер, неоднородность связей между подсистемами;
- сложность функций, выполняемых системой;
- наличие неопределенности в описании системы;
- сложность определения (организации) требуемого управляющего воздействия на систему и т. д.

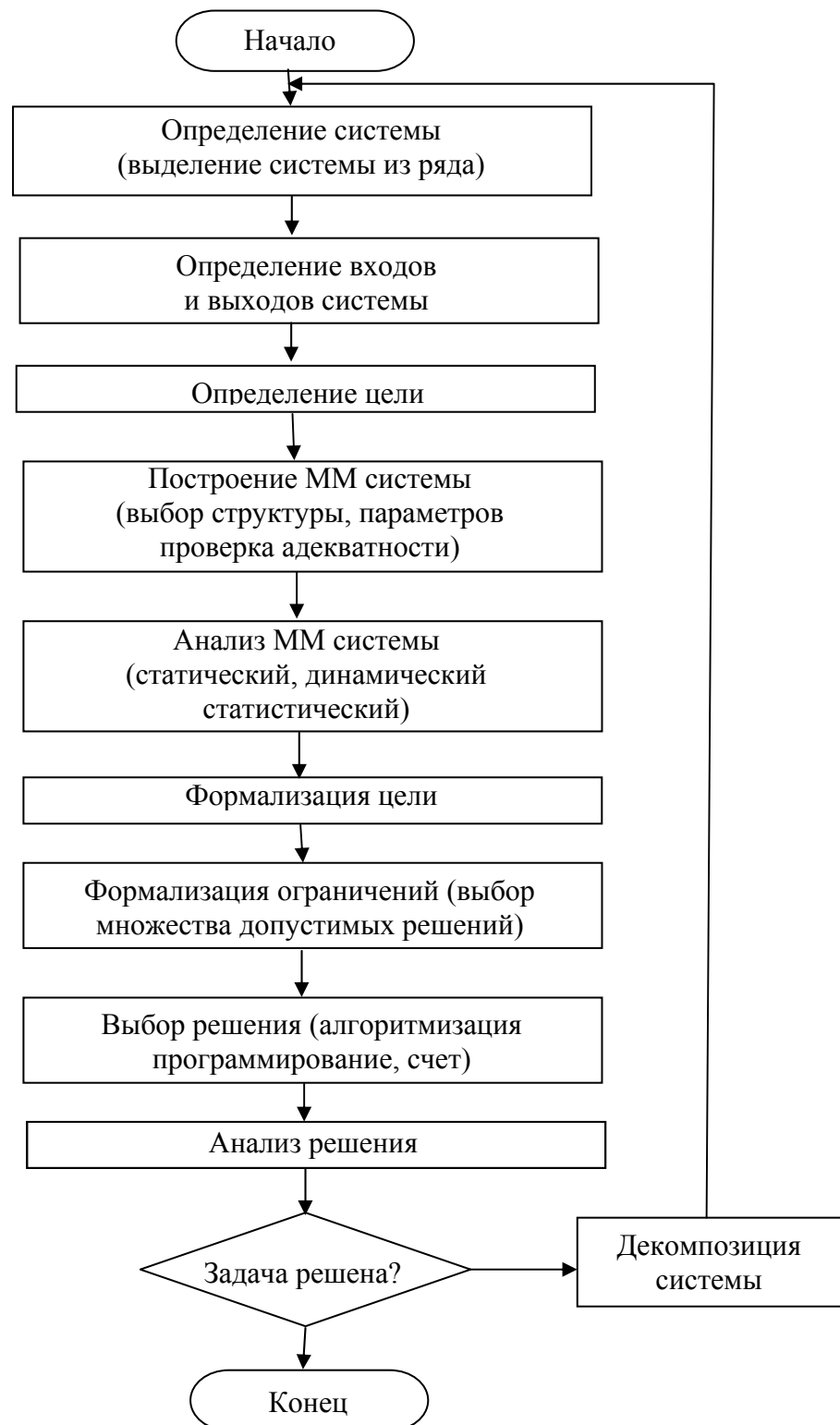


Рис. 1.1. Алгоритм математического моделирования

Однако понятно, что каждая из этих особенностей может оказаться существенной или несущественной: все зависит от конкретной ситуации и целей исследования. Поэтому более универсальный способ выделения класса сложных систем связан со сложностью самого процесса исследования системы. Если методика математического моделирования (см. рис. 1.1) приводит к успеху сразу же, «за один проход», то нет оснований называть систему «сложной». Введение этого термина оправдано, если решить задачу в исходном виде не удастся, и тогда она разбивается на несколько вспомогательных подзадач, решаемых по отдельности. Такой прием называется декомпозицией и является основным методом исследования сложных систем.

При декомпозиции исходная система делится на подсистемы, а цель – на подцели. Далее для решения каждой подзадачи пользуются той же методикой, что и для всей системы. Если в ходе решения (а возможно, и до того) какие-то из подзадач окажутся слишком сложными, то снова проводится декомпозиция: возникают подзадачи следующего уровня и т. д. Результатом этого процесса является структуризация. Исходная система приобретает иерархическую (многоуровневую) структуру [3]. Соответствующая структура возникает и в множестве подцелей. Она называется деревом целей, поскольку представляет собой граф типа, дерева (без циклов).

Приведенное понятие декомпозиции вполне соответствует идее структурного программирования. Создание сложных программных систем – одна из важнейших областей применения системного анализа. Отметим лишь, что раздробление системы на подсистемы обычно проводится по принципу «слабых» связей, т. е. так, чтобы связи между подсистемами были слабее, чем связи между элементами каждой подсистемы.

В сложных системах часто приходится проводить несколько вариантов декомпозиции и соответственно строить несколько деревьев целей. Это обычно связано с наличием нескольких критериев функционирования системы. Возникающие при этом задачи многокритериального выбора изучаются в теории принятия решений. Успех декомпозиции часто определяется интуицией и опытом исследователя. Человек, по данным психологов, может мысленным взором охватить структуру декомпозированной системы, если на каждом уровне возникает не более чем  $5 \pm 2$  подзадачи.

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### 2.1. Системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему из  $n$  линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с  $n$  неизвестными  $x_1, \dots, x_n$ :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (2.1)$$

Запишем СЛАУ в матричной форме, для этого введем векторы  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$  и матрицу  $A$ :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда СЛАУ примет вид

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (2.2)$$

Перед рассмотрением алгоритмов решения СЛАУ перечислим основные определения из линейной алгебры.

*Определение:*  $A^{-1}$  – обратная матрица для квадратной матрицы  $A$ , если выполняется равенство  $AA^{-1} = I$ , где  $I$  – единичная матрица.

*Определение:*  $A$  – невырожденная, если для  $A$  существует  $A^{-1}$ .

Теорема: следующие утверждения эквивалентны:

- 1)  $A$  – невырождена;
- 2)  $\det(A) \neq 0$ ;
- 3) однородная система  $A\mathbf{x} = 0$  имеет единственное решение  $\mathbf{x} = 0$ ;
- 4) для любого  $\mathbf{b}$  система  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  имеет единственное решение;
- 5) столбцы (строки) матрицы  $A$  линейно независимы, т. е. для любой комбинации ненулевых чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  линейная комбинация

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Определение:* ранг матрицы,  $\text{rank}(A)$  – число линейно независимых столбцов (строк).

Следствие:  $A$  – невырожденная, если и только если  $A$  – полного ранга ( $\text{rank}(A) = n$ ).

*Определение:* комплексное или вещественное число  $\lambda$  и вектор  $\mathbf{x} \neq 0$ ,  $\mathbf{x} \in R^n$  называются собственными значением и вектором матрицы  $A$ , если они удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Собственный вектор – это вектор, который, будучи умножен на матрицу  $A$ , изменяет лишь свою длину.

Из определения собственного значения следует:

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0 \Rightarrow (A - I\lambda)\mathbf{x} = 0.$$

Так как  $\mathbf{x}$  – собственный вектор и по определению  $\mathbf{x} \neq 0$ , то в соответствии с теоремой  $A - I\lambda$  – вырожденная матрица, а  $\det(A - I\lambda) = 0$ . Определитель представляет собой полином степени  $n$  относительно комплексной переменной  $\lambda$ , называемый характеристическим полиномом матрицы, следовательно, собственные значения матрицы есть корни характеристического полинома матрицы  $A$ , их ровно  $n$  с учетом кратности.

*Определение:* совокупность всех собственных значений  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  матрицы  $A$  называется спектром матрицы  $A$ , а величина

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

называется спектральным радиусом.

*Определение:* нормой матрицы  $A$  считается выражение

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \in R^n} \frac{|A\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} = \rho(A^T A)^{1/2}.$$

**Решение СЛАУ методом исключения.** Одной из наиболее распространенных задач является задача решения СЛАУ (2.2) для заданных квадратной матрицы  $A$  и вектора  $\mathbf{b}$ .

Если  $A$  – невырожденная матрица, то для нее существует обратная  $A^{-1}$ . Умножая СЛАУ на  $A^{-1}$  слева, получим решение:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Полученный метод решения СЛАУ неэффективен из-за большого времени вычислений. Рассмотрим метод исключения Гаусса, который с некоторыми модификациями используют для решения СЛАУ до двухсотого порядка.

Шаг 1: исключим  $x_1$  из системы уравнений (2.1) с номерами  $2, \dots, n$  путем вычитания:

из второго уравнения – первое, умноженное на  $l_{21} = a_{21}/a_{11}$ ;

...

из  $n$ -го уравнения – первое, умноженное на  $l_{n1} = a_{n1}/a_{11}$ .

После первого шага система уравнений преобразуется к виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}; \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}. \end{cases}$$

где  $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - l_{i1}a_{1j}$ ,  $b_i^{(1)} = b_i - l_{i1}b_1$ ,  $l_{i1} = a_{i1}/a_{11}$ ,  $i, j = 2, \dots, n$ .

Шаг 2: исключим  $x_2$  из уравнений с номерами  $3, \dots, n$  путем вычитания:

из третьего уравнения – второе, умноженное на  $l_{32} = a_{32}/a_{22}$ ;

....

из  $n$ -го уравнения – второе, умноженное на  $l_{n2} = a_{n2}/a_{22}$ .

После второго шага получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}; \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}; \\ \vdots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}. \end{cases}$$

После  $(n-1)$ -го шага исходная система придет к треугольной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$



где  $b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - l_{ik}b_k^{(k-1)}$ ;  $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - l_{ik}a_{ij}^{(k-1)}$ ;  $l_{ik} = a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$ ; индексы:  $k = 1, \dots, n-1$  – номер шага,  $i = k+1, \dots, n$  – номер строки,  $j = k+1, \dots, n$  – номер столбца.

Решение треугольной системы осуществляется обратной подстановкой  $k = n, n-1, \dots, 1$ :

$$x_k = \left( b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k-1)} x_j \right) / a_{kk}^{(k-1)}.$$

При реализации алгоритма в виде программы элементы  $a_{ij}^{(k)}$  и  $b_i^{(k)}$  обычно хранят на месте исходных элементов  $a_{ij}$ ,  $b_i$ , поэтому их прежние значения будут изменены.

***LU-факторизация матриц.*** В процессе исключения по Гауссу исходная матрица СЛАУ  $A$  приведена к верхней треугольной матрице

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

где элементы матрицы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю. Введем в рассмотрение нижнюю треугольную матрицу, на главной диагонали которой расположены единицы, а под главной диагональю помещены  $l_{ij}$ , полученные в процессе приведения  $A$  к верхнетреугольному виду

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что

$$A = LU,$$

т. е. в процессе решения СЛАУ с использованием метода исключения получено разложение (факторизация) исходной матрицы на нижнетреугольную с единичной главной диагональю и верхнетреугольную.

Если проведена  $LU$ -факторизация матрицы СЛАУ  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , то решение системы может быть получено следующим образом. Исходную систему

перепишем в виде  $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Введем обозначение  $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , тогда исходная система сведется к двум СЛАУ

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}; \quad U\mathbf{x} = \mathbf{y},$$

каждая из которых проще исходной, так как имеет треугольную матрицу.

Решение первой системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

легко вычисляется прямой подстановкой

$$y_k = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki} y_i,$$

После вычисления вектора  $\mathbf{y}$ , можно решить вторую треугольную систему

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

обратной подстановкой:

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left( y_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j \right), \quad k = n, n-1, \dots, 1.$$

Таким образом, применение  $LU$ -факторизации сводит решение исходной СЛАУ к последовательному решению двух СЛАУ с треугольными матрицами. Если требуется решить несколько СЛАУ с одной и той же матрицей  $A$  и различными правыми частями

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{x}_i, \mathbf{b}_i \in R^n, \quad i = 1, \dots, n,$$

то предварительная  $LU$ -факторизация матрицы системы  $A$  позволяет существенно сократить трудоемкость решения  $n$  систем, сводя задачу к решению  $2n$  СЛАУ с треугольными матрицами

$$L\mathbf{y}_i = \mathbf{b}_i; \quad U\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i.$$

**Вычисление определителя и обратной матрицы.** Определитель матрицы  $A$  является побочным продуктом  $LU$ -факторизации матрицы  $A$ .

Учитывая, что определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей, получим

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U).$$

Вычислим определитель каждого из сомножителей. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \det \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \dots \cdot u_{nn},$$

следовательно  $\det(A) = \prod_{i=1}^n u_{ii}$ .

Рассмотрим алгоритм вычисления обратной матрицы. По определению обратная матрица  $X$  удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению  $AX = I$ . Представим матрицы  $X$  и  $I$  в виде наборов их столбцов

$$X = (\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 | \dots | \mathbf{x}_n), \mathbf{x}_i \in R^n; \quad I = (\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 | \dots | \mathbf{e}_n), \mathbf{e}_i \in R^n,$$

где  $\mathbf{e}_i$  – вектор, который имеет все нулевые элементы за исключением  $i$ -го, равного 1. Тогда матричное уравнение для обратной матрицы можно переписать в виде

$$A(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 | \dots | \mathbf{x}_n) = (\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 | \dots | \mathbf{e}_n),$$

т. е. представляет собой  $n$  СЛАУ вида

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, для вычисления обратной матрицы необходимо решить  $n$  СЛАУ и составить из полученных решений матрицу. Учитывая, что все  $n$  СЛАУ имеют одинаковую матрицу  $A$ , целесообразно произвести ее  $LU$ -факторизацию и свести задачу вычисления обратной матрицы к решению  $2n$  СЛАУ с треугольными матрицами.

**Обусловленность СЛАУ.** *Определение:* СЛАУ плохо обусловлена, если малые изменения элементов матрицы  $A$  или вектора  $\mathbf{b}$  приводят к большим изменениям в решении.

Рассмотрим пример плохо обусловленной СЛАУ:

$$0.8x_1 + 0.4x_2 = 1;$$

$$0.79x_1 + 0.41x_2 = \varepsilon.$$

Решения этой системы  $x_0$  для  $\varepsilon = 0$  и  $x_\varepsilon$  для малого значения  $\varepsilon$  будут сильно отличаться. Это связано с тем, что на плоскости  $x_1x_2$  уравнения системы задают «почти» параллельные прямые 1 и 2 (рис. 2.1).

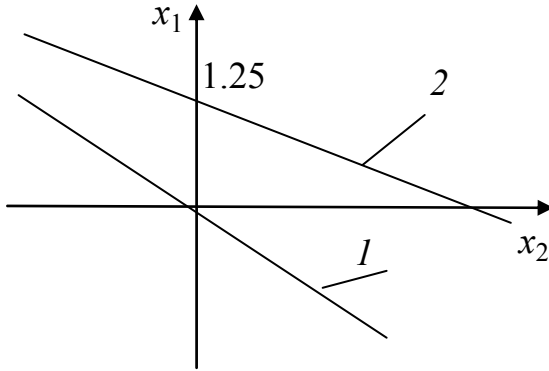


Рис. 2.1. Графическая интерпретация плохо обусловленной СЛАУ

Уравнения являются «почти» линейнозависимыми, и при их малом изменении относительно друг друга точка пересечения прямых будет значительно меняться. Получим количественную характеристику обусловленности СЛАУ. Изменим вектор правой части таким образом, что  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \Delta\mathbf{b}$ , при этом изменится решение СЛАУ  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}$ .

Найдем зависимость  $\Delta\mathbf{x}$  от  $\Delta\mathbf{b}$ . Учитывая, что  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_0$  имеем

$$\Delta\mathbf{x} = A^{-1}\Delta\mathbf{b};$$

$$A(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}_0 + \Delta\mathbf{b};$$

$$A\mathbf{x}_0 + A\Delta\mathbf{x} = \mathbf{b}_0 + \Delta\mathbf{b}.$$

Вычислим зависимость норм векторов  $\|\Delta\mathbf{x}\|$  и  $\|\Delta\mathbf{b}\|$ . По правилу треугольников имеем

$$\|\Delta\mathbf{x}\| = \|A^{-1}\Delta\mathbf{b}\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta\mathbf{b}\|,$$

поэтому, если  $\|A^{-1}\|$  мала, то большие изменения  $\|\Delta\mathbf{b}\|$  приведут к малым изменениям  $\|\Delta\mathbf{x}\|$ . Удобно иметь дело с относительными величинами  $\|\Delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}_0\|$ ,  $\|\Delta\mathbf{b}\|/\|\mathbf{b}_0\|$ .

Учитывая, что  $\|\mathbf{b}_0\| = \|A\mathbf{x}_0\|$ , умножая полученное неравенство на  $\|\mathbf{b}_0\|$ , получим

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{b}_0\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{b}_0\| = \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{b}\| \cdot \|A\mathbf{x}_0\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{b}\| \cdot \|A\| \cdot \|\mathbf{x}_0\|.$$

Разделим обе части неравенства на  $\|\mathbf{x}_0\| \cdot \|\mathbf{b}_0\|$ :

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}_0\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}_0\|}.$$

Величина  $\|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$  называется числом обусловленности матрицы. Как следует из полученного неравенства, это число характеризует относительное изменение нормы решения СЛАУ в зависимости от относительного изменения нормы правой части системы.

Для вычисления числа обусловленности матрицы воспользуемся определением нормы матрицы

$$\|A\| = \rho(A^T A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A^T A)|,$$

где  $\lambda_i(A^T A)$  – собственное число матрицы  $A^T A$ . Вычислим  $\|A^{-1}\|$ . Учитывая

симметричность  $(A^{-1})^T A^{-1}$  и коммутативность операций транспонирования и обращения, получим  $(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T A)^{-1}$ .

Поэтому

$$\|A^{-1}\| = \rho((A^{-1})^T A^{-1}) = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\lambda_i(A^T A)} = \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^T A)}.$$

Из определения числа обусловленности

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^T A)}{\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^T A)} \geq 1.$$

**Вычисление собственных значений матрицы.** Рассмотрим наиболее простой алгоритм вычисления собственных значений матрицы, основанный на вычислении корней характеристического полинома матрицы – алгоритм А. Н. Крылова. Алгоритм является следствием теоремы Гамильтона–Кэли.

*Теорема:* квадратная матрица  $A$  является корнем своего характеристического полинома

$$p(s) = \det(Is - A) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0,$$

т. е. матрица  $A$  удовлетворяет матричному уравнению

$$A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \dots + p_1A + p_0I = 0.$$

Алгоритм А. Н. Крылова основан на вычислении коэффициентов характеристического полинома  $p(s)$  матрицы. Для этого воспользуемся матри-

чным уравнением, следующим из теоремы Гамильтона–Кэли. Умножим обе части этого уравнения на произвольный вектор  $\mathbf{x}_0 \neq 0 \in R^n$ :

$$A^n \mathbf{x}_0 + p_{n-1} A^{n-1} \mathbf{x}_0 + \dots + p_1 A \mathbf{x}_0 + p_0 \mathbf{x}_0 = 0,$$

введем обозначения  $\mathbf{x}_i = A^i \mathbf{x}_0$ , после чего исходное матричное уравнение сведется к векторному уравнению

$$\mathbf{x}_n + p_{n-1} \mathbf{x}_{n-1} + \dots + p_1 \mathbf{x}_1 + p_0 \mathbf{x}_0 = 0.$$

Из коэффициентов  $\{p_i\}_{i=0}^{i=n-1}$  составим вектор  $\mathbf{p}$ , а из векторов  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^{i=n-1}$  – матрицу  $X$ :

$$\mathbf{p} = (p_{n-1} \ p_{n-2} \ \dots \ p_1 \ p_0)^T; \quad X = (\mathbf{x}_{n-1} \ | \ \mathbf{x}_{n-2} \ | \ \dots \ | \ \mathbf{x}_1 \ | \ \mathbf{x}_0).$$

В результате получена СЛАУ относительно вектора неизвестных коэффициентов характеристического полинома:

$$X\mathbf{p} = -\mathbf{x}_n.$$

Решая эту СЛАУ, получим характеристический полином, корни  $s_i$  которого есть собственные значения матрицы:

$$p(s_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

## 2.2. Численные методы решения систем линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши для линейной динамической системы

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^l; \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y} \in R^m, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

с заданным для каждого момента времени вектором входа  $\mathbf{u}(t)$ . Если  $\mathbf{x}(t)$  найден, то определить выход  $\mathbf{y}(t)$  по второму уравнению не представляет труда, поэтому ограничимся рассмотрением только уравнения состояния  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , представляющего собой систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

Для построения решения неоднородной системы предварительно изучим свойства решений линейной однородной системы  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ ;  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ .

Для этого рассмотрим  $n$  линейно независимых векторов

$$\mathbf{x}_0^{(i)} = \begin{pmatrix} x_{10}^{(i)} & x_{20}^{(i)} & \dots & x_{n0}^{(i)} \end{pmatrix}^T; \quad i = 1, \dots, n,$$

которые примем в качестве начальных условий линейной однородной системы  $\mathbf{x}^{(i)}(t_0) = \mathbf{x}_0^{(i)}$ .

По этим  $n$  начальным условиям получим  $n$  решений однородной системы дифференциальных уравнений

$$\mathbf{x}^{(i)}(t); \quad t \in [t_0, T], \quad i = 1, \dots, n,$$

каждое из которых удовлетворяет соотношению

$$\dot{\mathbf{x}}^{(i)}(t) = A\mathbf{x}^{(i)}(t); \quad \mathbf{x}^{(i)}(t_0) = \mathbf{x}_0^{(i)}.$$

Матрица  $X(t)$ , составленная из этих решений как из столбцов, называется фундаментальной матрицей линейной системы [4]:

$$X(t) = (\mathbf{x}^{(1)}(t) | \mathbf{x}^{(2)}(t) | \dots | \mathbf{x}^{(n)}(t)).$$

Любой столбец фундаментальной матрицы удовлетворяет линейной системе, поэтому

$$(\dot{\mathbf{x}}^{(1)}(t) | \dot{\mathbf{x}}^{(2)}(t) | \dots | \dot{\mathbf{x}}^{(n)}(t)) = A(\mathbf{x}^{(1)}(t) | \mathbf{x}^{(2)}(t) | \dots | \mathbf{x}^{(n)}(t)),$$

т. е. фундаментальная матрица удовлетворяет матричному линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad X(t_0) = (\mathbf{x}_0^{(1)} | \mathbf{x}_0^{(2)} | \dots | \mathbf{x}_0^{(n)}).$$

Основное свойство фундаментальной матрицы дает следующая теорема.

*Теорема:* если существует  $t_* \in [t_0, T]$  такая, что  $\det(X(t_*)) \neq 0$ , то для любой  $t \in [t_0, T]$   $\det(X(t)) \neq 0$ .

Так как векторы начальных условий линейно независимы, то  $X(t_0)$  состоит из линейно-независимых столбцов. Следовательно,  $\det(X(t_0)) \neq 0$ . По теореме следует, что для всех  $t \in [t_0, T]$   $X(t)$  – невырожденная матрица.

Система линейных дифференциальных уравнений имеет бесконечное число фундаментальных матриц в зависимости от принятого набора линейно независимых векторов начальных условий. Так как  $X(t_0)$  – невырожденная матрица, то можно определить матрицу

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0), \quad t \in [t_0, T],$$

называемую переходной матрицей. Переходная матрица обладает следующими свойствами:

$$1. \quad \Phi(t_0, t_0) = X(t_0)X^{-1}(t_0) = I.$$

2. Переходная матрица – невырожденная для любых  $t_0, t$ , т. е.

$$\det(\Phi(t, t_0)) = \det(X(t)X^{-1}(t_0)) = \det(X(t))\det(X^{-1}(t_0)) \neq 0.$$

3. Переходная матрица удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A\Phi(t, t_0).$$

Действительно:

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = \frac{d}{dt}(X(t)X^{-1}(t_0)) = \frac{dX(t)}{dt}X^{-1}(t_0) = AX(t)X^{-1}(t_0) = A\Phi(t, t_0).$$

Из свойств 3 и 1 следует, что  $\Phi(t, t_0)$  – фундаментальная матрица, для которой  $X(t_0) = I$ .

$$4. \Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t).$$

Действительно,

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = (X(t)X^{-1}(t_0))^{-1} = X(t_0)X^{-1}(t) = \Phi(t_0, t).$$

Свойство 3 позволяет вычислить переходную матрицу. Проинтегрируем обе части уравнения в пределах  $[t_0, t]$  по переменной  $t$ :

$$\int_{t_0}^t \frac{d\Phi(\tau, t_0)}{d\tau} d\tau = \int_{t_0}^t A\Phi(\tau, t_0) d\tau. \quad (2.4)$$

Учитывая, что в левой части содержится полный дифференциал, а матрица  $A$  не зависит от  $\tau$ , получим

$$\Phi(t, t_0) - \Phi(t_0, t_0) = \int_{t_0}^t A\Phi(\tau, t_0) d\tau$$

или

$$\Phi(t, t_0) = I + A \int_{t_0}^t \Phi(\tau, t_0) d\tau.$$

Подынтегральное выражение можно представить по этой же формуле, т. е.

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) = I + A \int_{t_0}^t \left( I + A \int_{t_0}^{\tau} \Phi(\tau_1, t_0) d\tau_1 \right) d\tau = I + A(t - t_0) + \\ + A^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \Phi(\tau_1, t_0) d\tau_1 d\tau. \end{aligned}$$



Подставив (2.4) в подынтегральное выражение, получим:

$$\begin{aligned}\Phi(t, t_0) &= I + A(t - t_0) + A^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \left( I + A \int_{t_0}^{\tau_1} \Phi(\tau_2, t_0) d\tau_2 \right) d\tau_1 d\tau = \\ &= I + A(t - t_0) + A^2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0) d\tau + A^3 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \int_{t_0}^{\tau_1} \Phi(\tau_2, t_0) d\tau_2 d\tau_1 d\tau = \\ &= I + A(t - t_0) + A^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!} + A^3 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \int_{t_0}^{\tau_1} \Phi(\tau_2, t_0) d\tau_2 d\tau_1 d\tau.\end{aligned}$$

Продолжая итерационно этот процесс, получим выражение для переходной матрицы в виде сходящегося матричного ряда

$$\Phi(t, t_0) = I + A(t - t_0) + A^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \dots + A^n \frac{(t - t_0)^n}{n!} + \dots$$

Можно отметить, что переходная матрица представляет собой ряд для матричной экспоненты

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = I + A(t - t_0) + \frac{A^2}{2!}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{A^n}{n!}(t - t_0)^n + \dots$$

Матричная экспонента обладает всеми свойствами, присущими скалярной экспоненциальной функции, в частности  $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = e^{At} e^{-At_0}$ .

**Численное решение СЛОДУ.** Переходную матрицу используют для построения решения систем линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t); \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in R^n, t \in [t_0, T].\end{aligned}$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 = A\Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}(t). \\ \mathbf{x}(t_0) &= \Phi(t_0, t_0)\mathbf{x}_0 = I\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0.\end{aligned}$$

Следовательно, решение СЛОДУ определяется с помощью переходной матрицы (или матричной экспоненты) следующим выражением:

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0.$$

Построим алгоритм численного решения СЛОДУ. Пусть требуется получить решение СЛОДУ в узлах равномерной сетки

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, \dots, N$$

с известным шагом  $h$ . Для этого рассмотрим решения в двух последовательных узлах сетки, например:

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_0 + h) = e^{A(t_0 + h - t_0)} \mathbf{x}(t_0) = e^{Ah} \mathbf{x}_0;$$

$$\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}(t_0 + 2h) = e^{A(t_0 + 2h - t_0)} \mathbf{x}(t_0) = e^{2Ah} \mathbf{x}_0 = e^{Ah} e^{Ah} \mathbf{x}_0 = e^{Ah} \mathbf{x}_1.$$

Продолжая вычисления указанным способом, получим общее выражение для решения СЛОДУ на узлах равномерной сетки:  $\mathbf{x}(t_{i+1}) = e^{Ah} \mathbf{x}(t_i)$ .

Таким образом, решение СЛОДУ задается рекуррентным разностным уравнением с постоянной матрицей системы  $\Phi = e^{Ah}$ . Для вычисления матрицы  $\Phi$  можно воспользоваться тем, что матричный ряд

$$e^{Ah} = I + Ah + \frac{A^2 h^2}{2!} + \dots + \frac{A^n h^n}{n!} + \dots$$

сходится абсолютно для любого  $h$ , в связи с чем величину  $\Phi = e^{Ah}$  можно вычислять непосредственным суммированием ряда из  $N$  членов

$$\Phi = I + \sum_{i=1}^N \frac{(Ah)^i}{i!}.$$

**Численное решение СЛНДУ.** Математическая модель линейной динамической системы представляет собой задачу Коши для СЛНДУ:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t);$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u} \in R^l,$$

где вектор-функция  $\mathbf{u}(t)$  известен для любого момента времени. Найдем решение СЛНДУ. Для этого произведем замену переменных

$$\mathbf{z}(t) = \Phi(t_0, t) \mathbf{x}(t),$$

где  $\mathbf{x}(t)$  – решение СЛНДУ;  $\Phi(t_0, t) = e^{A(t_0 - t)} = \Phi(t, t_0)^{-1}$ ;  $\Phi(t, t_0)$  – переходная матрица для СЛОДУ

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t).$$

Продифференцировав величину

$$\mathbf{z}(t) = e^{At_0} e^{-At} \mathbf{x}(t)$$

по переменной  $t$  с учетом того, что  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$  в силу СЛНДУ, получим:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{z}}{dt} &= e^{At_0} \left( -Ae^{-At} \mathbf{x}(t) + e^{-At} (A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)) \right) = \\ &= e^{At_0} \left( -Ae^{-At} \mathbf{x}(t) + e^{-At} A\mathbf{x}(t) + e^{-At} B\mathbf{u}(t) \right) = e^{At_0} e^{-At} B\mathbf{u}(t).\end{aligned}$$

При переходе к последнему равенству воспользовались равенством  $Ae^{-At} = e^{-At} A$ , которое следует из представления  $e^{-At}$  в виде ряда.

Интегрируя выражение

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = e^{At_0} e^{-At} B\mathbf{u}(t)$$

на интервале  $[t_0, t]$ , получим  $\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t_0) = \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} B\mathbf{u}(\tau) d\tau$ .

Подставив в него  $\mathbf{z}(t) = e^{At_0} e^{-At} \mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ , получим

$$e^{A(t_0-t)} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} B\mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Окончательно решение СЛНДУ будет иметь вид:

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (2.5)$$

Формула (2.5) носит название формулы Коши. Воспользуемся (2.5) для построения алгоритма численного решения СЛНДУ, т. е. решений  $\mathbf{x}(t_i)$ , вычисленных в узлах равномерной сетки  $t_i = t_0 + hi$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ .

