

ЛЕКЦИЯ 5. СТОХАСТИЧЕСКИЕ, НЕЧЕТКИЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

5.1 Детерминированные и стохастические модели

Модели систем, о которых мы говорили до сих пор, были детерминированными (определенными), т.е. задание входного воздействия определяло выход системы однозначно. Однако на практике так бывает редко: описанию реальных систем обычно присуща неопределенность. Например, для статической модели неопределенность можно учесть, записывая вместо (4.1) соотношение

$$y(t) = F(u(t)) + \varphi(t), \quad (5.1)$$

где $\varphi(t)$ - погрешность, приведенная к выходу системы. Причины неопределенности разнообразны:

- погрешности и помехи измерений входов и выходов системы (естественные погрешности);
- неточность самой модели системы, учитываемая путем искусственного введения в модель погрешности;
- неполнота информации о параметрах системы и т.д.

Среди различных способов уточнения и формализации неопределенности наибольшее распространение получил стохастический (вероятностный) подход, при котором неопределенные величины считаются случайными. Развитый понятийный и вычислительный аппараты теории вероятностей и математической статистики позволяют дать конкретные рекомендации по выбору структуры системы и оценке ее параметров. Классификация стохастических моделей систем и методов их исследования представлена в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Стохастические модели систем

	Статические	
	Дискретные по U, Y	Непрерывные по U, Y
Математический аппарат описания	Схема независимых испытаний	Регрессионные модели
Методы оценки параметров и анализа	Статистические оценки вероятности, дисперсионный анализ	Регрессионный анализ
Методы синтеза	Стохастическое программирование	Планирование эксперимента, стохастическое программирование
Области применения	Задачи выбора из конечного числа вариантов (испытания, управление)	Обработка результатов измерений и испытаний
	Динамические, дискретные по T	
	Дискретные по U, Y	Непрерывные по U, Y
Математический аппарат описания	Марковские цепи, стохастические автоматы	Стохастические разностные уравнения
Методы оценки параметров и анализа	Стохастическое моделирование, оценка переходных вероятностей	Статистическое оценивание состояний и параметров, анализ стохастической устойчивости
Методы синтеза	Динамическое программирование	Динамическое программирование
Области применения	Компьютеры	Импульсные и цифровые САУ
	Динамические, непрерывные по T	
	Дискретные по U, Y	Непрерывные по U, Y
Математический аппарат описания	Системы массового обслуживания, полумарковские процессы	Стохастические дифференциальные уравнения
Методы оценки параметров и анализа	Теория массового обслуживания, имитационное моделирование	Теория устойчивости
Методы синтеза	Перебор, методы оптимального управления	Оптимальное и адаптивное управление
Области применения	Системы обслуживания (вычислительные, производственные)	САУ, механические, тепловые, электронные и другие процессы

Выводы и рекомендации основаны на эффекте усреднения: случайные отклонения результатов измерения некоторой величины от ее ожидаемого значения при суммировании взаимно уничтожаются и среднее арифметическое большого числа измерений оказывается близким к ожидаемому значению. Математические формулировки этого эффекта даются законом больших чисел и центральной предельной теоремой. Закон больших чисел гласит, что если ξ_1, \dots, ξ_N – случайные величины с

математическим ожиданием (среднее значение) $M\xi_i = a$ и дисперсией $M(\xi_1 - a)^2 = \sigma^2$, то

$$\frac{1}{N}(\xi_1 + \dots + \xi_N) - a \approx 0, \quad (5.2)$$

при достаточно больших N . Это говорит о принципиальной возможности сколь угодно точной оценки $M\xi_i$ по измерениям.

Центральная предельная теорема, уточняя (5.2), утверждает, что

$$\frac{1}{N}(\xi_1 + \dots + \xi_N) - a \approx \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\xi, \quad (5.3)$$

где ξ – стандартная ($M\xi = 0$, $M\xi^2 = 1$) нормально распределенная случайная величина.

Функция распределения нормальной случайной величины ξ хорошо известна и детально затабулирована. Имеются в книгах по статистике и таблицы функций распределения других часто встречающихся случайных величин, например студентовой. Однако нет необходимости добывать статистические таблицы, если под рукой есть компьютер с установленной системой MATLAB. В составе тулбокса STATISTICS есть модули, вычисляющие функции распределения и другие характеристики более двадцати распространенных типов случайных величин. Проиллюстрируем применение MATLAB на простой статистической задаче.

Формулировкам (5.2), (5.3) можно придать более строгий вид и это легко достижимо с помощью понятий вероятностной сходимости. Однако при попытке проверить условия этих строгих утверждений могут возникнуть трудности. В частности, в законе больших чисел и центральной предельной теореме требуется независимость отдельных измерений (реализаций) случайной величины и конечность ее дисперсии. Если эти условия нарушаются, то могут нарушаться и выводы. Например, если все измерения совпадают: $\xi_1 = \dots = \xi_N$, то, хотя все остальные условия выполняются, об усреднении не может быть и речи. Другой пример: закон больших чисел

несправедлив, если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ распределены по закону Коши (с плотностью распределения $p(x) = 1/\pi(1+x^2)$), не обладающему конечным математическим ожиданием и дисперсией. А ведь такой закон встречается в жизни! Например, по Коши распределена интегральная освещенность точек прямолинейного берега равномерно вращающимся прожектором, находящимся в море (на корабле) и включающимся в случайные моменты времени.

