## ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

**Лабораторная работа №6.**

# *ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА. ЛИНЕЙНАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА*

**Цель работы:** исследовать линейную квадратичную задачу, особенности ее решения на основе принципа максимума Понтрягина, освоить аналитические и численные методы решения.

### Основные положения

Рассматриваемая задача заключается в том, чтобы перевести объект управления из начального состояния в конечное таким образом, чтобы минимизировать функционал вида:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt. \tag{6.1}$$

Коэффициент $1/2$ не является обязательным, добавлен для удобства расчетов.

Особенностью линейной квадратичной задачи является то, что соответствующее управляющее воздействие может быть получено не только в виде функции времени, но и виде линейной функции состояний объекта управления. Покажем эту особенность на примере объекта типа двойной интегратор.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= u. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Требуется найти управляющее воздействие, переводящее объект управления из начального состояния в конечное

$$\begin{matrix} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x_1(\infty) = 0 \\ x_2(\infty) = 0 \end{matrix}$$

таким образом, чтобы обеспечить минимум следующего функционала

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x_1^2 + u^2\right) dt. \tag{6.3}$$

Описание подхода решения задач оптимизации через принцип максимума Понтрягина подробно приведено в лабораторной работе 4. Здесь выполняем те же стандартные шаги. Находим гамильтониан системы:

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - \frac{1}{2}\left(x_1^2 + u^2\right).$$

Находим вид оптимального управления. Можно отметить, что гамильтониан нелинейно зависит от управления, поэтому его максимум можно вычислить через производную:

$$u_0 = \psi_2$$

Система сопряженных уравнений

$$\frac{d\psi_1}{dt} = x_1;$$
$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1.$$

Общая система уравнений, среди решения которой находится искомое управление

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = x_2;\\
&\frac{dx_2}{dt} = \psi_2;\\
&\frac{d\psi_1}{dt} = x_1;\\
&\frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Начальные условия для сопряженных координат $\psi_{10}, \psi_{20}$ на данном этапе неизвестны, но их необходимо определить для получения функции управления. Применим метод преобразования Лапласа. Для удобства можно применять метод Лапласа к системе (6.4), представленной в матричной форме:

$$s\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

Преобразованная система уравнений имеет вид

$$\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ -1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{bmatrix}$$

Поскольку $u = \psi_2$, для определения управляющего воздействия нужно найти решение системы уравнений относительно $\psi_2$. По правилу Крамера

$$\psi_2(s) = \frac{\Delta_4(s)}{\Delta(s)}$$

где $\Delta(s) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ -1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \end{vmatrix}$; $\Delta_4(s) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & x_{10} \\ 0 & s & 0 & x_{20} \\ -1 & 0 & s & \psi_{10} \\ 0 & 0 & 1 & \psi_{20} \end{vmatrix}$

Вычисляем определители, например, разложением по 1-й строке:

$$\Delta(s) = s \cdot \begin{vmatrix} s & 0 & -1 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & s \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & 1 & s \end{vmatrix} = s^4 + 1 = \left(s^2 + \sqrt{2}s + 1\right)\left(s^2 - \sqrt{2}s + 1\right)$$

и по 1-му столбцу:

$$\Delta_4(s) = s \cdot \begin{vmatrix} s & 0 & x_{20} \\ 0 & s & \psi_{10} \\ 0 & 1 & \psi_{20} \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & x_{10} \\ s & 0 & x_{20} \\ 0 & 1 & \psi_{20} \end{vmatrix} = s^3\psi_{20} - s^2\psi_{10} - sx_{10} - x_{20}$$

Записываем изображение по Лапласу для функции управления:

$$u(s) = \psi_2(s) = \frac{\psi_{20}s^3 - \psi_{10}s^2 - x_{10}s - x_{20}}{s^4 + 1} = \frac{As + B}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 - \sqrt{2}s + 1}. \qquad (6.5)$$

Анализируя выражение (6.5) с помощью таблицы преобразований Лапласа, можно увидеть, что оригинал *u(t)* должен содержать 4 экспоненты. Две из них будут иметь отрицательные степени, две другие – положительные. Очевидно, что наличие бесконечно возрастающих экспонент не позволит получить конечное значение критерия качества *J* и противоречит заданным конечным условиям для $x_1, x_2$. Поэтому нужно определить такие начальные условия $\psi_{10}, \psi_{20}$, при которых постоянные коэффициенты при возрастающих экспонентах обращаются в нуль.

