

Лекция 1. МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Понятие математической модели

Математическое моделирование – это методология научной и практической деятельности людей, основанная на построении, исследовании и использовании математических моделей. В самостоятельную научную дисциплину математическое моделирование оформилось в последние несколько десятилетий в связи с широким применением компьютеров. Математическое моделирование тесно связано с прикладной математикой и общей теорией систем, но не совпадает с ними, поскольку теория систем, как и другие разделы математики, имеет дело лишь с математическими объектами. Предмет математического моделирования шире и включает, кроме исследования математических объектов, формализацию постановки практической задачи и интерпретацию полученных формальных результатов.

Исходя из определения, выделяют три этапа математического моделирования: построение ММ (формализация задачи), исследование ММ (анализ модели), использование ММ (синтез решения).

Этап формализации задачи связан с научно-инженерной дисциплиной, именуемой системным анализом. На этапе анализа решаются так называемые прямые задачи, т.е. по заданным значениям входов системы определяются ее выходы. Для этапа синтеза характерны обратные задачи, а именно определение входов системы по заданным (желаемым) значениям ее выходов. Использование ММ возможно для различных целей: прогнозирования, исследования, проектирования, управления.

Как уже было сказано в предисловии, центральным понятием математического моделирования является понятие математической модели – совокупности математических объектов и отношений, которые отображают объекты и отношения некоторой области реального мира (предметной области).

Рассмотрим в качестве примера один из простейших видов математических моделей – линейное соотношение между двумя числовыми переменными. Если обозначить входную (независимую) переменную через u , а выходную (зависимую) через y , то такая модель имеет вид

$$y = ku, \quad (1.1)$$

где k – некоторый числовой параметр (коэффициент), выражающий свойства модели. Соотношение (1.1) является формальным выражением того факта, что между величинами u и y существует прямая пропорциональная зависимость. Подобными зависимостями описываются многие процессы в физических, биологических и других реальных (естественных или искусственных) объектах. Соотношение (1.1) (или другое аналогичное соотношение) может описывать как связь между конкретными переменными конкретного объекта, так и целый класс зависимостей, одинаковых для различных объектов.

Наиболее общие и универсальные зависимости в естественных науках называются законами. Например, закон Ньютона в механике выражает тот факт, что ускорение тела прямо пропорционально приложенной к телу силе. Закон Ома в физике говорит, что сила тока, протекающего через участок электрической цепи, прямо пропорциональна падению напряжения на этом участке и т.д.

С точки зрения математического моделирования и закон Ньютона, и закон Ома являются примерами линейных статических математических моделей (1.1). В случае закона Ньютона – это сила, приложенная к телу в момент t , $y \equiv d^2s(t)/dt^2$ – ускорение тела, т.е. вторая производная от перемещения $s(t)$, $k = m^{-1}$, где m – масса тела. В случае закона Ома $u \equiv i(t)$ – это сила тока в проводнике, $y \equiv \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi(t)$ – падение напряжения на участке проводника (разность потенциалов), $k = R$ – величина сопротивления рассматриваемого участка. Таким образом, математическая модель – это более общее понятие, чем закон, поскольку оно носит междисциплинарный

характер. Успехи прикладной математики и математического моделирования основаны на том, что одними и теми же математическими моделями могут описываться совершенно различные по природе процессы, т.е. одни и те же приемы и методы построения и исследования математических моделей пригодны для различных объектов (задач).

С другой стороны, законы естественных наук часто являются «кирпичиками» для построения математической модели реального объекта (так называемые теоретические модели, или модели на основе первичных принципов). Такой подход является основным в теоретической и прикладной механике, а также в теоретической и прикладной физике, где модели конкретных процессов и объектов выводятся из общих вариационных принципов – законов. Однако готовых «кирпичиков» может оказаться недостаточно и тогда при построении математической модели добавляются дополнительные соотношения – связи. В частности, такая ситуация возникает, когда реальный объект состоит из нескольких частей (элементов, компонентов) или требуется описать взаимодействие нескольких различных по природе процессов, протекающих в объекте. Правила соединения отдельных частей в единую математическую модель, отражающие структуру взаимодействия этих частей, часто называются структурно-топологическими уравнениями (связями). Такие правила могут основываться на законах естественных наук, например на законе Д’Аламбера для механических систем и аналогичном (в силу электромеханической аналогии) законе Кирхгофа для электрических цепей. В общем случае для составления моделей целого из моделей отдельных частей используется аппарат теории графов и теории матриц.-

Однако, даже если уравнения отдельных частей и уравнения связей построены, задачу построения математической модели рано считать решенной, поскольку модель может содержать ряд параметров, которые недоступны или трудно определяемы в реальной системе. Их определение может потребовать дополнительных экспериментов с реальной системой с

целью определения (идентификации) параметров математической модели. Например, в линейной модели (1.1) требуется оценить коэффициент k по результатам экспериментов.

Хотя методы оценки параметров достаточно хорошо разработаны (см. ниже гл. 4), их применение имеет принципиальные ограничения в силу невозможности построения абсолютно точной модели реальной системы. Наличие неустранимых погрешностей и помех создает ситуацию неопределенности, когда выходные переменные не определяются однозначно входными переменными и параметрами модели. Наличие неопределенности приводит к тому, что для одного и того же объекта или процесса может существовать несколько или даже бесконечно много математических моделей.

1.2. Математическое моделирование и теория систем

Важным понятием математического моделирования является понятие «система». Система в абстрактном смысле – эквивалент понятия математической модели и задается парой множеств U, Y (U – множество входов, Y – множество выходов) и отношением на множестве $U \times Y$, формализующим связь (зависимость) между входами и выходами.

Напомним, что отношением R на множестве $X \times Y$ (или отношением между X и Y) называется подмножество множества $X \times Y$, т.е. некоторый набор пар $R = \{(x, y)\}$, где $x \in X, y \in Y$. Например, функция $y = x^2$ может быть представлена как отношение между множествами $X = (-\infty, \infty)$, $Y = [0, \infty)$, включающее те пары (x, y) , для которых $y = x^2$.