Но еще большие трудности вызывает проверка обоснованности самого употребления термина «случайный». Что такое случайная величина, случайное событие и т.д.? Часто говорят, что событие A случайно, если в результате эксперимента оно может наступить (с вероятностью p) или не наступить (с вероятностью $1-p$). Все, однако, не так просто. Сама вероятность события может быть связана с результатами экспериментов лишь через частоту наступления события в некотором ряде (серии) экспериментов: $v_N = N_A/N$, где N_A – число экспериментов, в которых событие наступило; N – общее число экспериментов. Если числа v_N при достаточно большом N приближаются к некоторому постоянному числу P_A :

$$v_N \approx P_A, \quad (5.4)$$

то событие A можно назвать случайным, а число P_A – его вероятностью. При этом частоты, наблюдавшиеся в различных сериях экспериментов, должны быть близки между собой (это свойство называется статистической устойчивостью, или однородностью). Сказанное относится и к понятию случайной величины, поскольку величина ξ является случайной, если случайными являются события $\{a < \xi < b\}$ для любых чисел a, b . Частоты наступления таких событий в длинных сериях экспериментов должны группироваться около некоторых постоянных значений.

Итак, для применимости стохастического подхода должны выполняться следующие требования:

1) массовость проводимых экспериментов, т.е. достаточно большое их число;

2) повторяемость условий экспериментов, оправдывающая сравнение результатов различных экспериментов;

3) статистическая устойчивость.

Стохастический подход заведомо нельзя применять к единичным экспериментам: бессмысленны выражения типа “Вероятность того, что завтра будет дождь”, “с вероятностью 0.8 «Зенит» выиграет кубок” и т.п. Но даже если массовость и повторяемость экспериментов имеются, статистической устойчивости может и не быть, а проверить это - непростое дело. Известные оценки допустимого отклонения частоты от вероятности основаны на центральной предельной теореме или неравенстве Чебышева и требуют дополнительных гипотез о независимости или слабой зависимости измерений.

Опытная же проверка условия независимости еще сложнее, так как требует дополнительных экспериментов.

Как же построить модель системы, если неопределенность в задаче есть, но стохастический подход неприменим? Далее кратко излагается один из альтернативных подходов, основанный на теории нечетких множеств.

5.2 Нечеткие модели

5.2.1. Нечеткие множества и лингвистические переменные

В 1965 г. американский математик П. Заде опубликовал статью под названием “Fuzzy sets”, что можно перевести как «нечеткие множества». В статье было дано новое определение понятия множества, предназначенное для описания и исследования сложных, «плохо определенных» систем. К ним, в частности, относятся гуманистические системы, на поведение которых существенное влияние оказывают знания, суждения и эмоции человека. В таких системах наряду со строгими, объективными, количественными данными и результатами присутствуют неоднозначные, субъективные, качественные данные и результаты, что требует новых подходов.

Поскольку понятие множества лежит в основе всех математических конструкций, статья Л. Заде породила новое научное направление, бурный поток публикаций, специальные конференции и т.д. Произошло «раздвоение» математики: появились нечеткие функции, нечеткие уравнения, нечеткая логика и т.д. Новый математический аппарат описывает свойство нечетких систем, соответствующих трудно формализуемым, плохо структурированным задачам. В последние годы эти методы стали широко применяться в экспертных программных системах. Ниже излагаются основные понятия теории нечетких систем.

Прежде чем говорить о нечетких системах, необходимо ввести понятие нечеткого множества.

Нечетким подмножеством A множества X назовем пару (X, μ_A) , где $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ – функция, каждое значение которой $\mu_A(x) \in [0,1]$ интерпретируется как степень принадлежности точки $x \in X$ множеству A . Функция μ_A называется функцией принадлежности множества A .

Для обычного «четкого» множества B можно положить $\mu_B = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$,

т.е. классическое понятие множества является частным случаем введенного понятия (рис. 5.1 а). Задавать функцию принадлежности можно таблично или аналитически.

Пример 5.1 Пусть $X = \{1, 2, \dots\}$ – множество натуральных чисел, а функция $\mu_A(x)$ задана таблицей

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\mu_A(x)$	0	0.1	0.6	0.8	1	1	0.9	0.7	0.2	0	...

Определенное таким образом нечеткое множество можно принять в качестве формализации понятия «несколько», изначально ясного лишь на интуитивном уровне.