Тогда, запишем уравнения для коэффициентов, приравнивая полиномы числителя *u(s)*:

$$(As + B)\left(s^2 - \sqrt{2}s + 1\right) + (Cs + D)\left(s^2 + \sqrt{2}s + 1\right) = (A + C)s^3 + \left(B - \sqrt{2}A + D + \sqrt{2}C\right)s^2 +$$
$$+ \left(A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D\right)s + (B + D) = \psi_{20}s^3 - \psi_{10}s^2 - x_{10}s - x_{20}$$

Отсюда имеем систему алгебраических уравнений:

$$A + C = \psi_{20};$$
$$B - \sqrt{2}A + D + \sqrt{2}C = -\psi_{10};$$
$$A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D = -x_{10};$$
$$B + D = -x_{20}$$

Возрастающим экспонентам соответствуют постоянные коэффициенты *C, D*, следовательно, $C = D = 0$, и далее

$$A = \psi_{20};$$
$$B - \sqrt{2}A = -\psi_{10};$$
$$A - \sqrt{2}B = -x_{10};$$
$$B = -x_{20}$$

Исключая константы A, B, записываем уравнения относительно начальных условий сопряженных координат:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{10} \\ \psi_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{20} \\ -x_{10} - \sqrt{2}x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}. \qquad (6.6)$$

Как видно из (6.6), вектор начальных условий сопряженных координат линейно зависит от начальных условий переменных состояния. Далее легко определить начальные условия сопряженных координат и коэффициенты *A, B*:

$$\psi_{10} = -\sqrt{2}x_{10} - x_{20};$$
$$\psi_{20} = -x_{10} - \sqrt{2}x_{20};$$
$$A = \psi_{20} = -x_{10} - \sqrt{2}x_{20};$$
$$B = -x_{20}.$$

Зная коэффициенты *A, B*, можно восстановить оригинал функции управления по таблице преобразования Лапласа

$$u(s) = \frac{As + B}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} = \frac{A\left(s + 1/\sqrt{2}\right) + B - A/\sqrt{2}}{\left(s + 1/\sqrt{2}\right)^2 + \left(1/\sqrt{2}\right)^2}, \qquad (6.7)$$

$$u(t) = Ae^{\left(-1/\sqrt{2}\right)t} \cos\left(1/\sqrt{2}\right)t + \left(\sqrt{2}B - A\right)e^{\left(-1/\sqrt{2}\right)t} \sin\left(1/\sqrt{2}\right)t,$$

и так далее.

В процессе решения было получено, что начальные условия сопряженных координат линейно зависят от начальных условий переменных состояния (6.6). Отсюда можно сделать вывод о том, что и сами функции сопряженных координат $\psi_1(t), \psi_2(t)$ линейно зависят от переменных состояния

$x_1(t), x_2(t)$. Следовательно, в линейной квадратичной задаче можно искать функцию управления, линейно зависящую от переменных состояния:

$$u(t) = K_1 x_1(t) + K_2 x_2(t). \tag{6.8}$$

в которой нужно определить постоянные коэффициенты $K_1, K_2$.

Для этого преобразуем по Лапласу исходные уравнения динамической системы (6.2), учитывая вид управляющего воздействия (6.8):

$$s\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ K_1 x_1 + K_2 x_2 \end{bmatrix}$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ -K_1 & -K_2 + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

Теперь из системы уравнений получим выражения для $x_1(s), x_2(s)$ и $u(s)$, используя правило Крамера:

$$x_1 = \frac{s x_{10} - K_2 x_{10} + x_{20}}{s^2 - K_2 s - K_1};$$

$$x_2 = \frac{s x_{20} + K_1 x_{10}}{s^2 - K_2 s - K_1};$$

$$u = K_1 x_1 + K_2 x_2 = \frac{s(K_1 x_{10} + K_2 x_{20}) + K_1 x_{20}}{s^2 - K_2 s - K_1}. \tag{6.9}$$

И в то же время $L$-изображение управления, как было найдено ранее, имеет вид (6.7), где $A = -x_{10} - \sqrt{2} x_{20}; B = -x_{20}$.

Легко увидеть, что при коэффициентах

$$K_1 = -1;$$

$$K_2 = -\sqrt{2},$$

сходятся и числитель, и знаменатель функции (6.7) и (6.9). Тогда функция управления имеет вид

$$u(t) = -x_1(t) - \sqrt{2} x_2(t).$$

Таким образом, для определения оптимального управления, как функции переменных состояния, можно применять следующий алгоритм:

1) получить $L$-изображение управления для объекта управления (6.2) замкнутого пока неизвестными обратными связями;

2) составить систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов обратной связи путем приравнивания выражения для L-изображения управляющего воздействия замкнутого объекта управления и выражения для оптимального управления (6.7).