Входы (входные сигналы) формализуют воздействия, которые можно прикладывать к системе, а выходы (выходные сигналы) – это совокупность всех данных (величин), доступных наблюдению или измерению. Например, при построении математической модели участка электрической цепи можно в качестве множеств U, Y входных и выходных сигналов взять множество

непрерывных вещественнозначных функций, заданных на числовой оси R^1 . Тогда в качестве отношения S будет выступать отношение линейной связи между числовыми значениями силы тока и разности потенциалов:

$$\frac{\Delta\varphi(t)}{i(t)} = k = \text{const.}$$

Для системы, описывающей движение материальной точки по закону Ньютона, в качестве U — множества входных функций также можно взять множество непрерывных функций на R^1 , но тогда в качестве выходного множества Y следует брать множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, а отношение S устанавливает линейную связь между входной функцией и второй производной от выходной функции по времени.

Соединение систем также является системой и задается отношением. Например, последовательное соединение систем $S_1 \subset U_1 \times Y_1$ и $S_2 \subset U_2 \times Y_2$ есть отношение $S \subset U_1 \times Y_2$, такое что $(u_1, y_2) \in S$, если существуют $y_1 \in Y_1$, $u_2 \in U_2$, удовлетворяющие условиям $(u_1, y_1) \in S_1$, $(u_1, y_2) \in R$, $(u_2, y_2) \in S_2$, где $R \subset Y_1 \times U_2$ — отношение, определяющее связь между y_1 и u_2 . Таким образом можно определять сколь угодно сложные системы, исходя из простых, которые становятся частями (подсистемами) составной системы.

Приведенное определение отражает в абстрактном виде особенности, присущие нашему интуитивному представлению о системе: целостность и структурированность. Целостность (единство) означает, что система отделена от внешней среды; среда может оказывать на нее действие (акцию) через входы и воспринимать отклик (реакцию) на эти действия через выходы.

Структурированность означает, что система может быть разделена внутри на несколько подсистем, связанных и взаимодействующих между собой так же, как целая система взаимодействует с внешней средой.

Третье свойство, присущее системе, — целенаправленность, требует задания некоторой цели, достижение которой говорит о правильной работе системы. Цель также задается некоторым отношением, которое иногда

включают в математическую модель реальной системы, а иногда - нет в зависимости от удобства для решения конкретной задачи.

Приведенное выше формальное определение весьма общо; под него подпадают практически все виды математических моделей систем: дифференциальные и разностные уравнения, регрессионные модели, системы массового обслуживания, конечные и стохастические автоматы, дедуктивные системы (исчисления) и т.д. Можно трактовать как систему любой преобразователь входных данных в выходные (рис. 1.1, а). Например, системой можно назвать процесс решения любой задачи. При этом входами будут являться исходные данные, выходами - результаты, а целью — правильное решение (рис. 1.1, б). Такой подход к системе подчеркивает ее целенаправленность и ведет свое происхождение от исследования операций — научной дисциплины, занимающейся разработкой количественных методов обоснования решений. Основное понятие здесь — операция, т.е. действие, которое подвергается исследованию (проектирование, конструирование, управление, экономическая деятельность и т.д.). Операция соответствует некоторой системе. Входами этой системы являются элементы принимаемого решения о проводимой операции, выходами — результаты проведения операции (показатели ее эффективности (рис. 1.1, в).



Рисунок 1.1 – Иллюстрация понятия системы

В дальнейшем будем рассматривать так называемые временные системы, функционирование которых – это процесс, разворачивающийся во времени, т.е. множества возможных входов и выходов U, Y – это множества функций времени со значениями соответственно во множествах U, Y :

$$U = \{u : T \rightarrow U\}, Y = \{y : T \rightarrow Y\}$$

где T – множество моментов времени, на котором рассматривается система.

Система называется функциональной (определенной), если каждой входной функции $u(t)$ соответствует единственная выходная функция $y(t)$. В противном случае система называется неопределенной. Неопределенность обычно возникает из-за неполноты информации о внешних условиях работы системы. Важным свойством, присущим реальным системам, является причинность. Она означает, что если входные функции $u_1(s)$ и $u_2(s)$ совпадают при $s \leq t$, т.е. $u_1(s) = u_2(s)$ при $s \leq t$, то соответствующие выходные функции удовлетворяют условию $y_1(t) = y_2(t)$, т.е. «настоящее не зависит от будущего при заданном прошлом».

Числовые величины, связанные с системой, делятся на переменные и параметры. Параметры - это величины, которые можно считать постоянными в промежутке времени рассмотрения системы. Остальные числовые величины являются переменными. Значения переменных и параметров определяют количественную информацию о системе. Оставшаяся информация, качественная, определяет структуру системы. Различие между переменными и параметрами, а также между параметрами и структурой может быть условным, однако знание о нем может быть полезным в методическом отношении. Так, типовым приемом построения математической модели системы является параметризация – выбор в качестве математической модели семейства соотношений, зависящих от конечного (обычно небольшого) количества чисел - параметров.

На ранних этапах развития теории систем и кибернетики в 60 – 70-х гг. XX в., был популярен подход к рассмотрению системы как «черного ящика» (“black box”), когда существующая внутренняя структура системы игнорировалась, а структура и соответствующие параметры ее математической модели выбирались по результатам экспериментов с этой системой, исходя из наилучшей точности описания ее поведения. При отсутствии априорной информации о системе такой подход является единственно возможным. Однако при наличии априорной информации более предпочтителен и современен подход «серого ящика» (“grey box”), при котором структура модели задается из физических соображений, а цель экспериментов с объектом состоит в определении параметров модели.

Для простых систем, подобных уже упоминавшимся в примерах о материальной точке и участке электрической цепи, выбор структуры (например, в виде (1.1)) обычно не вызывает сомнений (если, конечно, нет необходимости учитывать дополнительные факторы, например распределенность массы и заряда, квантовые и релятивистские эффекты) и построение математической модели конкретной системы состоит в оценке единственного параметра k по результатам эксперимента.