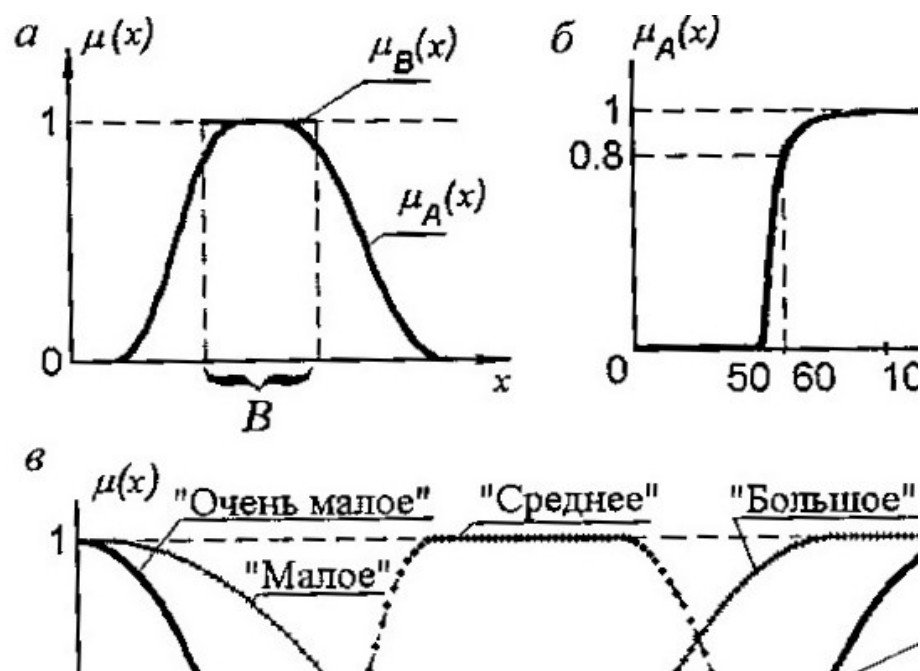


Рисунок 5.1 – Функции принадлежности нечетких переменных

Аналогично можно ввести нечеткие множества соответствующие понятиям: «много», «мало», «около 100», «почти 20» и т.д.

Пример 5.2 Пусть $X = [0, \infty]$ – множество положительных чисел, а функция $\mu_A(x)$ задана формулой

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 50, \\ 1 + \frac{25}{(x-50)^2}, & x > 50 \end{cases} \quad (5.5)$$

график которой изображен на рис.5.1, б. Если переменную x интерпретировать как возраст, то нечеткое множество A соответствует понятию «старый». Аналогично можно формализовать понятия «молодой», «средних лет» и т.д.

Переменные, значениями которых являются нечеткие множества, называются лингвистическими. Это основной тип переменных в естественном языке людей.

Пример 5.3. Переменная «расстояние» принимает обычно числовые значения. Однако в предложениях естественного языка она может фигурировать как лингвистическая со значениями «малое», «большое», «очень малое», «среднее», «около 5 км» и т.д. Каждое значение описывается

нечетким множеством, которое в рамках данной предметной области может иметь конкретную числовую интерпретацию. Например, если речь идет о поездках на такси, то в качестве универсального множества X можно взять отрезок $[0, 100]$ км и задать функции принадлежности значений переменной «расстояние», как показано на рис. 5.1, в.

При первом знакомстве с нечеткими множествами обычно возникает недовольство произволом и субъективизмом в задании функций принадлежности: «почему так, а не иначе?». Однако в этом не слабость, а сила подхода! Ведь если само понятие субъективно, то такова и его формализация, выполняемая человеком. А получаемые результаты должны носить качественный характер и достаточно слабо зависеть от конкретного задания функций принадлежности. С другой стороны, если есть необходимость в более объективных выводах, можно получить оценки $\mu_A(x)$ путем опроса экспертов.

Для нечетких множеств вводятся операции пересечения, объединения, дополнения, концентрации, размывания (табл. 5.2). Первые три являются обобщениями обычных операций; оставшиеся – специфичны для нечетких множеств. Операции позволяют конструировать сложные понятия из простых: «очень много», «не старый и не молодой» и т.п.

Таблица 5.2 Операции над нечеткими множествами

Операция	Лингвистический смысл	Формула для $\mu_C(x)$
Пересечение $C = A \cap B$	И	$\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Объединение $C = A \cup B$	ИЛИ	$\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Дополнение $C = \bar{A}$	НЕ	$1 - \mu_A(x)$
Концентрация	ОЧЕНЬ	$ \mu_A(x) ^2$
Размывание	НЕ ОЧЕНЬ	$\sqrt{\mu_A(x)}$

По аналогии с четким случаем определяется отношение включения множеств: $A \subset B$, если и только если $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ для всех $x \in X$.

5.2.2 Нечеткие системы

Аналогично классическому случаю понятие нечеткой системы вводится через понятие нечеткого отношения (частными случаями которого являются понятия «нечеткое отображение», «нечеткая функция»).

Определение. Нечеткое отношение R на множествах X, Y задается функцией $\mu_R : X \times Y \rightarrow [0,1]$, каждое значение которой $\mu_R(x,y)$ интерпретируется как степень нахождения (совместимости, принадлежности) пары (x,y) в данном отношении.

Таким образом, нечеткое отношение - это нечеткое подмножество множества $X \times Y$ всех пар (x,y) , где $x \in X, y \in Y$. Поэтому стандартным способом вводятся пересечение, объединение, дополнение и другие действия над отношениями. Включение отношений $R \subset S$ ($\mu_R(x,y) \leq \mu_S(x,y)$) интерпретируется как «из R следует S ».

Важную роль в теории нечетких систем играет отношение композиции $R \circ S$. Если даны отношение R на множествах X, Y и отношение S на множествах Y, Z , то функция принадлежности отношения $R \circ S$ на множествах X, Z задается формулой

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \max_{y \in Y} (\min \{ \mu_R(x,y), \mu_S(y,z) \}) \quad (5.6)$$

В полной аналогии с обычными системами (см. лекцию 1) нечеткая система – это нечеткое отношение между множествами U, Y , где U – множество входных функций времени $u(t)$, а Y – множество выходных функций времени $y(t)$. Операция композиции отношений соответствует последовательному соединению систем. Подчеркнем, что для нечетких систем понятие однозначности, детерминированности, теряет смысл: нечеткое отображение и нечеткое отношение неразличимы.

