Решение СЛАУ методом исключения

Одной из наиболее распространенных задач является задача решения СЛАУ

$$Ax = b,$$

для заданных квадратной матрицы A и вектора b.

Если A — невырожденная матрица, то для нее существует обратная A^{-1}. Умножая СЛАУ на A^{-1} слева, получим решение:

$$x = A^{-1}b.$$

Полученный метод решения СЛАУ неэффективен в силу большого времени вычислений.

Рассмотрим более эффективный алгоритм решения СЛАУ – метод исключения Гаусса. Этот алгоритм с некоторыми модификациями используют для решения СЛАУ до двухсотого порядка.

Вначале продемонстрируем работу алгоритма на примере следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \end{cases}$$

которую запишем в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Введем расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

На первом шаге алгоритма исключим x_1 из второго и третьего уравнений системы. Для исключения x_1 во втором уравнении, из второго уравнения вычтем первое, умноженное на $l_{21}=2/4$. Для исключения x_1 в третьем уравнения из него вычтем первое, умноженное на $l_{31}=-1/4$. В результате после первого шага исключения получим

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 3 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

На втором шаге алгоритма исключим x_2 в третьем уравнении, для чего из третьего уравнения вычтем первое, умноженное на $l_{32}=-1/2$. После второго шага исключения получим

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

За два шага закончилась первая часть алгоритма — приведение системы к треугольной форме. Решение полученной треугольной системы осуществляется снизу вверх

$$x_3=\frac{4}{4}=1;$$
$$x_2=2(3-3x_3)=0;$$
$$x_1=\frac{1}{4}(6-2x_3+9x_2)=1.$$

Перейдем к построению алгоритма исключения для СЛАУ общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_2+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

Шаг 1: исключим x_1 из уравнений с номерами $2,\ldots,n$ путем вычитания: из второго уравнения первого, умноженного на $l_{21}=a_{21}/a_{11}$;

…

из n-ого уравнения первого, умноженного на $l_{n1} = a_{n1}/a_{11}$.

После первого шага система уравнений преобразуется к виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}. \end{cases}$$

где $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - l_{i1}a_{1j}, b_i^{(1)} = b_i - l_{i1}b_1, l_{i1} = a_{i1}/a_{11}, i, j = 2,\ldots,n$

Шаг 2: исключим x_2 из уравнений с номерами 3,…, n путем вычитания:

Из третьего уравнения второго, умноженного на $l_{32} = a_{32}/a_{22}$

….

Из n-ого уравнения второго, умноженного на $l_{n2} = a_{n2}/a_{22}$.

После второго шага получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}. \end{cases}$$

После n-1 шага исключения исходная система придет к треугольной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

где

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - l_{ik}b_k^{(k-1)}, a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - l_{ik}a_{ij}^{(k-1)},$$

k=1,…n–1– номер шага исключения, i=k+1, …, n – номер строки, j=k+1, …, n - номер столбца.

Решение треугольной системы осуществляется путем обратной подстановки k=n, n-1, …, 1.

$$x_k = \left(\mathrm{b}_\mathrm{k}^{(\mathrm{k}\text{-}1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)} x_j \right) \Big/ a_{kk}^{(k-1)}.$$

При реализации алгоритма в виде программы элементы $a_{ij}^{(k)}$ и $b_i^{(k)}$ обычно хранят на месте исходных элементов a_{ij}, b_i , поэтому их прежние значения будут изменены. Приведем программу, реализующую алгоритм решения СЛАУ методом исключения.

LU-факторизация матриц

В процессе исключения по Гауссу исходная матрица СЛАУ A приведена к верхней треугольной матрице

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

где элементы матрицы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю. Введем в рассмотрение нижнюю треугольную матрицу, на главной диагонали которой расположены единицы, а под главной диагональю помещены l_{ij}, полученные в процессе приведения A к верхнетреугольному виду

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что

$$A = LU ,$$

то есть в процессе решения СЛАУ с использованием метода исключения получено разложение (факторизация) исходной матрицы на нижнетреугольную с единичной главной диагональю и верхнетреугольную.

Если проведена LU-факторизация матрицы СЛАУ $Ax = b$, то решение системы может быть получено следующим образом. Исходную систему перепишем в виде

$$LUx = b.$$

Введем обозначение $Ux = y$, тогда исходная система сведется к двум СЛАУ

$$Ly = b, \; Ux = y,$$

каждая из которых проще, чем исходная, так как имеет треутольную матрицу.

Решение первой системы -

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

легко вычисляется прямой подстановкой

$$y_1 = b_1,$$
$$y_2 = b_2 - l_{21} y_1,$$
$$\dots$$
$$y_n = b_n - l_{n1} y_1 - \dots - l_{n,n-1} y_{n-1},$$

или, в общем виде:

$$y_k = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki} y_i$$

После того как получен вектор y, можно решить вторую треугольную систему

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

путем обратной подстановки

$$x_n = \frac{1}{u_{nn}} y_n,$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1,n-1}} \left(y_{n-1} - u_{n-1,n} x_n \right),$$

$$\dots$$

$$x_1 = \frac{1}{u_{11}} \left(y_1 - \sum_{j=2}^{n} u_{1j} x_j \right).$$

или, в общем виде:

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left(y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j \right), \; k = n, n-1, \dots, 1.$$

Таким образом, применение LU-факторизации сводит решение исходной СЛАУ к последовательному решению двух СЛАУ с треугольными матрицами. Если требуется решить несколько СЛАУ о одной и той же матрицей A и различными правыми частями

$$Ax_i = b_i ; \; x_i, b_i \in R^n, \qquad i = 1, \dots, n,$$

то предварительная LU-факторизация матрицы системы A позволяет существенно сократить трудоемкость решения n систем, сводя задачу к решению $2n$ СЛАУ с треугольными матрицами

$$Ly_i = b_i,$$

$$Ux_i = y_i.$$

Вычисление определителя и обратной матрицы

Определитель матрицы A является побочным продуктом

LU-факторизации матрицы A, действительно: