$$\begin{cases} \dot r = r(a - 1 + 2r^2 - r^4) \\ \dot\varphi = 2\pi \end{cases}$$

$$r_2 = \sqrt{1+\sqrt{a}}$$
$$r_3 = -\sqrt{1+\sqrt{a}}$$
$$r_4 = \sqrt{1+\sqrt{a}}$$
$$r_5 = -\sqrt{1-\sqrt{a}}$$
$$\frac{df}{dr} = -5r^4 + 6r^2 + a - 1$$

$$f = r(a - 1 + 2r^2 - r^4) = 0.$$

$$\boxed{r_1 = 0}$$

$$-r^4 + 2r^2 + a - 1 = 0$$
$$t = r^2$$
$$-t^2 + 2t + a - 1 = 0.$$
$$D = +b^2 - 4ac = 4 - 4\cdot(-1)(a-1) = 4 + 4(a-1) = 4 + 4a - 4 = 4a$$
$$t_{1,2} = \frac{+b \pm \sqrt{D}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4a}}{-2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{a}}{-2} = 1 \pm \sqrt{a}$$
$$r = \sqrt{t} \Rightarrow r_i = \sqrt{1 \pm \sqrt{a}} = \boxed{\pm\sqrt{1 \pm \sqrt{a}}}$$

a	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
0	т. 0 У	п.у. 1 Н	−1 У	1 У	−1 Н
−1	т. 0 У	—	—	—	—
1	т. 0 Н	т. 0 Н	$-\sqrt{2}$ У	$\sqrt{2}$ У	т. 0 Н
			Не имеет смысла. Т.к радиус ≥0.		не имеет смысла

У – устойчиво
Н – неустойчиво.

Итого: $r_1 = 0 \quad \exists \ \forall a$

$r_2 = \sqrt{1 - \sqrt{a}} \Rightarrow \exists$ при $a \geq 0$. и $a \leq 1$

$r_4 = \sqrt{1 \pm \sqrt{a}} \Rightarrow \exists$ при $a \geq 0$.

	$r = 0$	$r = \sqrt{1 - \sqrt{a}}$	$r = \sqrt{1 + \sqrt{a}}$
Стоц решение	точка	предельный цикл	предельный цикл
$\frac{df}{dr}$	$a - 1$	$-4\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)$	$-4(1 + \sqrt{a})\sqrt{a}$
Диаграмма	уст. фокус, центр, неуст. фокус; 0, 1	– неуст. П. Ц. –; 0, 1	– устойчивый П. Ц.; 0, 1

Переход в декартову С. К.: $x = r\cos\varphi$, $x^2 + y^2 = r^2$, $\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$y = r\sin\varphi$, $\frac{y}{x} = tg(\varphi) =$, $\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y}{\sin\varphi}$

$$\begin{cases} \dot{x} = (r\cos\varphi)' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi' = r(a - 1 + 2r^2 - r^4)\cos\varphi - r\sin\varphi \cdot 2\pi \\ \dot{y} = (r\sin\varphi)' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi' = r(a - 1 + 2r^2 - r^4)\sin\varphi + r\cos\varphi \cdot 2\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2+y^2}\left(a - 1 + 2(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2\pi \\ \dot{y} = \sqrt{x^2+y^2}\left(a + 1 + 2(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2\right) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(a - 1 + 2(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2\right) - 2\pi \cdot y \\ \dot{y} = y\left(a - 1 + 2(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2\right) + 2\pi x \end{cases}$$

Построим параметрическую диаграмму (рис. 1). Можно легко увидеть, что при увеличении параметра a из отрицательных значений сначала существует одно состояния равновесия – устойчивый фокус в точке (0, 0) (при $a < 0$) фазовый портрет для такого случая представлен на рисунке 2. Изображающая точка, находящаяся в любом месте фазового пространства притягивается устойчивым фокусом.

При параметре $a > 0$ образуются два предельных цикла – устойчивый и неустойчивый с радиусом $r = \sqrt{1+\sqrt{a}}$ и $r = \sqrt{1-\sqrt{a}}$ соответственно. Из параметрической диаграммы видно, что неустойчивый предельный цикл разделяет бассейны притяжения устойчивого фокуса и устойчивого предельного цикла, это же подтверждается фазовым портретом для $a = 0.5$ (рис. 3).