Вычислим  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_0 + h)$  в соответствии с формулой Коши:

$$\mathbf{x}(t_0 + h) = e^{A(t_0+h-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} e^{A(t_0+h-\tau)} B\mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Считая величину  $h$  малой, можно пренебречь изменением входного сигнала на интервале  $[t_0, t_0 + h]$ , т. е. считать

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}(t_i) = \text{const}, \quad \tau \in [t_i, t_i + h],$$

тогда

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{Ah} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} e^{A(t_0+h-\tau)} B\mathbf{u}(t_0) d\tau.$$

Вычислим интеграл методом замены переменных

$$s = t_0 + h - \tau,$$

откуда

$$ds = -d\tau;$$

$$\tau = t_0 \rightarrow s = h;$$

$$\tau = t_0 + h \rightarrow s = 0,$$

тогда  $\mathbf{x}(t_1) = e^{Ah}\mathbf{x}(t_0) + \int_0^h e^{As} ds B \mathbf{u}(t_0).$

Обозначив величины

$$P = e^{Ah}; \quad Q = \int_0^h e^{As} ds B,$$

получим выражение для решения в первом узле сетки:

$$\mathbf{x}(t_1) = P\mathbf{x}(t_0) + Q\mathbf{u}(t_0).$$

Вычислив  $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}(t_1 + h)$  по указанной методике, получим

$$\mathbf{x}(t_2) = P\mathbf{x}(t_1) + Q\mathbf{u}(t_1).$$

Аналогично для  $i$ -го узла сетки решение определяется следующей дискретной системой:  $\mathbf{x}(t_{i+1}) = P\mathbf{x}(t_i) + Q\mathbf{u}(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, N$ . Матрицы  $P$  и  $Q$  вычисляются разложением  $e^{Ah}$  в матричный ряд, тогда

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_0^h e^{As} ds = \int_0^h \left( I + \frac{As}{1!} + \frac{(As)^2}{2!} + \dots + \frac{(As)^n}{n!} + \dots \right) ds = \\ &= h + \frac{Ah^2}{2!} + \dots + \frac{A^n h^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда

$$P = I + \Psi A; \quad Q = \Psi B. \quad (2.6)$$

### 2.3. Преобразование линейных моделей

**Переход от СЛНДУ к ЛДУ  $n$ -го порядка.** Описание линейной динамической системы в виде СЛНДУ

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0;$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x} \in R^n, \mathbf{u} \in R^l, \mathbf{y} \in R^m,$$

называют описанием в форме пространства состояний, так как  $\mathbf{x}$  – вектор состояния или фазовый вектор.

Описание в форме пространства состояний связано с описанием в форме «вход-выход», т. е. с математическим описанием, непосредственно связывающим выход  $\mathbf{y}(t)$  и его производные с входом  $\mathbf{u}(t)$  и его производными:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}\mathbf{y}^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1\mathbf{y}^{(1)}(t) + \alpha_0\mathbf{y}(t) = \\ = \beta_n\mathbf{u}^{(n)}(t) + \beta_{n-1}\mathbf{u}^{(n-1)}(t) + \dots + \beta_1\mathbf{u}^{(1)}(t) + \beta_0\mathbf{u}(t), \end{aligned}$$

где  $\alpha_i, i = 0, \dots, n-1$  – квадратные матрицы строения  $m \times m$ ;  $\beta_i, i = 0, \dots, n-1$  – матрицы строения  $m \times l$ .

Если ввести оператор дифференцирования  $p = d/dt$ , уравнение преобразуется к виду

$$p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0 = \beta_np^n + \beta_{n-1}p^{n-1} + \dots + \beta_1p + \beta_0,$$

т. е. может быть записано в операторной форме

$$\alpha(p)\mathbf{y}(t) = \beta(p)\mathbf{u}(t), \quad (2.7)$$

где  $\alpha(p), \beta(p)$  – матричные полиномы от оператора  $p$  (коэффициенты этих полиномов – матрицы).

Если ввести  $\alpha^{-1}(p)$  – обратную матрицу, то формально можно записать

$$\mathbf{y}(t) = \alpha^{-1}(p)\beta(p)\mathbf{u}(t) = W(p)\mathbf{u}(t),$$

где  $W(p)$  – передаточная функция динамической системы. При этом  $\mathbf{y}(t) = W(p)\mathbf{u}(t)$  – условная запись, под которой понимают выражение (2.7), т. е. дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка.

Если  $\mathbf{y}(t)$  и  $\mathbf{u}(t)$  – скалярные выход и вход, то  $\alpha(p), \beta(p)$  – скалярные полиномы, поэтому

$$\mathbf{y}(t) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)}\mathbf{u}(t) = W(p)\mathbf{u}(t),$$

где  $W(p)$  имеет вид дробно-рациональной функции:

$$W(p) = \frac{\beta_np^n + \beta_{n-1}p^{n-1} + \dots + \beta_1p + \beta_0}{\alpha_np^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0}.$$

В общем случае, когда вход  $\mathbf{u}$  и выход  $\mathbf{y}$  являются не скалярными, а векторными, передаточная функция становится матричной.

В этом случае вместо полинома  $\beta(p)$  получается матрица

$$\beta(p) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(p) & \dots & \beta_{1l}(p) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{m1}(p) & \dots & \beta_{ml}(p) \end{pmatrix},$$

где  $\beta_{ij}(p)$  – полином. При этом  $\alpha_{ij}(p)y_j(t) = \beta_{ij}(p)u_i(t)$ .

Связь между  $\mathbf{u}(t)$  и  $\mathbf{y}(t)$  определяет соотношение

$$\mathbf{y}(t) = \frac{1}{\alpha(p)} \beta(p) \mathbf{u}(t) = W(p) \mathbf{u}(t),$$

где  $W(p) = \begin{pmatrix} w_{11}(p) & \dots & w_{1l}(p) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ w_{m1}(p) & \dots & w_{ml}(p) \end{pmatrix}.$

Элементы  $W(p)$  – это  $w_{ij}(p) = \frac{\beta_{ij}(p)}{\alpha(p)}$ , представляющие собой ПФ от  $i$ -го входа к  $j$ -му выходу. Таким образом, знаменатель всех ПФ один и тот же и равен  $\alpha(p)$  – характеристическому полиному матрицы  $A$ . Матричную ПФ можно получить при помощи преобразования Лапласа для системы

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Применив преобразование Лапласа  $L$  к вектор-функциям  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$ :

$$L\{\mathbf{x}(t)\} = \mathbf{x}(s); \quad L\{\mathbf{u}(t)\} = \mathbf{u}(s); \quad L\{\mathbf{y}(t)\} = \mathbf{y}(s),$$

получим

$$\begin{aligned} (Is - A)\mathbf{x}(s) &= B\mathbf{u}(s), \\ L\{\mathbf{y}(t)\} &= L\{C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)\} \rightarrow \mathbf{y}(s) = C\mathbf{x}(s) + D\mathbf{u}(s). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s) &= (Is - A)^{-1} B\mathbf{u}(s); \\ \mathbf{y}(s) &= \left( C(Is - A)^{-1} B + D \right) \mathbf{u}(s) = W(s) \mathbf{u}(s), \end{aligned}$$

где  $W(s)$  – это матричная ПФ вида

$$W(s) = \frac{1}{\alpha(s)} \begin{pmatrix} \beta_{11}(s) & \dots & \beta_{1l}(s) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{m1}(s) & \dots & \beta_{ml}(s) \end{pmatrix},$$

где  $\beta_{ij}(s)$  – полиномы относительно  $s$ , совпадающие с полиномами  $\beta_{ij}(p)$ .

Поэтому в области изображений  $\alpha(s)y(s) = \beta(s)u(s)$ .

**Переход от описания динамической системы в форме «вход-выход» к описанию в пространстве состояний.** Ограничимся объектом с одним входом и одним выходом  $u(t) \in R^1, y(t) \in R^1$ . Пусть динамическую систему описывает линейное дифференциальное уравнение вида

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1y^{(1)}(t) + \alpha_0y(t) = \\ = \beta_nu^{(n)}(t) + \beta_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + \beta_1u^{(1)}(t) + \beta_0u(t). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$y^{(n-1)} = y_{n-1}, \dots, y^{(1)} = y_1; y = y_0.$$

Дифференциальному уравнению системы соответствуют скалярные полиномы от оператора дифференцирования  $p$ :

$$\alpha(p) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0;$$

$$\beta(p) = p^n + \beta_{n-1}p^{n-1} + \dots + \beta_1p + \beta_0.$$

Для описания системы в пространстве состояний требуется найти матрицы  $A, B, C, D$  и вектор начальных условий  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , такие, чтобы системе  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t), \mathbf{x}(t_0) \in R^n, y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t)$  и исходному дифференциальному уравнению соответствовали тождественные выходы  $y(t)$  для одного и того же  $u(t), t \in [t_0, T]$ .

Из исходной записи  $p^n y + \alpha_{n-1}p^{n-1}y + \dots + \alpha_1py + \alpha_0y = \beta_n p^n u + \dots + \beta_1 pu + \beta_0 u$ , следует, что

$$(y - \beta_n u) = \frac{1}{p} \left( -\alpha_{n-1}y + \beta_{n-1}u + \frac{1}{p} \left( -\alpha_{n-2}y + \beta_{n-2}u + \frac{1}{p} (\dots (-\alpha_0 y + \beta_0 u) \dots) \right) \right).$$

Введем переменную  $x_n = y - \beta_n u$ , отсюда  $y = x_n + \beta_n u$ . Тогда

$$x_n = \frac{1}{p} \left( -\alpha_{n-1}y + \beta_{n-1}u + \frac{1}{p} \left( -\alpha_{n-2}y + \beta_{n-2}u + \frac{1}{p} (\dots (-\alpha_0 y + \beta_0 u) \dots) \right) \right),$$

откуда, продифференцировав  $x_n$ , получим

$$\dot{x}_n + \alpha_{n-1}y - \beta_{n-1}u = \frac{1}{p} \left( -\alpha_{n-2}y + \beta_{n-2}u + \frac{1}{p} (\dots (-\alpha_0 y + \beta_0 u) \dots) \right).$$

Выражение справа от знака равенства обозначим через  $x_{n-1}$ . Продолжая дифференцирование, получим цепочку равенств, последним из которых будет  $\dot{x}_1 = -\alpha_0 y + \beta_0 u$ .

Полученная система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_0 y + \beta_0 u; \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - \alpha_{n-2} y + \beta_{n-2} u; \\ \dot{x}_n = x_{n-1} - \alpha_{n-1} y + \beta_{n-1} u \end{cases}$$

может быть записана как

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_0 x_n + (\beta_0 + \alpha_0 \beta_n) u; \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = -\alpha_{n-2} x_n + x_{n-2} - (\beta_{n-2} + \alpha_{n-2} \beta_n) u; \\ \dot{x}_n = -\alpha_{n-1} x_n + x_{n-1} - (\beta_{n-1} + \alpha_{n-1} \beta_n) u. \end{cases}$$

В левой части этой системы стоит вектор производных от компонент вектора  $x = (x_1 \dots x_n)^T$ . Полученная система уравнений есть система неоднородных дифференциальных уравнений с вектором состояния  $x$ . Запишем эту систему уравнений в матричной форме и добавим уравнение для  $y$ :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \beta_0 - \alpha_0 \beta_n \\ \beta_1 - \alpha_0 \beta_n \\ \vdots \\ \beta_{n-2} - \alpha_0 \beta_n \\ \beta_{n-1} - \alpha_0 \beta_n \end{pmatrix} u,$$

$$y = [0 \dots 0 1] x + \beta_n u.$$

В итоге получена каноническая наблюдаемая форма линейной системы в пространстве состояний. Матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \beta_0 - \alpha_0 \beta_n \\ \beta_1 - \alpha_0 \beta_n \\ \vdots \\ \beta_{n-2} - \alpha_0 \beta_n \\ \beta_{n-1} - \alpha_0 \beta_n \end{pmatrix};$$

$$C = [0 \dots 0 1]; \quad D = \beta_n.$$



Существует бесконечное число других представлений ПФ в форме пространства состояний. Наиболее распространенная из них – форма Фробениуса, или каноническая управляемая форма:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u,$$

$$y = x'_1 + \beta_n u.$$

Для фробениусовой формы записи матрицы имеют вид

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}; \quad B' = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix};$$

$$C' = (1 \ 0 \ \dots \ 0); \quad D' = \beta_n u.$$

Коэффициенты матрицы  $B'$  вычисляются из следующей системы ЛАУ:

$$\begin{aligned} b_1 &= \beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_n; \\ \alpha_{n-1}b_1 + b_2 &= \beta_{n-2} - \alpha_{n-2}\beta_n; \\ &\dots \\ \alpha_1b_1 + \alpha_2b_2 + \dots + b_n &= \beta_0 - \alpha_0\beta_n. \end{aligned}$$

Переход от одного описания в форме пространства состояний к другому (такой переход называют переходом к другому базису) осуществляется невырожденной матрицей  $T$ , которую называют матрицей преобразования.

Допустим, существуют уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + Bu(t); \\ y(t) &= C\mathbf{x}(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Пусть  $\mathbf{x}' = T\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} = T^{-1}\mathbf{x}'$ . Тогда исходную систему можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} T^{-1}\dot{\mathbf{x}}'(t) &= AT^{-1}\mathbf{x}'(t) + Bu(t); \\ y(t) &= CT^{-1}\mathbf{x}'(t) + Du(t). \end{aligned}$$

### 3. ВЫБОР СТРУКТУРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

#### 3.1. Классификация моделей

Этап построения математической модели системы разбивается на две части: выбор структуры и выбор параметров. Как было сказано в 1.2, структура сложной системы определяется типами моделей каждой ее подсистемы и характером связей (отношений) между ними. Все многообразие имеющихся типов ММ можно классифицировать по нескольким основным признакам (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Математические модели систем

Статические модели $y(t) = F(u(t))$	Динамические модели $y(t) = F(\{u(s), -\infty < s \leq t\})$
Дискретные ( $U, Y, T$ – конечные (счетные) множества)	Непрерывные ( $U, Y, T$ – континуумы (прямые, отрезки, тела в многомерных пространствах))
Детерминированные	Стохастические; нечеткие
Сосредоточенные (уравнения конечные (алгебраические или трансцендентные), разностные, обыкновенные, дифференциальные)	Распределенные (уравнения с запаздыванием, в частных производных, интегральные)
Линейные	Нелинейные
Стационарные (параметры не меняются со временем)	Нестационарные (параметры изменяются со временем)

Кроме того, структура модели определяется также набором размерностей – количеством переменных (входа, выхода, состояния) – и параметров. Прежде всего следует дать краткую характеристику основным типам ММ.

**Статические и динамические модели.** Математическая модель системы называется статической, если значение выхода  $y(t)$  зависит от значения входа  $u(t)$  в один и тот же момент времени  $t$ . Символически это свойство записывается так:

$$y(t) = F(u(t)), \quad (3.1)$$

где  $F$  – символ некоторого преобразования (оператора). Кроме явных функциональных зависимостей (3.1) статические модели могут задаваться неявно, в виде уравнения или системы

$$\Phi(y(t), u(t)) = 0. \quad (3.2)$$

Так обычно записываются уравнения статических режимов радио-электронных схем, многих механических, энергетических систем и т. д. Уравнение (3.2) должно быть однозначно разрешимо относительно  $y(t)$ .

Статическими моделями пользуются, когда в рамках поставленной задачи (с точки зрения достижения выбранной цели) инерционностью и «памятью» реальной системы можно пренебречь. Это возможно при выполнении ряда условий, в число которых входят следующие:

1) система устойчива, т. е. переходные процессы после скачкообразного изменения входов затухают. Конечное время затухания с заданной точностью обозначим через  $t_{\text{пер}}$ ;

2) входы меняются медленно, т. е.  $\Delta t_{\text{in}} > t_{\text{пер}}$ , где  $\Delta t_{\text{in}}$  – время между изменениями входных воздействий;

3) выходы изменяются редко, т. е.  $\Delta t_{\text{out}} > t_{\text{пер}}$ , где  $\Delta t_{\text{out}}$  – промежутки между измерениями входных величин.

В динамических моделях значение  $y(t)$  может зависеть от всего прошлого (предыстории) входного процесса:

$$y(t) = F(\{u(s), s \leq t\}). \quad (3.3)$$

Динамические модели позволяют учесть наличие «памяти», инерционности системы. Математическим аппаратом описания динамических систем являются дифференциальные, разностные уравнения, конечные автоматы, случайные процессы.

**Дискретные и непрерывные модели.** Система может быть дискретной или непрерывной по входам, выходам и по времени в зависимости от того, дискретными или непрерывными являются множества  $U$ ,  $Y$ ,  $T$  соответственно (табл. 3.2). Под дискретным понимается конечное или счетное множество. Под непрерывным (континуальным) будем понимать множество объектов, для которого адекватной моделью является отрезок, луч или прямая линия, т. е. связное числовое множество. Если система имеет несколько входов и выходов, то это значит, что соответствующие множества  $U$ ,  $T$  лежат в многомерных пространствах, т. е. непрерывность и дискретность понимаются покомпонентно.

Удобство числового множества как модели реальных совокупностей объектов состоит в том, что на нем естественным образом определяются

несколько отношений, формализующих реально встречающиеся отношения между реальными объектами. Например, отношения близости, сходимости формализуют понятия похожести, сходства объектов и могут быть заданы функцией расстояния (метрики)  $d(x, y)$  (например,  $d(x, y) = |x - y|$ ).

Таблица 3.2

### Детерминированные модели систем

Модели систем		Математический аппарат описания	Методы оценки параметров и анализа	Методы синтеза	Области применения
Статические	Дискретные по $U, Y$	Графы, булева алгебра, предикаты	Методы математической логики	Карты Карно, метод Куайна, дискретное программирование	Методы оптимизации (линейное и нелинейное программирование)
	Непрерывные по $U, Y$	Функции вещественных переменных	Методы интерполяции, аппроксимации	Релейно-контактные схемы, импульсные и логические схемы, качественные модели исследования операций	Количественные модели исследования операций
Динамические, дискретные по $T$	Дискретные по $U, Y$	Конечные автоматы	Теория конечных автоматов	Методы синтеза микропрограммных автоматов, динамическое программирование	Цифровые САУ, логическое управление
	Непрерывные по $U, Y$	Разностные уравнения	Идентификация, теория устойчивости	Динамическое программирование, дискретный принцип максимума	Импульсные и цифровые САУ
Динамические, непрерывные по $T$	Дискретные по $U, Y$	Асинхронные автоматы, сети Петри, модели теории расписаний	Методы идентификации	Динамическое программирование, теория расписаний	Параллельные процессы
	Непрерывные по $U, Y$	ОДУ	Идентификация, численное решение ОДУ	Теория управления, методы оптимизации	САУ, механические, тепловые, электронные и другие процессы

Числовые множества являются упорядоченными: отношение порядка следования ( $x \leq y$ ) формализует предпочтение одного объекта другому. Наконец, над элементами числовых множеств определены естественные операции, например линейные:  $x + y, xa$ . Если для реальных объектов на входе и выходе также имеют смысл аналогичные операции, то естественным образом возникают требования к моделям (3.1)–(3.3) быть согласованными с этими операциями и сохранять их результаты. Так осуществляется переход, например, к линейным моделям:  $y = au + b, dy/dt = ay + bu$  и т. д., являющимся простейшими моделями многих процессов.

Как правило, дискретность множества  $U$  влечет за собой дискретность  $Y$ . Кроме того, для статических систем исчезает разница между непрерывным и дискретным временем. Поэтому классификация детерминированных систем (табл. 3.2) по признакам «статические – динамические», «дискретные – непрерывные» включает шесть основных групп; для каждой группы указан математический аппарат описания систем, методы численного моделирования и оценки их параметров методы синтеза (оптимизации), а также типичные области применения.

**Гармонический анализ процессов.** При исследовании колебательных процессов часто применяются их энергетические характеристики, в первую очередь – мощность и энергия [5].

Мгновенная мощность  $p(t)$  сигнала  $y(t)$  определяется как квадрат его мгновенного значения:  $p(t) \approx y(t)^2$ . Энергия  $P$  сигнала на интервале  $[t_1, t_2]$  находится как интеграл от мгновенной мощности  $P = \int_{t_1}^{t_2} y(t)^2 dt$ . Отношение

$P/(t_2 - t_1) = (t_2 - t_1)^{-1} \int_{t_1}^{t_2} y(t)^2 dt$  выражает среднюю (на интервале  $[t_1, t_2]$ )

мощность сигнала. Обозначим ее через  $\overline{y(t)^2}$ . Получить представление об этих характеристиках процесса можно на основе преобразования Фурье. Рассмотрим этот метод более подробно.

Для периодических процессов  $y(t)$  с периодом  $T$  можно записать ряд Фурье в виде

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \right), \quad (3.4)$$

где коэффициенты разложения находятся из формул

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) dt; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos \left( k \frac{2\pi}{T} t \right) dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin \left( k \frac{2\pi}{T} t \right) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

Совокупность величин  $s_0 = |a_0|/2$ ;  $s_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) называется амплитудным частотным спектром периодической функции  $y(t)$ . Значения  $s_k$  представляют собой амплитуды гармоник с частотой  $\omega_k = k\Omega$ ;  $\Omega = 2\pi/T$  в разложении процесса в ряд (3.4). Они зависят от номера гармоники  $k$  и обычно графически представляются в виде отрезков высотой  $s_k$ , проведенных в точках  $\omega_k$  оси частот (поэтому спектр периодической функции называют линейчатым или дискретным). Он несет в себе информацию о частотных свойствах сигнала: если сигнал имеет выраженные колебания на некоторых частотах, то его спектр на этих частотах содержит пики.

Обобщением ряда Фурье на непериодические процессы является интеграл Фурье, при котором используется представление

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (V(\omega) \sin \omega t + U(\omega) \cos \omega t) d\omega, \quad (3.5)$$

$$\text{где } U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cos(\omega t) dt; \quad V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \sin(\omega t) dt.$$

Аналогично вводится частотный спектр  $S(\omega) = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2}$  процесса  $y(t)$ . Это функция от непрерывного аргумента  $\omega$ .

Поскольку при цифровом моделировании исходной является дискретная реализация процесса и нахождение интеграла выполняется конечным суммированием, то при числовом гармоническом анализе вместо непрерывного преобразования (3.5) выполняется дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Для этого исследуемый процесс  $y(t)$  (длительностью  $T$ ) заменяется выборочной дискретной функцией (т. е. последовательностью)  $y[k] = y(t_k)$ , где  $t_k = kT_0$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ),  $N$  – заданное число точек,  $T_0 = T/N$  – шаг дискретности (квантования). Далее вычисляется функция

$$Y(k) = \sum_{n=1}^N y[n] \exp\left(-j2\pi(k-1)\frac{n-1}{N}\right), \quad 1 \leq k \leq N \quad (3.6)$$

(«изображение по Фурье»), имеющая комплексные значения. В пакете MATLAB дискретное преобразование Фурье выполняется процедурой **fft**. Для ускорения вычислений рекомендуется брать число точек  $N = 2^v$ , где  $v$  – некоторое натуральное число. В этом случае программой реализуется так называемое «быстрое преобразование Фурье» (БПФ). Обратный переход от изображения к исходной функции выполняется по формуле

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y(k) \exp\left(j2\pi(k-1)\frac{n-1}{N}\right), \quad 1 \leq n \leq N. \quad (3.7)$$

При выборе параметров вычисления спектра (длина реализации  $T$ , число точек  $N$  и интервал квантования  $T_0$ ) следует учитывать, что диапазон существенных частот исследуемого процесса не должен выходить за частоту Найквиста  $\omega_N = \pi/T_0$ . Несоблюдение этого условия может привести к значительным ошибкам при определении характеристик процесса. Данное требование вытекает из известной теоремы Котельникова–Шеннона.

Поскольку рассматриваемый процесс  $y(k)$  в общем случае не является периодическим с частотой  $\Omega = 2\pi/T$ , вычисление его спектра с помощью процедуры (3.6) является приближенным. Как видно из формулы (3.7), соседние точки по частоте отстоят на величину  $\delta\omega = 2\pi/T_0 N$ . Учитывая, что  $N = T/T_0$ , получим  $\delta\omega = 2\pi/T$ . Таким образом, длительность исследуемой реализации должна быть достаточно большой для получения спектра с заданным шагом дискретности по частоте ( $T \gg 1/\delta\omega$ ).

### 3.2. Модели состояния динамических систем

**Модели общего вида.** Важнейшую роль при описании динамических систем играет понятие состояния. Состояние – это совокупность величин (вектор)  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , которые вместе с входным воздействием однозначно определяют будущее поведение системы. В общем случае уравнения состояний – это системы дифференциальных или разностных уравнений первого порядка вместе с уравнениями для выходных величин. Начальное состояние представляет «память» системы о прошлом. Модель состояния непрерывной динамической системы записывается в виде

$$(3.8)$$

где  $u_1, \dots, u_m$  – входные переменные,  $y_1, \dots, y_l$  – выходные переменные,  $x_1, \dots, x_n$  – переменные состояния. Вводя векторные обозначения, можно записать (3.8) в более компактном виде:

(3.9)

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)^T$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_l)^T$ . Для моделей состояния справедлив следующий факт: любая нелинейная динамическая система может быть представлена как соединение линейных динамических и нелинейных статических звеньев. Доказательство очевидно из рис. 3.1, где в качестве линейного звена взят интегратор.

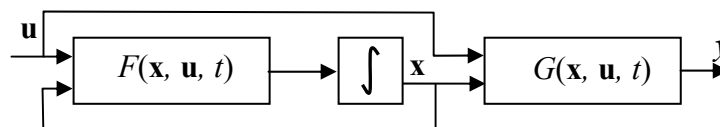


Рис. 3.1. Схема интегрирования нелинейных систем

Еще более общей формой описания динамических систем являются сингулярные дифференциальные (алгебро-дифференциальные) системы

$$\begin{aligned}\Phi(\dot{x}, x, u, t) &= 0; \\ G(x, y, u, t) &= 0,\end{aligned}$$

частным случаем которых являются неявные системы

$$\Phi(\dot{y}, y, u, t) = 0.$$

**Линеаризация динамических систем.** Линеаризация является одним из простейших методов изучения нелинейных систем. Суть ее состоит в замене нелинейной системы на эквивалентную ей линейную. Линеаризованная модель не может полностью заменить нелинейную систему, но в некоторых отношениях ее поведение может быть (с определенным расхождением) идентичным поведению нелинейной системы. Поэтому существует возмож-



ность применить хорошо разработанные методы анализа линейных систем к линеаризованной модели, а полученные результаты интерпретировать для исходной нелинейной системы.

В технических науках включая теорию управления предполагается, что отклонения от некоторой рабочей точки малы, что позволяет нелинейные характеристики заменить эквивалентными линейными. В этом случае говорят о линеаризации вблизи рабочей точки или о касательной аппроксимации. Линеаризованную модель далее исследуют при малых входных воздействиях.

Помимо касательной аппроксимации существуют и другие методы линеаризации, каждый из них для определенных задач обладает своими преимуществами. Например, метод гармонической линеаризации анализирует нелинейную систему не во временной области, а в частотной. Суть его состоит в том, что рассматривается только основная составляющая выходного сигнала нелинейной системы, а высшие гармоники отбрасываются. Применение этого метода оправдано, когда нелинейная система имеет характеристику фильтра низких частот. Метод статистической линеаризации применяется во временной области. Эквивалентная линейная модель строится в предположении, что возмущения имеют гауссовское распределение. Существуют также комбинированные методы линеаризации.

В качестве примеров преимуществ линейных объектов перед нелинейными можно назвать следующие: выполнение принципа суперпозиции для входных воздействий; простота определения реакции линейной системы на типовые воздействия, что в совокупности с принципом суперпозиции позволяет использовать, например, методы спектрального анализа; наличие мощного математического аппарата для получения аналитических решений для линейных систем, и др.

Рассмотрим получение линеаризованной модели методом касательной аппроксимации с использованием разложения в ряд Тейлора.

Рассмотрим объект (3.9). Обозначив  $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{u})^T$ , получим выражения

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t)); \quad (3.10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{z}(t)). \quad (3.11)$$

Рассмотрим уравнение (3.10). Левая часть этого уравнения – функция  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ :  $R \rightarrow R^n$ . Правая часть этого уравнения – сложная функция, т. е. композиция

функций:  $\mathbf{z}(t): R \rightarrow R^{n+l}$  и  $f(\mathbf{z}(t)): R^{n+l} \rightarrow R^n$ . Следует понимать, что функция  $f(\mathbf{z})$  задана раз и навсегда, но вид функций  $\mathbf{x}(t)$  и  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ , удовлетворяющих уравнению (3.10) на некотором интервале времени, зависит от значения  $\mathbf{x}(t_0)$  и вида  $\mathbf{u}(t)$  на этом интервале. Уравнение (3.10) – дифференциальное и нелинейное, так как функция  $f(\mathbf{z})$  в общем случае нелинейная. Аналогично рассматривается уравнение (3.11), но оно уже является алгебраическим и нелинейным.

Рассмотрим функцию  $f(\mathbf{z}): R^{n+l} \rightarrow R^n$ . Предполагаем  $f$  непрерывной и дифференцируемой в некоторой области из  $R^{n+l}$ , содержащей любые допустимые значения вектора  $\mathbf{z}$ . В этом случае можно построить ряд Тейлора функции  $f$  для любой точки  $\mathbf{z}_0$  из рассматриваемой области:

$$f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}_0) + D_f(\mathbf{h}) + o(\mathbf{h}), \quad (3.12)$$

где вектор  $\mathbf{h} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_0$ ;  $D_f$  – линейная функция  $D_f: R^{n+l} \rightarrow R^n$ . Под  $o(\mathbf{h})$  понимают некоторую функцию, значение которой на  $\mathbf{h}$  пренебрежимо мало по сравнению со значением  $D_f$  на  $\mathbf{h}$ . Смысл этого следующий: если требуется вычислить значение известной функции  $f$  в некоторой точке  $\mathbf{z}$ , а ряд (3.12) задан, то с некоторой погрешностью значение  $f(\mathbf{z})$  может быть вычислено как

$$f(\mathbf{z}) \approx f(\mathbf{z}_0) + D_f(\mathbf{h}), \quad (3.13)$$

где  $\mathbf{z}_0$  известно, а  $\mathbf{h} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_0$ . При этом чем меньше значение (норма)  $\mathbf{h}$ , тем качество приближения лучше. Из (3.13) следует выражение

$$f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}_0) \approx D_f(\mathbf{h}),$$

определяющее, что изменение функции  $f$  относительно значения  $f(\mathbf{z}_0)$  при отклонении аргумента  $\mathbf{z}$  от значения  $\mathbf{z}_0$  есть почти то же самое, что и значение функции  $D_f$  на  $\mathbf{h} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_0$ .

Линейная функция  $D_f$  называется дифференциалом функции  $f$  в точке  $\mathbf{z}_0$ . Функция  $D_f$  имеет вид:

$$D_f(\mathbf{h}) = J\mathbf{h},$$

где матрица  $J$  носит название матрицы Якоби функции  $f$  в точке  $\mathbf{z}_0$ .

Известно, что

$$J = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_{n+l}} \right|_{z=z_0} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial z_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial z_{n+l}} \right|_{z=z_0} \end{pmatrix}.$$

В другой точке будет другая матрица, т. е. другой дифференциал. Теперь рассмотрим, как ранее сказанное применимо к построению линейного аналога уравнения (3.10). Пусть статический режим задан, т. е. найдено такое значение вектора  $\mathbf{z}$ , при котором  $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \forall t$ . Выбираем это значение  $\mathbf{z}$  в качестве  $\mathbf{z}_0$ .

Разложим функцию  $f(\mathbf{z})$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\mathbf{z}_0$ :

$$f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}_0) + J(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) + o(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)$$

и отбрасываем последний член, т. е. приходим к записи вида (3.13). Полученное соотношение следует понимать так: если значения функции  $\mathbf{z}(t)$  в любой момент времени  $t$  не очень сильно отличаются от фиксированного значения  $\mathbf{z}_0$ , то значение сложной функции  $f(\mathbf{z}(t))$  в этот момент времени может быть приближенно получено как сумма вектора  $\mathbf{z}_0$  и произведения матрицы  $J$  на значение функции  $\mathbf{h}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_0$  в этот момент времени. При этом матрица  $J$  фиксирована, так как система (3.10), (3.11) – автономная, т. е. значение  $f(\mathbf{z})$  зависит от значения  $\mathbf{z}$ , но не связано с моментом времени, в который  $\mathbf{z}$  имеет это значение.