Если множества значений входов и выходов системы конечны, то, как указывалось в лекции 4, ММ системы можно задать таблицами либо набором правил (продукций), например: «ЕСЛИ $(u = u_i)$ И $(x = x_j)$ ТО $(y = y_k)$ », или в более компактном виде:

$$(u = u_i, x = x_j) \rightarrow y = y_k \quad (5.7)$$

Форма (5.7) удобна для представления в компьютере и придает описанию системы вид набора причинно-следственных связей. При этом фактическая причинно-следственная связь может отсутствовать (пример: ЕСЛИ «тебе за сорок» И «с утра у тебя ничего не болит» ТО «ты умер»). Аналогично обстоит дело и для нечетких систем, входные и выходные переменные которых могут принимать нечеткие значения, т.е. являются лингвистическими. Примеры нечетких правил:

$$(u = \text{«малое»}) \rightarrow (y = \text{«большое»}),$$

$$(u(t) = \text{«около 0.5»}, x(t-1) = \text{«большое»}) \rightarrow (x(t) = \text{«очень большое»}).$$

Пример 5.4. Рассмотрим систему простейшего прогноза погоды в городе, основанную на том наблюдении, что погода чаще сохраняется, чем меняется: погода завтра будет скорее всего такая же, как сегодня. Для простоты пусть множество входов системы (возможных значений переменной «погода сегодня») состоит из трех элементов: «ясно» (Я), «пасмурно» (П), «дождь» (Д), т.е. $U = \{Я, П, Д\}$. Таким же пусть будет и множество выходов (прогнозы на завтра). $Y = \{Я, П, Д\}$. Если описать ММ простейшего прогноза как четкую, то ее можно представить таблицей:

U	Y		
	Я	П	Д
Я	1	0	0
П	0	1	0
Д	0	0	1

или, более экономно, набором правил:

$$(u = Я) \rightarrow (y = Я); (u = П) \rightarrow (y = П); (u = Д) \rightarrow (y = Д);$$

Однако прогноз погоды – дело ненадежное и субъективное, поэтому более адекватной является нечеткая ММ, в которой отношение между входами и выходами системы R_0 задается таблицей значений функции принадлежности, имеющей, например вид таблицы:

U	Y		
	Я	П	Д
Я	0.8	0.4	0.3
П	0.4	0.8	0.4
Д	0.3	0.4	0.8

Можно использовать и нечеткие правила (продукции), например:

$$(u = \text{Я}) \rightarrow (y = \text{Я} \mid 0.8 \text{ или } \text{П} \mid 0.4 \text{ или } \text{Д} \mid 0.3).$$

Пусть теперь входная переменная ω_0 («погода сегодня») приняла некоторое значение. Оно, естественно, должно быть нечетким (ведь нет четкой границы между значениями «ясно» и «пасмурно» да и дождь может идти не по всему городу) и определяться, например, по сообщениям экспертов. Пусть в результате усреднения мнений группы экспертов ω_0 задается как

x	Я	П	Д
$\mu_{\omega_0}(x)$	0.4	0.5	0.1

Как узнать прогноз на завтра? Вспомним, что множество – частный случай отношения и представим его как отношение W_0 с фиктивным одноэлементным множеством входов и нечетким множеством выходов. Теперь легко понять, что значение переменной «погода завтра» (ω_1) определится с помощью соответствующего отношения W_1 по формуле композиции отношений (5.6).

Таким образом, $W_1 = R_0 \circ W_0$ и, значит, например,

$$\mu_{\omega_1}(\text{Я}) = \max\{\min\{0.1, 0.3\}, \min\{0.1, 0.3\}, \min\{0.1, 0.3\}\} = \max\{0.1, 0.4, 0.4\}$$

Итоговая таблица прогноза на завтра имеет вид

Y	Я	П	Д
$\mu_{\omega_1}(y)$	0.4	0.5	0.4

Полученный результат можно снова подать на вход системы прогноза и получить новый результат «прогноз на послезавтра»:

$$W_2 = R \circ W_1 = (R \circ R) \circ W_0.$$

Правило вывода, соответствующее композиции нечетких отношений, называется композиционным правилом вывода и составляет основу нечеткой логики. В нечеткой логике значения истинности предложений лежат от нуля до единицы; закон исключенного третьего не выполняется.

Нечеткие отношения, как и обычные, могут обладать специальными свойствами. Для отношения $R: X \times X \rightarrow [0,1]$ рассмотрим свойства:

- рефлексивность $R(x, x) = 1$ для всех $x \in X$;
- симметричность $R(x, y) = R(y, x)$ для всех $x, y \in X$;
- антисимметричность $\min\{R(x, y), R(y, x)\} = 0$ при $x \neq y$
- транзитивность $R(x, z) \geq \min\{R(x, y), R(y, z)\}$ для всех $x, y, z \in X$.