Однако, если количество соотношений, описывающих систему, велико, может оказаться разумным учесть только небольшое число основных из них, а остальные задать в упрощенном виде или вообще пренебречь ими. При этом из эксперимента будут определены как параметры, так и (частично) структура, т.е. будет использовано сочетание подходов «серого ящика» и «черного ящика».

Что касается определенности (детерминизма) системы, то может оказаться, что ее нет даже после определения всех параметров математической модели, но неопределенность устраняется, если ввести в математическую модель системы некоторые дополнительные скрытые (латентные) параметры a_1, a_2, \dots, a_N . Например, закон Ньютона не определяет однозначно движения точки: для этого требуется задать дополнительно два параметра – положение и скорость точки в какой-либо момент времени, например $a_0 = y(0), a_1 = dy/dt|_{t=0}$. В общем случае, формально, это означает, что выход модели задается некоторой функцией от входа системы и от набора скрытых параметров $a = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$, т.е.

$$y = R(u, a) \quad (1.2)$$

Набор a называется также глобальным состоянием системы, а функция R – глобальной реакцией системы.

В теории систем доказывалось, что представление (1.2) всегда существует, если не накладывать ограничений на функцию реакции R . Однако для временных систем в этом результате мало смысла, так как представление (1.2) должно согласовываться с временной структурой системы, в частности сохранять ее причинность. Обеспечить нужное согласование при фиксированных параметрах и часто не представляется возможным.

Однако ничего страшного не произойдет, если разрешить скрытым параметрам изменяться во времени, т.е. стать переменными. Нужно только, чтобы зависимость скрытых параметров от времени поддавалась описанию,

т.е. включалась в математическую модель системы. Таким образом, мы приходим к понятиям переменные состояния и моделей состояния, играющих важную роль в естествознании и технике.

Системы, допускающие описание в пространстве состояний, называются системами с памятью, или динамическими системами.

В заключение параграфа, отметим, что иногда при исследовании системы, не удастся однозначно определить, какие из переменных, связывающих систему с внешним миром, являются входными: а какие – выходными. Например, если участок цепи рассматривается как часть сложной электрической или электронной схемы, то исследователь не может произвольно, по своему усмотрению, менять напряжение на участке. Эксперимент со схемой может состоять лишь в подаче и измерении сигналов на некоторых узлах схемы (так называемые «порты» или «терминалы»), причем входные и выходные порты могут меняться от эксперимента к эксперименту. Эти и другие соображения мотивировали появление более общего, так называемого бихевиористского подхода в теории систем, особенно удобного для изучения взаимосвязанных систем. Бихевиористская модель системы имеет вид m -арного отношения

$$S \subset W_1 \times W_2 \times \dots \times W_m, \quad (1.3)$$

между явными (внешними) переменными сигналами w_1, w_2, \dots, w_m , среди которых могут быть как входные, так и выходные сигналы. Разумеется, в системе могут быть и патентные (скрытые) переменные.

Бихевиористские модели являются более общими, чем модели состояния.

1.3. Математическое моделирование и системный анализ

Системный анализ в широком смысле - это методология (совокупность методических приемов) постановки и решения задач построения и исследования систем, тесно связанная с математическим моделированием. В более узком смысле системный анализ – методология формализации сложных (трудно формализуемых, плохо структурированных) задач.

Системный анализ возник как обобщение приемов, накопленных в задачах исследования операций и управления в технике, экономике, в военном деле. Соответствующие модели и методы заимствовались из математической статистики, математического программирования, теории игр: теории массового обслуживания, теории автоматического управления. Фундаментом перечисленных дисциплин является теория систем.

Остановимся на различии в употреблении терминов «системный анализ» и «системный подход». Системный анализ – это целенаправленная творческая деятельность человека, на основе которой составляется представление исследуемого объекта в виде системы. Системный анализ характеризуется упорядоченным составом методических приемов исследования. Что касается термина «системный подход», то традиция его применения связана с исследованиями, проводимыми многоаспектно, комплексно, при изучении с разных сторон предмета или явления. Этот подход предполагает, что все частные задачи, решаемые на уровне подсистем, должны быть увязаны между собой и решаться с позиции целого (принцип системности). Системный анализ – более конструктивное направление, содержащее методику разделения процессов на этапы и подэтапы, систем на подсистемы, целей на подцели и т.д.

В обширной литературе по системному анализу содержится большое число рекомендаций и методических приемов построения математических моделей и принятия решений на их основе. Выделяя общие части различных приемов и рассматривая их во взаимодействии, можно сформулировать последовательность действий (этапов) при постановке и решении задач, которую будем называть методикой математического моделирования. В упрощенном виде один из возможных вариантов такой методики представлен на схеме рис. 1.2. Эта методика помогает более осмысленно и грамотно ставить и решать прикладные задачи. Опыт показал, что она полезна и в преподавании предмета, легко воспринимается обучающимися с различной степенью подготовки. Если на каком-то этапе возникают затруднения, то

нужно вернуться на один из предыдущих этапов и изменить (модифицировать) его. Если и это не помогает, то, значит, задача оказалась слишком сложной и ее нужно разбить на несколько более простых подзадач, т.е. провести декомпозицию (см. п. 1.4}. Каждую из полученных подзадач решают по той же методике. Для иллюстрации применения методики ,математического моделирования приведем пример.

Пример 1.3.1. Рассмотрим автомобиль, находящийся перед гаражом на некотором расстоянии от него (рис. 1.3, а). Требуется поставить автомобиль в гараж и сделать это по возможности наилучшим образом. При решении попытаемся руководствоваться алгоритмом системного анализа (см. рис 1.2).

Этап 1. Система – автомобиль и гараж (автомобиль, приближающийся к гаражу).

Этап 2. Вход – сила тяги двигателя. Выход – пройденный путь.

Этап 3. Цель – автомобиль должен проехать заданный путь и затормозить.