Общий алгоритм можно слегка упростить. Как видно из рассматриваемого примера, у $L$-изображения управления (6.9) коэффициенты можно найти как путем приравнивания полиномов числителя, так и полиномов знаменателя. Но полином знаменателя найти существенно проще – он представляет собой часть характеристического полинома расширенной системы (6.4), в которой присутствуют только отрицательные корни. Поэтому поиск коэффициентов сводится к задаче модального управления, и общий алгоритм приобретет следующий вид:

1) определить характеристический полином расширенной системы (6.4) и его корни;

2) исключить положительные корни (они приводят к появлению возрастающих экспонент) и записать усеченный характеристический полином;

3) решить задачу модального управления для усеченного характеристического полинома и найти коэффициенты обратной связи.

Линейную квадратичную задачу можно также решить численно, с использованием функции FMINSEARCH. В отличии от задач, рассмотренных ранее, задача оптимизации решается прямым способом. Если нужно найти управление как функцию времени, проектными параметрами будут начальные условия $\psi_{10}, \psi_{20}$. Если нужно найти управление в виде обратных связей, проектные параметры – коэффициенты $K_1, K_2$. А целевая функция, которую следует минимизировать, задана интегральным выражением (6.3). Тогда для численного решения задачи требуется создать следующие функции:

- функция для расчета правой части дифференциальных уравнений (если она простая, ее можно создать в виде указателя function_handle);

- функция для расчета интегрального функционала (6.3) – в ней нужно решить систему дифференциальных уравнений и вычислить интеграл – любым известным методом;

- скрипт для вызова FMINSEARCH.

Данные функции студентам предлагается написать самостоятельно.

## Содержание работы

1. Аналитическое решение линейной квадратичной задачи в виде функции *u(t)* для заданных систем в соответствии с вариантом. Функционал качества имеет вид:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\lambda x_1^2 + u^2\right)dt$$

Параметр λ задан в таблице 6.1. В качестве начальных и конечных условий выбираются $x_1(0)=1; x_2(0)=0; x_1(\infty)=0; x_2(\infty)=0$.

2. Аналитическое решение линейной квадратичной задачи в виде обратных связей.

3. Численное решение линейной квадратичной задачи (вид управления – по выбору студента) и сравнение с аналитическим решением.

**Индивидуальные задания**

Таблица 6.1 Исходные данные к лабораторной работе

| Вариант | Объект управления | Вариант | Объект управления |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{dx_1}{dt} = 1.5x_2$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$<br>$\lambda = 1.8$ | 13 | $\frac{dx_1}{dt} = x_2$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$<br>$\lambda = 1.9$ |
| 2 | $\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 1.5x_2$<br>$\frac{dx_2}{dt} = u$<br>$\lambda = 2.6$ | 14 | $\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2$<br>$\frac{dx_2}{dt} = u$<br>$\lambda = 2.0$ |
| 3 | $\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 1.5x_2$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u$<br>$\lambda = 0.9$ | 15 | $\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u$<br>$\lambda = 2.1$ |
| 4 | $\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + 1.5x_2$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$<br>$\lambda = 3.2$ | 16 | $\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$<br>$\lambda = 2.2$ |
| 5 | $\frac{dx_1}{dt} = x_2$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$<br>$\lambda = 1.1$ | 17 | $\frac{dx_1}{dt} = x_2 + u$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$<br>$\lambda = 2.3$ |
| 6 | $\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2$<br>$\frac{dx_2}{dt} = u$<br>$\lambda = 1.2$ | 18 | $\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2 + u$<br>$\frac{dx_2}{dt} = u$<br>$\lambda = 2.4$ |
| 7 | $\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u$<br>$\lambda = 1.3$ | 19 | $\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + u$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u$<br>$\lambda = 2.5$ |
| 8 | $\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$<br>$\lambda = 1.4$ | 20 | $\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + 2x_2 + u$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$<br>$\lambda = 2.6$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | $\frac{dx_1}{dt} = x_2 + u$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$<br>$\lambda = 1.5$ | 21 | $\frac{dx_1}{dt} = 1.5x_2 + u$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$<br>$\lambda = 2.2$ |
| 10 | $\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2 + u$<br>$\frac{dx_2}{dt} = u$<br>$\lambda = 1.6$ | 22 | $\frac{dx_1}{dt} = -0.5x_1 + 1.5x_2 + u$<br>$\frac{dx_2}{dt} = u$<br>$\lambda = 1.4$ |
| 11 | $\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + u$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u$<br>$\lambda = 1.7$ | 23 | $\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 1.5x_2 + u$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u$<br>$\lambda = 3.3$ |
| 12 | $\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + 2x_2 + u$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u$<br>$\lambda = 1.8$ | 24 | $\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + 1.5x_2 + u$<br>$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u$<br>$\lambda = 1.6$ |