Отношение называется отношением сходства если оно рефлексивно и симметрично. Рефлексивность и антисимметричность характеризуют отношение доминирования. Если к перечисленным свойствам добавляется свойство транзитивности, то отношение соответственно называют эквивалентностью и порядком.

5.2.3. Нечеткие числа

Рассмотрим свойства и применения нечетких подмножеств числовой оси $R^1 = (-\infty, +\infty)$ – так называемых нечетких чисел. Над нечеткими числами можно производить арифметические и иные действия, правила выполнения которых вытекают из правил действий с отношениями и из того, что любую бинарную операцию можно рассматривать как тернарное (3-местное) отношение. Например, функция принадлежности нечеткой суммы $C = A \oplus B$ нечетких чисел A, B имеет вид

$$\mu_C(z) = \sup_{x+y=z} \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}. \quad (5.8)$$

Прикладной смысл нечеткого числа – это число, заданное с погрешностью. Для того чтобы работать с такими числами, нужно задавать функции принадлежности и погрешностей, а это невозможно сделать во всех $x \in R^1$ в силу бесконечности множества R^1 . Один из способов преодоления

,этой трудности – использование нечетких $L - R$ -чисел (сокращение от «left – right»).

Чтобы определить нечеткие $L - R$ -числа, на промежутке $[0, \infty)$ задаются две невозрастающие неотрицательные функции $L(x), R(x)$, обладающие свойствами $L(0) = R(0) = 1$. После этого функцию принадлежности нечеткого числа A определяют в виде

$$\mu_A = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right), & x \leq \alpha, \\ R\left(\frac{x-a}{\beta}\right), & x > \beta, \end{cases} \quad (5.9)$$

где a – вещественное число, называемое средним значением (употребляют также термины «центр», «мода») нечеткого числа; $\alpha > 0, \beta > 0$ – левый и правый коэффициенты нечеткости. Если $L(x) = R(x), \alpha = \beta$, то нечеткое число называют симметричным.

Поскольку функции $L(x), R(x)$ задаются заранее и не меняются, для выполнения действий с $L - R$ -числами достаточно помнить лишь тройку $A = \{a, \alpha, \beta\}$. Правила арифметики $L - R$ -чисел вытекают из общих правил арифметики нечетких чисел и напоминают правила распространения ошибок в приближенных вычислениях. Если $A = \{a, \alpha, \beta\}$, $B = \{b, \chi, \delta\}$, то

$$A \oplus B = \{a + b, \alpha + \chi, \beta + \delta\},$$

$$A \ominus B = \{a - b, \alpha + \chi, \beta + \delta\},$$

Если B – четкое число ($\chi = \delta = 0$), то $A \otimes B = \{ab, \alpha|b|, \beta|b|\}$.

5.2.5. Вероятность или нечеткость?

Продemonстрируем на простом примере разницу между стохастическим и нечетким подходами. Пусть сделано несколько измерений x_1, \dots, x_n некоторой неизвестной величины a с погрешностью, не превосходящей величины a . Требуется оценить значение a и определить погрешность оценки.

Предположим, что в качестве оценки выбрано среднее арифметическое $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. При стохастическом подходе мы постулируем, что x_i случайны и независимы, $Mx_i = a$, и, поскольку погрешность может быть произвольным числом из $[-\alpha, \alpha]$, считаем, что x_i равномерно распределены на $[a - \alpha, a + \alpha]$. Отсюда $Dx_i = (2\alpha^2)/12 = \alpha^2/3$. В силу независимости $Dx = (1/n)Dx_i = \alpha^2/3n$ и по формуле (5.3) из центральной предельной теоремы получим, что

$$|\bar{x} - a| \leq 2\alpha/\sqrt{3n}, \quad (5.9)$$

с вероятностью 0.95.

Примем теперь нечеткую модель измерений. Естественнее представить измерение как нечеткое $L-R$ -число $X_i = \{a, \alpha, \alpha\}$ со следующей характеристикой: $L(x) = R(x) = 1$ при $0 \leq x \leq 1$, $L(x) = R(x) = 0$ при $x > 1$. Тогда $\sum X_i = \{na, n\alpha, n\alpha\}$, откуда $\bar{X} = \{a, \alpha, \alpha\}$, т.е. погрешность оценки определится неравенством

$$|\bar{x} - a| \leq \alpha. \quad (5.10)$$

Сравнивая (5.9) и (5.10), мы видим, что интервал (5.9) меньше примерно в \sqrt{n} раз. Это получено за счет эффекта усреднения. Если же нет уверенности в том, что погрешности ведут себя нерегулярно и уничтожаются при усреднении, то доверять (5.9) нельзя и мы возвращаемся к оценке (5.10). Однако за нечетким подходом остаются дополнительные возможности. Например, имея информацию о том, что малые значения погрешностей встречаются чаще, чем большие, мы можем взять соответствующие функции $L(x), R(x)$. Соответственно меняется функция принадлежности \bar{X} и (5.10) уточняется.

Кроме того, если n мало, например $n = 10$, то проверить правомерность усреднения практически невозможно. В результате оценка погрешности при

$n = 10$ по (5.9) получается всего в 2.7 раза меньше, чем по (5.10), причем она верна лишь в 95% случаев и при труднопроверяемых предположениях.