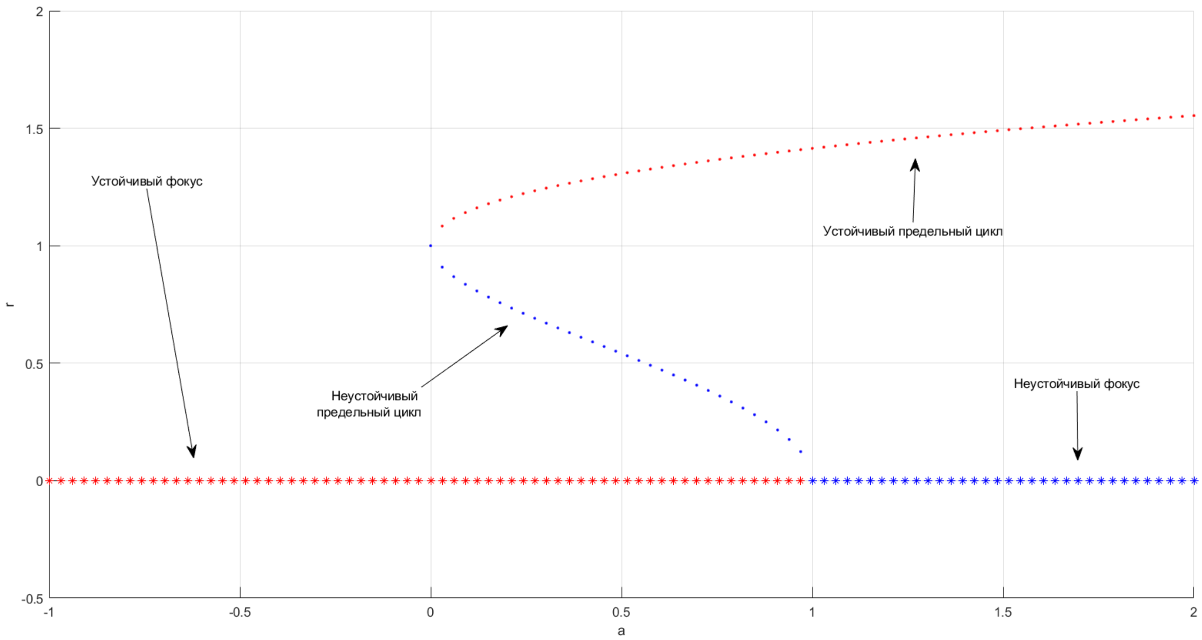

Рисунок 1 - Параметрическая диаграмма

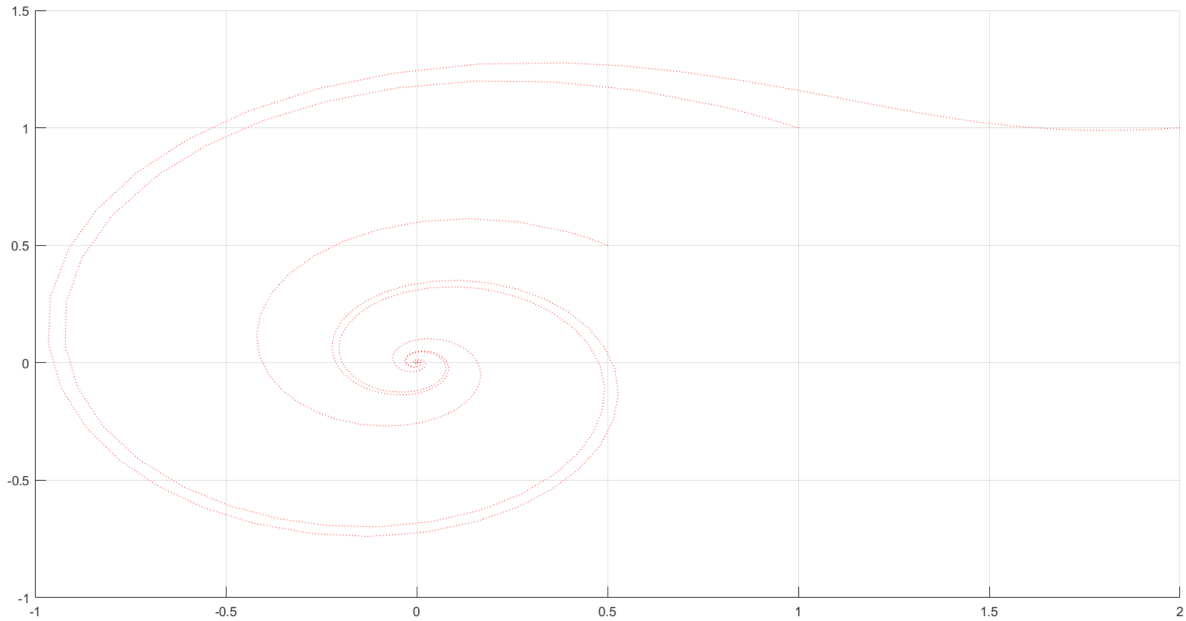

Рисунок 2 - Фазовый портрет для а = -1

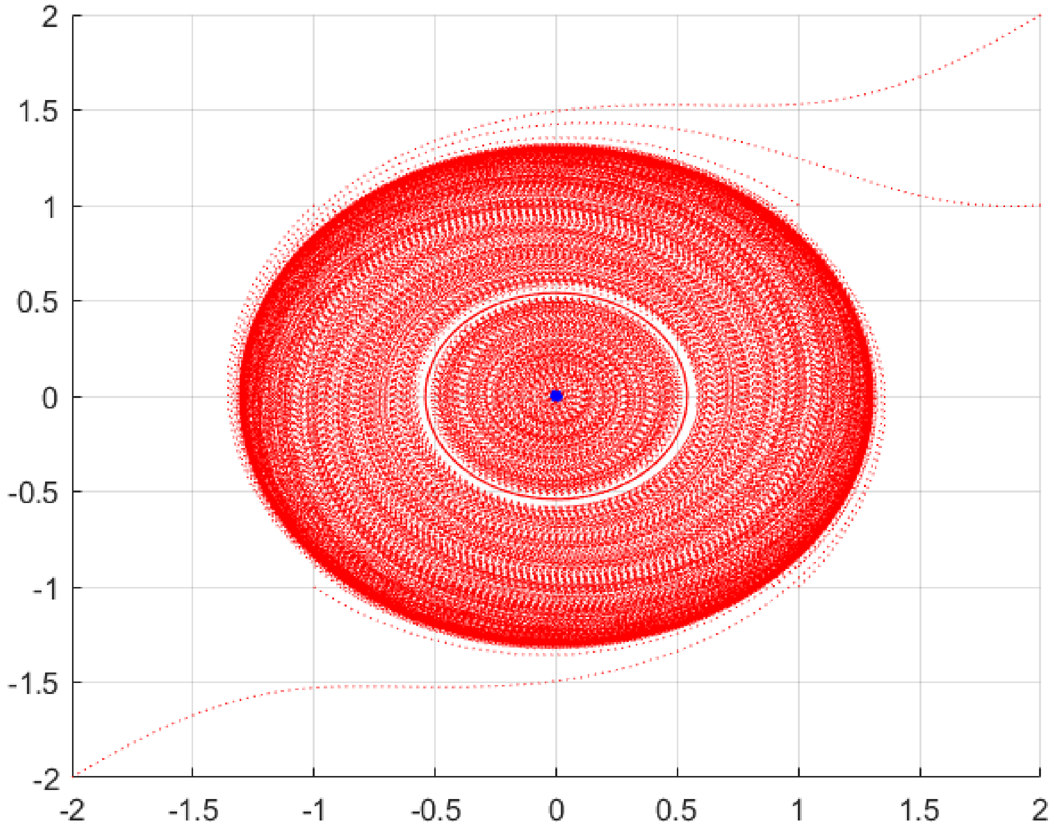

Рисунок 3 - Фазовый портрет при а = 0.5

При дальнейшем увеличении параметра *a* предельные циклы будут отдаляться друг от друга до тех пор, пока радиус неустойчивого предельного цикла не станет равен нулю, и он не сольется с устойчивым фокусом. В этот момент (при $a = 1$) исчезает неустойчивый предельный цикл, а фокус теряет устойчивость (см. рис 4, 5). С дальнейшим ростом параметра амплитуда колебаний будет увеличиваться соответственно радиусу предельного цикла. Фазовая диаграмма для этого случая представлена на рисунке 6.