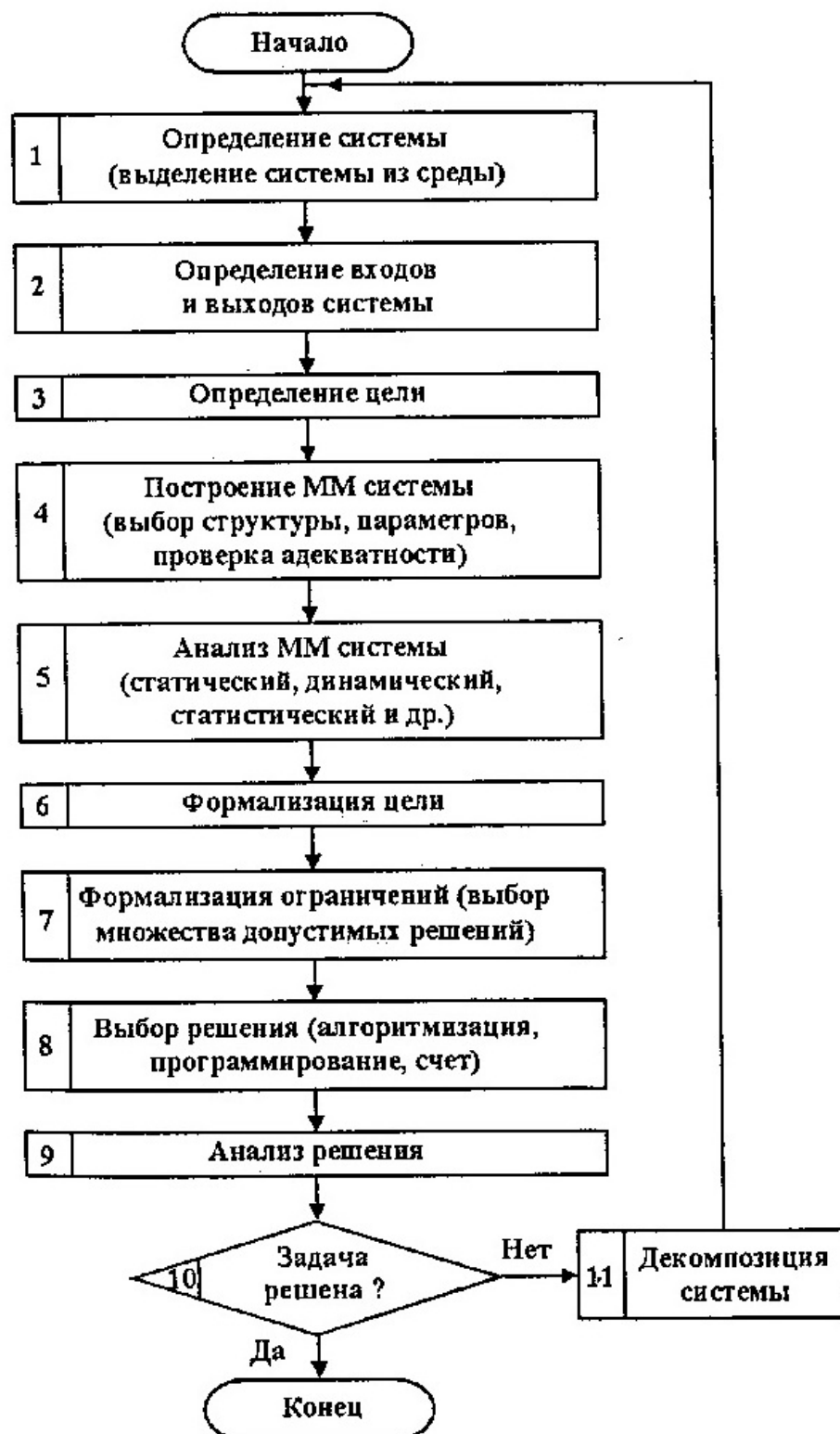


Рисунок 1.2 – Алгоритм математического моделирования

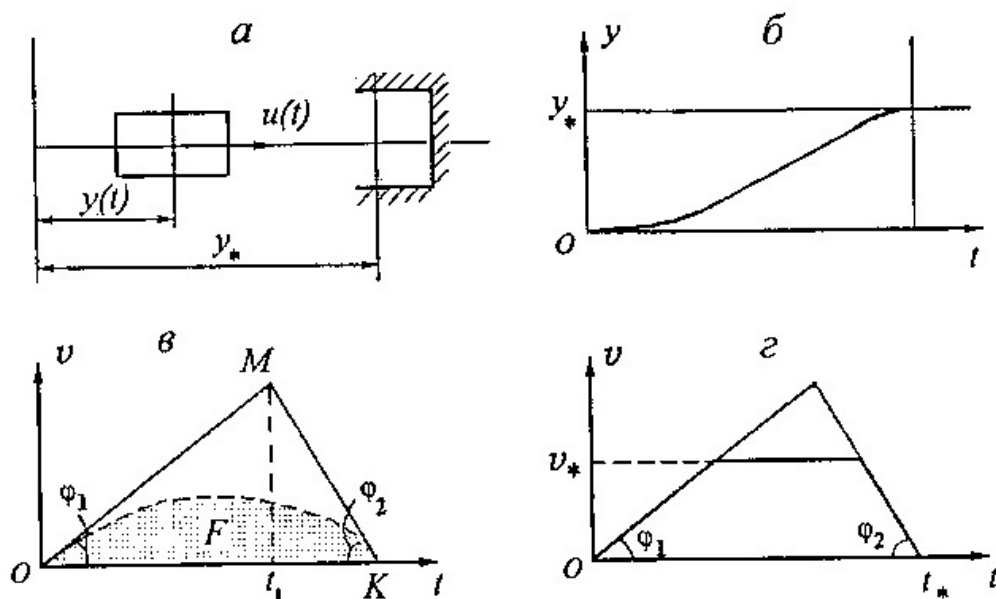


Рисунок 1.3 – Графическое решение задачи торможения автомобиля

Этап 4. Построение ММ начинается с обозначения всех величин (переменных и постоянных), существенных для задачи. Введем следующие обозначения:

- $u(t)$ – сила тяги в момент времени t (входная переменная);
- $y(t)$ – путь, пройденный к моменту t (выходная переменная);
- y_* – расстояние от автомобиля до гаража (параметр).