Функция  $\mathbf{h}(t)$  суть вектор-функция отклонений значений  $\mathbf{z}(t)$  от значения  $\mathbf{z}_0$ :  $\mathbf{h}(t) = (\Delta \mathbf{x}(t), \Delta \mathbf{u}(t))^T$ . Итак, имеем:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{z}) \approx f(\mathbf{z}_0) + J(\Delta \mathbf{x}(t), \Delta \mathbf{u}(t))^T.$$

Далее отметим, что  $f(\mathbf{z}_0) = 0$ ,  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}(t)$ , т. е.  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \Delta \dot{\mathbf{x}}(t)$ .

Следовательно,

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = J(\Delta \mathbf{x}(t), \Delta \mathbf{u}(t))^T. \quad (3.14)$$

Выражение (3.14) есть система линейных дифференциальных уравнений, причем неоднородных (так как  $\Delta \mathbf{u}(t) \neq 0$ ).

Матрицу Якоби  $J$  разбивают на две части  $J = [A \mid B]$ :

$$A = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial x_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial x_n} \right|_{z=z_0} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial x_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial x_n} \right|_{z=z_0} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial u_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial u_l} \right|_{z=z_0} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial u_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial u_l} \right|_{z=z_0} \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы называют матрицами состояния и входных воздействий соответственно. Причем, если входные воздействия разделены на возмущающие и управляющие, то матрицу  $B$  также разбивают на матрицу возмущения  $B_1$  и матрицу управления  $B_2$ .

Для уравнения (3.11) поступают следующим образом: раскладывают  $g(\mathbf{z})$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\mathbf{z}_0$

$$g(\mathbf{z}) = g(\mathbf{z}_0) + J_1(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) + o(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)$$

и рассматривают только  $\Delta y(\mathbf{z}) = J_1(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)$ , называемое приращением выходных координат. Последнее соотношение представляет собой систему линейных алгебраических уравнений.

В результате получили

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) &= A \Delta \mathbf{x}(t) + B \mathbf{u}(t); \\ \Delta \mathbf{y}(t) &= C \Delta \mathbf{x}(t) + D \mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Это и есть линеаризованный объект, т. е. линейный аналог объекта (3.10), (3.11). Матрица  $C$  называется матрицей выхода, матрица  $D$  – матрицей обхода. Если линеаризация приводит к большим погрешностям, то стараются, по возможности, выбрать математическую модель, линейную по параметрам

$$\dot{x} = A\psi(x, u),$$

где  $A$  – матрица параметров порядка  $n \times N$ ;  $\psi(\ )$  – нелинейная вектор-функция. К этому классу относятся, в частности, билинейные объекты, например  $\dot{x} = a_1x + a_2xu + a_3u$ , где  $A = [a_1, a_2, a_3]$ ;  $\psi(x, u) = (x, xu, u)^T$ .

Сказанное ранее относится и к уравнениям дискретных по времени систем. Уравнения дискретной системы в общем случае имеют вид

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F(x_k, u_k); \\ y_k &= G(x_k, u_k). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Дискретным аналогом уравнений линейной стационарной системы являются уравнения

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Px_k F + Qu_k; \\ y_k &= Rx_k + Su_k,\end{aligned}\tag{3.16}$$

где  $R$  и  $S$  – дискретные аналоги матриц  $C$  и  $D$  в (2.3).

**Дискретизация и континуализация.** Если исходное описание линейной системы непрерывно, можно перейти к дискретному описанию с помощью следующей процедуры.

Пусть состояние  $\mathbf{x}(t)$  системы (2.3) доступно измерению в дискретные моменты времени  $t_k = kh$ ,  $k = 0, 1, \dots$  где  $h > 0$  – шаг дискретности Пусть  $\mathbf{u}(t)$  постоянно на промежутках между моментами коррекции  $t_k$ . Тогда динамику векторов  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$  можно описать разностными уравнениями (3.16) в которых матрицы  $P$  и  $Q$  определяются соотношениями (2.6).

Если предположение о кусочном постоянстве  $\mathbf{u}(t)$  не выполняется, то переход от (2.3) к (3.16) является приближенным, но его точность растет по мере уменьшения шага  $h$ , если скорость изменения входа (величина  $\dot{\mathbf{u}}(t)$ ) ограниченная. При достаточно малых  $h$  для вычисления матричной экспоненты можно удерживать лишь первые несколько членов ряда или аппроксимировать сумму ряда каким-либо способом.

Например, при переходе от (2.3) к (3.16) можно пользоваться формулой  $e^{Ah} \approx I + Ah$ , соответствующей численному интегрированию (2.3) методом Эйлера. При такой аппроксимации передаточные функции дискретной  $W_d(s)$  и непрерывной  $W_n(s)$  систем связаны соотношением

$$W_d(s) = W_n\left(\frac{1-s}{h}\right),$$

т. е. при переходе к дискретному времени в передаточной функции  $W(p)$  системы нужно заменить  $p$  на  $(1-z)/h$ . Если матрица  $A$  – гурвицева, то метод Эйлера дает устойчивую аппроксимацию лишь при

$$h < \min(2 \operatorname{Re} \lambda_i(A)) / |\lambda_i(A)|^2,$$

где  $\lambda_i(A)$  – собственные числа матрицы  $A$ . Целый ряд способов перехода от (2.3) к описанию в виде ПФ основан на аппроксимации матрицы  $e^{Ah}$  мат-

ричными дробями Паде (дробями, «числителями» и «знаменателями» которых являются матричные многочлены). Частными случаями этих способов является метод Тастина (формула Паде порядка (1, 1)):

$$e^{Ah} \approx \left( I + \frac{Ah}{2} \right) \left( I - \frac{Ah}{2} \right)^{-1},$$

приводящий к соотношению между передаточными функциями

$$W_d(s) = \frac{2}{1+s} W_n \left( \frac{2}{h} \frac{1-s^{-1}}{1+s^{-1}} \right),$$

а также метод Дэвисона (формула Паде порядка (2, 2)):

$$e^{Ah} \approx \left( I + \frac{Ah}{2} + \frac{A^2 h^2}{12} \right) \left( I - \frac{Ah}{2} - \frac{A^2 h^2}{12} \right)^{-1}.$$

Приведенные формулы дают устойчивые аппроксимации при  $h > 0$  (при условии, что  $A$  – гурвицева).

Другой способ состоит в расширении уравнений состояния исходной системы (2.3). Входной процесс  $u(t)$  при  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$  рассматривается как решение некоторого однородного дифференциального уравнения. Тогда расширенная система тоже является однородной и в вычислении по (2.6) нет необходимости. Искомые матрицы  $P$  и  $Q$  получаются в качестве подматриц «расширенной» матричной экспоненты

Если непрерывная система нелинейная, то для перехода к ее дискретному описанию также можно использовать методы численного интегрирования. Например, метод Эйлера дает для системы (3.9) дискретное описание:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + hF(x_k, u_k, t_k); \\ y_k &= G(x_k, u_k, t_k). \end{aligned}$$

Континуализация – это переход от дискретной математической модели системы к непрерывной. Если дискретная модель системы имеет вид (3.16), то перейти к непрерывной модели (2.3) можно по формулам

$$A = \frac{1}{h} \ln P; \quad B = \frac{1}{h} \ln P(P - I)^{-1} Q, \quad (3.17)$$

вытекающим из (2.6), где  $\ln P$  – логарифм матрицы, функция, обратная к экспоненциальной и также определяемая через ряд

$$\ln(I + X) = X - \frac{X^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n,$$

сходящийся при  $\|X\| < 1$  (здесь  $X = P - I$ ). С точностью до величин порядка  $h^2$  можно ограничиться формулами

$$A = \frac{1}{h}(P - I); \quad B = \frac{1}{h}Q,$$

соответствующими методу Эйлера. Однако удобнее всего переходить от дискретной передаточной функции к непрерывной через аппроксимации матричной экспоненты методом Эйлера или формулы Паде. Например, по методу Эйлера достаточно заменить в передаточной функции  $W_d(z^{-1})$  переменную  $z^{-1}$  на  $1 - hp$ .

При исследовании моделей состояния получили распространение также методы упрощения описаний систем путем редукции (понижение порядка).

Возможность редукции математической модели можно определять по собственным числам матрицы состояния линейной или линеаризованной системы. Вещественные части собственных значений характеризуют скорость затухания переходных процессов. Если одно из собственных чисел минимум на порядок больше остальных, соответствующий ему переходный процесс закончится быстро и не окажет существенного влияния на переходный процесс модели в целом. В этом случае можно уменьшить порядок системы. Применительно к таким системам можно говорить о принципе подчинения.

В качестве примера можно рассмотреть нелинейную систему 2-го порядка

$$\dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1 - x_1 x_2;$$

$$\dot{x}_2(t) = -\lambda_2 x_2 + x_1^2,$$

где коэффициент  $\lambda_1 \geq 0$  и мал, а коэффициент  $\lambda_2 \gg \lambda_1$ .

Если переменные  $x_1$  и  $x_2$  малы, то  $x_1$  будет изменяться очень медленно. Поскольку  $\lambda_2 \gg \lambda_1$ , производной  $\dot{x}_2(t)$  можно пренебречь в сравнении с величиной  $\lambda_2 x_2$ . Тогда исходную систему можно привести к виду

$$\dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1 - \frac{x_1^3}{\lambda_2},$$

где осуществлено алгебраическое исключение переменной  $x_2$ . Поведение системы в основном определяется динамикой медленной подсистемы, которая как бы «управляет» быстрой подсистемой. При этом  $x_2$  как бы подчинена  $x_1$ . Медленная переменная  $x_1$  в этом случае называется параметром порядка. В многомерных системах параметру порядка может быть подчинено весьма большое число других переменных. В общем случае параметров порядка может быть несколько, но часто это небольшое число, существенно меньшее размерности исходной системы. Как видно из примера, редукция может осуществляться и для нелинейных систем.

### 3.3. Детерминированные и стохастические модели

Ранее рассмотренные модели систем были детерминированными (определенными), т. е. задание входного воздействия определяло выход системы однозначно. Однако на практике так бывает редко: описанию реальных систем обычно присуща неопределенность. Например, для статической модели неопределенность можно учесть, записывая вместо (3.1) соотношение

$$y(t) = F(u(t)) + \varphi(t), \quad (3.18)$$

где  $\varphi(t)$  – погрешность, приведенная к выходу системы. Причины неопределенности разнообразны:

- погрешности и помехи измерений входов и выходов системы (естественные погрешности);
- неточность самой модели системы, учитываемая искусственным введением в модель погрешности;
- неполнота информации о параметрах системы и т. д.

Среди различных способов уточнения и формализации неопределенности наибольшее распространение получил стохастический (вероятностный) подход, при котором неопределенные величины считаются случайными. Развитый понятийный и вычислительный аппараты теории вероятностей и математической статистики позволяют дать конкретные рекомендации по выбору структуры системы и оценке ее параметров. Классификация стохастических моделей систем и методов их исследования представлена в табл. 3.3.

Выводы и рекомендации основаны на эффекте усреднения: случайные отклонения результатов измерения некоторой величины от ее ожидаемого значения при суммировании взаимно уничтожаются и среднее ариф-



метическое большого числа измерений оказывается близким к ожидаемому значению. Математические формулировки этого эффекта даются законом больших чисел и центральной предельной теоремой.

Таблица 3.3

**Стохастические модели систем**

Модели систем		Математический аппарат описания	Методы оценки параметров и анализа	Методы синтеза	Области применения
Статические	Дискретные по $U, Y$	Схема независимых испытаний	Статистические оценки вероятности, дисперсионный анализ	Стохастическое программирование	Задачи выбора из конечного числа вариантов (испытания, измерения)
	Непрерывные по $U, Y$	Регрессионные модели	Регрессионный анализ	Планирование эксперимента, стохастическое программирование	Обработка результатов измерений и испытаний
Динамические, дискретные по $T$	Дискретные по $U, Y$	Марковские цепи, стохастические автоматы	Стохастическое моделирование, оценка переходных вероятностей	Динамическое программирование	Компьютеры
	Непрерывные по $U, Y$	Стохастические разностные уравнения	Статистическое оценивание состояний и параметров, анализ стохастической устойчивости	Динамическое программирование	Импульсные и цифровые САУ
Динамические, непрерывные по $T$	Дискретные по $U, Y$	Системы массового обслуживания	Теория массового обслуживания, имитационное моделирование	Перебор, методы оптимального управления	Системы обслуживания (вычислительные, производственные)
	Непрерывные по $U, Y$	Стохастические дифференциальные уравнения	Теория устойчивости	Оптимальное и адаптивное управление	САУ, механические, тепловые, электронные и другие процессы

Закон больших чисел гласит, что если  $\xi_1, \dots, \xi_N$  – случайные величины с математическим ожиданием  $M\xi_i = a$  и дисперсией  $M(\xi_1 - a)^2 = \sigma^2$ , то

$$\frac{1}{N}(\xi_1 + \dots + \xi_N) - a \approx 0 \quad (3.19)$$

при достаточно больших  $N$ . Закон больших чисел говорит о принципиальной возможности сколь угодно точной оценки  $M\xi_i$  по измерениям. Центральная предельная теорема, уточняя (3.19), утверждает, что

$$\frac{1}{N}(\xi_1 + \dots + \xi_N) - a \approx \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \xi, \quad (3.20)$$

где  $\xi$  – стандартная ( $M\xi = 0$ ,  $M\xi^2 = 1$ ) нормально распределенная случайная величина. (Если величина  $\sigma^2$  неизвестна, то следует заменить в (3.20)  $\sigma$  на оценку  $s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\xi_i - \bar{\xi})^2}$ , где  $\bar{\xi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i$ . При этом величина  $\xi$  будет

распределена уже не нормально, а по закону Стьюдента с числом степеней свободы  $N-1$ , который при  $N \geq 20$  практически неотличим от нормального).

Функция распределения нормальной случайной величины  $\xi$  хорошо известна и детально заатабулирована. В составе тулбокса STATISTICS пакета MATLAB есть модули, вычисляющие функции распределения и другие характеристики более двадцати распространенных типов случайных величин. Проиллюстрируем применение MATLAB на простой статистической задаче.

Формулировкам (3.19), (3.20) можно придать более строгий вид и это легко достижимо с помощью понятий вероятностной сходимости. Однако при попытке проверить условия этих строгих утверждений могут возникнуть трудности. В частности, в законе больших чисел и центральной предельной теореме требуется независимость отдельных измерений (реализаций) случайной величины и конечность ее дисперсии. Если эти условия нарушаются, то могут нарушаться и выводы. Например, если все измерения совпадают:  $\xi_1 = \dots = \xi_N$ , то, хотя все остальные условия выполняются, об усреднении не может быть и речи. Другой пример: закон больших чисел несправедлив, если случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  распределены по закону Коши с плотностью распределения  $p(x) = 1/\pi(1+x^2)$ , не обладающему конечным математическим ожиданием и дисперсией.

Но еще большие трудности вызывает проверка обоснованности самого употребления термина «случайный». Часто говорят, что событие  $A$  случайно, если в результате эксперимента оно может наступить (с вероятностью  $p$ ) или не наступить (с вероятностью  $1 - p$ ). Однако сама вероятность события может быть связана с результатами экспериментов лишь через частоту наступления события в некотором ряде (серии) экспериментов:  $v_N = N_A / N$ , где  $N_A$  – число экспериментов, в которых событие наступило;  $N$  – общее число экспериментов. Если числа  $v_N$  при достаточно большом  $N$  приближаются к некоторому постоянному числу  $p_A$ :  $v_N \approx p_A$ , то событие  $A$  можно назвать случайным, а число  $p_A$  – его вероятностью. При этом частоты, наблюдавшиеся в различных сериях экспериментов, должны быть близки между собой (это свойство называется статистической устойчивостью, или однородностью). Сказанное относится и к понятию случайной величины, поскольку величина  $\xi$  является случайной, если случайными являются события  $\{a < \xi < b\}$  для любых чисел  $a, b$ . Частоты наступления таких событий в длинных сериях экспериментов должны группироваться около некоторых постоянных значений.

Итак, для применимости стохастического подхода должны выполняться следующие требования:

- 1) массовость проводимых экспериментов, т. е. достаточно большое их число;
- 2) повторяемость условий экспериментов, оправдывающая сравнение результатов различных экспериментов;
- 3) статистическая устойчивость.

Стохастический подход заведомо нельзя применять к единичным экспериментам. Но даже если массовость и повторяемость экспериментов имеются, статистической устойчивости может и не быть, а проверить это достаточно сложно. Известные оценки допустимого отклонения частоты от вероятности основаны на центральной предельной теореме или неравенстве Чебышева и требуют дополнительных гипотез о независимости или слабой зависимости измерений. Опытная проверка условия независимости измерений еще сложнее, так как требует дополнительных экспериментов.

### 3.4. Нечеткие модели

**Нечеткие множества и лингвистические переменные.** В 1965 г. американский математик П. Заде опубликовал статью под названием «Fuzzy sets», что можно перевести как «нечеткие множества». В статье было дано новое определение понятия множества, предназначенное для описания и исследования сложных, «плохо определенных» систем. В таких системах наряду со строгими, объективными, количественными данными и результатами присутствуют неоднозначные, субъективные, качественные данные и результаты, что требует новых подходов.

Таким образом, появился новый математический аппарат, описывающий свойства нечетких систем, соответствующих трудно формализуемым, плохо структурированным задачам. В последние годы эти методы стали широко применяться в экспертных программных системах. Прежде чем говорить о нечетких системах, необходимо ввести понятие нечеткого множества.

Нечетким подмножеством  $A$  множества  $X$  назовем пару  $(X, \mu_A)$ , где  $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$  – функция, каждое значение которой  $\mu_A(x) \in [0, 1]$  интерпретируется как степень принадлежности точки  $x \in X$  множеству  $A$ . Функция  $\mu_A$  называется функцией принадлежности множества  $A$ .

Для обычного «четкого» множества  $B$  можно положить  $\mu_B = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$ , т. е. классическое понятие множества является частным случаем введенного понятия (рис. 3.2, а). Задавать функцию принадлежности можно таблично или аналитически.

Пример. Пусть  $X = \{1, 2, \dots\}$  – множество натуральных чисел, а функция  $\mu_A(x)$  задана следующей таблицей.

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\mu_A(x)$	0	0.1	0.6	0.8	1	1	0.9	0.7	0.2	0	...

Определенное таким образом нечеткое множество можно принять в качестве формализации понятия «несколько», изначально ясного лишь на интуитивном уровне. Аналогично можно ввести нечеткие множества соответствующие понятиям: «много», «мало», «около 100», «почти 20» и т. д.

Пример. Переменная «расстояние» принимает обычно числовые значения. Однако в предложениях естественного языка она может фигурировать как лингвистическая со значениями «малое», «большое», «очень малое»,

«среднее», «около 5 км» и т. д. Каждое значение описывается нечетким множеством, которое в рамках данной предметной области может иметь конкретную числовую интерпретацию. Например, если речь идет о поездках на такси, то в качестве универсального множества  $X$  можно взять отрезок  $[0, 100]$  км и задать функции принадлежности значений переменной «расстояние», как показано на рис. 3.2, в.

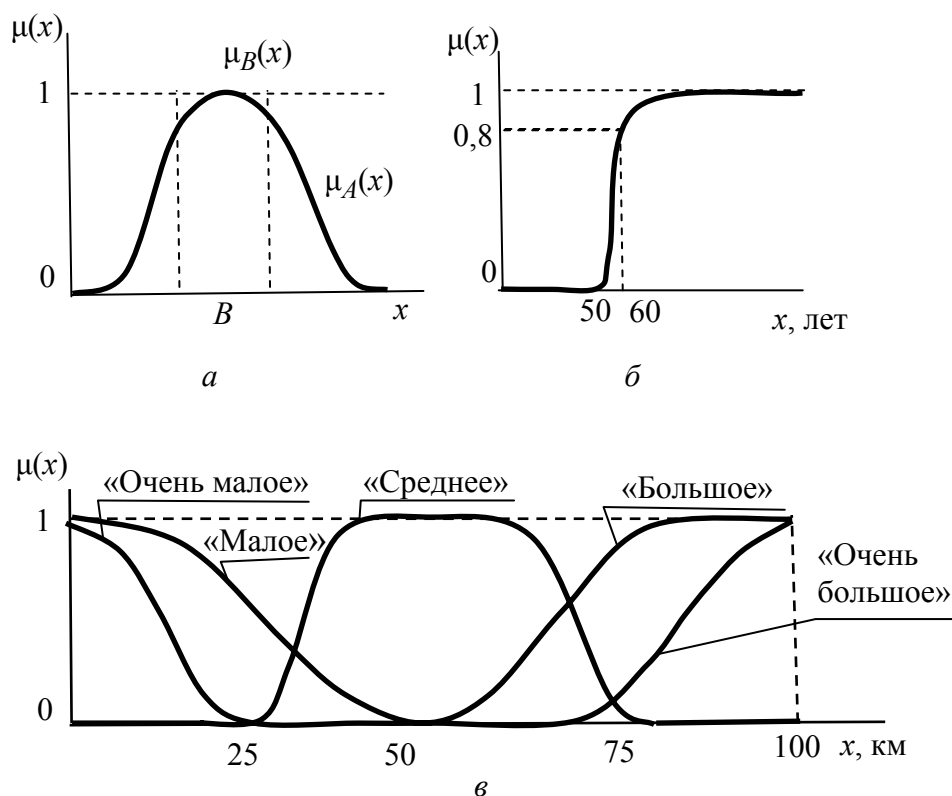


Рис. 3.2. Лингвистические переменные

При первом знакомстве с нечеткими множествами обычно возникает недовольство субъективизмом в задании функций принадлежности: «почему так, а не иначе?». Однако в этом и заключается преимущество подхода. Ведь если само понятие субъективно, то такова и его формализация, выполняемая человеком. Получаемые результаты должны носить качественный характер и достаточно слабо зависеть от конкретного задания функций принадлежности. С другой стороны, если есть необходимость в более объективных выводах, можно получить оценки  $\mu_A(x)$  на основе опроса экспертов.

Для нечетких множеств вводятся операции пересечения, объединения, дополнения, концентрации, размывания (табл. 3.4). Первые три являются обобщениями обычных операций; оставшиеся – специфичны для нечетких

множеств. Операции позволяют конструировать сложные понятия из простых: «очень много», «не старый и не молодой» и т. п.

По аналогии с четким случаем определяется отношение включения множеств:  $A \subset B$ , если и только если  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$  для всех  $x \in X$ .

Таблица 3.4

**Операции над нечеткими множествами**

Операция	Лингвистический смысл	Формула для $\mu_C(x)$
Пересечение $C = A \cap B$	И	$\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Объединение $C = A \cup B$	ИЛИ	$\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Дополнение $C = \bar{A}$	НЕ	$1 - \mu_A(x)$
Концентрация	ОЧЕНЬ	$ \mu_A(x) ^2$
Размывание	НЕ ОЧЕНЬ	$\sqrt{\mu_A(x)}$

**Нечеткие системы.** Аналогично классическому случаю понятие нечеткой системы вводится через понятие нечеткого отношения (частными случаями которого являются понятия «нечеткое отображение», «нечеткая функция»).

*Определение.* Нечеткое отношение  $R$  на множествах  $X, Y$  задается функцией  $\mu_R : X \times Y \rightarrow [0, 1]$ , каждое значение которой  $\mu_R(x, y)$  интерпретируется как степень нахождения (совместимости, принадлежности) пары  $(x, y)$  в данном отношении.

Таким образом, нечеткое отношение – это нечеткое подмножество множества  $X \times Y$  всех пар  $(x, y)$ , где  $x \in X, y \in Y$ . Поэтому стандартным способом вводятся пересечение, объединение, дополнение и другие действия над отношениями. Включение отношений  $R \subset S$  ( $\mu_R(x, y) \leq \mu_S(x, y)$ ) интерпретируется как «из  $R$  следует  $S$ ».

Важную роль в теории нечетких систем играет отношение композиции  $R \circ S$ . Если даны отношение  $R$  на множествах  $X, Y$  и отношение  $S$  на множествах  $Y, Z$ , то функция принадлежности отношения  $R \circ S$  на множествах  $X, Z$  задается формулой

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \max_{y \in Y} (\min\{\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)\}). \quad (3.21)$$

Можно проверить, что (3.21) выполняется для обычных четких отношений.

В полной аналогии с обычными системами, нечеткая система – это нечеткое отношение между множествами  $U$ ,  $Y$ , где  $U$  – множество входных функций времени  $u(t)$ , а  $Y$  – множество выходных функций времени  $y(t)$ . Операция композиции отношений соответствует последовательному соединению систем. Подчеркнем, что для нечетких систем понятие однозначности, детерминированности, теряет смысл: нечеткое отображение и нечеткое отношение неразличимы.

Если множества значений входов и выходов системы конечны, то ММ системы можно задать таблицами либо набором правил (продукций), например: «ЕСЛИ  $(u = u_i)$  И  $(x = x_j)$  ТО  $(y = y_k)$ », или в более компактном виде:

$$(u = u_i, x = x_j) \rightarrow y = y_k. \quad (3.22)$$

Форма (3.22) удобна для представления в компьютере и придает описанию системы вид набора причинно-следственных связей. При этом фактическая причинно-следственная связь может отсутствовать (пример: ЕСЛИ «тебе за сорок» И «с утра у тебя ничего не болит», ТО «ты умер»). Аналогично обстоит дело и для нечетких систем, входные и выходные переменные которых могут принимать нечеткие значения, т. е. являются лингвистическими. Примеры нечетких правил:

$$(u = \text{«малое»}) \rightarrow (y = \text{«большое»}),$$

$$(u(t) = \text{«около 0.5»}, x(t-1) = \text{«большое»}) \rightarrow (x(t) = \text{«очень большое»}).$$

Пример. Рассмотрим систему простейшего прогноза погоды в городе, основанную на том наблюдении, что погода чаще сохраняется, чем меняется: погода завтра будет, скорее всего, такая же, как сегодня. Для простоты пусть множество входов системы (возможных значений переменной «погода сегодня») состоит из трех элементов: «ясно» (Я), «пасмурно» (П), «дождь» (Д), т. е.  $U = \{Я, П, Д\}$ . Таким же пусть будет и множество выходов (прогнозы на завтра).  $Y = \{Я, П, Д\}$ .

Если описать ММ простейшего прогноза как четкую, то ее можно представить таблицей:

U	Y		
	Я	П	Д
Я	1	0	0
П	0	1	0
Д	0	0	1

или, более экономно, набором правил:

$$(u = Я) \rightarrow (y = Я); (u = П) \rightarrow (y = П); (u = Д) \rightarrow (y = Д).$$

Однако прогноз погоды – дело ненадежное и субъективное, поэтому более адекватной является нечеткая ММ, в которой отношение между входами и выходами системы  $R_0$  задается таблицей значений функции принадлежности:

U	Y		
	Я	П	Д
Я	0.8	0.4	0.3
П	0.4	0.8	0.4
Д	0.3	0.4	0.8

Можно использовать и нечеткие правила (продукции), например:

$$(u = Я) \rightarrow (y = Я | 0.8 \text{ или } П | 0.4 \text{ или } Д | 0.3).$$

Пусть теперь входная переменная  $\omega_0$  («погода сегодня») приняла некоторое значение. Оно, естественно, должно быть нечетким (ведь нет четкой границы между значениями «ясно» и «пасмурно», да и дождь может идти не по всему городу) и определяться, например, по сообщениям экспертов. Пусть в результате усреднения мнений группы экспертов  $\omega_0$  задается как

x	Я	П	Д
$\mu_{\omega_0}(x)$	0.4	0.5	0.1

Как узнать прогноз на завтра? Вспомним, что множество – частный случай отношения, и представим его как отношение  $W_0$  с фиктивным одноэлементным множеством входов и нечетким множеством выходов. Теперь легко понять, что значение переменной «погода завтра» ( $\omega_1$ ) определится с помощью соответствующего отношения  $W_1$  по формуле композиции отношений (3.21).

Таким образом,  $W_1 = R_0 \circ W_0$  и, значит, например,

$$\mu_{\omega_1}(Я) = \max\{\min\{0.1, 0.3\}, \min\{0.1, 0.3\}, \min\{0.1, 0.3\}\} = \max\{0.1, 0.4, 0.4\}.$$

Итоговая таблица прогноза на завтра имеет вид

y	Я	П	Д
$\mu_{\omega_1}(y)$	0.4	0.5	0.4

Полученный результат можно снова подать на вход системы прогноза и получить новый результат – прогноз на послезавтра:

$$W_2 = R \circ W_1 = (R \circ R) \circ W_0.$$



Правило вывода, соответствующее композиции нечетких отношений, называется композиционным правилом вывода и составляет основу нечеткой логики. В нечеткой логике значения истинности предложений лежат от нуля до единицы; закон исключенного третьего не выполняется.

Приведенный пример обнаруживает глубокую аналогию между понятиями «система» и «логическое исчисление» (аксиоматической или дедуктивной системы [6]). Значение входа системы соответствует в исчислении аксиомам и фактам (утверждениям), а отношение «вход–выход» (ММ системы) – набору правил (продукций, импликаций) исчисления. Вычисление значения выхода системы  $B$  по значению ее входа  $A$  соответствует шагу логического вывода по правилу

$$(A, A \rightarrow B) \Rightarrow B.$$

Единственное отличие системы от исчисления: на каждом шаге работы системы используется только текущее состояние, а исчисление обрабатывает все утверждения, выведенные ранее. Различие устраняется, если включить в состояние системы всю ее предысторию. Это показывает, что рассмотренные ранее модели систем с конечной памятью пригодны для описания более узкого класса систем, чем логические исчисления. Однако это означает, что анализ моделей, заданных как исчисления, требует больше вычислений, т. е. недостаток обращается в достоинство.

Нечеткие отношения, как и обычные, могут обладать специальными свойствами. Для отношения  $R : X \times X \rightarrow [0, 1]$  рассмотрим свойства:

- рефлексивность:  $R(x, x) = 1$  для всех  $x \in X$ ;
- симметричность:  $R(x, y) = R(y, x)$  для всех  $x, y \in X$ ;
- антисимметричность:  $\min\{R(x, y), R(y, x)\} = 0$  при  $x \neq y$
- транзитивность:  $R(x, z) \geq \min\{R(x, y), R(y, z)\}$  для всех  $x, y, z \in X$ .

Отношение называется отношением сходства, если оно рефлексивно и симметрично. Рефлексивность и антисимметричность характеризуют отношение доминирования. Если к перечисленным свойствам добавляется свойство транзитивности, то отношение сходства называют эквивалентностью, а отношение доминирования – порядком.

**Нечеткие числа.** Рассмотрим свойства и применение нечетких подмножеств числовой оси  $R^1 = (-\infty, +\infty)$  – так называемых нечетких чисел.

Над нечеткими числами можно производить арифметические и иные действия, правила выполнения которых вытекают из правил действий с отношениями и из того, что любую бинарную операцию можно рассматривать как тернарное (3-местное) отношение. Например, функция принадлежности нечеткой суммы  $C = A \oplus B$  нечетких чисел  $A, B$  имеет вид

$$\mu_C(z) = \sup_{x+y=z} \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}. \quad (3.23)$$

Прикладной смысл нечеткого числа – это число, заданное с погрешностью. Для того чтобы работать с такими числами, нужно задавать функции принадлежности и погрешностей, а это невозможно сделать во всех  $x \in R^1$  в силу бесконечности множества  $R^1$ . Один из способов преодоления этой трудности – использование нечетких  $L$ – $R$ -чисел (сокращение от «left–right»). Для этого на промежутке  $[0, \infty)$  задаются две невозрастающие неотрицательные функции  $L(x), R(x)$ , обладающие свойствами  $L(0) = R(0) = 1$ . После этого функцию принадлежности нечеткого числа  $A$  определяют в виде

$$\mu_A = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right), & x \leq \alpha; \\ R\left(\frac{x-a}{\beta}\right), & x > \beta, \end{cases}$$

где  $a$  – вещественное число, называемое средним значением (употребляют также термины «центр», «мода») нечеткого числа;  $\alpha > 0, \beta > 0$  – левый и правый коэффициенты нечеткости. Если  $L(x) = R(x), \alpha = \beta$ , то нечеткое число называют симметричным.

Поскольку функции  $L(x), R(x)$  задаются заранее и не меняются, для выполнения действий с  $L$ – $R$ -числами достаточно помнить лишь тройку  $A = \{a, \alpha, \beta\}$ . Правила арифметики  $L$ – $R$ -чисел вытекают из общих правил арифметики нечетких чисел (см. например, (3.23)) и напоминают правила распространения ошибок в приближенных вычислениях. Если  $A = \{a, \alpha, \beta\}, B = \{b, \chi, \delta\}$ , то

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \{a + b, \alpha + \chi, \beta + \delta\}; \\ A \ominus B &= \{a - b, \alpha + \chi, \beta + \delta\}; \\ A \otimes B &= \{ab, a\chi + \beta\alpha + \alpha\chi, a\delta + b\beta + \beta\delta\}, \quad (a, b > 0). \end{aligned}$$

Если  $B$  – «четкое» число ( $\chi = \delta = 0$ ), то  $A \otimes B = \{ab, \alpha|b|, \beta|b|\}$ .

Другой способ работы с нечеткими числами состоит в том, что числовая ось (отрезок) дискретизируется, т. е. разбивается на несколько участков. После этого каждый участок описывается некоторой функцией принадлежности, и числовые переменные превращаются в лингвистические. Такой способ эффективен при построении моделей сложных систем со значительной неопределенностью исходных данных, а следовательно, и результатов. Число градаций (участков дискретизации) должно быть невелико, в пределах  $5 \pm 2$  градации.

Продемонстрируем на простом примере разницу между стохастическим и нечетким подходами. Пусть сделано несколько измерений  $x_1, \dots, x_n$  некоторой неизвестной величины  $a$  с погрешностью, не превосходящей величины  $a$ . Требуется оценить значение  $a$  и определить погрешность оценки.

Предположим, что в качестве оценки выбрано среднее арифметическое  $x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ . При стохастическом подходе предполагается, что  $x_i$  случайны и независимы,  $Mx_i = a$ , и, поскольку погрешность может быть произвольным числом из  $[-\alpha, \alpha]$ , можно считать, что  $x_i$  равномерно распределены на  $[a - \alpha, a + \alpha]$ . Отсюда:  $Dx_i = (2\alpha^2)/12 = \alpha^2/3$ .

В силу независимости  $Dx = (1/n)Dx_i = \alpha^2/3n$  и по формуле (3.20) из центральной предельной теоремы получим, что

$$|\bar{x} - a| \leq 2\alpha/\sqrt{3n} \quad (3.24)$$

с вероятностью 0.95. Аналогичный вывод справедлив и при неизвестном  $\alpha$ .

В этом случае нужно заменить в (3.24)  $\alpha$  на  $\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{3}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ .

Примем теперь нечеткую модель измерений. Естественно представить измерение как нечеткое  $L$ – $R$ -число  $X_i = \{a, \alpha, \alpha\}$  с характеристикой

$$\begin{cases} L(x) = R(x) = 1, 0 \leq x \leq 1 \\ L(x) = R(x) = 0, x > 1. \end{cases}$$

Тогда  $\sum X_i = \{na, n\alpha, n\alpha\}$ , откуда  $\bar{X} = \{a, \alpha, \alpha\}$ , т. е. погрешность оценки определится неравенством

$$|\bar{x} - a| \leq \alpha. \quad (3.25)$$

Сравнивая (3.24) и (3.25), можно заметить, что интервал (3.24) меньше примерно в  $\sqrt{n}$  раз. Это получено за счет эффекта усреднения. Если же нет уверенности в том, что погрешности ведут себя нерегулярно и уничтожаются при усреднении, то доверять (3.24) нельзя и следует вернуться к оценке (3.25). Однако за нечетким подходом остаются дополнительные возможности. Например, имея информацию о том, что малые значения погрешностей встречаются чаще, чем большие, можно иначе выбрать функции  $L(x), R(x)$ . Соответственно меняется функция принадлежности  $\bar{X}$  и (3.25) уточняется.

Кроме того, если  $n$  мало, например  $n = 10$ , то проверить правомерность усреднения практически невозможно. В результате оценка погрешности при  $n = 10$  по (3.24) получается всего в 2.7 раза меньше, чем по (3.25), причем она верна лишь в 95 % случаев и при труднопроверяемых предположениях.

Следует отметить, что выбор  $\bar{x}$  в качестве оценки не единственно возможный. В духе нечеткой теории можно взять «лингвистическую» оценку:  $\bar{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ . Поскольку  $\mu_{\bar{x}}(x) = \min_i \mu_{X_i}(x)$ , для симметричных  $L$ – $R$ -чисел при строго убывающей  $R(x) > 0$  получим  $\bar{x} = (\max x_i + \min x_i)$ .

Следует заметить также, что кроме описанных в (3.23) вариантов действий с нечеткими множествами имеется еще несколько, среди которых наиболее употребителен способ, заимствованный из теории вероятностей:

$$\begin{aligned}\mu_{A \cap B}(x) &= \mu_A(x) \cdot \mu_B(x); \\ \mu_{A \cup B}(x) &= \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x).\end{aligned}\tag{3.26}$$

Операции, определенные в (3.26), называют иногда произведением и суммой нечетких множеств.

### 3.5. Хаотические модели

Сравнительно недавно, в 70-х гг. XX в., в науку о математических моделях вошло новое понятие, перевернувшее многие привычные представления, – понятие хаоса (точнее, детерминированного хаоса). Хаотические системы предоставили исследователям новый класс моделей неопределенности, отличающихся по своим свойствам как от стохастических, так и от нечетких моделей. Если в детерминированной модели будущую траекторию можно предсказать на сколь угодно большое время вперед, зная текущее состояние системы, а в стохастической модели точный прогноз, вообще

говоря, невозможен даже на сколь угодно малое время, то в хаотической модели ошибка прогноза растет экспоненциально и, следовательно, возможен прогноз на ограниченное время вперед, определяемое допустимой ошибкой прогноза. Процессы в хаотических моделях имеют вид нерегулярных колебаний, в которых меняются, «плавают», как частота, так и амплитуда.

Колебательные процессы часто встречаются в природе и технике, поэтому формы их описания непрерывно развиваются и совершенствуются. В течение многих лет, до начала XX в. основным видом математических моделей колебаний в механических, электрических и других системах считались дифференциальные уравнения, например

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0, 0 \leq t \leq \infty. \quad (3.27)$$

Решениями (3.27) являются гармонические колебания

$$y(t) = A_0 \sin \omega t + A_1 \cos \omega t \quad (3.28)$$

с круговой частотой  $\omega$  и периодом  $T = 2\pi/\omega$ , амплитуда которых зависит от начальных условий:  $A_1 = y(0)$ ,  $A_0 = \dot{y}(0)/\omega$  (рис. 3.3, а, для  $\omega=1$ ). Очевидно, что решение (3.28) непрерывно зависит от начальных условий, т. е. малое изменение величин  $y(0)$ ,  $\dot{y}(0)$  приводит к равномерно малому изменению решения  $y(t)$  на всей временной полуоси  $0 \leq t \leq \infty$ . Частотный спектр функции (3.28) дискретен и состоит из одной точки  $\omega/2\pi$  (рис. 3.3, б).

Для описания колебаний более сложной формы можно соединять модели вида (3.27) с различными частотами колебаний  $\omega_1, \dots, \omega_r$ . Например, последовательное соединение двух моделей вида (3.27) описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) &= 0; \\ \ddot{y}_2(t) + \omega_2^2 y_2(t) &= y_1(t) \end{aligned}$$

и имеет частные решения вида  $y_2(t) = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$ , где коэффициенты  $A_1, A_2$  зависят от начальных условий. Если частоты  $\omega_1, \dots, \omega_r$  соизмеримы (являются целыми кратными некоторой частоты  $\omega_0$ ), то колебания будут периодическими с периодом  $2\pi/\omega$  (рис. 3.4 для  $r=3$ ,  $\omega_1=1$ ,  $\omega_2=2$ ,  $\omega_3=4$ ). Если же частоты  $\omega_i$  несоизмеримы, то такие колебания не являются периодическими; они относятся к классу квазипериодических (рис. 3.5, где  $r=2$ ,  $\omega_1=1$ ,  $\omega_2=5/\pi$ ).

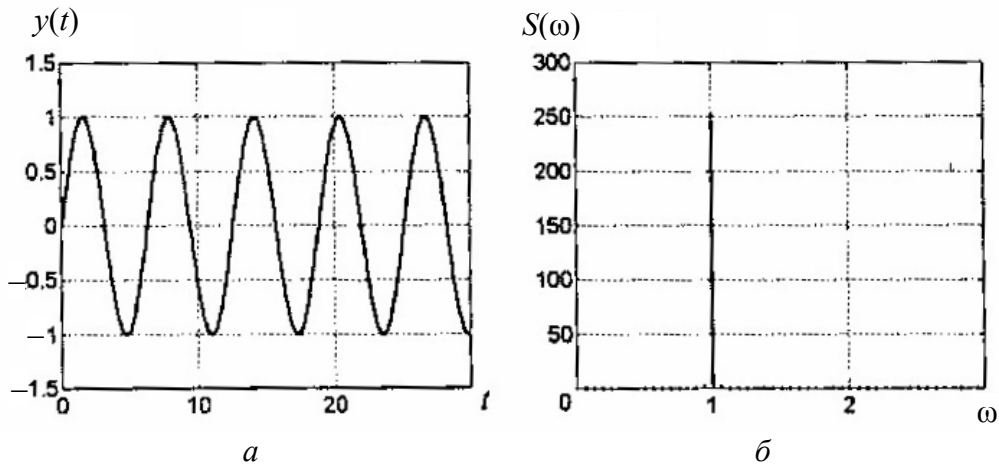


Рис. 3.3. Гармонические колебания

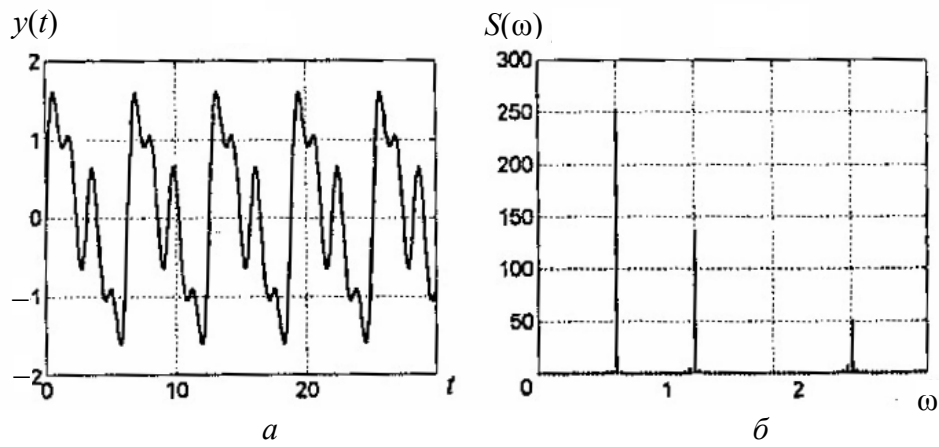


Рис. 3.4. Периодические колебания

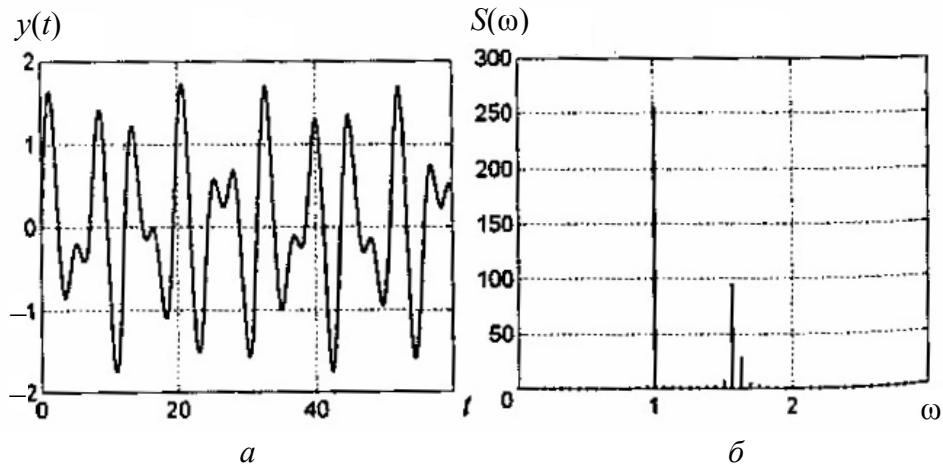


Рис. 3.5. Квазипериодические колебания

В обоих случаях решение непрерывно зависит от начальных условий, а его спектр является дискретным конечным множеством.

Можно заметить, что «на глаз» различить периодические и квазипериодические колебания иногда затруднительно, поскольку реальные измерения

(в том числе измерение частоты колебаний) выполняются с конечной точностью и отличить рациональное отношение частот от иррационального оказывается практически невозможным.

На рубеже XIX–XX вв. выяснилось, что линейных моделей колебаний недостаточно для описания новых явлений и процессов в физике и технике. Основы соответствующего математического аппарата – теории нелинейных колебаний – были заложены в работах А. Пуанкаре, Н. М. Крылова, А. А. Андропова, Б. Ван дер Поля и Н. Н. Боголюбова [7]. Важнейшим в этой теории является понятие устойчивого предельного цикла – периодической траектории, к которой сходятся все другие траектории (по крайней мере, траектории с близкими начальными условиями). К числу классических примеров нелинейных дифференциальных моделей, обладающих предельным циклом, относятся уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{y} + \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (3.29)$$

где  $\varepsilon > 0$ ; уравнение Дуффинга

$$\ddot{y} + p\dot{y} - qy + q_0y^3 = 0, \quad (3.30)$$

где  $p > 0$ ,  $q > 0$ ,  $q_0 > 0$ ; система с релейным элементом

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy - \text{sign}(y) = 0. \quad (3.31)$$

Даже простые нелинейные модели позволяют описывать колебания сложной формы, например релаксационные (близкие к прямоугольным) колебания, и т. д. Теоремы о разложении периодической функции в ряд Фурье показывают, что спектр предельного цикла состоит из счетного набора частот, кратных некоторой основной частоте.

На рис. 3.6, а приведен график решения системы (3.29) при  $\varepsilon = 2.5$ ,  $\omega = 1$  и начальных условиях  $y(0) = 0.5$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ . Соответствующий спектр изображен на рис. 3.6, б.

В течение нескольких десятилетий линейные модели колебаний и нелинейные модели с предельными циклами удовлетворяли потребности инженеров. Считалось, что они описывают все возможные типы колебаний детерминированных систем. Это убеждение поддерживалось и математическими результатами: например, известная теорема Пуанкаре–Бендиксона [7] утверждает, что единственно возможные виды ограниченных установившихся движений в непрерывных системах второго порядка – это либо состояние равновесия, либо предельный цикл.

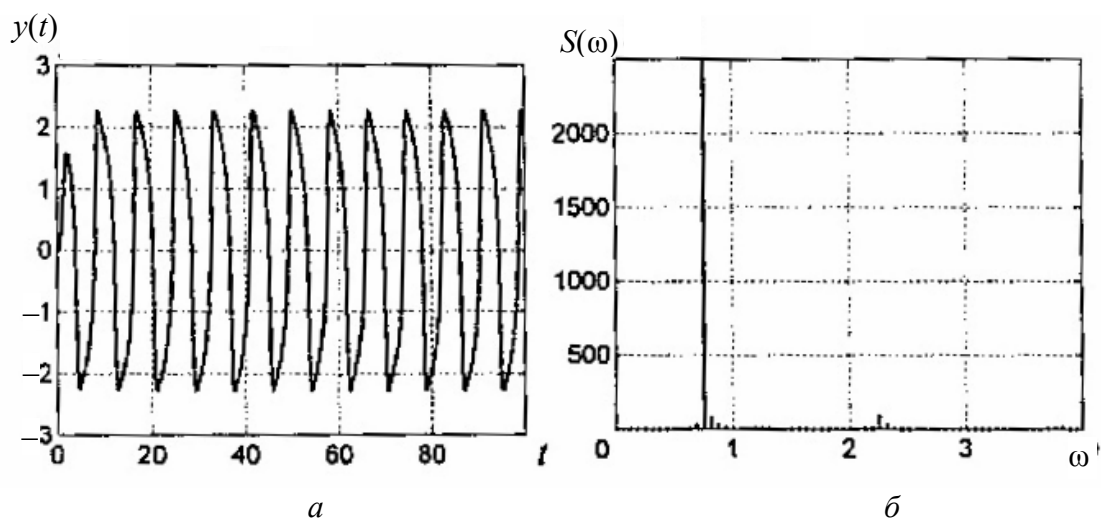


Рис. 3.6. Предельный цикл и его спектр

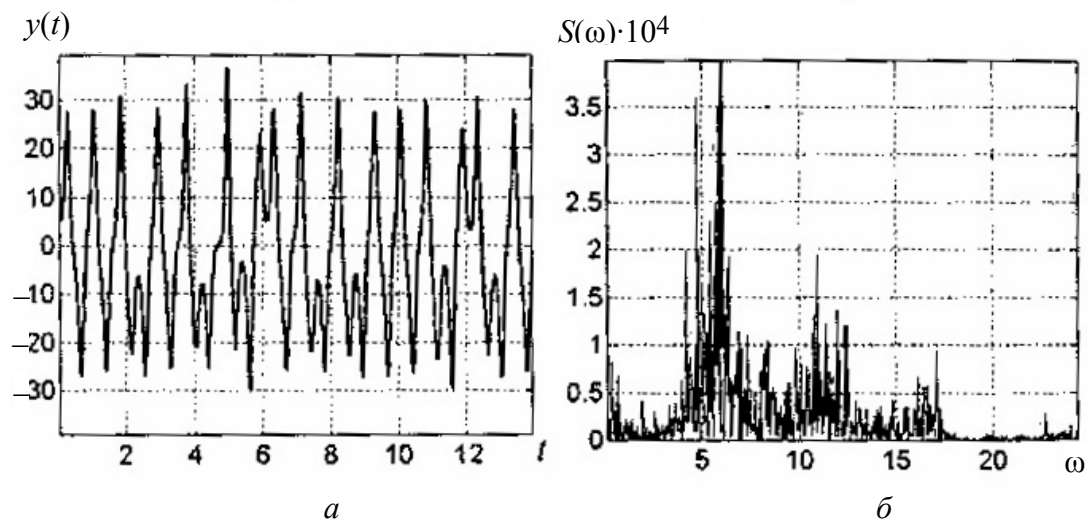


Рис. 3.7. Хаотический процесс в системе Лоренца и его спектр

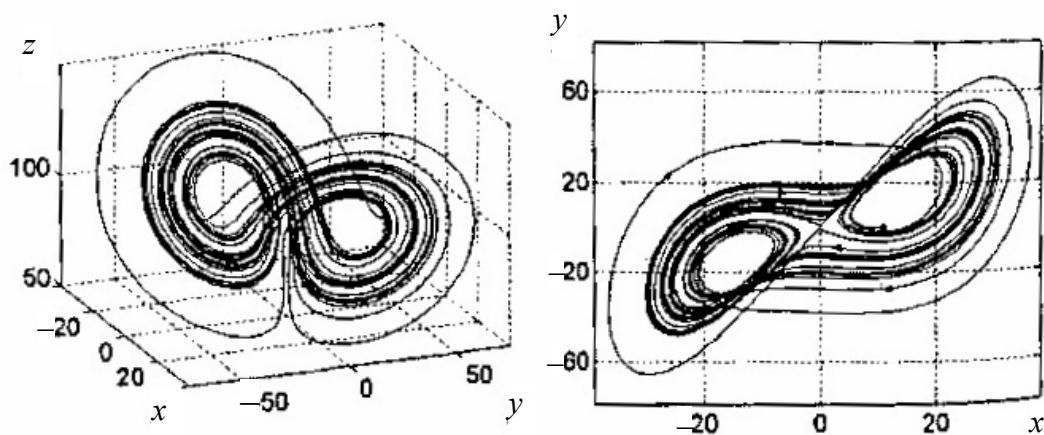


Рис. 3.8. Хаотический аттрактор в системе Лоренца



Однако в середине XX в. математики обнаружили, что уже для систем третьего порядка это не так: в системе становятся возможными весьма сложные движения – ограниченные непериодические колебания. Настоящий переворот начался с работы физика Е. Лоренца [1], опубликованной в 1963 г., где было показано, что качественный характер явлений атмосферной турбулентности, описываемых сложными уравнениями в частных производных Навье–Стокса, может быть передан простой нелинейной моделью третьего порядка (уравнение Лоренца):

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x); \\ \dot{y} = rx - y - xz; \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \quad (3.32)$$

Решения системы (3.32) при некоторых значениях параметров (например, при  $\sigma = 10$ ,  $r = 97$ ,  $b = 8/3$  выглядят как нерегулярные колебания (рис. 3.7, а). Траектории в пространстве состояний (фазовом пространстве) могут приближаться к предельному множеству (аттрактору), имеющему весьма причудливое строение (рис. 3.8).

Такое множество впоследствии получило название «странного аттрактора», а для обозначения подобных нерегулярных явлений в детерминированных системах был введен термин «хаос». В дальнейшем хаотическое поведение было обнаружено в огромном количестве систем в механике, лазерной физике и радиофизике, химии, биологии и медицине, в электронных цепях и т. д. Разработанные новые методы аналитического и численного исследования систем показали, что хаос – это отнюдь не исключительный вид поведения нелинейной системы. Грубо говоря, хаотические движения возникают, когда траектории системы глобально ограничены и локально неустойчивы.

В хаотической системе сколь угодно малое начальное расхождение траекторий не остается малым, а в течение некоторого времени растет экспоненциально. Частотный спектр хаотической траектории является непрерывным (рис. 3.7, б). Во многих случаях подобные нерегулярные, непериодические колебания лучше отражают свойства процессов, протекающих в реальных системах. Также следует отметить, что «на глаз» отличить хаотический процесс от квазипериодического может быть не менее трудно, чем отличить квазипериодический процесс от периодического.

**Определение хаотической системы.** Терминология в области хаотических моделей еще не устоялась, и существует несколько различных определений хаотических систем. Приведем одно из простейших.

Рассмотрим динамическую систему в непрерывном времени:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}), \quad (3.33)$$

где  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in R^n$  – вектор состояния системы,  $0 \leq t < \infty$ .

**Определение.** Замкнутое множество  $\Omega \subset R^n$  называется аттрактором системы (3.33), если: а) существует такое открытое множество  $\Omega_0 \subset \Omega$ , что все траектории  $\mathbf{x}(t)$  системы (3.33), начинающиеся в  $\Omega_0$ , определены при всех  $t \geq 0$  и стремятся к  $\Omega$  при  $t \rightarrow \infty$ ; б) никакое собственное подмножество  $\Omega$  этим свойством не обладает.

**Определение.** Аттрактор называется странным, если он ограничен и любая траектория, начинающаяся на нем, неустойчива по Ляпунову.

**Определение.** Система называется хаотической, если у нее существует хотя бы один странный аттрактор.

Аналогичные определения даются для систем, дискретных по времени:

$$\mathbf{x}_{k+1} = F(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

Неустойчивость по Ляпунову характеризует основное свойство хаотических колебаний, называемое «сверхчувствительностью», или «чувствительной зависимостью» от начальных условий: любые две сколь угодно близкие траектории обязательно удаляются друг от друга на конечное расстояние.

Имеются и другие определения странных аттракторов и хаоса. Например, часто в определение странного аттрактора включают дополнительные требования: существование траекторий (или семейства периодических траекторий), всюду плотных в  $\Omega$ , топологическую транзитивность и т. д. Недавние результаты Г. А. Леонова [7] показывают, что вместо отсутствия устойчивости по Ляпунову при определении странного аттрактора целесообразно требовать отсутствия так называемой устойчивости по Жуковскому, допускающей разную скорость течения времени на разных траекториях системы. Однако строго доказать хаотичность системы непросто, даже пользуясь простейшим определением. Для некоторых общепризнанных хаотических систем (например, для системы Лоренца (3.32)) доказательства хаотичности весьма громоздки, хотя численных и экспериментальных подтверждений накоплено предостаточно. Поэтому основным методом изучения хаотических систем остается численное

исследование – имитационное моделирование и оценка различных характеристик. Приведем несколько примеров хаотических систем.

Пример. Около 15 лет назад специалисты по электронным цепям Л. Чуа и Т. Мацумото предложили простую электронную цепь с одним нелинейным элементом, способную генерировать весьма разнообразные, в том числе хаотические, колебания. Электрическая схема цепи Чуа представлена на рис. 3.9, а. Эта цепь содержит нелинейный резистор  $R_H$  (диод Чуа), вольт-амперная характеристика которого отражена на рисунке 3.9, б. Нетрудно убедиться, что уравнения Кирхгофа для этой цепи имеют вид

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \frac{1}{C_1} \left( \frac{u_2 - u_1}{R} - i_R(u_1) \right); \\ \frac{du_2}{dt} = \frac{1}{C_2} \left( \frac{u_1 - u_2}{R} + i_3 \right); \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{1}{L} (u_2 + R_0 i_3). \end{cases}$$

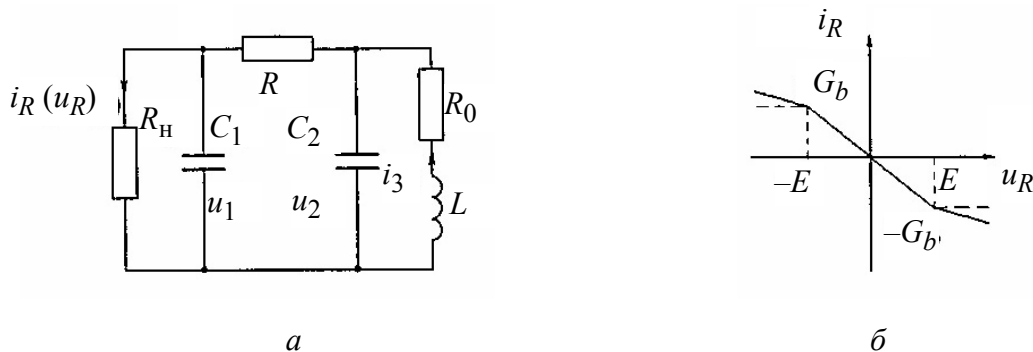


Рис. 3.9. Электрическая схема Чуа и характеристика нелинейного резистора

Пренебрегая активным сопротивлением катушки индуктивности и переходя к безразмерным величинам, получим ММ цепи Чуа в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = p(y - f(x)); \\ \dot{y} = x - y + z; \\ \dot{z} = -qy, \end{cases} \quad (3.35)$$

где  $x, y, z$  – безразмерные переменные, пропорциональные напряжениям на емкостях и току через индуктивность;  $f(x) = 0.5(M_1 - M_0)(|x + 1| - |x - 1|) + M_1 x$ . При  $p = 9$ ,  $q = 14.3$ ,  $M_1 = 6/7$ ,  $M_0 = 5/7$  траектории системы (3.35) демонстрируют хаотическое поведение (рис. 3.10, 3.11).

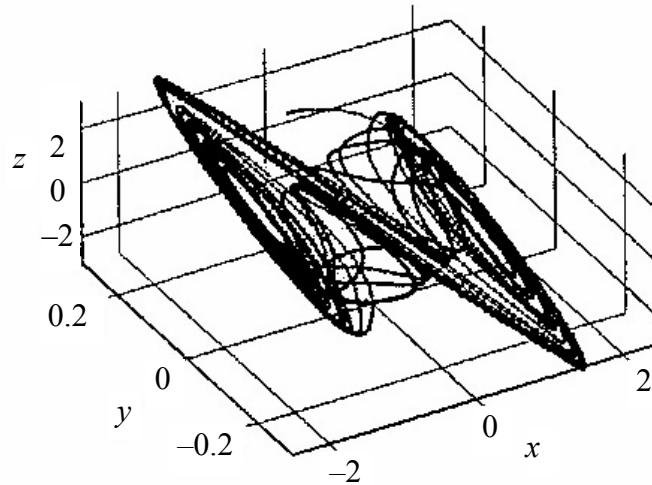


Рис. 3.10. Аттрактор системы Чуа

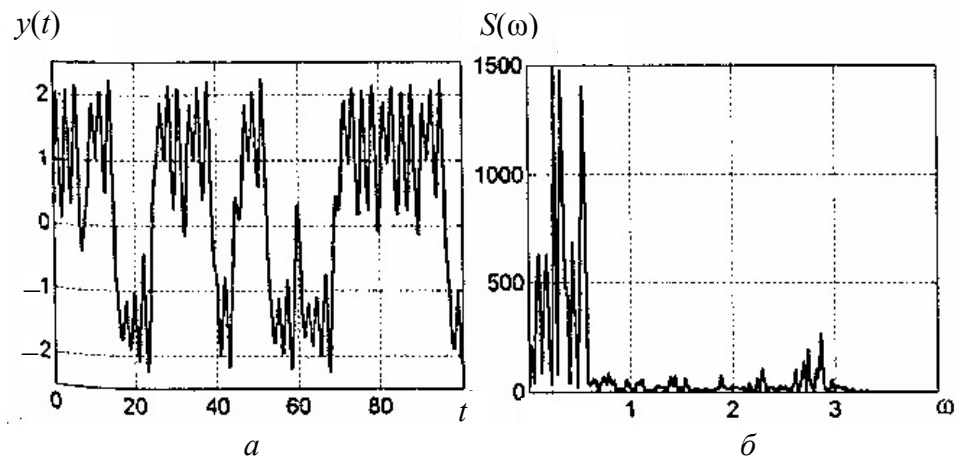


Рис. 3.11. Хаотический процесс в системе Чуа и его спектр

Пример. Разнообразные хаотические колебания можно генерировать, подавая гармонический сигнал на вход нелинейных осцилляторов, например заменяя ноль в правых частях уравнений (3.29)–(3.31) синусоидальной функцией

$$z(t) = A \sin(\omega_0 t). \quad (3.36)$$

При некоторых значениях частоты и амплитуды возбуждения происходит «размазывание» предельного цикла и колебания в нелинейной системе становятся хаотическими. На рис. 3.12, 3.13 представлены колебания, возникающие при подаче на систему Дуффинга (3.30) воздействия (3.36) с параметрами:  $p = 0.4$ ,  $q = -1.1$ ,  $q_0 = 1$ ,  $A = 1.8$ ,  $\omega_0 = 1.8$  (на рис. 3.12, *a* изображен график процесса  $y(t)$ , на рис. 3.12, *б* – спектр  $y(t)$ , на рис. 3.13, *a* – фазовый портрет на плоскости  $(y, \dot{y})$ , на рис. 3.13, *б* – соответствующая интегральная кривая). Для дискретного времени примеры хаотических систем существуют для любой размерности состояния системы, даже при  $n = 1$ .

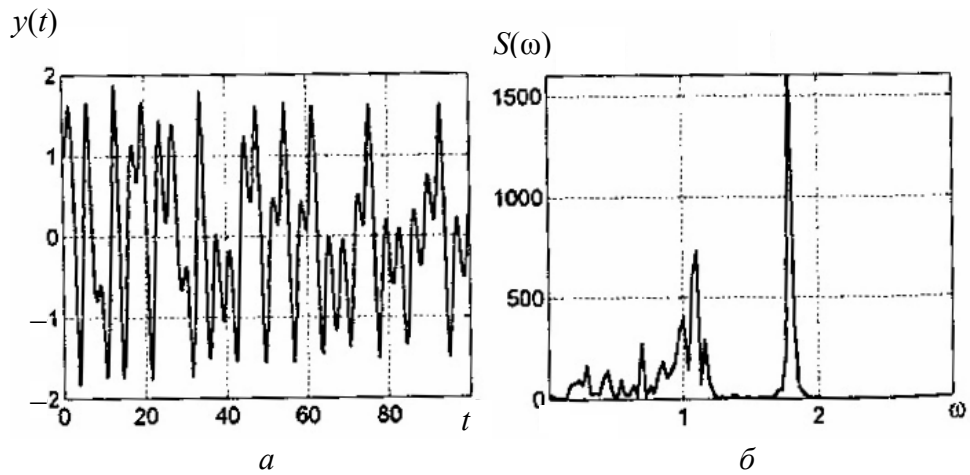


Рис. 3.12. Процесс в системе Дуффинга при гармоническом воздействии и его спектр

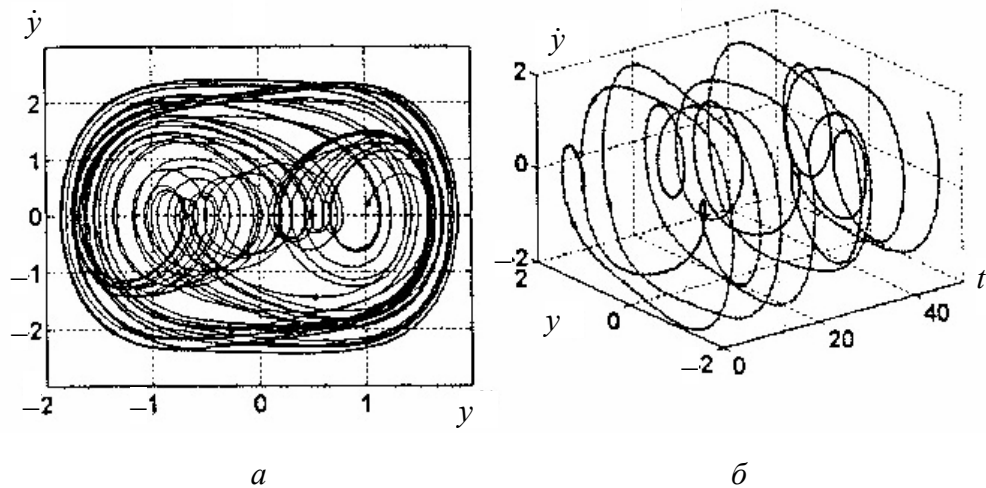


Рис. 3.13. Фазовый портрет и интегральная кривая решения уравнения Дуффинга при гармоническом воздействии

Пример. Дискретная система с квадратичной правой частью

$$x_{k+1} = \lambda x_k (1 - x_k), \quad x_k \in R^1, \quad (3.37)$$

построенная с помощью так называемого логистического отображения  $F(x) = \lambda x(1 - x)$ , является хаотической [8] при  $3.57 < \lambda < 4$ . Ее аттрактор представляет собой отрезок  $[0, 1]$ .

Пример. Система

$$x_{k+1} = \{Mx_k\}, \quad (3.38)$$

где через  $\{A\}$  обозначается дробная часть вещественного числа  $A$ , является хаотической при любом  $M > 1$ . Система (3.38) часто используется для генерации псевдослучайных чисел, возможно первого практического применения

хаоса. Это применение основано на том, что при любом начальном условии  $x_0$ , несоизмеримом с  $M$ , доля точек последовательности (3.38), попавших в некоторый интервал, лежащий в отрезке  $[0, 1]$ , пропорциональна длине этого интервала. Таким образом, если частоту попадания точек в интервал считать оценкой некоторой вероятности, то совокупность таких вероятностей будет задавать равномерное распределение на  $[0, 1]$ .

**Критерии хаотичности.** Как уже было сказано, основным критерием хаотичности является локальная неустойчивость, т. е. разбегание близких вначале траекторий. Соответственно, основной характеристикой хаотичности является скорость разбегания, определяемая так называемым старшим показателем Ляпунова. Показатели Ляпунова определяются для заданной «опорной» траектории  $\bar{x}(t)$  системы (3.33) с начальным условием  $\bar{x}(0) = x_0$ . Для этого составляется уравнение в вариациях (система, линеаризованная вблизи  $\bar{x}(t)$ )

$$\frac{d}{dt} \delta x = W(t) \delta x, \quad (3.39)$$

где  $\delta x = x - \bar{x}(t)$ ;  $W(t) = \partial F(x(t)) / \partial x$  – матрица Якоби системы (3.33) (матрица частных производных от правых частей), вычисленная вдоль решения  $\bar{x}(t)$ . Предполагается, что частные производные от  $F(x)$  существуют, т. е. правые части (3.33) – гладкие функции. Задав начальное отклонение  $z = \delta x(0)$ , можно вычислить величину

$$\alpha(x_0, z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(t)\|}{\|z\|}, \quad (3.40)$$

характеризующую скорость экспоненциального роста решений (3.39) в направлении  $z$  и называемую характеристическим показателем (ляпуновской экспонентой) в направлении  $z$ .

Еще А. М. Ляпунов показал, что при небольших дополнительных предположениях предел в (3.40) существует, конечен для любого  $z \in R^n$  и не зависит от начального выбора точки  $x_0$  на траектории  $x(t)$ . Более того, число различных характеристических показателей конечно, их можно пронумеровать в порядке убывания  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$  и существует базис  $z_i \in R^n$ ,  $i = 1, \dots, n$ , для которого  $\alpha(x_0, z_i) = \alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Наиболее важен старший ляпуновский показатель  $\alpha_1$ . Если  $\alpha_1 > 0$  вдоль ограниченного решения  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ , плотного в аттракторе  $\Omega$ , то это решение неустойчиво по Ляпунову, а аттрактор является странным. При этом величина  $\alpha_1$  характеризует степень неустойчивости, или, другими словами, показатель экспоненциальной чувствительности к начальным данным. Для линейной системы с постоянной матрицей  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  и нулевого опорного решения  $\bar{\mathbf{x}}(t) = 0$ , очевидно  $\alpha_1 = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A)$ , т. е.  $|\alpha_1|$  совпадает с обычной степенью устойчивости (или неустойчивости) системы.

Старший показатель  $\alpha_1$  может быть приближенно вычислен и без построения фундаментальных решений уравнений в вариациях:

$$\alpha_1 = \frac{1}{t} \ln \frac{\|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)\|}{\varepsilon}, \quad (3.41)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  – решение (3.33) с начальным условием  $\mathbf{x}(0)$ ,  $\|\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}(0)\| = \varepsilon$ , причем  $t$  – достаточно велико;  $\varepsilon > 0$  – достаточно мало. Для повышения точности расчета можно вычислять среднее правых частей (3.41) при разных начальных условиях  $\mathbf{x}_0$ , взятых на траектории  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ . Тогда  $t$  необязательно брать очень большим [8].

Показатели Ляпунова характеризуют прогнозируемость траекторий системы. Действительно, траектория  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  аппроксимируется через время  $T$  другой траекторией с погрешностью  $\Delta$ , если

$$T \leq \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{\Delta}{\varepsilon}, \quad (3.42)$$

где  $\varepsilon$  – начальная погрешность. Следовательно, хаотическую траекторию можно спрогнозировать с заданной точностью на некоторое время вперед. Это принципиально отличает хаотические системы как модели неопределенности от стохастических систем в которых ошибка прогноза может, вообще говоря, принимать сколь угодно большие значения, даже при сколь угодно малом горизонте (время прогноза).

Другой важной характеристикой хаотической системы является фрактальная размерность аттрактора, характеризующая его «пористость». Она играет важную роль при построении модели системы по экспериментальным данным, так как позволяет оценить размерность пространства состояния модели.

Хаотические модели следует использовать для описания непериодических колебательных процессов с непостоянными, меняющимися характеристиками (например, частотой и фазой). Существующие методы позволяют оценивать эти характеристики по результатам измерений. При этом частота колебаний становится «нечеткой» и уступает место спектру, который является непрерывным. Вводятся новые важные величины: старший ляпуновский показатель (степень неустойчивости), характеризующий скорость разбегания траектории и, следовательно, время прогнозируемости процесса; фрактальная размерность, характеризующая «пористость» клубка траекторий. Важно, что известные хаотические модели имеют небольшое число параметров, а процессы в них обладают малой (несколько единиц) фрактальной размерностью. Это повышает надежность и прогнозирующую силу моделей. Перечислим некоторые из уже известных применений хаотических моделей.

***Описание нерегулярного поведения реальных систем.*** На сегодняшний день известен целый ряд реальных физических устройств и процессов, проявляющих при некоторых условиях хаотическое поведение. Приведем несколько примеров:

- газовые или полупроводниковые лазеры в так называемых много-модовых режимах;
- механические системы, состоящие из нескольких связанных осцилляторов (например, маятников), а также системы с ударами и люфтами [8];
- электронные схемы с активными элементами, например полупроводниковыми приборами с отрицательным дифференциальным сопротивлением (такими как туннельные диоды, диоды Ганна и т. д.) [8];
- химические и физико-химические реакции с нелинейной кинетикой, например так называемая реакция Белоусова–Жаботинского [1];
- временные ряды в экономике и финансах (например, бизнес-циклы, цены на акции, обменные курсы валют). Заметим, что в экономических и финансовых приложениях хаотические модели в последнее время оказываются предпочтительнее традиционных для этих областей стохастических моделей.

Во многих технических системах возникает необходимость использования псевдослучайных чисел и сигналов. В качестве генераторов псевдослучайных чисел можно использовать хаотические системы. Простейший подход к построению хаотических генераторов состоит в том, что берется динамическая



система, описываемая одной из типовых хаотических моделей, и по внешнему виду выбирается траектория, в которой качественный характер колебаний наиболее близок к желаемому. После этого путем подбора параметров моделей устанавливаются желаемые качественные характеристики колебаний (амплитуда, спектр и т. д.). Использование характеристик хаотической динамики позволяет задавать дополнительные свойства шумов и помех при их генерации. Заметим, что «на глаз» квазипериодические колебания с большим числом составляющих гармоник и хаотические колебания бывает трудно различить. В то же время, как и при моделировании нерегулярных процессов, малая размерность и малое число параметров хаотических моделей дают им дополнительные преимущества перед линейными моделями с большим числом гармоник.

**Синхронизация нерегулярных колебаний и управление ими.** Двойственность природы хаотических систем (детерминированные системы с хаотическим поведением) приводит к новым неожиданным их применениям. Например, две хаотические системы можно заставить колебаться синхронно (в одной фазе), если подавать на одну или на обе системы сигнал обратной связи по ошибке рассогласования. Использование этого эффекта, например, в технике связи позволяет применять хаотический несущий сигнал вместо периодического, что в свою очередь дает возможность повысить надежность и скрытность процесса передачи сообщений.

Поясним идею управляемой синхронизации для упрощенного случая, когда ведущая система (эталонный генератор) описывается уравнением (3.33), а ведомая (управляемый генератор) – уравнением

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) + \mathbf{u}(t), \quad (3.43)$$

где  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{u}$  –  $n$ -мерные векторы. Выбирая вектор обратной связи  $\mathbf{u}(t)$  пропорциональным ошибке

$$\mathbf{u}(t) = -K\mathbf{e}(t), \quad (3.44)$$

где  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$  – вектор ошибок;  $K > 0$  – коэффициент усиления, получим уравнение ошибок:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{e}) - K\mathbf{e}, \quad (3.45)$$

в котором  $\mathbf{x}(t)$  – заданная функция времени, являющаяся решением (3.33).

Если матрица Якоби  $A(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$  ограничена в некоторой области  $\Omega$ , содержащей решение системы (3.33), (3.43), (3.44), то легко подобрать такое

$K > 0$ , чтобы собственные числа симметричной матрицы  $A(\mathbf{x}) + A^T(\mathbf{x}) - 2KI_n$  (где  $I_n$  – единичная  $(n \times n)$ -матрица) лежали левее мнимой оси при  $\mathbf{x} \in \Omega$ . При этом, как известно [1], система (3.33), (3.43), (3.44) будет обладать свойством так называемой конвергентности в  $\Omega$ : все ее траектории, лежащие в  $\Omega$ , сходятся при  $t \rightarrow \infty$  к единственному ограниченному решению. Поскольку  $\mathbf{e}(t) \equiv 0$  является решением (3.45) то к нему и сходятся все траектории. Таким образом, решения систем (3.33) и (3.43), (3.44) неограниченно сближаются, что и означает синхронизацию двух систем. При этом поведение каждой из систем может быть хаотическим и оставаться таковым.

Справедлива постановка задачи определения условий синхронизации для более сложных случаев: при неполном измерении (когда измерению доступен лишь вектор выходных координат), при неполном управлении (когда  $\mathbf{u}(t)$  –  $(m)$ -мерный вектор,  $m < n$ , и в (3.43) вместо  $\mathbf{u}(t)$  стоит  $B\mathbf{u}(t)$ , где  $B$  – прямоугольная  $(n \times m)$ -матрица). Задача адаптивной синхронизации возникает тогда, когда часть параметров математических моделей систем неизвестна.

Задача синхронизации в формулировке (3.33), (3.43), (3.44) совпадает с традиционной для теории управления задачей управления с эталонной моделью. В более общей постановке допускается взаимное влияние подсистем, что соответствует описанию подсистем в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \mathbf{y}_1 = h_1(\mathbf{x}); \quad (3.46)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = f_2(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t), \mathbf{y}_2 = h_2(\mathbf{z}) \quad (3.47)$$

и введению модели динамики связи (взаимовлияния)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= W(\mathbf{w}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, t); \\ \mathbf{u} &= U(\mathbf{w}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, t). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Критерий синхронизации может допускать также возможность сдвига фаз между процессами в синхронизируемых подсистемах [9]. Особый интерес представляет синхронизация слабой связью, т. е. когда величина сигнала взаимосвязи  $\mathbf{u}(t)$  предполагается малой.

Отметим, что эффект синхронизации изучается в механике начиная с работы Х. Гюйгенса (1673) и имеет многочисленные применения, например в вибрационной технике [9]. В традиционной для механики постановке задачи синхронизации система связи (3.48) считается заданной, и требуется

найти условия сходимости траекторий системы (3.46)–(3.48) к некоторой периодической траектории [9] или условия достижения иной цели синхронизации, например сходимости к нулю ошибки  $e(t) = x(t) - z(t)$ , т. е. задача является задачей анализа. Ранее рассматривалась задача, где требуется найти подходящую систему связи (3.48), которая описывает регулятор или алгоритм взаимодействия и обеспечивает достижение заданной цели. Такие задачи относятся к классу задач синтеза (управляемой синхронизации). В теории управления, однако, методы их решения разработаны далеко не для всех практически важных случаев. В последние несколько лет наблюдается быстрый рост публикаций по управлению и синхронизации хаотических систем. Теоретические исследования стимулируются потенциальными приложениями в лазерной технике, электронике и связи, в химии и химической технологии, биологии, медицине и других областях.

Синхронизация – это лишь один (хотя и весьма важный) класс задач управления хаотическими колебаниями. Представляют интерес задачи, где целью управления является достижение заданного значения какой-либо характеристики процесса: энергии, энтропии и т. д. В других задачах целью является изменение характера колебаний. Например, хаос может быть нежелательным, и систему требуется стабилизировать вблизи равновесия или вблизи периодической орбиты (в биологии это задачи стабилизации биоритмов, в экономике – повышение прогнозируемости бизнес-циклов). Иногда, наоборот, хаос может оказаться полезным (например, хаотическое перемешивание ускоряет ход химической реакции и повышает качество ее продуктов). В таких случаях цель управления состоит в возбуждении хаотических колебаний с заданными свойствами.

В заключение подчеркнем характерную особенность задач управления колебательными и в том числе хаотическими процессами – большое число колебаний за время процесса управления в системе. Значит, энергию управления за один период (т. е. среднюю мощность управляющего сигнала) следует считать достаточно малой. Интересно, в частности, выделить задачи, решаемые с помощью управления со сколь угодно малой мощностью. С другой стороны, хаотичность системы означает сильную чувствительность ее к изменению начальных условий и внешних воздействий. Это способствует снижению требуемой мощности управления, но затрудняет обеспечение устойчивости замкнутой системы.

### 3.6. Моделирование нелинейных систем

При анализе вышеизложенного могло сложиться впечатление, что проблема выбора модели и ее исследования для современной науки совершенно ясна и на любой вопрос имеется окончательный ответ, сформулированный в виде более или менее четких рекомендаций. На самом деле это впечатление обманчиво. Науке о математических моделях еще очень многое неизвестно, и она продолжает интенсивно развиваться. Особенно бурно развивалась за последние годы теория нелинейных систем. Рассмотрим некоторые новые идеи из теории нелинейных систем, показывающие, что естественная рекомендация «выбирать линейную модель, потому что с ней проще работать», не является такой уж бесспорной.

В последние годы наблюдается проникновение нелинейных моделей в самые различные области. Помимо механики, где их применение стимулировалось прежде всего запросами робототехники, нелинейные модели прочно обосновались в физике, химии, биологии, а также в общественных науках – экономике и социологии. Во многих случаях учет нелинейности необходим из-за наличия в реальном процессе колебательных составляющих, как регулярных (типа предельного цикла), так и нерегулярных (хаотических), которые невозможно описать и исследовать, оставаясь в рамках линейных моделей.

Однако часто методы теории нелинейных систем создаются по аналогии с линейной теорией или сведением нелинейной задачи к линейной.

Построение нелинейной теории на «линейном» фундаменте порождается представлением о линейной системе как о простейшем классе систем, а о гармоническом сигнале как о простейшем виде сигналов.

Например, подход теории абсолютной устойчивости, развиваемый с середины XX в. [10], основан на рассмотрении систем, разделенных на линейную и нелинейную части (такие модели часто называют системами Лурье, см. рис. 3.14), выведении свойств полной системы из свойств частотной характеристики линейной части (ее реакции на гармонический сигнал) и свойств множества, где лежит график нелинейности. На таком подходе основаны и современные частотные методы нелинейного анализа (см. [11]). Аналогично в задачах синтеза приобрел популярность метод линеаризации обратной связью (feedback linearization), основанный на преобразовании

модели нелинейной системы к линейной форме при помощи нелинейных замен координат и обратных связей с последующим применением хорошо разработанных методов синтеза линейных систем.

В 80-е гг. XX в. возникла новая идея: не опираться на анализ частотных свойств линейной части модели, а развивать «частотную философию» для исходной нелинейной системы. На нелинейные системы были перенесены понятия канонических форм, минимальной фазовости (ноль-динамика), относительной степени, пассивности и т. д., что привело к значительным успехам в решении задач анализа и синтеза.

Однако и этот подход имеет границы применимости: если на величину управляющих сигналов или на функции обратной связи наложены ограничения, то «частотная философия» и линеаризация теряют свою силу. Аналогично, в присутствии нерегулярных колебаний

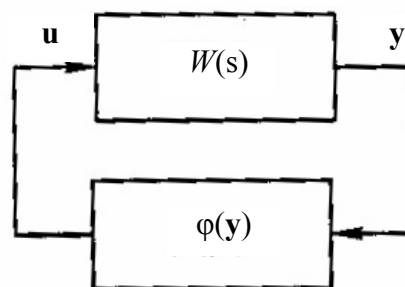


Рис. 3.14. Система Лурье

гармонические сигналы перестают играть роль простейших сигналов, а применение частотных методов как средства анализа существенно усложняется.

По-видимому, настает время разработки новой, «вполне нелинейной философии» для нелинейных систем, не считающей линейные системы простейшими и основным видом систем, а гармонические сигналы – простейшим и основным видом сигналов. Попробуем наметить некоторые контуры нового подхода.

Прежде всего необходимо найти адекватную замену частотной характеристике. Для этого вернемся к классической задаче Лурье об абсолютной устойчивости системы, состоящей из линейной части, описываемой передаточной функцией

$$y = W(p)u,$$

и статической нелинейности

$$u = \varphi(y),$$

график которой лежит в симметричном секторе

$$|\varphi(y)| \leq K_{\varphi}|y|. \quad (3.49)$$

Неравенство (3.49) означает, что коэффициент усиления нелинейного блока не превосходит  $K_\Phi$ . В соответствии с круговым критерием, для устойчивости системы Лурье достаточно выполнения неравенства

$$K_W K_\Phi < 1, \quad (3.50)$$

где

$$K_W = \max_{\omega} |W(j\omega)|. \quad (3.51)$$

Таким образом, для анализа устойчивости представляет интерес не вся амплитудно-частотная характеристика  $A(\omega) = |W(j\omega)|$ , а только ее максимум  $K_W$ , определяемый резонансными свойствами линейной части и достигаемый на одной из резонансных частот. Для практического определения  $K_W$  для линейной системы на ее вход следует подать гармонический сигнал  $u(t) = \sin \omega t$  и найти  $\omega$ , реализующую  $\max_{\omega} \max_{t \geq 0} |y(t)|$  (начальные условия на систему следует брать нулевыми).

Пусть теперь линейная модель системы Лурье заменяется на нелинейную и система описывается дифференциальным уравнением состояния вместе с конечным уравнением выходов (рис. 3.15):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= F(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \\ \mathbf{y} &= h(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.52)$$

где  $\mathbf{x}$  –  $n$ -мерный вектор состояния системы.

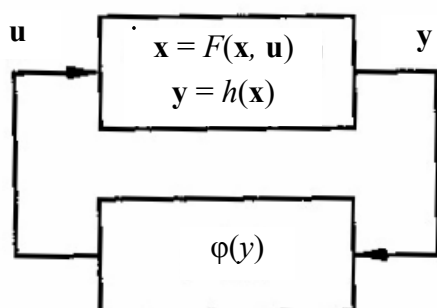


Рис. 3.15. Нелинейная система

Очевидно, что устойчивость нелинейной системы, как и в линейном случае, должна зависеть от резонансных свойств системы (3.52). Однако изучение резонансных свойств нелинейной системы затруднено, поскольку частота вынужденных колебаний в нелинейной системе зависит от амплитуды входного

гармонического сигнала. С ростом амплитуды входа в системе могут возникать сложные, в том числе хаотические режимы, т. е. входной гармонический сигнал не может в полной мере вскрыть резонансные свойства нелинейной системы. Задачу определения формы сигнала, обеспечивающего

при заданной амплитуде входа максимальную амплитуду выхода, можно поставить как задачу оптимального управления системой (3.52):

$$\sup_{\substack{|\mathbf{u}(s)| \leq \gamma, \\ 0 \leq s \leq t, \\ \mathbf{x}(0)=0}} \mathbf{y}^2(t). \quad (3.53)$$

При этом входной сигнал, создающий максимальное возбуждение системы, будет зависеть не только от времени, но и от состояния системы, т. е. иметь вид обратной связи. Величина оптимума в задаче (3.53) зависит от  $\gamma$  квадратично. Поэтому естественно ввести характеристику возбудимости системы ограниченным входным сигналом как величину

$$E(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{Q(\gamma)}, \quad (3.54)$$

где  $Q(\gamma)$  – оптимальное значение в задаче (3.53). Для линейных асимптотически устойчивых систем величина (3.54) не зависит от  $\gamma$ , а для нелинейных – представляет собой функцию от  $\gamma$ , которую естественно назвать степенью возбудимости системы.

Решение задачи оптимального управления в общем случае весьма трудно-емко даже при использовании эффективных численных методов. Однако для приближенного решения можно воспользоваться известным результатом о возможности приближенной замены оптимального управления на субоптимальное, получаемое максимизацией скорости изменения целевого функционала в силу свободной системы (при  $\mathbf{u} = 0$ ). Точность такой замены тем выше, чем меньше амплитуда входа  $\gamma$ . Для вычисления локально-оптимального управления представим первую часть уравнения (3.52) в виде

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u} + R(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (3.55)$$

где  $f(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, 0)$ ,  $g(\mathbf{x}) = \partial f / \partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$ , а остаточный член  $R(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  и имеет высший порядок малости по  $\mathbf{u}$ . Скорость изменения целевого функционала  $\dot{Q}_t = \mathbf{y}^2(t)$  составляет

$$\dot{Q}(t) = 2\mathbf{y}(\nabla \mathbf{h})^T (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u} + R(\mathbf{x}, \mathbf{u})).$$

Пренебрегая величиной  $R(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , видим, что субоптимальное значение входа при малых  $\gamma$  равно

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \gamma \operatorname{sign}(\mathbf{h}(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^T g(\mathbf{x})). \quad (3.56)$$

Таким образом, для вычисления степени возбудимости системы при малых  $\gamma$  достаточно подавать на вход системы сигнал (3.56) и измерять достигаемую амплитуду выхода. Это можно делать как в физическом (натурном), так и в вычислительном эксперименте. Примеры построенных таким образом графиков степени возбудимости для классических нелинейных систем (уравнения маятника и системы Дуффинга) приведены на рис. 3.16.

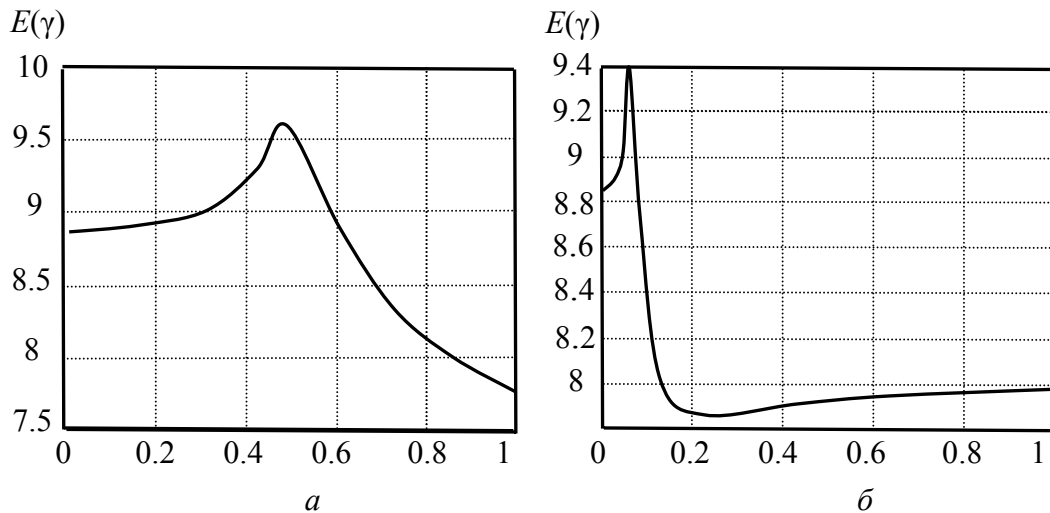


Рис. 3.16. Характеристики возбудимости маятника и системы Дуффинга

Условия устойчивости следуют из теоремы о пассивности [12] и аналогичны (3.50):

$$K_F K_\Phi < 1. \quad (3.57)$$

При этом роль максимума амплитудно-частотной характеристики играет максимальная степень возбудимости

$$K_F = \sup_{\gamma} E(\gamma). \quad (3.58)$$

Величина  $K_F$  конечна для так называемых строго пассивных систем.

Отметим, что воздействие вида (3.56) создает в системе аналог резонансного режима: для слабодемпфированных систем малое воздействие вида (3.58) приводит к возбуждению больших колебаний выхода и может сообщить системе значительную энергию. Можно показать, что для механических систем со степенью демпфирования (диссипации)  $\vartheta > 0$  воздействие (3.56) выводит систему на уровень энергии не меньший, чем  $\gamma^2/\vartheta^2$ , т. е. для  $E(\gamma)$  справедлива оценка  $E(\gamma) \geq \theta^{-1}$ .



Исследование динамических свойств систем с помощью непериодических тестовых сигналов представляется весьма перспективным инструментом в теории нелинейных систем.

Другой областью, где гармонические сигналы, линейные системы и спектральные методы традиционно играли и играют ключевую роль, является теория передачи информации (теория связи). Однако и здесь возможны новые подходы. В теории связи гармонический сигнал

$$y(t) = a \sin(\omega t + \alpha) \quad (3.59)$$

рассматривается как базовый, простейший. Сигнал может изменяться (модулироваться) изменением его параметров – величин  $a$  (амплитуда),  $\omega$  (частота),  $\alpha$  (начальная фаза). Например, при частотной модуляции модулирующим параметром является частота  $\omega$ , которая становится таким образом, переменной, т. е. с системной точки зрения становится сигналом:  $\omega = \omega(t)$ . Передаваемый модулированный сигнал  $y(t)$  может содержать в себе закодированное сообщение. Для передачи сообщения по каналу связи на стороне приемника сообщение должно восстанавливаться по принимаемому сигналу  $\hat{y}(t) = y(t) + \xi(t)$ , где  $\xi(t)$  – шум (помеха) в канале связи. Выделение полезного сообщения из принимаемого сигнала и является основной задачей теории связи [5].

В 90-х гг. XX в. усилился интерес к использованию в качестве несущих сигналов нерегулярных (хаотических) колебаний. Для построения соответствующей теории необходимо перейти от явного описания сигнала как функции времени (3.59) к заданию модели системы, генерирующей этот сигнал. Очевидно, например, что генератором гармонического сигнала (3.59) может служить линейное дифференциальное уравнение (3.27). Однако для генерации нерегулярных, непериодических сигналов линейные модели непригодны.

Следующим шагом к построению новой теории является использование в качестве основных объектов нелинейных генераторов, описываемых дифференциальными уравнениями вида (3.52). Отличие состоит в том, что входной вектор  $\mathbf{u} \in R^m$  может иметь смысл не только входного, но и модулирующего сигнала, т. е. задавать набор изменяемых параметров генератора. Приемник также представляется нелинейной динамической системой

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \Phi(\mathbf{z}, \hat{y}); \\ \hat{u} &= \chi(\mathbf{z}), \end{aligned} \quad (3.60)$$

где  $\hat{y} = y(t) + \xi(t)$  – принимаемый сигнал (вход приемника);  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t) \in R^n$  – вектор состояния приемника;  $\hat{u} = \hat{u}(t)$  – оценка передаваемого сообщения (выход приемника). Обычно шум измерений можно считать ограниченным. Тогда задачу синтеза (конструирования) приемника можно поставить как нахождение модели (3.60), обеспечивающей достижение цели

$$|u(t) - \hat{u}(t)| \leq \Delta_u. \quad (3.61)$$

На самом деле соотношение (3.61) может не выполняться на начальном этапе работы устройства. Поэтому цель в задаче синтеза формулируется как асимптотическое соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - \hat{u}(t)| \leq \Delta_u. \quad (3.62)$$

В частном случае  $\Delta_u = 0$  цель (3.62) означает асимптотически точное оценивание (о нем имеет смысл говорить, если пренебрегать помехами).

Естественным подходом к решению задачи синтеза является включение вектора оценок состояния передатчика в вектор состояния приемника  $\mathbf{z}(t)$ . Например, выбирают  $\mathbf{z}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) \in R^n$ . Тогда система (3.60) представляет собой наблюдатель (или фильтр состояния) для системы (3.52).

В этом случае естественно поставить дополнительную цель – достижение заданной точности оценивания (наблюдения) состояния передатчика

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)| \leq \Delta_u. \quad (3.63)$$

Таким образом, приемник должен оценивать как состояние, так и параметры передатчика, т. е. представлять собой адаптивный наблюдатель.

Синтезу адаптивных наблюдателей (фильтров состояния) для линейных систем посвящена обширная литература. При наличии помех их обычно считают случайными и ставят задачу оптимальной фильтрации – достижение минимальной среднеквадратической ошибки оценивания параметров. Однако включение вектора оценок неизвестных параметров в общий вектор состояния системы делает задачу фильтрации нелинейной даже при линейных моделях передатчика и приемника, что приводит к значительным вычислительным трудностям. Более подробное описание фильтров-наблюдателей будет приведено в 5.

Таким образом, существующие математические методы позволяют решать многие задачи анализа и синтеза нелинейных систем без опоры на гармонические сигналы и линеаризованные модели. Это обстоятельство следует учитывать при выборе модели. В то же время многие задачи в этой области математического моделирования не решены и даже не поставлены, что открывает широкий простор для дальнейших исследований.

## **4. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**

### **4.1. Предварительные преобразования моделей**

Итак, выбрана структура ММ системы, т. е. ММ с точностью до конечного набора числовых параметров. Как говорят, «модель параметризована». Что же дальше? Значения параметров лишь в редких случаях удастся подобрать исходя только из теории или априорных соображений. Как правило, оценка параметров ММ проводится по результатам наблюдений за реальным процессом или явлением в ходе нормального функционирования либо во время специальных экспериментов. Более того, без сопоставления результатов наблюдений за реальной системой и за ее ММ нет гарантий правильного выбора структуры ММ. Поэтому на этапе выбора параметров происходит окончательное уточнение и окончательный выбор структуры ММ, желательно из нескольких конкурирующих вариантов.