5.3 Хаотические модели

5.3.1 От колебаний — к хаосу

Сравнительно недавно, в 70–х годах XX века, в науку о математических моделях вошло новое понятие, перевернувшее многие привычные представления, - понятие хаоса (точнее, детерминированного хаоса). Хаотические системы предоставили исследователям новый класс моделей неопределенности, отличающихся по своим свойствам как от стохастических, так и от нечетких моделей. Если в детерминированной модели будущую траекторию можно предсказать на сколь угодно большое время вперед, зная текущее состояние системы, а в стохастической модели точный прогноз, вообще говоря, невозможен даже на сколь угодно малое время, то в хаотической модели ошибка прогноза растет экспоненциально и, следовательно, возможен прогноз на ограниченное время вперед, определяемое допустимой ошибкой прогноза. Процессы в хаотических моделях имеют вид нерегулярных колебаний, в которых меняется, «плавает», как частота, так и амплитуда.

Колебательные процессы часто встречаются в природе и технике, поэтому формы их описания непрерывно развиваются и совершенствуются. В течение многих лет, до начала XX в. основным видом математических моделей колебаний в механических, электрических и других системах считались дифференциальные уравнения, например

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0, 0 \leq t \leq \infty. \quad (5.11)$$

Решениями (5.11) являются гармонические колебания

$$y(t) = A_0 \sin \omega t + A_1 \cos \omega t, \quad (5.12)$$

с круговой частотой ω и периодом $T = 2\pi/\omega$, амплитуда которых $A = \sqrt{A_0^2 + A_1^2}$ зависит от начальных условий: $A_1 = y(0), A_0 = \dot{y}(0)/\omega$ (рис. 5.2, а, для $\omega = 1$).

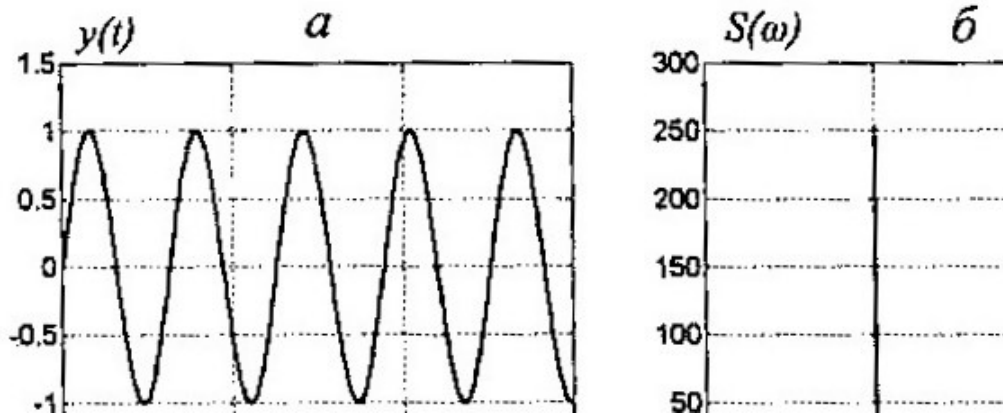


Рисунок 5.2 – Гармонические колебания

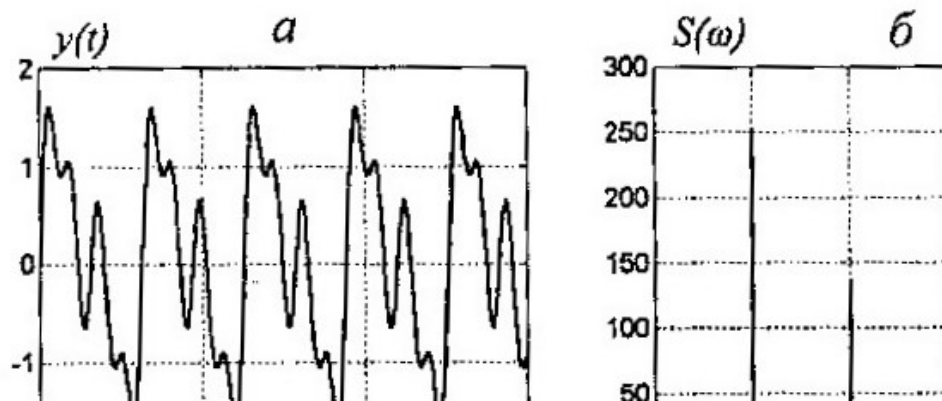


Рисунок 5.3 – Периодические колебания

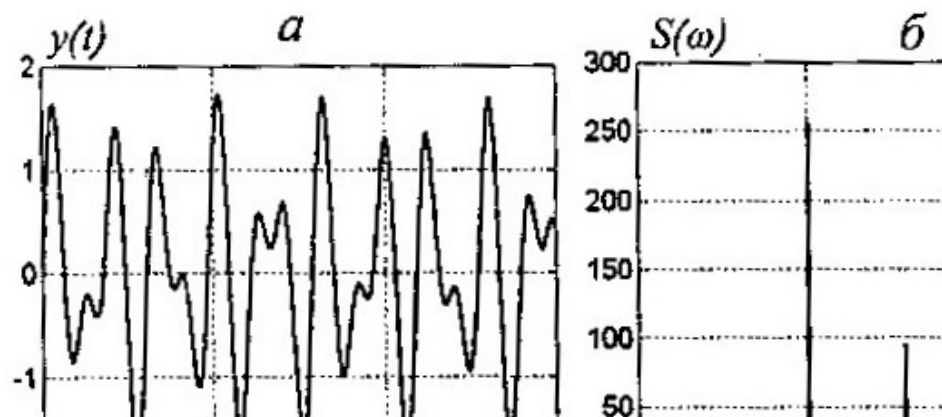


Рисунок 5.4 – Квазипериодические колебания

Очевидно, решение (5.12) непрерывно зависит от начальных условий, т.е. малое изменение величин $y(0), \dot{y}(0)$ приводит к равномерно малому

изменению решения $y(t)$ на всей временной полуоси $0 \leq t \leq \infty$. Частотный спектр функции (5.12) дискретен и состоит из одной точки $\omega/2\pi$ (рис. 5.2, б).

Для описания колебаний более сложной формы можно соединять модели вида (5.11) с различными частотами колебаний $\omega_1, \dots, \omega_r$. Например, последовательное соединение двух моделей вида (5.11) описывается соотношениями

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) &= 0, \\ \ddot{y}_2(t) + \omega_2^2 y_2(t) &= y_1(t),\end{aligned}$$

и имеет частные решения вида $y_2(t) = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$, где коэффициенты A_1, A_2 зависят от начальных условий. Если частоты $\omega_1, \dots, \omega_r$ соизмеримы (являются целыми кратными некоторой частоты ω_0), то колебания будут периодическими с периодом $2\pi/\omega$ (рис. 5.3 для $r=3$, $\omega_1=1$, $\omega_2=2$, $\omega_3=4$). Если же частоты ω_i несоизмеримы, то такие колебания не являются периодическими; они относятся к классу квазипериодических (рис. 5.4, где $r=2$, $\omega_1=1$, $\omega_2=5/\pi$). В обоих случаях решение непрерывно зависит от начальных условий, а его спектр является дискретным конечным множеством.

Заметим, что «на глаз» различить периодические и квазипериодические колебания может быть затруднительно, поскольку реальные измерения (в том числе измерение частоты колебаний) выполняются с конечной точностью и отличить рациональное отношение частот от иррационального оказывается практически невозможным.

На рубеже XIX-XX веков выяснилось, что линейных моделей колебаний недостаточно для описания новых явлений и процессов в физике и технике. Важнейшим в теории нелинейных колебаний является понятие устойчивого предельного цикла – периодической траектории, к которой сходятся все другие траектории (но крайней мере, траектории с близкими начальными условиями).