Затем выписываются все уравнения и соотношения, существующие между введенными величинами, как в школьных задачках на составление уравнений. Если возможных уравнений несколько, выбирают простейшее. В нашей задаче - это уравнение динамики (второй закон Ньютона)

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = u(t), \quad (1.4)$$

где m – масса автомобиля, а также начальные условия

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0. \quad (1.5)$$

Здесь и далее через $\dot{y}(t)$ будем обозначать производную по времени от функции $y(t)$. Будем также использовать обозначение $\dot{y}(t) = \dot{p}y(t)$.

Этап 5. Модель (1.4), (1.5) достаточно хорошо изучена и в детальном анализе не нуждаются. Укажем лишь, что она адекватна, если можно

пренебречь размерами автомобиля, ограничением на его мощность, силами трения и сопротивления и другими более второстепенными факторами.

Этап б. Простейший вариант формализации цели

$$y(t_*) = y_*, \quad (1.6)$$

где t_* – момент остановки, который оказывается неудовлетворительным, поскольку в (1.6) не формализовано само требование остановки $\dot{y}(t_*) = 0$, и, значит, не ясно, как система будет вести себя при $t \geq t_*$. Правильнее задать цель соотношением

$$y(t_*) = y_*, \text{ при } t \geq t_*, \quad (1.7)$$

из которого следует, в частности, что $\dot{y}(t) = 0$ при $t > t_*$. На первый взгляд, задача поставлена и можно, пропуская этап 7 (см. рис. 1.2), переходить к ее решению, т.е. к этапу 8. Но, оказывается, однозначного решения так поставленная задача не имеет: здравый смысл подсказывает, что существует бесконечно много способов достичь цели (1.7). Значит, нужно дополнить цель правилом отбора способов, позволяющим ответить на вопрос, какой способ лучше. Зададимся следующим разумным правилом: тот способ считается лучшим, который позволяет быстрее достичь цели. Формально новую цель можно записать так:

$$\min \{t_* : y(t) = y_*, t \geq t_*\} \quad (1.8)$$

Но теперь физические соображения показывают, что решение поставленной задачи тривиально: искомый минимум в (1.3) равен нулю! Действительно, выбрав достаточно большую силу тяги, можно придать автомобилю как математическому объекту, описываемому ММ (1.4), (1.5), сколь угодно большое ускорение и сколь угодно быстро переместить его на любое заданное расстояние. Видимо, требуется ввести какие-то ограничения, исключающие бессмысленные решения. Можно было бы усложнить ММ системы: учесть ограниченную мощность двигателя, его инерционность, силы трения и т.д. Однако разумнее попытаться остаться в рамках ММ (1.4), (1.5), (1.8), введя дополнительно лишь ограничения на силу тяги:

$$-a \leq u(t) \leq b. \quad (1.9)$$

Таким образом, чтобы придать задаче смысл, нам пришлось возвратиться на этап 7.

Этап 8. Для решения задачи можно было бы применить мощный и хорошо разработанный аппарат теории оптимального управления (вариационное исчисление, принцип максимума Понтрягина и др. Однако сначала надо попытаться решить задачу элементарными средствами. Для этого часто бывает полезно перейти к геометрической интерпретации задачи, чтобы привлечь нашу геометрическую интуицию. Естественная интерпретация, в координатах «время — пройденный путь» (рис. 1.3, б), не дает ключа к решению, так как не позволяет в удобной форме представить ограничения на допустимые траектории движения автомобиля. Дело меняется коренным образом, если перейти к другой ММ. Введем новую переменную $v(t) = \dot{y}(t)$ (скорость). Тогда вместо (1.4),(1.5) возникает уравнение

$$m\dot{v} = u, \quad v(0) = 0, \quad (1.10)$$

цель (1.8) запишется в виде

$$\min \left\{ t_* : \int_0^t v(s) ds = y_*, t \geq t_* \right\} \quad (1.11)$$

а ограничения (1.9) превратятся в ограничения на скорость изменения новой переменной:

$$-a/m \leq \dot{v}(t) \leq b/m. \quad (1.12)$$

Итак, мы изменили выход системы, из-за чего пришлось заново пройти этапы 2 – 6.

Геометрическая интерпретация движения системы (1.10) – (1.12) в плоскости $\{v, t\}$ изображена на рис. 1.3, в. Из него видно, что для решения задачи нужно найти кривую $v(t)$ ($t \geq 0$) с заданной площадью фигуры F под ней и наименьшей возможной координатой правого конца t_* , лежащую в треугольнике ОМК с заданными углами наклона φ_1, φ_2 боковых сторон (в соответствии с (1.12) $\operatorname{tg} \varphi_1 = b/m$ при $\operatorname{tg} \varphi_2 = a/m$).

Геометрическое решение очевидно: фигура F должна заполнять весь треугольник ОМК. Это значит, что автомобиль должен двигаться с максимальным ускорением до некоторого момента t_1 , затем включить максимальное торможение и в момент t_* выключить двигатель. Формулы для определения момента переключения t_1 выводятся из элементарного расчета треугольника ОМК по заданной площади и углам. Они имеют вид

$$t_1 = \sqrt{\frac{2may_*}{b(a+b)}}, \quad t_* = \sqrt{\frac{2m(a+b)y_*}{ab}} \quad (1.13)$$

Рассмотренная геометрическая модель позволяет решать и более сложные задачи. Например, если по соображениям безопасности нужно учесть ограничение на максимальную скорость: $|\dot{y}(t)| \leq v^*$, то легко усмотреть решение из рис. 1.3: график оптимальной траектории представляет собой трапецию.

Еще более сложные задачи (например, при введении ограничений на расход топлива в виде $\int_0^\infty |u(t)| dt \leq A$) не имеют простого аналитического решения, подобного (1.13), и практически решаются лишь численно, с привлечением математического аппарата приближенной минимизации функционалов. Однако и для них решение упрощенной задачи не теряет важности, поскольку оно позволяет получить начальное приближение к решению сложной задачи, установить качественные свойства решения сложной задачи, выявить факторы, наиболее сильно влияющие на решение сложной задачи, и, главное, соотнести результаты математического исследования со здравым смыслом.