Задачи выбора параметров ММ (задачи идентификации) приходится решать для различных типов ММ: статических и динамических, дискретных и непрерывных, линейных и нелинейных и т. д. Однако во многих случаях имеющиеся результаты наблюдений и структуру ММ удастся преобразовать к стандартной форме, позволяющей применять унифицированные методы идентификации. Такой формой является линейная по параметрам модель

$$y = \sum_{i=1}^N \theta_i x_i + \varphi, \quad (4.1)$$

где  $y$  – выходная переменная (выход, отклик);  $\theta_i$  – параметры ММ;  $x_i$  – входные переменные (входы, факторы);  $\varphi$  – возмущение (погрешность ММ).

Если ввести векторные обозначения  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n$ , то (4.1) можно переписать в виде

$$y = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x} + \varphi. \quad (4.2)$$

Из выражения (4.1) ясно, что эта ММ приспособлена для отражения количественных зависимостей, т. е. множества значений входов и выходов системы  $U, Y$  должны быть непрерывными. Этот случай (при случайных  $\varphi$  это задачи регрессионного анализа) будет подробно рассмотрен далее. Иногда моделью (4.1) можно описать и зависимость между величинами с дискретным множеством значений (например,  $x_i, y$  могут быть номерами уровней входных переменных, т. е. принимать значения 1, 2, 3). Однако для исследования качественных зависимостей более приспособлены методы дисперсионного анализа, которые здесь рассматриваться не будут. Подчеркнем, что величины  $\mathbf{x}, y, \boldsymbol{\theta}, \varphi$ , вообще говоря, не совпадают с исходными входами, выходами, параметрами и возмущениями в системе, а получаются в результате преобразования (замены переменных), специально сделанного для приведения ММ системы к форме (4.1). Покажем, как можно перейти к форме (4.1) для основных типов моделей: статических; динамических, дискретных и непрерывных по времени.

Для простоты изложения возмущение в (4.1) учитывать не будем.

**Преобразование статических моделей.** Чтобы привести линейную ММ с  $m$  входами

$$y = a_0 + a_1 u_1 + \dots + a_m u_m$$

к виду (4.1), полагаем  $x_1 = 1, \theta_1 = a_0$  и для  $i = 2, \dots, m+1$ ,  $x_i = u_{i-1}$ ,  $\theta_i = a_{i-1}$ .

Таким образом,  $\mathbf{x} = [u_1, \dots, u_m]^T$ ,  $\boldsymbol{\theta} = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ .

Рекомендуется перед оцениванием параметров ММ проводить преобразование нормировки (масштабирование и центрирование) переменных, диапазоны изменения переменных к стандартному значению. Это преобразование для линейной ММ соответствует выбору в (4.1)  $x_i = (u_i - \bar{u}_i)/\sigma_i$ . Обычно выбирают число так, чтобы нормированные переменные лежали в диапазоне  $[-1, 1]$ , т. е.  $\bar{u}_i$  – «номинальное» или среднее значение переменной;  $\sigma_i$  – максимальное отклонение от среднего.

В стохастическом случае берут  $\bar{u}_i = M u_i$ ,  $\sigma_i = \sqrt{M(u_i - \bar{u}_i)^2}$ .

Полиномиальная ММ с одним входом и одним выходом, имеющая вид

$$y = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_m u^m,$$

где  $m$  – предполагаемая степень полиномиальной зависимости, приводится к (4.1) выбором

$$\mathbf{x} = [1, u, \dots, u^m]^T; \quad \boldsymbol{\theta} = [a_0, a_1, \dots, a_m]^T; \quad n = m + 1.$$

Квадратичная зависимость с несколькими входами (квадратичная многофакторная математическая модель), имеющая вид

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i + \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} u_i u_j,$$

может быть приведена к форме (4.1), если положить

$$\mathbf{x} = [1, u, \dots, u^m, u_1^2, u_1 u_2, \dots, u_1 u_m, u_2^2, u_2 u_3, \dots, u_m^2]^T,$$

$$\boldsymbol{\theta} = [a_0, \dots, a_m, a_{11}, (a_{12} + a_{21}), \dots, (a_{1m} + a_{m1}), a_{22}, (a_{23} + a_{32}), \dots, a_{mm}]^T.$$

Достаточно брать симметричную матрицу коэффициентов:  $a_{ij} = a_{ji}$ . Общее число входов в (4.1) будет  $n = 1 + m + m(m+1)/2 = (m+1)(m+2)/2$ .

Если ММ записана в мультипликативном виде

$$\tilde{y} = C u_1^{\alpha_1} \cdot u_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot u_m^{\alpha_m}, \quad (4.3)$$

то для приведения к виду (4.1) следует прологарифмировать (4.3):

$$\ln \tilde{y} = \ln C + \alpha_1 \ln u_1 + \dots + \alpha_m \ln u_m,$$

и положить  $y = \ln \tilde{y}$ ,  $x_1 = 1$ ,  $\theta_1 = \ln C$ ,  $x_i = \ln u_{i-1}$ ,  $\theta_i = \alpha_{i-1}$  для  $i = 2, \dots, m+1$ .

*Неявная ММ.* Если статическая характеристика системы представлена в виде неявной зависимости

$$\Phi(u, y, \theta) = 0, \quad (4.4)$$

то нет необходимости разрешать (4.3) относительно выхода. Достаточно свести (4.4) к виду

$$\Phi_0(u, y) + \sum_{i=1}^n \theta_i \Phi_i(u, y) = 0,$$

линейному относительно параметров, и положить

$$\mathbf{x} = [\Phi_1(u, y), \dots, \Phi_n(u, y)]^T, \quad \tilde{y} = \Phi_0(u, y).$$

Приведем несколько примеров, демонстрирующих приемы построения линейно-параметризованных ММ.

Пример. Одним из распространенных приемов является логарифмирование уравнений. Если ММ задана экспоненциальной зависимостью  $y = C_1 e^{C_2 u}$ ,

то, логарифмируя, получим соотношение  $\ln y = \ln C_1 + C_2 u$ , для приведения которого к виду (4.1) достаточно положить  $\tilde{y} = \ln y$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = u$ ,  $\theta_1 = \ln C_1$ ,  $\theta_2 = \ln C_2$ . После построения оценок параметров  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  следует вернуться к параметрам исходной ММ:  $\hat{C}_1 = e^{\hat{\theta}_1}$ ,  $\hat{C}_2 = \hat{\theta}_2$ .

Пример. Уравнение Аррениуса, определяющее кинетику химических реакций, имеет вид

$$K \approx K_0 \exp\left(-\frac{E}{R(T+273)}\right),$$

где  $K$  – константа скорости реакции;  $E$  – энергия активации;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T$  – температура в °С. Величина  $R$  известна из теории, а  $K_0$ ,  $E$  подлежат определению из опытов. Прологарифмированное уравнение Аррениуса подстановкой сводится к (4.1):

$$y = \ln K; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{-1}{R(T+273)}; \quad \theta_1 = \ln K_0; \quad \theta_2 = E.$$

Пример. Тригонометрическая модель

$$y = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (4.5)$$

в которой  $\omega$ ,  $t$  известны,  $A$ ,  $\varphi$  неизвестны, сводится к (4.1), если записать (4.5) в виде  $y = A \cos \varphi \sin \omega t + A \sin \varphi \cos \omega t$  и обозначить  $x_1 = \sin \omega t$ ,  $x_2 = \cos \omega t$ ,  $\theta_1 = A \cos \varphi$ ,  $\theta_2 = A \sin \varphi$ . Обратный переход после построения оценок  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  выполняется по формулам

$$\hat{A} = \left(\hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2\right)^{0.5}, \quad \hat{\varphi} = \arctg \frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_1}.$$

Пример. Пусть в предыдущем примере  $\omega$  – неизвестная. Тогда, следует сначала оценить  $\omega$ , исключив из (4.5) остальные параметры. Это можно сделать, приведя двукратным дифференцированием (4.5) к виду  $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$  и оценив  $\omega^2$  одним из методов, описанных далее. После этого можно применить подход предыдущего примера.

Пример. Гиперболическая зависимость

$$y = u/(\alpha + \beta u)$$

преобразуется к виду  $1/y = \alpha/u + \beta$ , который сводится к (4.1) заменой  $y = 1/y$ ;  $x_1 = 1/u$ ;  $\theta_1 = \beta$ ;  $\theta_2 = \alpha$ .

**Преобразование динамических моделей.** Проще всего обстоит дело с дискретными по времени линейными моделями, заданными передаточной функцией

$$W(z^{-1}) = B(z^{-1}) / A(z^{-1}),$$

где  $A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{m_y} z^{-m_y}$ ,  $B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{m_u} z^{-m_u}$  или соответствующим разностным уравнением

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_{m_y} y_{k-m_y} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_{m_u} u_{k-m_u}. \quad (4.6)$$

Математическая модель (4.6) приводится к (4.1), если положить

$$\begin{aligned} n &= m_u + m_y + 1, \quad y = y_k, \\ \mathbf{x} &= [y_{k-1}, \dots, y_{k-m_y}, u_k, \dots, u_{k-m_u}]^T, \\ \boldsymbol{\theta} &= [a_1, \dots, a_{m_y}, b_0, \dots, b_{m_u}]^T. \end{aligned}$$

Если ММ задана уравнениями состояния

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k; \\ \mathbf{y}_k &= C\mathbf{x}_k, \end{aligned}$$

то следует привести их к виду (4.6), как это описано в 3. Уравнение (4.6) содержит меньше неизвестных параметров и включает только входные и выходные, т. е. измеряемые, переменные. Если же измерению доступен непосредственно вектор состояния  $\mathbf{x}_k \in R^n$ , то целесообразнее представить векторное уравнение (3.16) как совокупность из  $n$  покомпонентных скалярных уравнений, коэффициенты которых (строки матриц  $A, B$ ) оцениваются независимо. Аналогичные соображения можно применить и к нелинейным моделям.

Для оценки параметров непрерывных по времени динамических систем существуют два подхода. Первый состоит в переходе от непрерывной ММ к дискретной и оценивании параметров дискретной ММ. Затем полученные оценки  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  параметров дискретной ММ пересчитываются в оценки исходной ММ континуализацией.

Второй подход состоит в сведении исходной ММ системы к некоторой вспомогательной статической ММ. Для этого вводится функционал качества  $Q(\cdot)$ , характеризующий погрешность приближения ММ к исходной системе, вычисляемую по траектории системы на заданном промежутке  $[0, T]$ .

Примером такого функционала является квадратичная ошибка  $Q_1 = \int_0^T \varepsilon^2(t) dt$ ,

где  $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ ,  $y(t)$  – реальный выход системы при входном воздействии  $u(t)$ ,  $\hat{y}(t)$  – процесс в ММ. Поскольку ММ задается вектором параметров  $\theta$ , т. е.  $\hat{y}(t) = \hat{y}(t, \theta)$  (начальные условия считаем фиксированными и одинаковыми в системе и в ММ), то функционал  $Q$  оказывается функцией конечно-мерного вектора параметров  $Q = Q(\theta)$ . Теперь задачу оценивания можно поставить как поиск

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} Q(\theta), \quad (4.7)$$

т. е. как задачу оптимизации статической системы. Для ее решения можно использовать известные методы оптимизации.

Функционалом называется отображение произвольного множества во множество чисел. В данном случае аргументом функционала является функция времени, значением – положительное число.

Перечислим некоторые часто используемые виды функционалов качества:

- интегральная абсолютная ошибка  $Q_2 = \int_0^t |\varepsilon(t)| dt$ ;
- максимальная ошибка  $Q_3 = \sup_{0 \leq t \leq T} |\varepsilon(t)|$ ;
- терминальная ошибка на промежутке  $[0, T]$   $Q_4 = |\varepsilon(T)|$ .

Если ММ системы имеет вид уравнения состояния  $\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = F(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \theta)$ , где

$\hat{\mathbf{x}} \in R^n$  – вектор состояния, то можно сформировать показатель качества из ошибки по состоянию. Квадратичный функционал можно записать как

$$Q_5 = \int_0^T \|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\|^2 dt, \quad (4.8)$$

или в более общей форме:

$$Q_6 = \int_0^T (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))^T R (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) dt, \quad (4.9)$$

где  $R = R^T > 0$  – некоторая симметричная положительно определенная матрица весовых коэффициентов.



Данный подход отличается универсальностью, но обладает рядом следующих недостатков:

1. Значение функционала качества зависит от длины промежутка  $T$  и от начальных условий  $\mathbf{x}(0)$ . Вследствие этого величину  $T$  приходится брать достаточно большой, чтобы за время  $[0, T]$  переходный процесс успел закончиться. Минимизация должна проводиться либо при одном, фиксированном значении  $\mathbf{x}(0)$ , либо при «наихудшем» по некоторому ограниченному множеству значений  $\mathbf{x}(0)$  (т. е. при минимаксном критерии качества), либо по усредненному показателю  $\bar{Q}(\boldsymbol{\theta}) = MQ(\boldsymbol{\theta})$  (при заданном «априорном» распределении вектора  $\mathbf{x}(0)$ ).

2. Чтобы вычислить  $Q(\boldsymbol{\theta})$ , требуется определить траекторию системы на всем промежутке  $[0, T]$ , т. е. оценка точности и коррекция ММ могут проводиться только после окончания переходного процесса в системе.

3. Зависимость  $Q(\boldsymbol{\theta})$  обычно весьма сложна (в частности, неквадратична), вследствие чего условие оптимальности  $dQ/d\boldsymbol{\theta} = 0$  представляет собой нелинейное относительно  $\boldsymbol{\theta}$  уравнение. Это значит, что уравнение ММ не сводится к уравнению вида (4.1), даже если исходная ММ линейна по параметрам. Можно, конечно, линеаризовать условие оптимальности (этот подход основан на построении функции чувствительности), однако при этом возникает дополнительная погрешность, с трудом поддающаяся оценке.

Последний недостаток особенно снижает привлекательность подхода, поскольку существуют другие варианты, позволяющие сводить задачу к линейной. Например, можно перейти к дискретной ММ (4.6) и задать показатель качества в виде

$$Q(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=m}^N (y_k - \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x}_k)^2. \quad (4.10)$$

Избавиться от данного недостатка можно также, перейдя от функционалов ошибки, характеризующих разницу в выходах (или в состояниях) исходной системы и модели, к функционалам невязки, зависящим от погрешности уравнения ММ. Например, заменив в (4.8) векторы состояния  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  их производными, приходим к показателю

$$Q_7 = \int_0^T \|\dot{\mathbf{x}}(t) - F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\theta})\|^2 dt, \quad (4.11)$$

которым в случае линейности  $F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\theta})$  по  $\boldsymbol{\theta}$  является квадратичным по  $\boldsymbol{\theta}$ . Следует отметить, что неквадратичность задачи не мешает применению целого ряда методов оптимизации [1].

Продemonстрируем различные подходы на примере.

Пример. Пусть структура ММ задана дифференциальным уравнением первого порядка

$$\dot{y} = ay + bu, \quad (4.12)$$

параметры которого  $a, b$  подлежат оцениванию по результатам измерений  $y_k = y(t_k)$ ,  $u_k = u(t_k)$  при  $t_k = kh$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ . Перечислим возможные способы формализации задачи оценивания параметров уравнения (4.12).

А. Дискретизируя (4.12) по методу Эйлера, получаем ММ в виде

$$y_{k+1} = (1 + ah)y_k + bhu_k. \quad (4.13)$$

Для сведения (4.12) к (4.1) положим  $\theta_1 = 1 - ah$ ;  $\theta_2 = bh$ ;  $y = y_{k+1}$ ;  $x_1 = y_k$ ;  $x_2 = u_k$ . После расчета оценок параметров (4.13)  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  необходимо пересчитать их в оценки параметров исходной системы (4.12) по обращенным формулам

$$\hat{a} = \frac{1 - \hat{\theta}_1}{h}, \quad b = \frac{\hat{\theta}_2}{h}. \quad (4.14)$$

Б. Заметим, что в формулах (4.14) присутствует деление на величину шага  $h$ , которая может быть малой величиной. Чтобы избежать потери точности, можно попробовать взять дискретную ММ в виде

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = ay_k + bu_k. \quad (4.15)$$

Для преобразования модели (4.15) к форме (4.1) вводятся следующие обозначения:

$$y = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}; \quad \theta_1 = a; \quad \theta_2 = b; \quad x_1 = y_k; \quad x_2 = u_k. \quad (4.16)$$

Отметим также, что формы (4.13), (4.15) не изменяются, если «продифференцировать» их по времени, перейдя к приращениям  $y_k \rightarrow y_k - y_{k-1}$ ,  $u_k \rightarrow u_k - u_{k-1}$ . Этот прием используется для повышения точности оценок за счет увеличения разнообразия векторов  $\mathbf{x}_k$ .

В. Можно дискретизировать (4.12) по методу Тастина. Для этого в передаточной функции системы (4.12)  $W(p) = b/(p - a)$  делается подстановка

$p \rightarrow (2/h)(1 - z^{-1}/1 + z^{-1})$ , и результат умножается на  $2/(1 + z)$ . Получим дискретную передаточную функцию

$$W_D(z) = \frac{2bh}{(2 - ah)z - 2 + ah},$$

соответствующую разностному уравнению

$$y_{k+1} = \frac{2 + ah}{2 - ah} y_k + \frac{2bh}{2 - ah} u_k. \quad (4.17)$$

Заметим, что если вычесть из обеих частей (4.17)  $y_k$  и разделить на  $h$ , то получим модель

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{a}{1 - ah/2} y_k + \frac{b}{1 - ah/2} u_k, \quad (4.18)$$

структура которой совпадает с (4.16). Отличие от варианта Б есть лишь в формулах пересчета оценок:

$$\theta_1 = \frac{a}{1 - ah/2}; \quad \theta_2 = \frac{b}{1 - ah/2}; \quad a = \frac{\hat{\theta}_1}{1 + \hat{\theta}_1 h/2}; \quad b = \hat{\theta}_2 (1 + \hat{\theta}_1 h/2).$$

Г. Проинтегрировав обе части (4.12) по отрезку  $[0, t_k]$ , получим ММ (4.1) при  $y = y_k - y_0$ :

$$x_1 = \int_0^{t_k} y(t) dt; \quad x_2 = \int_0^{t_k} u(t) dt; \quad \theta_1 = a, \quad \theta_2 = b.$$

Приближенно можно взять  $x_1 = h \sum_{i=1}^k y_i; x_2 = h \sum_{i=1}^k u_i$ .

Д. Наконец, можно поставить задачу оценивания параметров (4.12) как минимизации функции интегральной ошибки:

$$Q_1(a, b) = \int_0^T (y(t) - \hat{y}(t, a, b))^2 dt,$$

где  $\hat{y}(t, a, b)$  – решение уравнения  $\frac{d\hat{y}}{dt} = a\hat{y} + bu$  с начальным условием  $\hat{y}(0, a, b) = y(0)$ , или интегральной невязки

$$Q_2(a, b) = \int_0^T \left( \frac{dy}{dt} - ay(t) - bu(t) \right)^2 dt.$$

## 4.2. Регрессионный анализ и метод наименьших квадратов

После приведения ММ к стандартной форме (4.1) вычисляются оценки параметров ММ по результатам ряда наблюдений за входами и выходами системы. Пусть имеются результаты  $N$  наблюдений  $x_{i1}, \dots, x_{in}, y_i, i = 1, \dots, N$ , которые объединены в матрицу из  $N$  строк и  $n$  столбцов ( $(N \times n)$ -матрицу)  $X = \{x_{ij}\}$  и  $N$ -вектор  $Y = [y_1, \dots, y_N]$ .

Начиная с классической работы К. Гаусса (1809) популярен способ вычисления оценок, называемый методом наименьших квадратов (МНК) и состоящий в выборе оценки  $\hat{\theta}$ , минимизирующей выражение (4.10) – среднеквадратическую ошибку. МНК-оценка удовлетворяет системе так называемых «нормальных уравнений»

$$X^T X \hat{\theta} = X^T Y,$$

и имеет вид

$$\hat{\theta} = C X^T Y,$$

где  $C = (X^T X)^{-1}$  – дисперсионная матрица. Для вычисления  $\hat{\theta}$  не требуется никаких предположений о свойствах измерений, однако чтобы сделать выводы о достоверности и точности ММ, такие предположения нужны. Часто принимается следующая гипотеза: если представить модель измерений в виде

$$Y = X\theta + \varphi, \quad (4.19)$$

где  $\varphi$  – вектор погрешностей (невязок) ММ, то элементы вектора  $\varphi$  случайны, независимы, центрированы ( $M\varphi_i = 0$ ) и равноточны (имеют одинаковую дисперсию  $\sigma^2 = M\varphi_i^2$ ). Эти предположения традиционны для раздела теоретической и прикладной статистики, называемого регрессионным анализом (РА). При их выполнении МНК-оценки  $\hat{\theta}$  обладают следующими свойствами:

- 1)  $M\hat{\theta} = \theta$  (несмещенность);
- 2)  $\text{cov}(\hat{\theta}) = \sigma^2 C$ , где  $\text{cov}(\hat{\theta}) = M(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T$  – ковариационная матрица оценок, в частности  $M(\hat{\theta} - \theta)^2 = \sigma c_{ii}$ ;
- 3) МНК-оценки эффективны: для любой несмещенной оценки  $\theta_*$  выполняется неравенство  $M\|\theta_* - \theta\|^2 \geq M\|\hat{\theta} - \theta\|^2$ ;

4) если обозначить через  $\hat{\mathbf{Y}} = X\hat{\boldsymbol{\theta}}$  вектор прогноза выходных величин  $\mathbf{Y}$  по модели (4.19), а через  $R = \|\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}\|^2$  – среднеквадратическую ошибку прогноза (остаточную сумму квадратов), то  $MR = (N - r)\sigma^2$ , где  $r$  – ранг матрицы  $X^T X$ . Как правило (если входы модели (4.1) не связаны линейной зависимостью),  $r = n$ , значит, оценку дисперсии погрешности модели (4.19) можно брать в виде

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{r^2}{N - n}.$$

После построения ММ (4.19) немедленно возникает вопрос о ее точности. Этот вопрос имеет две стороны:

а) нельзя ли без существенной потери точности заменить модель (4.19) более простой, т. е. упростить?

б) является ли модель (4.19) адекватной исходной системе, т. е. не следует ли ее усложнить?

Ответ в обоих случаях требует дополнительных предположений. В первом варианте будем считать, что модель (4.19) адекватна и выполнены предположения РА. Тогда можно поставить задачу о проверке гипотезы  $\theta_i = 0$  равенства нулю некоторого коэффициента ММ. На языке математической статистики это задача проверки значимости коэффициента  $\theta_i$ . В силу свойств 2, 3 МНК-оценок и при дополнительном условии нормальности  $\varphi$  (которое не кажется слишком обременительным на фоне остальных допущений) для проверки гипотезы  $\theta_i = 0$  можно пользоваться следующей процедурой:

1. По заданному уровню надежности  $p$  и числу наблюдений  $N$  из таблиц распределения Стьюдента или с помощью функции `tinu` тулбокса STATISTICS системы MATLAB выбирается значение  $\alpha_p$ , такое что  $P\{|t| \leq \alpha_p\} = p$ , где  $t$  – случайная величина, распределенная по закону Стьюдента с  $N$  степенями свободы. Обычно берут  $p = 0.9, 0.95, 0.99$ .

2. Определяются границы доверительного интервала для параметра  $\theta_i$  при уровне надежности  $p$ :

$$[\hat{\theta}_i - \alpha_p \hat{\sigma} \sqrt{c_{ii}}, \quad \hat{\theta}_i + \alpha_p \hat{\sigma} \sqrt{c_{ii}}]. \quad (4.20)$$

3. Если интервал (4.20) содержит точку  $\theta_i = 0$ , т. е. если  $|\hat{\theta}_i| < \hat{\sigma}\sqrt{c_{ii}}$ , то гипотеза принимается, т. е. в ММ можно положить  $\theta_i = 0$ . В противном случае коэффициент  $\theta_i$  с надежностью  $p$  считается значимым, т. е. гипотеза  $\theta_i = 0$  отвергается.

Отметим, что при  $N > 20 \dots 30$  вместо таблиц и программ распределения Стьюдента можно использовать таблицы или программы нормального распределения и брать, в частности,  $\alpha_{0.9} = 1.65$ ,  $\alpha_{0.95} = 1.96$ ,  $\alpha_{0.99} = 2.58$ . Впрочем, при меньших  $N$ , как указывалось в 3, методы математической статистики вряд ли дадут надежные и нетривиальные выводы.

Для ответа на второй вопрос требуется выполнение предположений регрессионного анализа и возможность проведения в каждой точке  $x_{i1}, \dots, x_{in}$  нескольких независимых случайных измерений  $y_{i1}, \dots, y_{in}$ , чтобы по ним построить альтернативную оценку дисперсии ошибки

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N(v-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^v (y_{ij} - \bar{y}_i)^2, \quad \bar{y}_i = \frac{1}{v} \sum_{j=1}^v y_{ij}. \quad (4.21)$$

Гипотеза об адекватности ММ (4.19) отвергается, если величина  $F = \tilde{\sigma}^2 / \hat{\sigma}^2$  (так называемая дробь Фишера) оказывается достаточно большой:  $F > F_p$ . Порог  $F_p$  ищется по заданному уровню надежности  $p$  из таблиц распределения Фишера. В тулбоксе статистических вычислений STATISTICS пакета MATLAB имеется соответствующая функция **finv**.

Возникает еще один практически важный вопрос: нельзя ли повысить точность и надежность результатов эксперимента его планированием, т. е. специальным выбором точек  $x_{i1}, \dots, x_{in}$ ? Очевидно, что для повышения точности оценок нужно стараться сделать дисперсионную матрицу  $C$  «поменьше», а матрицу  $X$  «побольше». О том, как это сделать, написано в книгах по планированию регрессионных экспериментов (например, [13]). Некоторые функции имеются в тулбоксе STATISTICS.

До сих пор модель (4.19) предполагалась стохастической. Если же более предпочтителен детерминистский подход и на возмущения в (4.19) накладывается единственное ограничение

$$|\Phi_i| < \Delta_\Phi, \quad (4.22)$$

то точность оценивания, как и сами оценки, можно определить из решения соответствующей минимаксной задачи:

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \max_{1 \leq i \leq N} \left| y_i - \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\theta}_j^T \mathbf{x}_{ij} \right|.$$

Минимаксный подход, хотя и требует более сложных вычислений (решения задачи линейного программирования или минимизации негладкой функции), дает гарантированный результат при любом числе наблюдений  $N$ .

Во всех случаях выбор подхода, числа учитываемых параметров ММ, плана эксперимента является неформальным актом, основанным на опыте и интуиции исследователя. Здесь оказывается полезным следующий «принцип надежности»: «чем проще модель, тем реже она обманет» или «чем лучше модель объясняет прошлое, тем хуже она прогнозирует будущее». Практически часто применяют следующее правило: число независимых наблюдений должно быть в 3–5 раз больше числа параметров модели. Наконец, не следует забывать принцип «равнопрочности» – точность результатов не может быть выше точности исходных данных; точности промежуточных вычислений должны быть согласованы.

### 4.3. Адаптивные модели и рекуррентные методы

Если наблюдений при построении ММ оказывается много и они поступают последовательно во времени, то часто оказывается удобным обрабатывать их по мере поступления. Иногда такой способ обработки единственно возможен – например, когда исходные данные из-за большого объема не помещаются в памяти компьютера или когда свойства системы меняются во времени («дрейфуют») и параметры ММ требуют постоянной коррекции. Модели, которые изменяются (подстраиваются, адаптируются) в процессе наблюдений за системой, называются адаптивными. Соответственно методы оценивания параметров таких моделей путем коррекции по текущим наблюдениям называются адаптивными или рекуррентными [1].

Общий вид рекуррентного алгоритма следующий:

$$\boldsymbol{\theta}_k = \Phi(\boldsymbol{\theta}_{k-1}, \mathbf{y}_k, \mathbf{u}_k), \quad (4.23)$$

где  $k = 1, 2, \dots$  – номер шага наблюдения. Многие алгоритмы можно привести к рекуррентной форме.

Пример. Пусть ММ системы имеет вид  $y_i = \theta + \varphi_i$ , где  $\theta = My_i$  – оцениваемый параметр;  $\varphi_i$  – помеха  $M\varphi_i = 0$ . Обычная оценка среднего арифметического  $\theta_i = \sum_{i=1}^k y_i$  может быть преобразована к рекуррентной форме:

$$\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \frac{1}{k}(\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\theta}_{k-1}) \quad (4.24)$$

при  $\boldsymbol{\theta}_0 = 0$ . Обобщением (4.24) является метод статистической аппроксимации:

$$\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \gamma_k(\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\theta}_{k-1}), \quad (4.25)$$

где  $\gamma_k > 0$  – коэффициенты поправок (шаги) алгоритма, которые для обеспечения сходимости оценок должны удовлетворять условиям Роббинса–Монро:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \infty; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty.$$

Пример. Можно показать, что МНК-оценки  $\boldsymbol{\theta}_k$  параметров ММ (4.1) удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \Gamma_k \mathbf{x}(k) \left( \mathbf{y}_k - \boldsymbol{\theta}_{k-1}^T \mathbf{x}(k) \right); \quad (4.26)$$

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} - \frac{\Gamma_{k-1} \mathbf{x}(k) \mathbf{x}(k)^T \Gamma_{k-1}}{1 + \mathbf{x}(k)^T \Gamma_{k-1} \mathbf{x}(k)}, \quad (4.27)$$

где  $\mathbf{x}(k) = [x_{k1}, \dots, x_{kn}]^T$  – вектор  $k$ -го измерения входов ММ;  $\Gamma_k = \Gamma_k^T > 0$  – симметричная положительно определенная  $(n \times n)$ -матрица. При этом  $\Gamma_k = \left( \sum_{i=1}^k \mathbf{x}(i) \mathbf{x}(i)^T \right)^{-1}$  – дисперсионная матрица, и, значит, соотношения (4.26) соответствуют МНК лишь при определенном выборе начальной матрицы  $\Gamma_0$ .

Однако если  $k \rightarrow \infty$ , то оценки, получаемые из (4.26), приближаются к МНК-оценкам при произвольных начальных условиях  $\boldsymbol{\theta}_0, \Gamma_0$ . На практике часто берут  $\Gamma_0 = \gamma I$ , где  $I$  – единичная матрица;  $\gamma > 0$  – достаточно большое число.

Если (4.26) не учитывать, а брать  $\Gamma_k = \gamma_k I$ , где  $\gamma_k > 0$  удовлетворяют условиям Роббинса–Монро, то получим обобщенный (многомерный) алгоритм стохастической аппроксимации:

$$\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_{k-1} + \gamma_k \left( \mathbf{y}_k - \boldsymbol{\theta}_{k-1}^T \mathbf{x}(k) \right) \mathbf{x}(k). \quad (4.28)$$



Алгоритм (4.28), в свою очередь, является частным случаем градиентного алгоритма

$$\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_{k-1} - \gamma_k \nabla_{\boldsymbol{\theta}} Q(\boldsymbol{\theta}_{k-1}^T, \mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k) \quad (4.29)$$

и получается из (4.29) при выборе целевой функции текущей ошибки  $Q(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}, \mathbf{x})$  в виде

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{x})^2.$$

Через  $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} Q$  обозначается градиент функции векторного аргумента  $\boldsymbol{\theta}$ .

Если погрешности модели (4.1) не случайны, а обладают лишь ограниченностью, т. е. стохастический подход неприменим, то алгоритмы (4.28), (4.29) сохраняют работоспособность при определенном выборе длин шагов  $\gamma_k$ . Например, при выполнении (4.24) алгоритм (4.28) будет обеспечивать при достаточно большом числе наблюдений  $k$  неравенство  $\|\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\theta}_k^T \mathbf{x}(k)\| < \Delta$ , если  $\Delta > \Delta_{\varphi}$ , векторы  $\mathbf{x}(k)$  ограничены  $\|\mathbf{x}(k)\| \leq \text{const}$  и коэффициенты шага выбраны в виде

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{\gamma}{\|\mathbf{x}(k)\|^2} \rightarrow |\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\theta}_{k-1}^T \mathbf{x}(k)| > \Delta; \\ 0 \rightarrow |\mathbf{y}_k - \boldsymbol{\theta}_{k-1}^T \mathbf{x}(k)| \leq \Delta, \end{cases}$$

где  $0 \leq \gamma \leq 2(1 - \Delta_{\varphi})/\Delta$ . Алгоритм получил известность под названием «полоска». Свойства подобных и более общих алгоритмов изучены в рамках метода рекуррентных целевых неравенств.

Градиентные адаптивные алгоритмы (4.29) применяются для идентификации статических и дискретных динамических систем. Что делать, если ММ системы непрерывна? Аналогом градиентных алгоритмов для непрерывных динамических систем являются так называемые алгоритмы скоростного градиента. Поясним идею метода скоростного градиента для случая, когда ММ системы описывается уравнением состояния

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) \quad (4.30)$$

и требуется достичь цели

$$Q(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}(t), t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.31)$$

где  $Q(\mathbf{x}, t) \geq 0$  – некоторая гладкая целевая функция. Поскольку  $Q$  не зависит от  $\boldsymbol{\theta}$ , ее градиент равен нулю и градиентный алгоритм типа (4.29) неприменим. Однако вместо задачи уменьшения  $Q$  можно поставить вспомогательную задачу уменьшения величины  $\dot{Q}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{\theta}} Q^T F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$  – скорости изменения  $Q$  вдоль траектории (4.30). Градиентный алгоритм, построенный по целевой функции  $\dot{Q}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ , называется алгоритмом скоростного градиента и может применяться в дифференциальной форме

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\gamma \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \dot{Q}, \quad (4.32)$$

где  $\gamma > 0$ , или в конечной форме

$$Q = -\gamma \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \dot{Q}. \quad (4.33)$$

Можно предположить, что если существует  $\boldsymbol{\theta}_*$ , такое что  $\dot{Q}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$  убывает для всех  $\mathbf{x}, t$ , то начиная с некоторого момента времени будет убывать и  $Q(\mathbf{x}, t)$ , что приведет к достижению исходной цели (4.31). Это действительно будет так при некоторых дополнительных предположениях [14].

Градиентные алгоритмы и алгоритмы скоростного градиента можно применять не только для оценивания параметров, но и для оценивания состояний динамических систем, для фильтрации, управления и т. д. Благодаря своей простоте они находят применение в бортовых вычислительных устройствах, при микропроцессорной реализации систем управления контроля, диагностики в различных областях. В последние годы адаптивный подход применяется также в вычислительных процедурах.

#### 4.4. Принципы выбора модели

В заключение попытаемся сформулировать некоторые правила, помогающие на этапе выбора структуры ММ, – принципы выбора модели. Первейшим из них является принцип простоты: из различных вариантов структуры ММ сначала следует попробовать простейший. Например, если исследуется сложная динамическая (инерционная) система, то следует проверить, нельзя ли ограничиться статической моделью, не учитывающей динамику. Как указывалось в 3.1, статическую модель заведомо можно применить, если система устойчива, изменения ее входов достаточно медленны, выходы

измеряются достаточно редко. Однако эти требования могут быть ослаблены в рамках заданной цели, для которой предназначена математическая модель.

При уточнении структуры статической модели руководствуются тем же принципом. Например, если зависимость выхода от входа монотонна, то сначала пробуют линейную ММ:  $y = \theta_0 + \theta_1 u$ . Если зависимость выхода от входа носит экстремальный характер, то берут квадратичную функцию  $y = \theta_0 + \theta_1 u + \theta_2 u^2$ , а если есть основания думать, что зависимость выхода от входа имеет перегиб, то начинают с кубической функции  $y = \theta_0 + \theta_1 u + \theta_2 u^2 + \theta_3 u^3$ .

Аналогично действуют и в случае нескольких входов и выходов. Возможен различный выбор ММ в разных областях переменных. Например, если построение ММ выполняется с целью оптимизации, то вдали от экстремума можно ограничиться линейной моделью, а при приближении к экстремуму переходить на квадратичную. В любом случае предпочтительнее модели, в которые постоянные коэффициенты входят линейно (см. 4.1). В последние годы приобрели популярность модели, основанные на нейронных сетях.

Если точность моделей с постоянными коэффициентами недостаточна, т. е. исследуемая система нестационарна, то в модель вводят зависимость коэффициентов от времени (дрейф). Дрейф может быть монотонным или периодическим, причем в большинстве случаев достаточно ограничиться простейшими моделями дрейфа – линейными  $\theta_i = a_i + b_i t$  или гармоническими  $\theta_i = a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t)$ . Если неясно, как выбрать частоты  $\omega_i$ , или есть аргументы в пользу того, что параметры испытывают нерегулярные колебания, то стоит попробовать хаотические модели дрейфа.

Если возникает дилемма выбрать ММ детерминированную или стохастическую, то предпочтение следует отдать детерминированной математической модели. И только если не удастся обойтись без случайности, то вводят ее, причем сначала в наиболее простой форме, например приведенной к выходу:  $y = F(x, \theta) + \varphi$ , где  $\varphi$  – случайное возмущение. Точно так же следует переходить к нечеткой ММ только при неадекватности стохастических ММ (что в действительности бывает не так уж редко).

Иногда структуру системы характеризуют, кроме прочего, целым числом, определяющим порядок ее динамической модели (например, размерностью вектора состояния ММ, глубиной памяти ММ, максимальной внутренней задержкой и т. п.). В соответствии с принципом простоты, при выборе ММ следует начинать с наименьших значений порядка, учитывая, что многие классы динамических процессов описываются моделями первого-второго порядков. Для описания монотонных (так называемых «апериодических») переходных процессов часто достаточно апериодического звена – линейной стационарной дифференциальной ММ первого порядка, имеющей передаточную функцию от входа к выходу  $W(p) = K/(Tp + 1)$ , где  $K$  – коэффициент усиления статической ММ;  $T$  – постоянная времени звена.

Величина  $T$  определяется тем свойством, что за время  $3T$  переходная составляющая процесса в апериодическом звене уменьшится до 5 % от начального уровня.

Для описания простейших (гармонических) колебательных процессов используется колебательное звено – линейное дифференциальное уравнение, соответствующее передаточной функции

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1},$$

где  $\zeta$  – показатель затухания колебаний ( $|\zeta| < 1$ ). Если форма колебания отличается от синусоиды, то скорее всего это означает, что в модель надо внести нелинейность и изучать предельные циклы системы. Если же и частота колебаний плавают, то надо проверить модель на хаотичность. В любом случае, переходить к ММ более высокого порядка следует лишь тогда, когда экспериментальные данные не позволят принять гипотезу об описании системы моделью данного порядка. Иначе говоря, «не решай сложную задачу, не решив сначала простую».

Отметим, что если ММ системы есть передаточная функция в непрерывном времени, то степень ее числителя не должна превосходить степени знаменателя. Иначе ММ будет включать чистое дифференцирование и ее нельзя будет привести к уравнениям состояния. Кроме того, на входные сигналы конечной мощности такая ММ будет реагировать сигналами бесконечной мощности, что говорит о негрубости. Понятие грубости ММ было введено в конце 20-х гг. XX в. А. А. Андроновым и означает, что малые

изменения исходных данных (входных переменных параметров) приводят к малым изменениям результатов (выходов). Грубость – очень важное свойство модели, так как реальные исходные данные для ее построения и применения всегда содержат ошибки. Если бы эти ошибки существенно сказывались на результатах, моделью просто нельзя было бы пользоваться. Резюмировать сказанное можно в виде принципа грубости: «без ошибки нет модели, а поэтому негрубые модели плохие».

Перечисленные правила следует принимать не как законы, а как рекомендации. Для достижения успеха нужно испытать несколько вариантов моделей. При этом самая полная модель необязательно самая точная, а самая точная необязательно самая хорошая.

## 5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ

### 5.1. Принципы построения алгоритмов управления

Построение управляющих алгоритмов базируется на единых принципах и, прежде всего, на понятии стабилизирующего управления, т. е. такого управления с обратной связью, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость по Ляпунову тех или иных движений объекта.

Обратимся к математической модели динамической системы, представленной в 3, записав ее в векторно-матричной форме вида

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = F(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\delta}}, \bar{\mathbf{f}}_{\text{out}}), \quad (5.1)$$

где  $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\delta}}, \bar{\mathbf{f}}_{\text{out}}$  - векторы соответственно состояния, управления и возмущения.

Выделим некоторое контролируемое движение динамической системы  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_p(t)$ ,  $\bar{\boldsymbol{\delta}} = \bar{\boldsymbol{\delta}}_p(t)$ ,  $\bar{\mathbf{f}}_{\text{out}} = \bar{\mathbf{f}}_p(t)$ , определяемое заданными векторами-функциями, которые удовлетворяют системе уравнений (5.1). При этом обеспечивается выполнение тождества

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_p = F(\bar{\mathbf{x}}_p, \bar{\boldsymbol{\delta}}_p, \bar{\mathbf{f}}_p). \quad (5.2)$$

Обозначим через  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ ,  $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}(t)$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t)$  отклонения соответствующих переменных в (5.1) от указанного движения, определяя этим соотношения

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{x}}_p(t) + \mathbf{x}(t), \quad \bar{\boldsymbol{\delta}}(t) = \bar{\boldsymbol{\delta}}_p(t) + \boldsymbol{\delta}(t), \quad \bar{\mathbf{f}}_{\text{out}}(t) = \bar{\mathbf{f}}_p(t) + \mathbf{f}(t). \quad (5.3)$$

С учетом (5.3), запишем нелинейную систему, описывающую динамику объекта в отклонениях:

$$\dot{\mathbf{x}} = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{f}), \quad (5.4)$$

а также осуществим линеаризацию системы (5.2) или (5.4) в малой окрестности выбранного контролируемого движения. При этом получим систему линейных дифференциальных уравнений в отклонениях вида

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = A(t)\bar{\mathbf{x}}(t) + B(t)\bar{\boldsymbol{\delta}}(t) + C(t)\bar{\mathbf{f}}(t). \quad (5.5)$$

Как указано в работах В. И. Зубова, рассматриваемое контролируемое движение  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_p(t)$ ,  $\bar{\boldsymbol{\delta}} = \bar{\boldsymbol{\delta}}_p(t)$ ,  $\bar{\mathbf{f}}_{\text{out}} = \bar{\mathbf{f}}_p(t)$ , можно сделать асимптотически устойчивым в смысле А. М. Ляпунова при условии  $\bar{\mathbf{f}}(t) \equiv 0$  с помощью обратных связей, если выполняются два следующих требования:

- 1)  $\|G(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\delta}}, 0) - A(t)\bar{\mathbf{x}} - B(t)\bar{\boldsymbol{\delta}}\| \leq \theta(\|\bar{\mathbf{x}}\| + \|\bar{\boldsymbol{\delta}}\|)$ , где  $\theta \rightarrow 0$  при  $\|\bar{\mathbf{x}}\| \rightarrow 0$  и  $\|\bar{\boldsymbol{\delta}}\| \rightarrow 0$ ;
- 2) неуправляемая часть линейного приближения (5.5) является устойчивой.

В дальнейшем будем считать, что контролируемое движение таково, что матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  имеют постоянные компоненты. Второе требование заведомо выполняется, если имеет место условие полной управляемости линейной модели:

$$\text{rank}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n. \quad (5.6)$$

Если указанные условия выполняются, то нулевое положение равновесия линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\boldsymbol{\delta} + C_f\mathbf{f} \quad (5.7)$$

может быть сделано асимптотически устойчивым с помощью регулятора прямого действия

$$\boldsymbol{\delta} = K\mathbf{x} \quad (5.8)$$

или с помощью регулятора непрямого действия

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = K_0\boldsymbol{\delta} + K\mathbf{x}, \quad (5.9)$$

где  $K$ ,  $K_0$  – постоянные матрицы.

Нетрудно убедиться в том, что аналогичное утверждение справедливо и для обобщенного понятия регулятора непрямого действия, математическая модель которого может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= M\mathbf{z} + M_1\mathbf{x} + M_2\dot{\mathbf{x}} + \dots + M_\mu\mathbf{x}^{(\mu-1)}, \\ \boldsymbol{\delta} &= K\mathbf{z}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где  $\mathbf{z} \in R^\nu$  – вектор состояния регулятора. Иными словами, обобщенный регулятор непрямого действия (в ряде работ его именуют динамическим компенсатором) – это самостоятельная динамическая система, на вход которой поступает информация от измерителей, а выходом служит вектор управляющих

воздействий. С помощью регулятора (5.10) можно стабилизировать объект (5.7), обеспечивая произвольный спектр корней характеристического полинома замкнутой системы, задавая матрицы с постоянными компонентами  $K, M, M_i (i = 1 \dots \mu)$ .

*Замечание.* Вопрос о возможности введения в состав регулятора производных  $(\mu - 1)$ -го порядка от измеряемых координат должен в каждом конкретном случае обсуждаться особо.

Уравнения регулятора непрямого действия (5.10) с использованием преобразования Лапласа могут быть представлены на базе понятия передаточной матрицы динамической системы от входа к выходу:

$$\delta = W(s)x, \quad (5.11)$$

где  $s$  – переменная Лапласа;  $W(s) = W_1(s)/W_2(s)$  – передаточная матрица регулятора ( $W_1(s)$  – полиномиальная матрица размером  $m \times n$ ,  $W_2(s)$  – полином степени  $\nu = \dim z$ ). То есть компонентами передаточной матрицы  $W(s)$  являются дробно-рациональные функции комплексной переменной  $s$ . Записывая уравнения регулятора (5.10) в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях по вектору  $z$ , нетрудно убедиться в том, что модели (5.10) и (5.11) связаны соотношением

$$W(s) = K(I_\nu s - M)^{-1}(M_1 + sM_2 + \dots + s^{\mu-1}M_\mu), \quad (5.12)$$

где  $I_\nu$  – единичная матрица размером  $\nu \times \nu$ ;  $W_2(s) = \det(I_\nu s - M)$ .

Следует отметить, что математическая модель (5.11) может быть трактована как наиболее общее представление линейных регуляторов, охватывающее как регуляторы прямого (5.8) ( $\nu = 0$ ), так и непрямого (5.9), (5.10) действия.

Очевидно, что при выполнении условия (5.6), существует бесконечно много регуляторов, стабилизирующих заданное контролируемое движение объекта (5.1). При этом естественно внести в рассмотрение количественные характеристики качества стабилизации. С этой целью на движениях замкнутой системы, уравнения которой согласно (5.1), (5.3) и (5.11) могут быть представлены в виде

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = F(\bar{x}, \bar{\delta}, \bar{f}_p + f); \\ \bar{\delta} = \bar{\delta}_p + W(p)(\bar{x} - \bar{x}_p), \end{cases} \quad (5.13)$$

из каких-либо соображений содержательного (неформального) характера зададим некоторый неотрицательный функционал

$$J_H = J_H(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\delta}(t)). \quad (5.14)$$

При одних и тех же начальных условиях для замкнутой системы (5.13) и одной и той же функции  $\mathbf{f}(t)$  функционал (5.14) зависит от выбора передаточной матрицы  $W(p)$  регулятора (5.11) (или, что то же самое, от выбора степеней  $\mu$  и  $\nu$  и матриц  $K, M, M_i$  ( $i = 1 \dots \mu$ ) в (5.10)), т. е.

$$J_H = J_H(\bar{\mathbf{x}}(t, W(p)), \bar{\delta}(t, W(p))) = J_H(W(p)) = J_H(W). \quad (5.15)$$

*Определение.* Регулятор  $\delta = W^0(p)\mathbf{x}$  будем называть оптимальным по отношению к функционалу (5.15), если он является стабилизирующим в указанном выше смысле и среди всех регуляторов вида (5.11) доставляет величине  $J_H(W)$  наименьшее возможное значение.

*Определение.* Задачей аналитического оптимального синтеза линейных регуляторов будем называть задачу

$$J_H = J_H(W) \rightarrow \inf_{W \in \Omega_1} \quad (5.16)$$

о поиске оптимального стабилизирующего регулятора по отношению к функционалу  $J_H$ . Здесь  $\Omega_1$  – множество передаточных матриц регуляторов вида (5.11) – матриц размером  $m \times n$  с дробно-рациональными компонентами, такими, что характеристический полином замкнутой линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\delta + C_f \mathbf{f}; \\ \dot{\mathbf{z}} &= M\mathbf{z} + M_1\mathbf{x} + M_2\dot{\mathbf{x}} + \dots + M_\mu \mathbf{x}^{(\mu-1)}; \\ \delta &= K\mathbf{z} \end{aligned} \quad (5.17)$$

является гурвицевым.

*Определение.* Задачей параметрического синтеза будем называть задачу нелинейного программирования, состоящую в поиске всех компонентов матриц  $K, M, M_i$  ( $i = 1 \dots \mu$ ) при заданных фиксированных  $\mu$  и  $\nu$  (или варьируемых параметрах, от которых эти компоненты зависят) регулятора вида (5.11), обеспечивающих минимум функционала (5.15)

$$J_H = J_H(W(p, \mathbf{h})) = J_H^* \rightarrow \inf_{\mathbf{h} \in \Omega_H}.$$

Здесь  $\mathbf{h} \in R^r$  – вектор варьируемых параметров, подлежащих поиску;  $\Omega_H = \{\mathbf{h} \in R^r : W(p, \mathbf{h}) \in \Omega_1\}$  – область гурвицевости характеристического полинома  $\Delta(s)$  замкнутой системы (5.17).



Нетрудно убедиться в том, что проведенное обсуждение основных положений, которые лежат в основе проектирования алгоритмов автоматического управления, в равной мере распространяется и на тот случай, когда наряду с математической моделью ДС рассматривается уравнение инерционности исполнительных органов

$$\dot{\delta} = F_{\delta}(\mathbf{u}).$$

Отличие состоит лишь в том, что при этом роль управления играет управляющий сигнал  $\mathbf{u}$ .

Другим базовым принципом, на котором основывается разработка алгоритмов автоматического управления, является использование асимптотических наблюдающих устройств. Особую роль наблюдатели играют при формировании штатных законов управления, что обусловлено необходимостью достижения следующих целей:

- получение асимптотических оценок тех компонент вектора состояния, которые недоступны для непосредственного измерения, однако используются в законах управления;
- получение асимптотических оценок производных компонент вектора состояния, используемых в законах управления;
- придание процессам в замкнутой системе определенных свойств, в частности – астатизма по регулируемым координатам;
- обеспечение возможности грубой (инерционной) и точной (среднеквадратичной настраиваемой) фильтрации волновых помех.

Рассмотрим некоторые свойства асимптотических наблюдателей, которые непосредственно используются в системах управления движением подвижных объектов. Пусть задана линейная математическая модель, описывающая динамику ДС в виде (5.5).

*Определение.* Динамическую систему вида

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\delta + \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \quad (5.18)$$

будем называть асимптотическим наблюдателем по отношению к модели (5.5), если матрица  $\mathbf{F}$  при невязках в (5.18) выбрана таким образом, что характеристический полином  $\Delta_H(s) = \det(\mathbf{I}s - \mathbf{A} + \mathbf{F})$  этой системы имеет корни только в открытой левой полуплоскости (является гурвицевым).

*Определение.* Вектор состояния  $\mathbf{z}$  асимптотического наблюдателя (5.18) будем именовать вектором оценок (или просто оценками) по отношению к

вектору состояния  $\mathbf{x}$  в (5.5) при  $\mathbf{f}(t)=0$  в том смысле, что имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)) = 0.$$

*Доказательство.* Введем в рассмотрение вектор невязок  $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)$  и, вычитая из (5.5) (при  $\mathbf{f} = 0$ ) уравнение (5.19), получим

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{z}} = A(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + F(\mathbf{x} - \mathbf{z}),$$

или

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (A - F)\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5.19)$$

Поскольку при условии гурвицевости полинома  $\Delta_H(s) = \det(Is - A + F)$  нулевое положение равновесия системы (5.19) асимптотически устойчиво по Ляпунову, выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)) = 0,$$

что и требовалось показать.

Как и ранее, с целью упрощения выкладок будем считать, что управлением для системы (5.5) непосредственно является вектор  $\boldsymbol{\delta}$ , характеризующий отклонения исполнительных органов.

Введем управление для объекта (5.5), формируемое в виде обратной связи по закону

$$\boldsymbol{\delta} = K(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t)), \quad (5.20)$$

где  $\mathbf{x}^*(t)$  – вектор задающих командных сигналов. Будем считать, что управление (5.20) является стабилизирующим по отношению к отклонению от заданного движения. Это значит, что матрица  $K$  в (5.20) выбрана из условия гурвицевости характеристического полинома  $\Delta_0(s) = \det(Is - A - BK)$  замкнутой системы (5.5), (5.20).

Базовым утверждением, на котором основывается применение асимптотических наблюдателей в системах управления движением ДС, является следующая теорема.

*Теорема.* Пусть начальные условия для объекта (5.5) и наблюдателя (5.18) совпадают, выполняется равенство  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}(0)$ . Тогда движение замкнутой системы (5.5), (5.18) при  $\mathbf{f} = 0$  тождественно совпадает (для любых  $t \in [0, \infty]$ ) с движением устойчивой замкнутой системы вида

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\delta; \\ \dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} + B\delta + F(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \\ \delta &= K(\mathbf{z} - \mathbf{x}^*(t)),\end{aligned}\tag{5.21}$$

в которой управление формируется, в отличие от (5.20), по выходу асимптотического наблюдателя.

Приведенное утверждение, которое достаточно широко известно в теории асимптотических наблюдателей, допускает ряд весьма существенных обобщений, на которых непосредственно и основывается общая структура штатных алгоритмов автоматического управления. Указанные обобщения сформулируем в виде двух следующих теорем.

*Теорема 1.* Пусть начальные условия для объекта (5.5) и наблюдателя (5.18) совпадают, т. е. выполняется равенство  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}(0)$ . Тогда движение замкнутой системы (5.5), (5.20) (при  $\mathbf{f} \equiv 0$ ) тождественно совпадает (для любых  $t \in [0, \infty]$ ) с движением устойчивой замкнутой системы вида

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\delta; \\ \dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} + B\delta + F(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \\ \delta &= K(\mathbf{z} - \mathbf{x}^*(t)) + G(p)(\mathbf{x} - \mathbf{z}),\end{aligned}\tag{5.22}$$

где  $G(p) = M(p)/\Phi(p)$  – произвольная матрица с дробно-рациональными компонентами от оператора дифференцирования  $p = d/dt$ , имеющими гурвицев общий знаменатель  $\Phi(p)$ .

В дальнейшем вектор  $L\xi = G(p)(\mathbf{x} - \mathbf{z})$  будем называть выходом дополнительного фильтра, а вектор  $\xi$  – вектором его состояния.

И, наконец, рассмотрим последнее обобщающее утверждение, сформулировав его в виде следующей теоремы.

*Теорема 2.* Если начальные условия для объекта (5.5) и наблюдателя (5.18) совпадают, т. е. выполняется равенство  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}(0)$ , и если передаточная функция  $F(s) = M_1(s)/\Phi_1(s)$  такова, что характеристический полином  $\Delta_\Phi(s)$  системы

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + B\delta + F(p)(\mathbf{x} - \mathbf{z})\tag{5.23}$$

является гурвицевым, то движение замкнутой системы (5.5), (5.20) (при  $\mathbf{f} \equiv 0$ ) тождественно совпадает (для любых  $t \in [0, \infty]$ ) с движением устойчивой замкнутой системы

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\delta; \\
\dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} + B\delta + F(p)(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \\
\delta &= K(\mathbf{z} - \mathbf{x}^*(t)) + G(p)(\mathbf{x} - \mathbf{z}).
\end{aligned}
\tag{5.24}$$

Основной смысл всех приведенных утверждений состоит в том, что любые процессы маневрирования и стабилизации при отсутствии внешних возмущений могут быть реализованы с тождественным качеством не через реальные координаты, которые нельзя измерять в полном составе, а через их оценки, получаемые с помощью асимптотических наблюдателей.

Введение в состав наблюдателя и уравнения управления нетрадиционной дополнительной динамики, определяемой передаточными матрицами  $G(s)$  и  $F(s)$ , призвано обеспечивать борьбу с внешними возмущениями (их «фильтрацию» – подавление), отклоняющими оценки  $\mathbf{z}$  от оцениваемого вектора  $\mathbf{x}$ . В качестве возмущений обычно выступают волновые помехи и (возможно) шумы датчиков измерений.

## 5.2. Общая структура алгоритмов управления

Линейная математическая модель замкнутой системы управления движением со штатными алгоритмами управления, включающими асимптотические наблюдатели, в векторно-матричной форме представляется следующими уравнениями:

а) линейная модель объекта управления вида (5.5);

б) линейная модель инерционности исполнительных органов:

$$\dot{\delta} = \mathbf{u}; \tag{5.25}$$

в) уравнение асимптотического наблюдателя:

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + B\delta + R\mathbf{y} + Q(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \tag{5.26}$$

г) уравнение инерционного фильтра:

$$\dot{\mathbf{y}} = \Gamma\mathbf{y} + P(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \tag{5.27}$$

д) уравнение дополнительного фильтра:

$$\dot{\zeta} = A_{\zeta}\zeta + B_{\zeta}\mathbf{y}; \quad \xi = C_{\zeta}\zeta; \tag{5.28}$$

е) уравнение основного управляющего сигнала:

е<sub>1</sub>) позиционный вариант:

$$\mathbf{u} = K(\mathbf{z} - \mathbf{x}^*) - \delta + K_{\Delta}\mathbf{y} + \xi, \tag{5.29}$$

е<sub>2</sub>) скоростной вариант:

$$\mathbf{u} = L\dot{\mathbf{z}} + N(\mathbf{z} - \mathbf{x}^*) + \xi. \quad (5.30)$$

В приведенных соотношениях уравнения (5.5) и (5.25) представляют математическую модель объекта управления, а уравнения (5.26)–(5.28) и (5.29) либо (5.26)–(5.28) и (5.30) – математическую модель управляющих алгоритмов, которая в равной мере используется для управления как линейной, так и нелинейной моделями объекта.

В данных уравнениях использованы следующие обозначения

$\mathbf{x}$  – вектор состояния объекта;

$\mathbf{u}$  – вектор управляющих воздействий;

$\mathbf{z}$  – вектор состояния наблюдателя;

$\mathbf{y}$  – вектор состояния грубого фильтра (оценок возмущений);

$\zeta$  – вектор состояния точного фильтра;

$\xi$  – вектор выхода точного фильтра;

$\mathbf{x}^*$  – вектор командных сигналов.

Все матрицы в приведенных уравнениях имеют постоянные компоненты при фиксированной скорости хода.

В дальнейшем уравнения (5.26) и (5.27), рассматриваемые совместно, будем называть уравнениями обобщенного наблюдателя фильтра (ОНФ)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} + B\delta + R\mathbf{y} + Q(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \\ \dot{\mathbf{y}} &= \Gamma\mathbf{y} + P(\mathbf{x} - \mathbf{z}), \end{aligned} \quad (5.31)$$

которые после исключения вектора  $\mathbf{y}$  могут быть записаны в свернутой форме вида

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + B\delta + F(p)(\mathbf{x} - \mathbf{z}), \quad (5.32)$$

где  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования.

Уравнения дополнительного фильтра (ДФ) (5.28) также могут быть свернуть: к форме «вход-выход»:

$$\xi = G(p)(\mathbf{x} - \mathbf{z}). \quad (5.33)$$

С учетом (5.32) и (5.33), математическая модель алгоритмов автоматического управления (в позиционном варианте) представляется следующими формулами

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} + B\delta + F(p)(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \\ \mathbf{u} &= K(\mathbf{z} - \mathbf{x}^*) - \delta + [G(p) + K_{\Delta}F(p)](\mathbf{x} - \mathbf{z}). \end{aligned} \quad (5.34)$$

При выбранной структуре обратной связи (5.34) выбору в процессе проектирования системы подлежат ее следующие элементы:

- матрица  $K$  базового закона управления  $u = K(z - x^*) - \delta$ ;
- передаточная матрица  $F(s)$  при невязках в обобщенном наблюдателе-фильтре (или  $\dim y$  и матрицы  $R, Q, \Gamma, P$  в системе (5.31));
- передаточная матрица  $G(s)$  дополнительного фильтра (или  $\dim \zeta$  и матрицы  $A_\zeta, B_\zeta, C_\zeta$  в уравнении системы (5.28));
- постоянная матрица  $K_\Delta$  в уравнении (5.29) для позиционного варианта алгоритмов управления;
- законы формирования командных сигналов  $x^*$  как функций времени либо состояния объекта управления.

Перечисленные искомые элементы несут следующую функциональную основную нагрузку в замкнутой системе (как линейной, так и нелинейной):

1. Числовая матрица  $K$  полностью определяет динамику собственного движения системы управления, т. е. качество стабилизации отклонений регулируемых координат от движения, определяемого задающими командными сигналами.

2. Передаточная матрица  $F(s)$  обеспечивает желаемую динамику движения замкнутой системы, вызванного низкочастотными внешними воздействиями типа  $f(t) = f_0 l(t)$  и, возможно, грубую (инерционную) фильтрацию волновых помех.

3. Постоянная матрица  $K_\Delta$ , обеспечивает астатизм замкнутой системы по регулируемым координатам.

4. Передаточная матрица  $G(s)$  обеспечивает точную (настраиваемую) фильтрацию волновых возмущений в канале управления.

5. Задающие командные сигналы, являющиеся компонентами вектора  $x^*$ , определяют качество процессов маневрирования по регулируемым координатам.

### 5.3. Синтез базовых алгоритмов автоматической стабилизации

Базовые алгоритмы стабилизации являются ключевым элементом штатных законов автоматического управления. Они однозначно характеризуются заданием матрицы  $K$  в уравнении (5.29), которая, как было отмечено ранее, полностью определяет динамику собственного движения системы управления,

т. е. качество стабилизации отклонений регулируемых координат от желаемого движения, определяемого задающими командными сигналами [15].

В связи с отмеченным обстоятельством целью рассматриваемой задачи синтеза является поиск такой матрицы  $K$ , которая удовлетворяет совокупности требований, предъявляемых к качеству собственного движения (при отсутствии возмущений).

В соответствии с приведенными ранее теоремами, для формализованной постановки подобной задачи не обязательно рассматривать уравнения (5.5), (5.25)–(5.30) полной замкнутой системы со штатными автоматами управления. Здесь вполне достаточно ограничиться рассмотрением линейной замкнутой системы, в которой обратная связь формируется по вектору состояния. Это связано с тем, что рассматриваемые динамические процессы для такой системы не отличаются от процессов для штатных алгоритмов управления.

Математическая модель указанной системы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\delta, \quad \mathbf{x}(0) = 0; \\ \dot{\delta} &= K(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) - \delta,\end{aligned}\tag{5.35}$$

где через  $\mathbf{x}^*$  обозначен вектор задающего командного сигнала, имеющий постоянные компоненты. Состав указанных компонент зависит от выбранной плоскости стабилизации и от конкретного режима движения объекта.