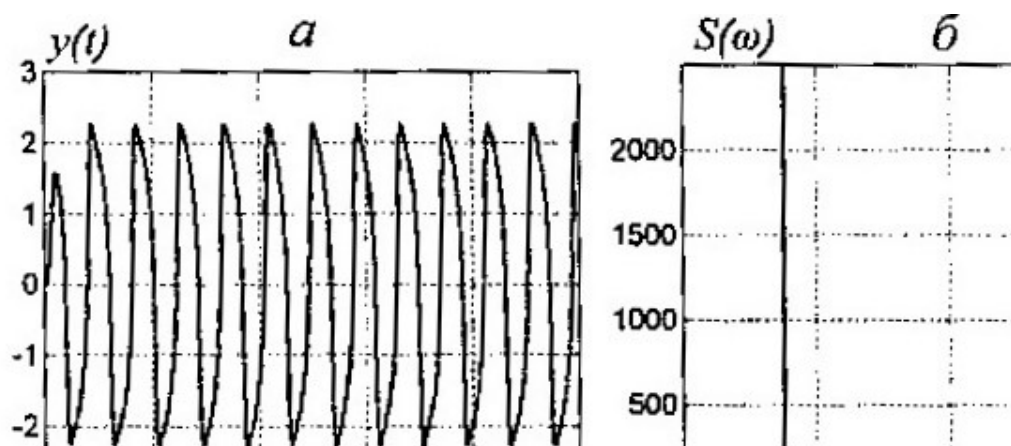


Рисунок 5.5 – Предельный цикл и его спектр

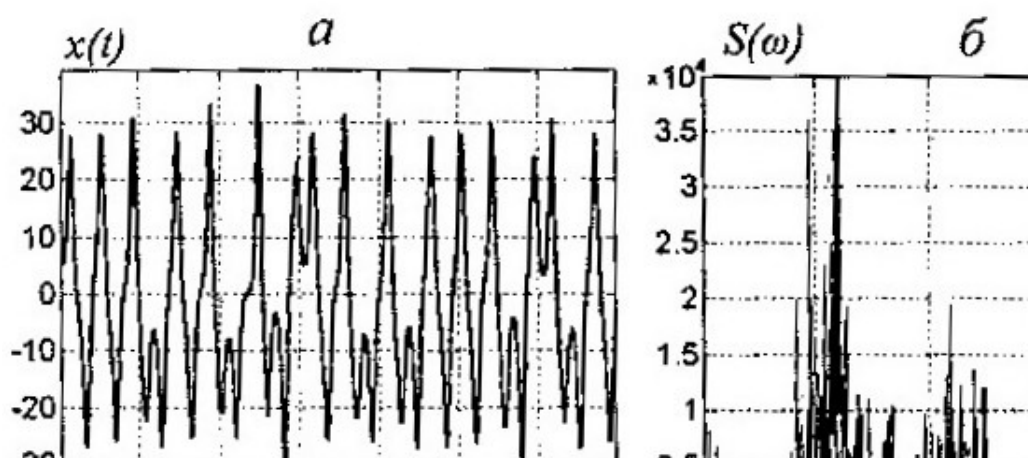


Рисунок 5.6 – Хаотический процесс в системе Лоренца и его спектр

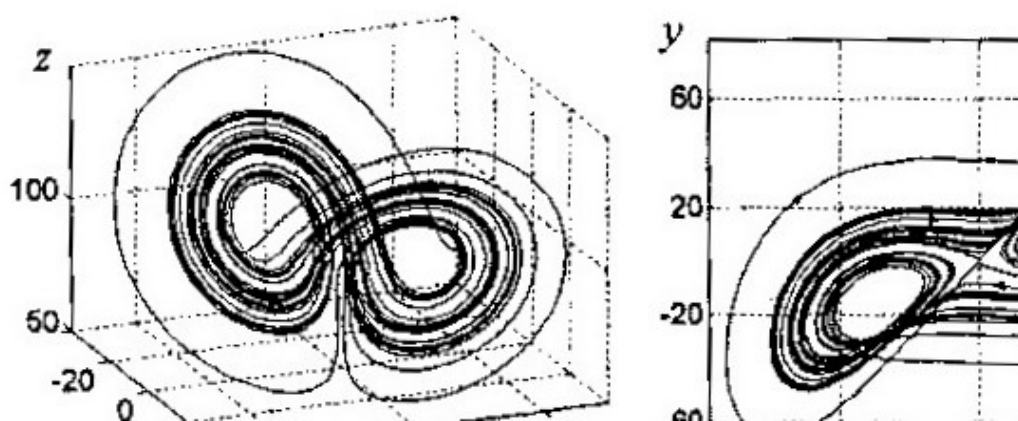


Рисунок 5.7 – Хаотический аттрактор в системе Лоренца

К числу классических примеров нелинейных дифференциальных моделей, обладающих предельным циклом, относятся уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{y} + \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (5.13)$$

где $\varepsilon > 0$; уравнение Дуффинга

$$\ddot{y} + p\dot{y} - qy + q_0y^3 = 0 \quad (5.14)$$

где $p > 0$, $q > 0$, $q_0 > 0$; система с релейным элементом

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy - \text{sign}(y) = 0. \quad (5.15)$$

Даже простые нелинейные модели позволяют описывать колебания сложной формы, например релаксационные (близкие к прямоугольным) колебания, учитывать изменение формы колебания в зависимости от начальных условий (системы с несколькими предельными циклами) и т.д. Теоремы о разложении периодической функции в ряд Фурье показывают, что спектр предельного цикла состоит из счетного набора частот, кратных некоторой основной частоте. На рис. 5.5, а приведен график решения системы (5.13) при $\varepsilon = 2.5$, $\omega = 1$ и начальных условиях $y(0) = 0.5$, $\dot{y}(0) = 0$. Соответствующий спектр изображен на рис. 5.5, б.

В течение нескольких десятилетий линейные модели колебаний и нелинейные модели с предельными циклами удовлетворяли потребности инженеров. Считалось, что они описывают все возможные типы колебаний детерминированных систем. Однако в середине XX века сами математики обнаружили, что уже для систем третьего порядка это не так: в системе становятся возможными весьма сложные движения – ограниченные непериодические колебания. Настоящий переворот начался с работы физика Е. Лоренца, опубликованной в 1963 г., где было показано, что качественный характер явлений атмосферной турбулентности, описываемых сложными уравнениями в частных производных Навье-Стокса, может быть передан простой нелинейной моделью третьего порядка (уравнение Лоренца):

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \quad (5.16)$$

Решения системы (5.16) при некоторых значениях параметров (например, при $\sigma = 10$, $r = 97$, $b = 8/3$ выглядят как нерегулярные колебания

(рис. 5.6, а, где изображен график $x(t)$). Траектории в пространстве состояний (фазовом пространстве) могут приближаться к предельному множеству (аттрактору), имеющему весьма причудливое строение (рис. 5.7, а). Внимание многих физиков и математиков, а затем и инженеров к подобным моделям было привлечено после работы Д. Рюэля и Ф. Такенса, опубликованной в 1971 г., которые называли такие аттракторы «странными», а также работы Т. Ли и Дж. Йорке (1975), которые ввели термин «хаос» для обозначения подобных нерегулярных явлений в детерминированных системах. Разработанные новые методы аналитического и численного исследования систем показали, что хаос – это отнюдь не исключительный вид поведения нелинейной системы. Грубо говоря, хаотические движения возникают, когда траектории системы глобально ограничены и локально неустойчивы. В хаотической системе сколь угодно малое начальное расхождение траекторий не остается малым, а в течение некоторого времени растет экспоненциально. Частотный спектр хаотической траектории является непрерывным (рис. 5.6, б, где изображен спектр функции $x(t)$). Во многих случаях подобные нерегулярные, непериодические колебания лучше отражают свойства процессов, протекающих в реальных системах. Опять-таки следует отметить, что «на глаз» отличить хаотический процесс от квазипериодического может быть не менее трудно, чем отличить квазипериодический процесс от периодического.