Резюмируя сказанное, можно дать совет изучающему математическое моделирование: «Не решай сложную задачу, не решив сначала, более простую».

1.4. Сложные системы и декомпозиция

Известно, что системный анализ родился как метод исследования и проектирования сложных систем. Что же такое «сложная» система? Понятие

это неформальное, и обычно, говоря о сложных системах, перечисляют их основные особенности:

- наличие большого числа разнородных элементов (подсистем);
- сложный характер, неоднородность связей между подсистемами;
- сложность функций, выполняемых системой;
- наличие неопределенности в описании системы;
- сложность определения (организации) требуемого управляющего воздействия на систему и т.д.

Однако понятно, что каждая из этих особенностей может оказаться существенной или несущественной: все зависит от конкретной ситуации и целей исследования. Поэтому более универсальный способ выделения класса сложных систем связан со сложностью самого процесса исследования системы. Если методика математического моделирования (см. рис. 1.2) приводит к успеху сразу же, «за один проход», то нет оснований называть систему «сложной». Введение этого термина оправдано, если решить задачу в исходном виде не удастся. В этом случае она разбивается на несколько вспомогательных подзадач, решаемых по отдельности. Такой прием называется декомпозицией и является основным методом исследования сложных систем.

При декомпозиции исходная система делится на подсистемы, а цель – на подцели. Далее для решения каждой подзадачи пользуются той же методикой, что и для всей системы. Если в ходе решения (а возможно, и до того) какие-то из подзадач окажутся слишком сложными, то снова проводится декомпозиция: возникают подзадачи следующего уровня и т.д. Результатом этого процесса является структуризация. Исходная система приобретает иерархическую (многоуровневую) структуру. Соответствующая структура возникает и в множестве подцелей; она называется деревом целей (рис.1.4), поскольку представляет собой граф типа, дерева (без циклов).

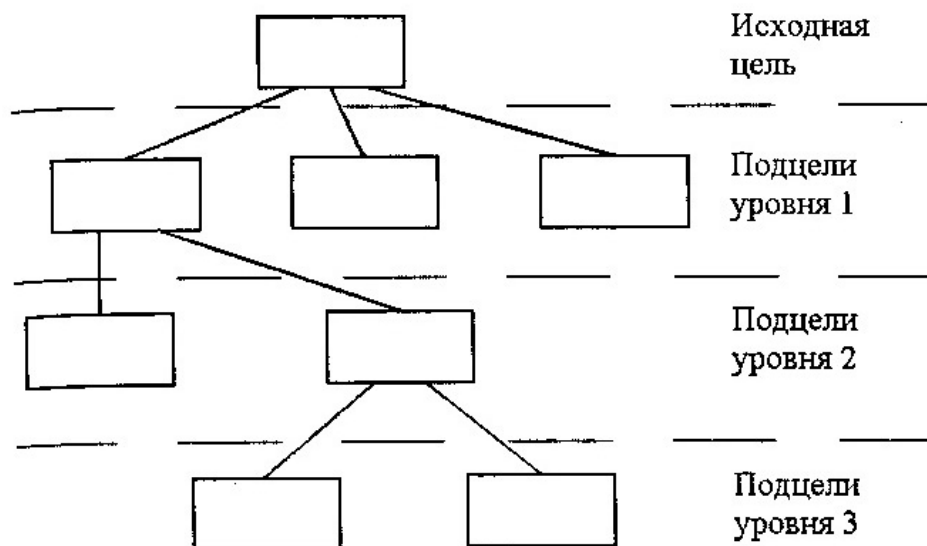


Рисунок 1.4 – Декомпозиция сложных систем

Приведенное понятие декомпозиции вполне соответствует идее структурного программирования. Создание сложных программных систем - одна из важнейших областей применения системного анализа. Отметим лишь, что раздробление системы на подсистемы обычно проводится по принципу «слабых» связей, т.е. так, чтобы связи между подсистемами были слабее, чем связи между элементами каждой подсистемы.

В сложных системах часто приходится проводить несколько вариантов декомпозиции и соответственно строить несколько деревьев целей. Это обычно связано с наличием нескольких критериев функционирования системы. Возникающие при этом задачи многокритериального выбора изучаются в теории принятия решений. Успех декомпозиции часто определяется интуицией и опытом исследователя. Человек, по данным психологов, может мысленным взором охватить структуру декомпозированной системы, если на каждом уровне возникает не более чем 5 ± 2 подзадач.

Лекция 2. Системы линейных алгебраических уравнений

2.1 Решение систем линейных алгебраических уравнений

2.1.1 Определения и основные свойства матриц

Для начала напомним некоторые сведения из линейной алгебры.

Рассмотрим систему из n линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными x_1, \dots, x_n :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Запишем СЛАУ в матричной форме, для этого введем векторы

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ и матрицу } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда СЛАУ примет вид

$$Ax = b.$$

Определение: A^{-1} — обратная матрица для квадратной матрицы A , если $AA^{-1} = I$, где I — единичная матрица.

Определение: A — невырожденная, если для A существует A^{-1} .

Теорема: следующие утверждения эквивалентны:

1. A — невырождена;
2. $\det(A) \neq 0$;
3. линейная однородная система $Ax = 0$ имеет единственное решение $x = 0$;
4. для любого b система $Ax = b$ имеет единственное решение;
5. столбцы (строки) матрицы A линейно независимы, то есть для любой комбинации чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все из которых равны нулю, линейная комбинация

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Определение: ранг матрицы — $\text{rank}(A)$ — число линейно независимых столбцов (строк).

Следствие: A — невырожденная, если и только если A — полного ранга ($\text{rank}(A)=n$).

Определение: комплексное или вещественное число λ и вектор $x \neq 0$, $x \in R^n$ называются собственным значением и собственным вектором матрицы A , если они удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$Ax = \lambda x$$

Собственный вектор — это такой вектор, который, будучи умножен на матрицу A , изменяет лишь свою длину.