На движениях замкнутой системы (5.35) зададим функционал, определяющий качество динамического процесса, значениями которого являются величины перерегулирования по соответствующей координате или обобщенное перерегулирование вида

$$J_1 = J_1(\mathbf{x}(t, K), \delta(t, K)) = J_1(K) = \sup_{t \in (0, \infty)} \frac{\|\mathbf{x}(t, K) - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}^*\|}.$$

Введем в рассмотрение допустимое множество  $\Omega_K$  матриц  $K$ , определяя его следующим образом:

$$\Omega_K = \{K : \Delta_i \in C_\Delta, \Delta_0(\Delta_i) = 0, i = 1 \dots n, T_p(k) \leq T_0\}.\tag{5.36}$$

В формуле (5.36) через  $T_p(k)$  обозначена длительность переходного процесса, а через  $T_0$  допустимое значение этой длительности. Через  $\Delta_0(s)$  обозначен характеристический полином системы (5.35), т. е.

$$\Delta_0(s) = \det \begin{pmatrix} I_n s - A & -B \\ (s+1)I_m & -K \end{pmatrix},$$

а через  $\Delta_i$  – его корни; символ  $C_\Delta$  обозначает область на комплексной плоскости, которой должны принадлежать указанные корни. Эта область, условно изображенная на рис. 5.1, может быть формально представлена следующим образом:

$$C_\Delta = \left\{ \Delta_i \in C^1 : \operatorname{Re} \Delta_i \leq -\alpha, \operatorname{arctg} \left| \frac{\operatorname{Im} \Delta_i}{\operatorname{Re} \Delta_i} \right| \leq \beta \right\},$$

где величина  $\alpha$  определяет заданную степень устойчивости, а величина  $\beta$  – заданную степень колебательности замкнутой системы (5.35). С учетом введенных обозначений, сформулируем задачу о поиске матрицы  $K$  для базовых алгоритмов стабилизации вида  $\mathbf{u} = K\mathbf{x} - \delta$ , которая имеет вид

$$J_1(K) = \min_{K \in \Omega_K} \quad (5.37)$$

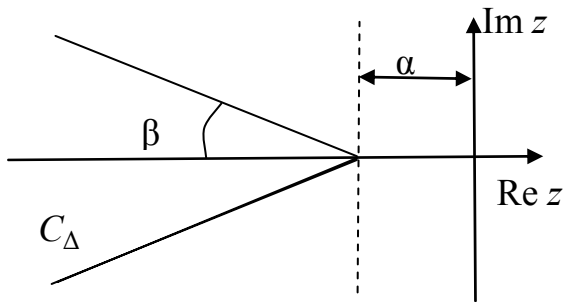


Рис. 5.1. Степень устойчивости динамической системы

Поставленная задача (5.37) является типичным примером задачи оптимального параметрического синтеза. Она представляет собой исключительно сложный вариант проблемы нелинейного программирования, отягощенный сложным заданием целевой функции и допустимого множества,

определяемого наложенными ограничениями. Тем не менее, в настоящее время разработаны различные численные методы, позволяющие найти искомую матрицу  $K$ . В частности, могут быть использованы подходы, предложенные в работе [16].

#### 5.4. Синтез обобщенного наблюдателя-фильтра

Обобщенный наблюдатель-фильтр (ОНФ) является центральным звеном штатных алгоритмов автоматического управления ДС, выходной вектор  $\{z, y\}$  которого по существу замещает реально измеряемые физические координаты объекта, а также те координаты и их производные, которые недоступны непосредственному измерению при формировании управля-



ющих сигналов. В соответствии с общей структурой штатных алгоритмов управления уравнения ОНФ имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} + B\delta + R\mathbf{y} + Q(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \\ \dot{\mathbf{y}} &= \Gamma\mathbf{y} + P(\mathbf{x} - \mathbf{z}).\end{aligned}$$

Здесь матрицы  $A$  и  $B$  соответствуют линейной модели движения ДС. Остальные матрицы  $R, Q, P, \Gamma$  в уравнениях ОНФ априорно являются неизвестными и подлежат поиску в процессе синтеза ОНФ. Как было отмечено ранее, эти постоянные (при фиксированной скорости хода) матрицы или однозначно определяемая ими передаточная матрица  $F(s) = R(I_2s - \Gamma)^{-1}P + Q$  обеспечивают желаемую динамику движения замкнутой системы, вызванного низкочастотными скачкообразными внешними воздействиями типа  $\mathbf{f}(t) = f_0 \mathbf{1}(t)$ , а также грубую (инерционную) фильтрацию волновых помех.

В соответствии с теоремой, характеристический полином замкнутой системы с обратной связью, формируемой по выходу ОНФ, представляется формулой  $\Delta(s) = \Delta_0(s)\Delta_\Phi(s)\Phi(s)$ , откуда следует, что его корнями одновременно являются и корни характеристического полинома  $\Delta_\Phi(s)$ .

В связи с отмеченным обстоятельством, для выполнения требований по динамике замкнутой системы на низких частотах выбор искоемых матриц  $R, Q, P, \Gamma$  следует осуществлять, обеспечивая размещение корней полинома

$$\Delta_\Phi(s) = \det \begin{pmatrix} I_4s - A + Q & -R \\ P & I_2s - \Gamma \end{pmatrix}$$

в пределах заданной области  $C_\Delta$  на комплексной плоскости. Как и в 5.3, определим эту область соотношением

$$C_\Delta = \left\{ \Delta_i \in C^1 : \operatorname{Re} \Delta_i \leq -\alpha, \operatorname{arctg} \left| \frac{\operatorname{Im} \Delta_i}{\operatorname{Re} \Delta_i} \right| \leq \beta \right\},$$

где величина  $\alpha$  определяет заданную степень устойчивости, а величина  $\beta$  заданную степень колебательности ОНФ (5.31). Напомним, что схематичное изображение области  $C_\Delta$  приведено на рис. 5.1.

Проблема грубой фильтрации волновой помехи с помощью ОНФ решается следующим образом. Будем трактовать ОНФ как динамическую систему с входным векторным сигналом  $\{\mathbf{x}, \delta\}$  и выходным сигналом  $\{\mathbf{z}, \mathbf{y}\}$ .

При этом уравнения (5.31) могут быть записаны в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях в виде

$$\begin{pmatrix} sz \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-Q & R \\ -P & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q & B \\ P & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix},$$

что эквивалентно

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = W_{\Phi}(s) \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

где через

$$W_{\Phi}(s) = \left( I_s - \begin{pmatrix} A-Q & R \\ -P & \Gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Q & B \\ P & O \end{pmatrix} \right)$$

обозначена передаточная матрица ОНФ от входа к выходу.

Заметим, что входной сигнал  $\{x, \delta\}$  для ОНФ является источником волновых помех, поступающих в канал управления через измерения. Очевидно, что степень подавления этих помех с помощью ОНФ определяется выбором матриц  $R, Q, P, \Gamma$  и будет тем большей, чем «меньше» матричный коэффициент усиления  $W_{\Phi}$  в уравнении (5.38) в рамках допустимого расположения корней полинома  $\Delta_{\Phi}$  в пределах области  $C_{\Delta}$ .

Введем количественную характеристику «малости» передаточной матрицы  $W_{\Phi}(s)$ , в качестве которой примем ее матричную норму для гильбертового пространства Харди  $H_2$ . Эта характеристика является функционалом, имеющим вид

$$J_2 = J(R, Q, P, \Gamma) = \|W_{\Phi}(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [W_{\Phi}^T(-j\omega) W_{\Phi}(j\omega)] d\omega}. \quad (5.39)$$

С учетом (5.39) представляется целесообразной следующая постановка формализованной задачи об инерционной фильтрации волновых помех с помощью ОНФ:

$$J_2(R, Q, P, \Gamma) = \|W_{\Phi}(s)\|_2 \rightarrow \min_{\{R, Q, P, \Gamma\} \in \Omega_{\Delta}}, \quad (5.40)$$

где допустимое множество искомых матриц определяется формулой

$$\Omega_{\Delta} = [R, Q, P, \Gamma : \Delta_i \in C_{\Delta}, \Delta_{\Phi}(\Delta_i) = 0, i = 1 \dots n_j, n_j = \deg \Delta_{\Phi}].$$

Заметим, что решение поставленной задачи (5.40) существенно определяется заданием величины  $\alpha$  допустимой степени устойчивости ОНФ.

В дальнейшем будем вместо этой величины задавать параметр  $T$ , связанный с  $\alpha$  прямой пропорциональной зависимостью  $\alpha = k_\alpha T$ , где  $k_\alpha$  – фиксированный множитель. Нетрудно показать, что чем меньше значение  $T$ , тем меньшей является величина минимума функционала  $J_2(R, Q, P, \Gamma)$ , т. е. тем лучше качество подавления волновой помехи. В связи с этим в дальнейшем параметр  $T$  будем называть степенью инерционной фильтрации (или просто степенью фильтрации) волновой помехи.

Следует обратить особое внимание на тот факт, что уменьшение величины  $T$ , улучшающее качество фильтрации, входит в противоречие с качеством динамики при скачкообразных возмущениях, поскольку влечет за собой приближение корней полинома  $\Delta_\Phi(s)$  к мнимой оси. В связи с этим степень фильтрации  $T$  в процессе движения объекта может изменяться по мере необходимости путем задания с пульта. При отсутствии высокочастотного возмущения величина этого параметра должна принимать максимальное значение. При наличии высокочастотного возмущения (волнения) в зависимости от его интенсивности величина параметра  $T$  уменьшается.

Сформулированная оптимизационная задача (5.40) синтеза ОНФ по существу является сложной задачей нелинейного программирования, приближенно решаемой с помощью специально разработанных численных методов.

### 5.5. Обеспечение астатизма по регулируемым координатам

Требование астатизма замкнутой системы по регулируемым координатам является обязательным условием функционирования штатных алгоритмов управления динамической системы.

В соответствии с общей структурной схемой штатных алгоритмов управления, запишем линейные уравнения динамики замкнутой системы в соответствующей плоскости стабилизации в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\delta + C_f \mathbf{f}(t); \\ \dot{\delta} &= \mathbf{u}; \\ \dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} + B\delta + R\mathbf{y} + Q(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \\ \dot{\mathbf{y}} &= \Gamma\mathbf{y} + P(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \\ \mathbf{u} &= W_{uz}(p)\mathbf{z} + W_{ux}(p)\mathbf{x} + W_{u\delta}(p)\delta.\end{aligned}\tag{5.41}$$

С формальной точки зрения, условие астатизма по регулируемой координате  $x_i$  для системы (5.41) записываются следующим образом:

для любого  $f_0 \in R^2$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0, \quad f(t) = f_0 1(t). \quad (5.42)$$

Эти условия могут быть представлены в следующей эквивалентной форме:

$$F_{fx_i}(0) = 0, \quad (5.43)$$

где  $F_{fx_i}(s)$  – передаточная матрица замкнутой системы (5.42) от возмущения к регулируемой координате  $x_i$  соответственно. Эта матрица в соответствии с (5.41) может быть определена следующим образом:

$$F_{fx}(s) = \Delta^{-1}(s) \det \begin{pmatrix} C_f & -B & 0 & 0 \\ 0 & I_2 s - W_{u\delta}(s) & -W_{uz}(s) & 0 \\ 0 & -B & I_4 s - A + Q & -R \\ 0 & 0 & P & I_2 s - \Gamma \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

где  $\Delta(s)$  – характеристический полином системы (5.41).

Таким образом, проблема обеспечения астатизма замкнутой системы по регулируемой координате сводится к такому выбору матриц  $W_{uz}(s)$ ,  $W_{ux}(s)$ ,  $W_{u\delta}(s)$  в уравнении для основного управляющего сигнала, чтобы выполнялось условие (5.43). Регулируемых координат может быть несколько, тогда, соответственно, в (5.43) увеличится количество условий.

Заметим, что при непосредственном использовании базовых статических алгоритмов стабилизации

$$u = Kx - \delta$$

с последующим формированием управляющих сигналов по выходу ОНФ в виде

$$u = Kz - \delta \quad (5.45)$$

имеем  $W_{uz}(s) = K$ ,  $W_{ux}(s) = 0$ ,  $W_{u\delta}(s) = -I_2$ . Непосредственная подстановка указанных матриц в формулы (5.44) позволяет убедиться в том, что условия (5.43) не выполняются, т. е. закон управления (5.45) не обеспечивает астатизм и нуждается в коррекции.

Заметим, что при проектировании систем управления могут быть применены два подхода к обеспечению астатизма (или, что то же самое, к обеспечению выполнения условия (5.43)), именуемые соответственно позиционной и скоростной астатической коррекцией.

*Астатические позиционные алгоритмы стабилизации.* Эти алгоритмы формируются на базе (5.45) путем введения дополнительного адаптивного корректирующего (балансирующего) сигнала:

$$u = Kz - \delta + K_{\Delta}y. \quad (5.46)$$

С учетом соотношения  $y = F(p)(x - z)$ , уравнение (5.46) принимает вид

$$u = Kz - \delta + K_{\Delta}F(p)(x - z),$$

откуда следует, что в данном случае имеем

$$W_{uz}(s) = K - K_{\Delta}F(s), \quad W_{ux}(s) = K_{\Delta}F(s), \quad W_{u\delta}(s) = -I_2. \quad (5.47)$$

Подставляя соотношения (5.47) в формулы (5.44), а затем в условие (5.43), получим систему из четырех неоднородных линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными – компонентами матрицы коррекции.

*Замечание.* Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для более общего способа введения позиционной астатической коррекции в виде

$$\mathbf{u} = K\mathbf{z} - \delta + K_{\Delta}(p)\mathbf{y}.$$

*Астатические скоростные алгоритмы стабилизации.* При данном способе обеспечения астатизма алгоритмы также формируются на базе (5.45). Однако здесь вместо введения дополнительного аддитивного корректирующего сигнала используется эквивалентное линейное выражение векторного слагаемого  $K\mathbf{x} - \delta$  через производные  $\dot{\mathbf{x}}$  и регулируемые координаты в силу уравнений объекта при  $\mathbf{f} \equiv 0$ . Этот подход приводит к переходу от (5.45) к эквивалентному (в определенном смысле) регулятору

$$\mathbf{u} = L\dot{\mathbf{x}} + N\mathbf{x}. \quad (5.48)$$

## 5.6. Синтез дополнительных фильтров

Дополнительные фильтры (ДФ) являются вспомогательным элементом штатных алгоритмов управления, который не функционирует постоянно и включается лишь по мере необходимости. ДФ рационально использовать в тех режимах движения, при которых ДС подвергается существенному воздействию высокочастотного возмущения (волнения). Характерной особенностью этих режимов, как правило, является малая скорость хода. Это обстоятельство определяет недостаточную эффективность исполнительных органов в плане повышения точности стабилизации заданного движения при наличии волнения. В связи с отмеченным обстоятельством, введение ДФ должно обеспечить максимальное подавление бесполезного сигнала (волно-

вой помехи), порождаемого волнением и поступающего в канал управления через измерительный комплекс.

В отличие от грубой инерционной фильтрации, обеспечиваемой ОНФ, дополнительные фильтры являются адаптивно настраиваемым элементом, который в ходе функционирования приспосабливается к частотным свойствам волнения.

Считая матрицы  $A, B, C_f, R, Q, P, \Gamma, K$  и  $K_\Delta$ , заданными, как в предшествующем подпункте, рассмотрим линейные уравнения системы, замкнутой астатическим позиционным регулятором

$$\mathbf{u} = K\mathbf{z} - \boldsymbol{\delta} + K_\Delta(p)\mathbf{y}. \quad (5.49)$$

В соответствии с общей структурой штатных алгоритмов управления введем в состав математической модели замкнутой системы уравнение дополнительного фильтра в нормальной форме

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = A_\zeta \boldsymbol{\zeta} + B_\zeta \mathbf{y}, \quad \boldsymbol{\xi} = C_\zeta \boldsymbol{\zeta}$$

или в операторной форме

$$\boldsymbol{\xi} = E_d(p)\mathbf{y}.$$

Выходной сигнал  $\boldsymbol{\xi}$  дополнительного фильтра аддитивно включим в алгоритм управления, переходя от (5.49) к уравнению

$$\mathbf{u} = K\mathbf{z} - \boldsymbol{\delta} + K_\Delta(p)\mathbf{y} + \boldsymbol{\xi} = K\mathbf{z} - \boldsymbol{\delta} + K_\Delta(p)\mathbf{y} + E_d(p)\mathbf{y}$$

или

$$\mathbf{u} = K\mathbf{z} - \boldsymbol{\delta} + E(p)\mathbf{y}, \quad (5.50)$$

где

$$E(p) = K_\Delta(p) + E_d(p). \quad (5.51)$$

Теперь рассмотрим линейные уравнения замкнутой дополненной системы, которые представим в матричной форме, предварительно исключив из состава переменных вектор управляющих сигналов  $\mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\boldsymbol{\delta} + C_f \mathbf{f}(t); \\ \dot{\boldsymbol{\delta}} &= K\mathbf{z} - \boldsymbol{\delta} + E(p)\mathbf{y}; \\ \dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} + B\boldsymbol{\delta} + R\mathbf{y} + Q(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \\ \dot{\mathbf{y}} &= \Gamma\mathbf{y} + P(\mathbf{x} - \mathbf{z}). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Переходя к изображениям по Лапласу при нулевых начальных условиях, систему (5.52) можно представить в матричной форме

$$\begin{pmatrix} I_4 s - A & -B & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)I_2 & -K & -E(s) \\ -Q & -B & I_4 s - A + Q & -R \\ -P & 0 & P & I_2 s - \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\delta} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{f}(s). \quad (5.53)$$

В соответствии с уравнениями (5.53) запишем передаточную матрицу  $W_{f\delta}$  замкнутой дополненной системы от возмущения  $\mathbf{f}$  к управляющим воздействиям  $\boldsymbol{\delta}$ :

$$W_{f\delta} = W_{f\delta}(s, E) = \det \begin{pmatrix} I_4 s - A & C_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K & -E(s) \\ -Q & 0 & I_4 s - A + Q & -R \\ -P & 0 & P & I_2 s - \Gamma \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

Введем в рассмотрение функционал  $J(E)$ , зависящий от задания матрицы  $E(s)$  и определяемый некоторой матричной нормой передаточной матрицы  $\|W_{f\delta}\|$ , представленной формулой (5.54).

Выбор конкретной нормы указанной передаточной матрицы порождает различные классы задач оптимального синтеза стабилизирующих управлений, среди которых в настоящее время наиболее популярными являются следующие:

- задачи о минимизации нормы  $\|H\|_2$  (типичный представитель – задача LQG-оптимального синтеза);
- задачи о минимизации нормы  $\|H\|_\infty$  (задача  $H_\infty$  – оптимального синтеза);
- задачи о минимизации указанных выше норм для «взвешенных» передаточных матриц  $HS_1$ , где  $S_1(s)$  – заданная весовая матричная функция (например, задачи средне-квадратичного оптимального синтеза и синтеза гарантирующих регуляторов соответственно).

Приведенные нормы вводятся следующими соотношениями:

а) норма  $\|H\|_2$ :

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [H^T(-j\omega)H(j\omega)] d\omega},$$

в частности, для SISO-задачи (со скалярными входом ( $d$ ) и выходом ( $e$ )) получим

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega};$$

б) норма  $\|H\|_{\infty}$ :

$$\|H\|_{\infty} = \max_{\omega \in (0, \infty)} \bar{\sigma}(\omega);$$

где  $\bar{\sigma}(\omega)$  – максимальное сингулярное число матрицы  $H(j\omega)$  (корень квадратный из максимального собственного значения эрмитовой матрицы  $H^T(-j\omega)H(j\omega)$ ), в частности для SISO-задачи имеем

$$\|H\|_{\infty} = \max_{\omega \in (0, \infty)} |H(j\omega)|;$$

в) взвешенная норма  $\|HS_1\|_2$ :

$$\begin{aligned} \|HS_1\|_2 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [S_1^T(-j\omega)H^T(-j\omega)H(j\omega)S_1(j\omega)] d\omega} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [H(j\omega)S_v(\omega)H^T(-j\omega)] d\omega}, \end{aligned}$$

где  $S_v(\omega) = S_1(j\omega)S_1^T(-j\omega)$ ; в частности, для SISO-задачи –

$$\|HS_1\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_v(\omega) d\omega},$$

где  $S_v(\omega) = |S_1(j\omega)|^2$ ;

г) взвешенная норма  $\|HS_1\|_{\infty}$ :

$$\|HS_1\|_{\infty} = \max_{\omega \in (0, \infty)} \bar{\sigma}_v(\omega),$$

где  $\bar{\sigma}_v(\omega)$ , – максимальное сингулярное число матрицы  $H(j\omega)S_1(j\omega)$ .

Для целей фильтрации чаще всего используется взвешенная матричная норма  $\|HS_1\|_2$  передаточной матрицы  $W_{f\delta}$ . Здесь в качестве весовой матрицы  $S_1$  принимается результат факторизации матрицы  $S_f(\omega)$  спектральных плотностей возмущения, определяемого высокочастотным возмущением  $S_f(\omega) = S_1(j\omega)S_1^T(-j\omega)$ .



В соответствии с выбором нормы  $\|HS_1\|_2$ , функционал, определяемый этой нормой и задающий качество фильтрации, можно представить в следующем виде:

$$J(E) = \|W_{f\delta} S_1\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [W_{f\delta}(j\omega) S_v(\omega) W_{f\delta}^T(-j\omega)] d\omega}. \quad (5.55)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что введенный функционал (2.79) характеризует интенсивность функционирования исполнительных органов в условиях высокочастотного возмущения. В связи с этим представляется целесообразным поставить задачу об обеспечении минимума этого функционала за счет выбора матрицы  $E(s)$  в уравнении (5.54) для основного управляющего сигнала:

$$J(E) = \|W_{f\delta} S_1\|_2 \rightarrow \min_{E \in \Omega_E}. \quad (5.56)$$

Сформулированная оптимизационная задача по существу является задачей о поиске оптимальной передаточной функции дополнительного фильтра. Действительно, если найдена оптимальная матрица – решение задачи (5.56):

$$E_0(s) = \arg \min_{E \in \Omega_E} J(E) = \arg \min_{E \in \Omega_E} \|W_{f\delta} S_1\|_2,$$

то оптимальная передаточная матрица  $E_{d0}(s)$  ДФ в соответствии с (5.51) может быть найдена по формуле

$$E_{d0}(s) = E_0(s) - K_{\Delta}(s).$$

Допустимое множество  $\Omega_E$  в задаче (5.56) определяется требованиями, предъявляемыми к динамическим свойствам замкнутой системы, аналогично 5.3 и 5.4. В наиболее простом варианте его можно принять в виде

$$\Omega_E = \{E : \Delta_i \in C_{\Delta}, \Phi_d(\Delta_i) = 0, i = 1 \dots n_d\},$$

где  $\Phi_d(\Delta_i)$  – характеристический полином ДФ;  $n_d$  – степень этого полинома;  $C_{\Delta}$  – область на комплексной плоскости, описанная выше и представленная на рис. 5.1.

Необходимо отметить, что сформулированная оптимизационная задача (5.56) на допустимом множестве  $\Omega_E$  является исключительно сложной в аналитическом плане. В настоящее время разработана теория и численные методы решения подобных задач, относящихся к области многоцелевой стабилизации динамических объектов.

Пример. Для движения подвижного объекта в горизонтальной или вертикальной плоскости, описываемого моделью (5.5) с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{11}v & a_{13} - a_{11}v^2 & (a_{21} - 1)v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{21}v & a_{21}v^2 - a_{23} & -a_{22}v \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a_{15}v^2 & -a_{14}v^2 \\ 0 & 0 \\ a_{25}v^2 & -a_{24}v^2 \end{bmatrix},$$

где  $v$  – скорость хода;  $a_{ij}$  – коэффициенты математической модели, структура оптимального дополнительного фильтра имеет вид

$$E_{d0}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{11}^1 s^2 + \alpha_{01}^1 s}{s^3 + \beta_2^1 s^2 + \beta_1^1 s + \beta_0^1} & \frac{\alpha_{12}^1 s^2 + \alpha_{02}^1 s}{s^3 + \beta_2^1 s^2 + \beta_1^1 s + \beta_0^1} \\ \frac{\alpha_{21}^2 s^2 + \alpha_{01}^2 s}{s^3 + \beta_2^2 s^2 + \beta_1^2 s + \beta_0^2} & \frac{\alpha_{12}^2 s^2 + \alpha_{02}^2 s}{s^3 + \beta_2^2 s^2 + \beta_1^2 s + \beta_0^2} \end{bmatrix}.$$

Параметры  $\alpha_{ij}^k, \beta_i^k$  вычисляются по коэффициентам  $a_{ij}$  при заданной скорости хода  $v$ , степени инерционной фильтрации  $T$ , средней частоте волнения  $\omega_0$ . Для вычисления используются достаточно простые формулы, позволяющие реализовать их с помощью бортового программного обеспечения.

Весьма важно, что введение дополнительных фильтрующих сигналов сохраняет устойчивость и не нарушает свойство астатизма замкнутой системы по регулируемым координатам.

## 5.7. Алгоритмы автоматического маневрирования подвижным объектом

Под маневрированием подвижного объекта в плоскостях стабилизации понимают изменение на заданные величины соответствующих угловых и линейных координат объекта управления. Перед началом маневра и после его завершения все угловые и линейные скорости (исключая скорость хода), а также отклонения исполнительных органов при отсутствии внешних возмущений должны быть нулевыми. Главными требованиями, которые предъявляются к качеству маневра, являются предельное быстродействие и минимальное перерегулирование по управляемой координате.

Для математической формализации проблемы автоматического маневрирования в принципе могут быть применены следующие подходы:

– теория оптимального программного быстрогодействия с реализацией управления в виде программы отклонения исполнительных органов в функции времени;

– теория оптимального быстрогодействия с реализацией управления в виде нелинейной обратной связи;

– теория линейных регуляторов с их параметрической оптимизацией по коэффициентам закона управления.

Необходимо отметить, что, к сожалению, при построении штатных законов управления не удастся ограничиться каким-либо одним из указанных подходов в силу целого ряда присущих им недостатков.

В первую очередь, укажем недостатки подхода, базирующегося на теории оптимального быстрогодействия.

1. Большие пределы изменения координат объекта в ходе маневров не позволяют пользоваться при синтезе оптимальных программ линейными моделями объекта, что с учетом большой размерности исключает построение оптимальных программ на борту в ходе движения.

2. Реализация оптимальных программ (даже при их наличии) невозможна без использования обратных связей, поскольку любое программное движение в вертикальной плоскости не является асимптотически устойчивым по Ляпунову и, кроме того, поскольку на ДС постоянно воздействуют внешние неопределенные факторы, требующие непрерывного функционирования системы стабилизации.

3. Формирование нелинейного оптимального по быстроддействию регулятора в силу сложности нелинейных уравнений динамики практически невозможно. Отметим, что всякие приближения к нему нежелательны, поскольку движения оптимальных нелинейных систем имеют ряд динамических особенностей вблизи поверхностей переключения, которые отрицательно сказываются на приводе исполнительных органов.

4. Непосредственное использование нелинейных регуляторов, существенно отличающихся по своей структуре от штатных линейных алгоритмов управления, требует выполнения соответствующих переключений перед началом маневра, что крайне нежелательно с позиций качества управления и его надежности.

Альтернативным подходом по отношению к теории оптимального быстродействия является обеспечение автоматического маневрирования с помощью линейных алгоритмов обратной связи вида

$$\mathbf{u} = \tilde{K}\tilde{\mathbf{x}} + k_p(x_p - x_{pz}) - \delta, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ x_p \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

с позиционным базовым законом управления или

$$\mathbf{u} = L\dot{\mathbf{x}} + v_p(x_p - x_{pz}) \quad (5.58)$$

со скоростным базовым алгоритмом стабилизации. Здесь через  $x_p$  обозначена регулируемая координата объекта, а через  $x_{pz}$  – ее желаемое (заданное) значение в конце маневра. Заметим, что при каждом фиксированном значении скорости хода и заданной величине  $x_{pz}$ , коэффициенты законов (5.57) и (5.58) могут быть выбраны так, чтобы обеспечить оптимальный по быстродействию маневр. Однако изменение коэффициентов автоматического закона управления в столь широких пределах крайне нежелательно. С другой стороны, фиксация коэффициентов по отношению к  $x_{pz}$  на некотором уровне приводит к существенному недоиспользованию возможностей органов управления либо к большим перерегулировкам.

В связи с отмеченными обстоятельствами обеспечение автоматического маневрирования подвижного объекта осуществляется на базе специального подхода, объединяющего достоинства оптимального быстродействия и линейного регулирования. Предлагаемый подход состоит в следующем.

1. По известной скорости хода для существенно упрощенной линейной модели движения объекта тем или иным способом (построением оптимальной программы либо синтезом оптимальной обратной связи) формируются квазиоптимальные по отношению к соответствующей базовой модели законы

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p^*(t), \quad \dot{\mathbf{x}}_p = \dot{\mathbf{x}}_p^*(t), \quad \delta = \delta^*(t), \quad (5.59)$$

изменения регулируемой координаты, ее производной и положения исполнительных органов при маневре.

2. С целью определенной компенсации неучтенных свойств объекта управления и условий его функционирования, тем или иным способом осуществляется коррекция функций (5.59).

3. В соответствии с (5.57) или (5.58) формируются базовые алгоритмы автоматического маневрирования вида

$$\mathbf{u} = K\mathbf{x} + k_p^p (\dot{\mathbf{x}}_p - \dot{\mathbf{x}}_p^*(t)) + k_p (\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_p^*(t)) - (\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}^*(t)) \quad (5.60)$$

или

$$\mathbf{u} = L\tilde{\mathbf{x}} + \mu_p^p (\dot{\mathbf{x}}_p - \dot{\mathbf{x}}_p^*(t)) + \nu_p (\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_p^*(t)) + \boldsymbol{\delta}^*(t)$$

для позиционного или скоростного варианта соответственно.

4. Осуществляется переход от базовых алгоритмов (5.60) к законам управления по выходу ОНФ.

При переходе к законам управления по выходу фильтра автоматически учитывается зависимость коэффициентов закона от скорости подвижного объекта, а также от степени инерционной фильтрации.

## Список литературы

1. Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab. СПб.: Наука, 2001.
2. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука, Физматлит, 1997.
3. Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф. П. Введение в системный анализ. М.: Высш. шк., 1989.
4. Мирошников А. Н., Румянцев С. Н. Моделирование систем управления технических средств транспорта. СПб.: Элмор, 1999.
5. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. М.: Радио и связь, 1986.
6. Хоггер К. Введение в логическое программирование. М.: Мир, 1988.
7. Леонов Г. А., Буркин И. М., Шепелявый А. И. Частотные методы в теории колебаний. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
8. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
9. Блехман И. И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
10. Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970.
11. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951.
12. Полушин И. Г., Фрадков А. Л., Хилл В. Пассивность и пассивфикация нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. 2000. № 3.
13. Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика и основы эконометрии. М.: ЮНИТИ, 1998.
14. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
15. Компьютерное моделирование систем управления движением морских подвижных объектов / Е. И. Веремей, В. М. Корчанов, М. В. Коровкин, С. В. Погожев. / НИИ Химии СПбГУ. СПб., 2002.
16. Корчанов В. М., Веремей Е. И. Многоцелевая стабилизация динамических систем одного класса // Автоматика и телемеханика. 1998. № 9.

## Содержание

Список сокращений .....	3
Введение .....	4
1. Основы математического моделирования .....	5
1.1. Понятие математической модели .....	5
1.2. Математическое моделирование и теория систем .....	7
1.3. Системный анализ и декомпозиция .....	10
2. Моделирование линейных систем .....	14
2.1. Системы линейных алгебраических уравнений .....	14
2.2. Численные методы решения систем линейных дифференциальных уравнений .....	22
2.3. Преобразование линейных моделей .....	28
3. Выбор структуры математической модели .....	34
3.1. Классификация моделей .....	34
3.2. Модели состояния динамических систем .....	39
3.3. Детерминированные и стохастические модели .....	48
3.4. Нечеткие модели .....	52
3.5. Хаотические модели .....	60
3.6. Моделирование нелинейных систем .....	76
4. Выбор параметров математической модели .....	83
4.1. Предварительные преобразования моделей .....	83
4.2. Регрессионный анализ и метод наименьших квадратов .....	92
4.3. Адаптивные модели и рекуррентные методы .....	95
4.4. Принципы выбора модели .....	98
5. Математические модели алгоритмов управления .....	101
5.1. Принципы построения алгоритмов управления .....	101
5.2. Общая структура алгоритмов управления .....	108
5.3. Синтез базовых алгоритмов автоматической стабилизации .....	110
5.4. Синтез обобщенного наблюдателя-фильтра .....	112
5.5. Обеспечение астатизма по регулируемым координатам .....	115
5.6. Синтез дополнительных фильтров .....	117
5.7. Алгоритмы автоматического маневрирования подвижным объектом .....	122
Список литературы .....	126

**Лукомский Юрий Александрович,  
Мирошников Александр Николаевич,  
Шпекторов Андрей Григорьевич**

**Моделирование объектов и систем управления**  
Учебное пособие

Редактор Н. В. Лукина

---

Подписано в печать 4; 05.12. Формат 60 × 84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 8,0.

Гарнитура «Times New Roman». Тираж 60 экз. Заказ 77.

---

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5