$$W_2 = R \circ W_1 = (R \circ R) \circ W_0.$$

Правило вывода, соответствующее композиции нечетких отношений, называется композиционным правилом вывода и составляет основу нечеткой логики. В нечеткой логике значения истинности предложений лежат от нуля до единицы; закон исключенного третьего не выполняется.

Нечеткие отношения, как и обычные, могут обладать специальными свойствами. Для отношения $R : X \times X \to [0,1]$ рассмотрим свойства:

– рефлексивность $R(x,x) = 1$ для всех $x \in X$;

– симметричность $R(x,y) = R(y,x)$ для всех $x, y \in X$;

– антисимметричность $\min\{R(x,y), R(y,x)\} = 0$ при $x \neq y$

– транзитивность $R(x,z) \geq \min\{R(x,y), R(y,z)\}$ для всех $x, y, z \in X$.

Отношение называется отношением сходства если оно рефлексивно и симметрично. Рефлексивность и антисимметричность характеризуют отношение доминирования. Если к перечисленным свойствам добавляется свойство транзитивности, то отношение соответственно называют эквивалентностью и порядком.

5.2.3. Нечеткие числа

Рассмотрим свойства и применения нечетких подмножеств числовой оси $R^1 = (-\infty, +\infty)$ – так называемых нечетких чисел. Над нечеткими числами можно производить арифметические и иные действия, правила выполнения которых вытекают из правил действий с отношениями и из того, что любую бинарную операцию можно рассматривать как тернарное (3-местное) отношение. Например, функция принадлежности нечеткой суммы $C = A \oplus B$ нечетких чисел A, B имеет вид

$$\mu_C(z) = \sup_{x+y=z} \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}. \qquad (5.8)$$

Прикладной смысл нечеткого числа – это число, заданное с погрешностью. Для того чтобы работать с такими числами, нужно задавать функции принадлежности и погрешностей, а это невозможно сделать во всех $x \in R^1$ в силу бесконечности множества R^1. Один из способов преодоления

,этой трудности – использование нечетких L – R-чисел (сокращение от «left – right»).

Чтобы определить нечеткие L – R-числа, на промежутке $[0,\infty)$ задаются две невозрастающие неотрицательные функции $L(x), R(x)$, обладающие свойствами $L(0)=R(0)=1$. После этого функцию принадлежности нечеткого числа A определяют в виде

$$\mu_A=\begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), & x\le\alpha, \\ R\left(\dfrac{x-a}{\beta}\right), & x>\beta, \end{cases} \tag{5.9}$$

где a – вещественное число, называемое средним значением (употребляют также термины «центр», «мода») нечеткого числа; $\alpha>0,\beta>0$ – левый и правый коэффициенты нечеткости. Если $L(x)=R(x), \alpha=\beta$, то нечеткое число называют симметричным.

Поскольку функции $L(x), R(x)$ задаются заранее и не меняются, для выполнения действий с L – R-числами достаточно помнить лишь тройку $A=\{a,\alpha,\beta\}$. Правила арифметики L – R-чисел вытекают из общих правил арифметики нечетких чисел и напоминают правила распространения ошибок в приближенных вычислениях. Если $A=\{a,\alpha,\beta\}$, $B=\{b,\chi,\delta\}$, то

$$A\oplus B=\{a+b,\alpha+\chi,\beta+\delta\},$$

$$A\Theta B=\{a-b,\alpha+\chi,\beta+\delta\},$$

Если B – четкое число ($\chi=\delta=0$), то $A\otimes B=\{ab,\alpha|b|,\beta|b|\}$.

5.2.5. Вероятность или нечеткость?

Продемонстрируем на простом примере разницу между стохастическим и нечетким подходами. Пусть сделано несколько измерений $x_1,\dots x_n$ некоторой неизвестной величины a с погрешностью, не превосходящей величины a. Требуется оценить значение a и определить погрешность оценки.

Предположим, что в качестве оценки выбрано среднее арифметическое $x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. При стохастическом подходе мы постулируем, что x_i случайны и независимы, $Mx_i = a$, и, поскольку погрешность может быть произвольным числом из $[-\alpha, \alpha]$, считаем, что x_i равномерно распределены на $[a-\alpha, a+\alpha]$. Отсюда $Dx_i = (2\alpha^2)/12 = \alpha^2/3$. В силу независимости $Dx = (1/n)Dx_i = \alpha^2/3n$ и по формуле (5.3) из центральной предельной теоремы получим, что

$$|\bar{x} - a| \le 2\alpha/\sqrt{3n}, \qquad (5.9)$$

с вероятностью 0.95.

Примем теперь нечеткую модель измерений. Естественно представить измерение как нечеткое $L-R$-число $X_i = \{a, \alpha, \alpha\}$ со следующей характеристикой: $L(x) = R(x) = 1$ при $0 \le x \le 1$, $L(x) = R(x) = 0$ при $x > 1$. Тогда $\sum X_i = \{na, n\alpha, n\alpha\}$, откуда $\bar{X} = \{a, \alpha, \alpha\}$, т.е. погрешность оценки определится неравенством

$$|\bar{x} - a| \le \alpha. \qquad (5.10)$$

Сравнивая (5.9) и (5.10), мы видим, что интервал (5.9) меньше примерно в $\sqrt{n}$ раз. Это получено за счет эффекта усреднения. Если же нет уверенности в том, что погрешности ведут себя нерегулярно и уничтожаются при усреднении, то доверять (5.9) нельзя и мы возвращаемся к оценке (5.10). Однако за нечетким подходом остаются дополнительные возможности. Например, имея информацию о том, что малые значения погрешностей встречаются чаще, чем большие, мы можем взять соответствующие функции $L(x), R(x)$. Соответственно меняется функция принадлежности $\bar{X}$ и (5.10) уточняется.

Кроме того, если *n* мало, например $n = 10$, то проверить правомерность усреднения практически невозможно. В результате оценка погрешности при

$n = 10$ по (5.9) получается всего в 2.7 раза меньше, чем по (5.10), причем она верна лишь в 95% случаев и при труднопроверяемых предположениях.

5.3 Хаотические модели

5.3.1 От колебаний — к хаосу

Сравнительно недавно, в 70–х годах XX века, в науку о математических моделях вошло новое понятие, перевернувшее многие привычные представления, - понятие хаоса (точнее, детерминированного хаоса). Хаотические системы предоставили исследователям новый класс моделей неопределенности, отличающихся по своим свойствам как от стохастических, так и от нечетких моделей. Если в детерминированной модели будущую траекторию можно предсказать на сколь угодно большое время вперед, зная текущее состояние системы, а в стохастической модели точный прогноз, вообще говоря, невозможен даже на сколь угодно малое время, то в хаотической модели ошибка прогноза растет экспоненциально и, следовательно, возможен прогноз на ограниченное время вперед, определяемое допустимой ошибкой прогноза. Процессы в хаотических моделях имеют вид нерегулярных колебаний, в которых меняется, «плавает», как частота, так и амплитуда.

Колебательные процессы часто встречаются в природе и технике, поэтому формы их описания непрерывно развиваются и совершенствуются. В течение многих лет, до начала XX в. основным видом математических моделей колебаний в механических, электрических и других системах считались дифференциальные уравнения, например

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0,\ 0 \le t \le \infty. \qquad (5.11)$$

Решениями (5.11) являются гармонические колебания

$$y(t) = A_0 \sin \omega t + A_1 \cos \omega t, \qquad (5.12)$$