

Лекция 1. МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Понятие математической модели

Математическое моделирование – это методология научной и практической деятельности людей, основанная на построении, исследовании и использовании математических моделей. В самостоятельную научную дисциплину математическое моделирование оформилось в последние несколько десятилетий в связи с широким применением компьютеров. Математическое моделирование тесно связано с прикладной математикой и общей теорией систем, но не совпадает с ними, поскольку теория систем, как и другие разделы математики, имеет дело лишь с математическими объектами. Предмет математического моделирования шире и включает, кроме исследования математических объектов, формализацию постановки практической задачи и интерпретацию полученных формальных результатов.

Исходя из определения, выделяют три этапа математического моделирования: построение ММ (формализация задачи), исследование ММ (анализ модели), использование ММ (синтез решения).

Этап формализации задачи связан с научно-инженерной дисциплиной, ~~которую называют~~ системным анализом. На этапе анализа решаются ~~прямые задачи~~ прямые задачи, т.е. по заданным значениям входов системы определяются ее выходы. Для этапа синтеза характерны обратные задачи, а именно определение входов системы по заданным (желаемым) значениям ее выходов. Использование ММ возможно для различных целей: прогнозирования, исследования, проектирования, управления.

~~Как уже было сказано в предыдущем~~ центральным понятием математического моделирования является понятие математической модели – совокупности математических объектов и отношений, которые отображают объекты и отношения некоторой области реального мира (предметной области).

Рассмотрим в качестве примера один из простейших видов математических моделей – линейное соотношение между двумя числовыми переменными. Если обозначить входную (независимую) переменную через u , а выходную (зависимую) через y , то такая модель имеет вид

$$y = ku, \quad (1.1)$$

где k – некоторый числовой параметр (коэффициент), выражающий свойства модели. Соотношение (1.1) является формальным выражением того факта, что между величинами u и y существует прямая пропорциональная зависимость. Подобными зависимостями описываются многие процессы в физических, биологических и других реальных (естественных или искусственных) объектах. Соотношение (1.1) (какое-то соотношение) может описывать как связь между конкретными переменными конкретного объекта, так и целый класс зависимостей, одинаковых для различных объектов.

Наиболее общие и универсальные зависимости в естественных науках называются законами. Например, закон Ньютона в механике выражает тот факт, что ускорение тела прямо пропорционально приложенной к телу силе. Закон Ома в физике говорит, что сила тока, протекающего через участок электрической цепи, прямо пропорциональна падению напряжения на этом участке и т.д.

С точки зрения математического моделирования и закон Ньютона, и закон Ома являются примерами линейных статических математических моделей (1.1). В случае закона Ньютона – это сила, приложенная к телу в момент t , $y \equiv d^2s(t)/dt^2$ – ускорение тела, т.е. вторая производная от перемещения $s(t)$, $k = m^{-1}$, где m – масса тела. В случае закона Ома $u \equiv i(t)$ – это сила тока в проводнике, $y \equiv \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi(t)$ – падение напряжения на участке проводника (разность потенциалов), $k = R$ – величина сопротивления рассматриваемого участка. Таким образом, математическая модель – это более общее понятие, чем закон, поскольку оно носит междисциплинарный

характер. Успехи прикладной математики и математического моделирования основаны на том, что одними и теми же математическими моделями могут описываться совершенно различные по природе процессы, т.е. одни и те же приемы и методы построения и исследования математических моделей пригодны для различных объектов (задач).

С другой стороны, законы естественных наук часто являются «кирпичиками» для построения математической модели реального объекта (так называемые теоретические модели, или модели на основе первичных принципов). Такой подход является основным в теоретической и прикладной механике, а также в теоретической и прикладной физике, где модели конкретных процессов и объектов выводятся из общих вариационных принципов – законов. Однако готовых «кирпичиков» может оказаться недостаточно и тогда при построении математической модели добавляются дополнительные соотношения – связи. В частности, такая ситуация возникает, когда реальный объект состоит из нескольких частей (элементов, компонентов) или требуется описать взаимодействие нескольких различных по природе процессов, протекающих в объекте. Правила соединения отдельных частей в единую математическую модель, отражающие структуру взаимодействия этих частей, часто называются структурно-топологическими уравнениями (связями). Такие правила могут основываться на законах естественных наук, например на законе Д’Аламбера для механических систем и аналогичном (в силу электромеханической аналогии) законе Кирхгофа для электрических цепей. В общем случае для составления моделей целого из моделей отдельных частей используется аппарат теории графов и теории матриц.-

Однако, даже если уравнения отдельных частей и уравнения связей построены, задачу построения математической модели рано считать решенной, поскольку модель может содержать ряд параметров, которые недоступны или трудно определяемы в реальной системе. Их определение может потребовать дополнительных экспериментов с реальной системой с

целью определения (идентификации) параметров математической модели. Например, в линейной модели (1.1) требуется оценить коэффициент k по результатам экспериментов.

Хотя методы оценки параметров достаточно хорошо разработаны (см. ниже гл. 4), их применение имеет принципиальные ограничения в силу невозможности построения абсолютно точной модели реальной системы. Наличие неустранимых погрешностей и помех создает ситуацию неопределенности, когда выходные переменные не определяются однозначно входными переменными и параметрами модели. Наличие неопределенности приводит к тому, что для одного и того же объекта или процесса может существовать несколько или даже бесконечно много математических моделей.

1.2. Математическое моделирование и теория систем

Важным понятием математического моделирования является понятие «система». Система в абстрактном смысле – эквивалент понятия математической модели и задается парой множеств U, Y (U – множество входов, Y – множество выходов) и отношением на множестве $U \times Y$, формализующим связь (зависимость) между входами и выходами.

Напомним, что отношением R на множестве $X \times Y$ (или отношением между X и Y) называется подмножество множества $X \times Y$, т.е. некоторый набор пар $R = \{(x, y)\}$, где $x \in X, y \in Y$. Например, функция $y = x^2$ может быть представлена как отношение между множествами $X = (-\infty, \infty)$, $Y = [0, \infty)$, включающее те пары (x, y) , для которых $y = x^2$.

Входы (входные сигналы) формализуют воздействия, которые можно прикладывать к системе, а выходы (выходные сигналы) – это совокупность всех данных (величин), доступных наблюдению или измерению. Например, при построении математической модели участка электрической цепи можно в качестве множеств U, Y входных и выходных сигналов взять множество