В данной системе происходит докритическая бифуркация Андронова-Хопфа, что влечет а собой жесткое возбуждение колебаний при увеличении параметра. При уменьшении параметра, колебания мгновенно прекращаются.

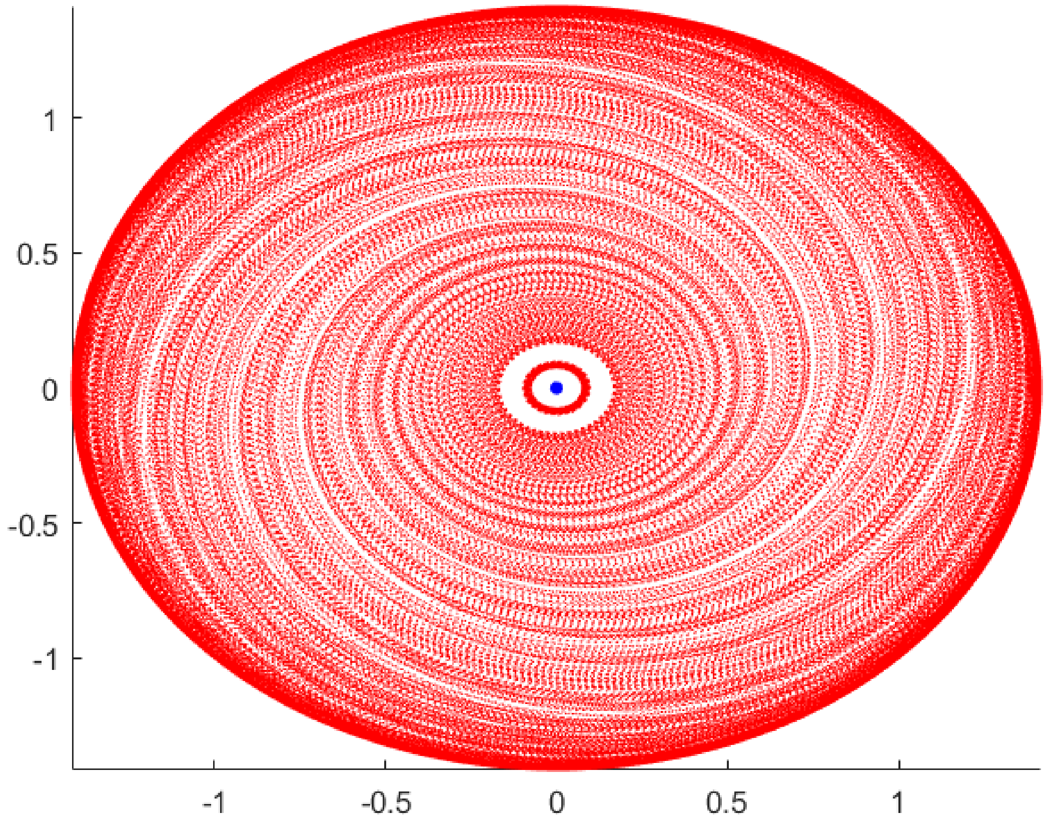

Рисунок 4 - Фазовый портрет при a = 1

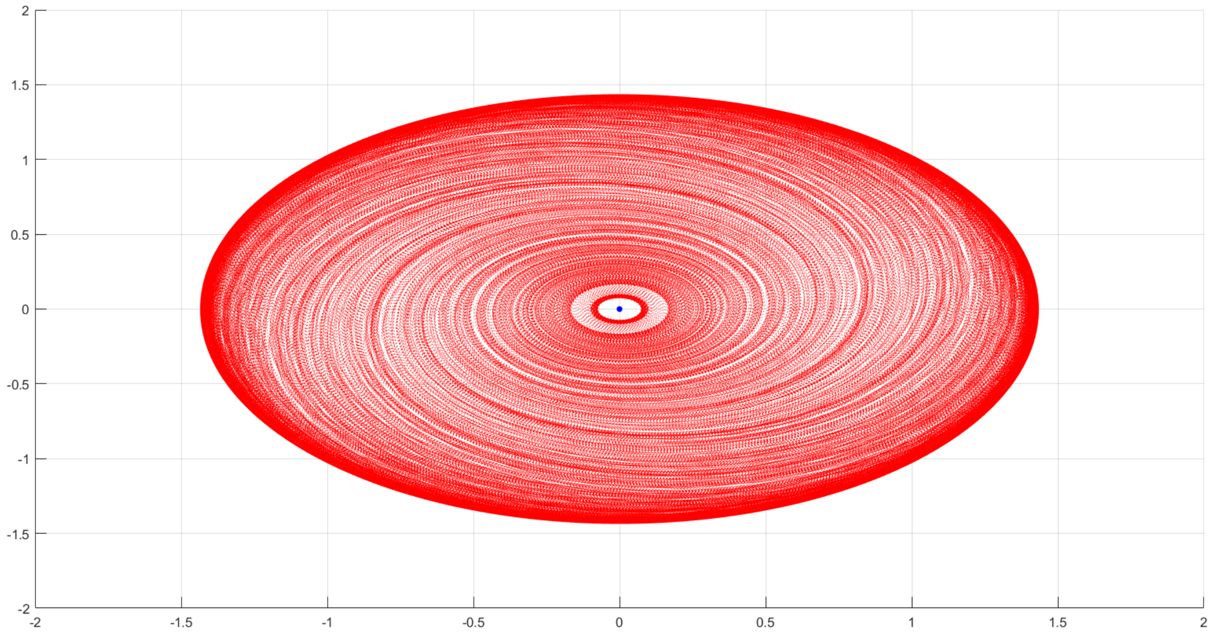

Рисунок 5 - Фазовый портрет при a = 1.1

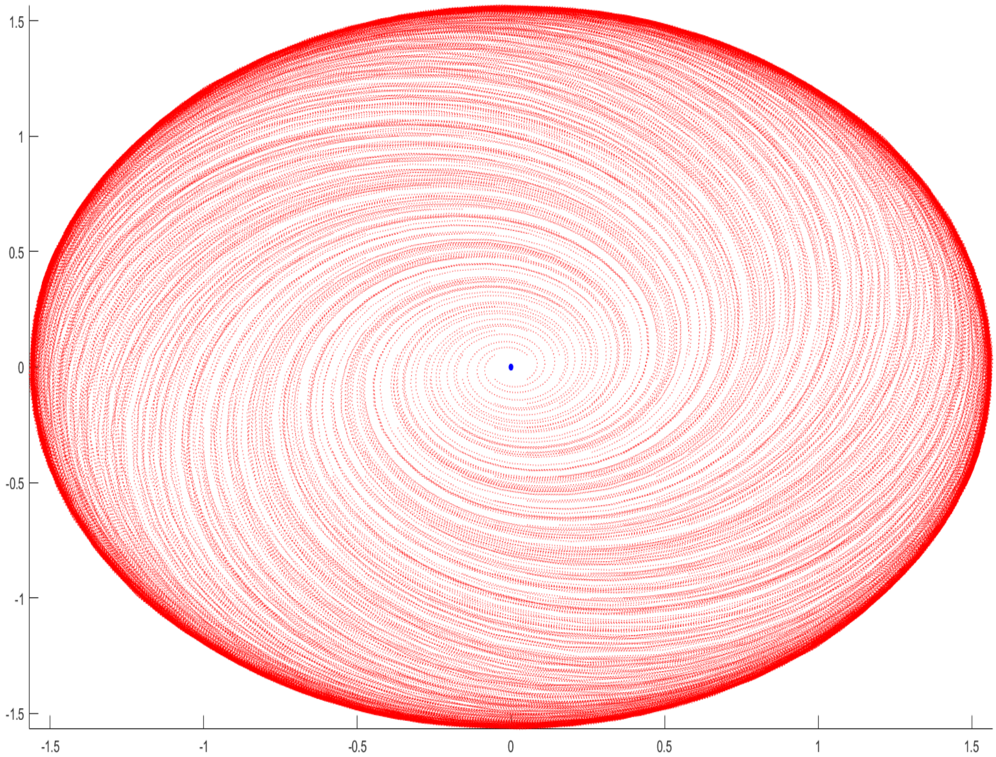

Рисунок 6 - Фазовый портрет при a = 2