Из определения собственного значения следует:

$$Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0.$$

Так как x — собственный вектор и по определению $x \neq 0$, то в соответствии с теоремой $A - \lambda I$ — вырожденная матрица, а $\det(A - \lambda I) = 0$. Левая часть последнего выражения — полином степени n относительно комплексной переменной λ , называемый характеристическим полиномом матрицы, следовательно собственные значения матрицы есть корни характеристического полинома матрицы A , их ровно n с учетом кратности.

Определение: совокупность всех собственных значений $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ матрицы A называется спектром матрицы A , а величина

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

называется спектральным радиусом.

Определение: нормой матрицы A называется

$$\|A\| = \sup_{x \in R^n} \frac{|Ax|}{|x|} = \rho(A^T A)^{1/2}.$$

Решение СЛАУ методом исключения

Одной из наиболее распространенных задач является задача решения СЛАУ

$$Ax = b,$$

для заданных квадратной матрицы A и вектора b .

Если A — невырожденная матрица, то для нее существует обратная A^{-1} . Умножая СЛАУ на A^{-1} слева, получим решение:

$$x = A^{-1}b.$$

Полученный метод решения СЛАУ неэффективен в силу большого времени вычислений.

Рассмотрим более эффективный алгоритм решения СЛАУ — метод исключения Гаусса. Этот алгоритм с некоторыми модификациями используют для решения СЛАУ до двухсотого порядка.

Вначале продемонстрируем работу алгоритма на примере следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \end{cases}$$

которую запишем в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Введем расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

На первом шаге алгоритма исключим x_1 из второго и третьего уравнений системы. Для исключения x_1 во втором уравнении, из второго

уравнения вычтем первое, умноженное на $l_{21} = 2/4$. Для исключения x_1 в третьем уравнения из него вычтем первое, умноженное на $l_{31} = -1/4$. В результате после первого шага исключения получим

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 3 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

На втором шаге алгоритма исключим x_2 в третьем уравнении, для чего из третьего уравнения вычтем первое, умноженное на $l_{32} = -1/2$. После второго шага исключения получим

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

За два шага закончилась первая часть алгоритма — приведение системы к треугольной форме. Решение полученной треугольной системы осуществляется снизу вверх

$$x_3 = \frac{4}{4} = 1;$$

$$x_2 = 2(3 - 3x_3) = 0;$$

$$x_1 = \frac{1}{4}(6 - 2x_3 + 9x_2) = 1.$$

Перейдем к построению алгоритма исключения для СЛАУ общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Шаг 1: исключим x_1 из уравнений с номерами $2, \dots, n$ путем вычитания:

из второго уравнения первого, умноженного на $l_{21} = a_{21}/a_{11}$;

...

из n -ого уравнения первого, умноженного на $l_{n1} = a_{n1}/a_{11}$.

После первого шага система уравнений преобразуется к виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \vdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}. \end{cases}$$

где $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - l_{i1}a_{1j}$, $b_i^{(1)} = b_i - l_{i1}b_1$, $l_{i1} = a_{i1}/a_{11}$, $i, j = 2, \dots, n$

Шаг 2: исключим x_2 из уравнений с номерами $3, \dots, n$ путем вычитания:

Из третьего уравнения второго, умноженного на $l_{32} = a_{32}/a_{22}$

....

Из n -ого уравнения второго, умноженного на $l_{n2} = a_{n2}/a_{22}$.

После второго шага получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \vdots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}. \end{cases}$$

После $n-1$ шага исключения исходная система придет к треугольной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

где

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - l_{ik}b_k^{(k-1)}, a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - l_{ik}a_{ij}^{(k-1)},$$

$k=1, \dots, n-1$ – номер шага исключения, $i=k+1, \dots, n$ – номер строки, $j=k+1, \dots, n$ – номер столбца.

Решение треугольной системы осуществляется путем обратной подстановки $k=n, n-1, \dots, 1$.

$$x_k = \left(b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k-1)} x_j \right) / a_{kk}^{(k-1)}.$$

При реализации алгоритма в виде программы элементы $a_{ij}^{(k)}$ и $b_i^{(k)}$ обычно хранят на месте исходных элементов a_{ij} , b_i , поэтому их прежние значения будут изменены. Приведем программу, реализующую алгоритм решения СЛАУ методом исключения.

LU-факторизация матриц

В процессе исключения по Гауссу исходная матрица СЛАУ A приведена к верхней треугольной матрице

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

где элементы матрицы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю. Введем в рассмотрение нижнюю треугольную матрицу, на главной диагонали которой расположены единицы, а под главной диагональю помещены l_{ij} , полученные в процессе приведения A к верхнетреугольному виду

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что

$$A = LU,$$

то есть в процессе решения СЛАУ с использованием метода исключения получено разложение (факторизация) исходной матрицы на нижнетреугольную с единичной главной диагональю и верхнетреугольную.

Если проведена LU-факторизация матрицы СЛАУ $Ax = b$, то решение системы может быть получено следующим образом. Исходную систему перепишем в виде

$$LUx = b.$$

Введем обозначение $Ux = y$, тогда исходная система сведется к двум СЛАУ

$$Ly = b, Ux = y,$$

каждая из которых проще, чем исходная, так как имеет треугольную матрицу.

Решение первой системы -

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

легко вычисляется прямой подстановкой

$$y_1 = b_1,$$

$$y_2 = b_2 - l_{21}y_1,$$

...

$$y_n = b_n - l_{n1}y_1 - \dots - l_{n,n-1}y_{n-1},$$

или, в общем виде:

$$y_k = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}y_i$$

После того как получен вектор y , можно решить вторую треугольную систему

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

путем обратной подстановки

$$x_n = \frac{1}{u_{nn}} y_n,$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1,n-1}} (y_{n-1} - u_{n-1,n} x_n),$$

...

$$x_1 = \frac{1}{u_{11}} \left(y_1 - \sum_{j=2}^n u_{1j} x_j \right).$$

или, в общем виде:

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left(y_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j \right), \quad k = n, n-1, \dots, 1.$$

Таким образом, применение LU-факторизации сводит решение исходной СЛАУ к последовательному решению двух СЛАУ с треугольными матрицами. Если требуется решить несколько СЛАУ о одной и той же матрицей A и различными правыми частями

$$Ax_i = b_i; x_i, b_i \in R^n, \quad i = 1, \dots, n,$$

то предварительная LU-факторизация матрицы системы A позволяет существенно сократить трудоемкость решения n систем, сводя задачу к решению $2n$ СЛАУ с треугольными матрицами

$$Ly_i = b_i,$$

$$Ux_i = y_i.$$

Вычисление определителя и обратной матрицы

Определитель матрицы A является побочным продуктом

LU-факторизации матрицы A , действительно:

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U).$$

Второе равенство получено на основании того, что определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей.

Вычислим определитель каждого из сомножителей. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\det \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \dots \cdot u_{nn},$$

следовательно

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n u_{ii}.$$

В MATLAB реализована функция вычисления определителя матрицы $D = \det(A)$.

Перейдем к рассмотрению вопроса о вычислений обратной матрицы. По определению обратная матрица X удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению

$$AX = I$$

Представим матрицы X и I в виде наборов их столбцов

$$X = (x_1 | x_2 | \dots | x_n); \quad x_i \in R^n;$$

$$I = (e_1 | e_2 | \dots | e_n); \quad e_i \in R^n;$$

где e_i – вектор, который имеет все нулевые элементы за исключением i -ого, равного 1. Тогда матричное уравнение для обратной матрицы можно переписать в виде

$$A(x_1 | x_2 | \dots | x_n) = (e_1 | e_2 | \dots | e_n),$$

то есть представляет собой n СЛАУ вида

$$Ax_i = e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, для вычисления обратной матрицы необходимо решить n СЛАУ и составить из полученных решений матрицу. Учитывая, что все n СЛАУ имеют одинаковую матрицу A , целесообразно произвести ее LU-факторизацию и свести задачу вычисления обратной матрицы к решению $2n$ СЛАУ с треугольными матрицами

$$Ly_i = e_i,$$

$$Ux_i = y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обусловленность СЛАУ. Анализ ошибок решения СЛАУ

Определение: СЛАУ плохо обусловлена, если малые изменения элементов матрицы A или вектора b приводят к большим изменениям в решении.

Рассмотрим пример плохо обусловленной СЛАУ:

$$0,8x_1 + 0,4x_2 = 1,$$

$$0,79x_1 + 0,41x_2 = \varepsilon.$$

Решения этой системы x_0 для $\varepsilon = 0$ и x_ε для малого значения ε будут сильно отличаться. Это связано с тем, что на плоскости x_1x_2 уравнения системы задают “почти” параллельные прямые 1 и 2 (рис. 2.1). Следовательно, уравнения являются “почти” линейнозависимыми, и при их малом изменении относительно друг друга точка пересечения прямых будет значительно меняться.

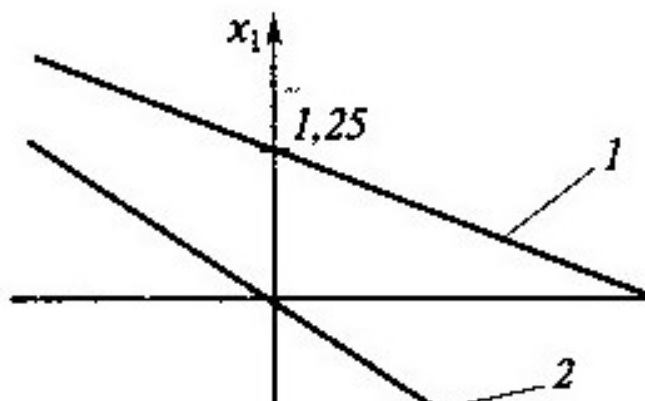


Рисунок 2.1

Получим количественную характеристику обусловленности СЛАУ. Рассмотрим исходную систему

.

Изменим вектор правой части таким образом, что $b = b_0 + \Delta b$, при этом изменится решение СЛАУ $x = x_0 + \Delta x$. Найдем зависимость Δx от Δb :

$$A(x_0 + \Delta x) = b_0 + \Delta b,$$

$$Ax_0 + A\Delta x = b_0 + \Delta b.$$

Учитывая, что $Ax_0 = b_0$ имеем

$$A\Delta x = \Delta b,$$

$$\Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

Вычислим зависимость норм векторов $\|\Delta x\|$ и $\|\Delta b\|$. По правилу треугольников имеем

$$\|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\|,$$

поэтому, если $\|A^{-1}\|$ мала, то большие изменения $\|\Delta b\|$ приведут к малым изменениям $\|\Delta x\|$. Удобно иметь дело с относительными величинами

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x_0\|} \text{ и } \frac{\|\Delta b\|}{\|b_0\|}.$$

Учитывая, что $\|b_0\| = \|Ax_0\|$, умножая полученное неравенство на $\|b_0\|$, получим:

$$\|\Delta x\| \cdot \|b_0\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \|b_0\| = \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \|Ax_0\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \|A\| \cdot \|x_0\|$$

Разделим обе части неравенства на $\|x_0\| \cdot \|b_0\|$:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x_0\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b_0\|}.$$

Величина

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$$

называется числом обусловленности матрицы. Как следует из полученного неравенства, это число характеризует относительное изменение нормы решения СЛАУ в зависимости от относительного изменения нормы правой части системы.

Для вычисления числа обусловленности матрицы воспользуемся определением нормы матрицы

$$\|A\|^2 = \rho(A^T A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A^T A)|,$$

где $\lambda_i(A^T A)$ – собственное число матрицы $A^T A$. Вычислим

$$\|A^{-1}\| = \rho\left((A^{-1})^T A^{-1}\right)$$

Учитывая симметричность $(A^{-1})^T A^{-1}$ и коммутативность операций транспонирования и обращения, получим:

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T A)^{-1}.$$

Поэтому

$$\|A^{-1}\|^2 = \rho\left((A^{-1})^T A^{-1}\right) = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\lambda_i(A^T A)} = \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^T A)}.$$

Из определения числа обусловленности

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \left[\frac{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^T A)}{\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^T A)} \right]^{1/2} \geq 1.$$

Вычисление собственных значений матрицы

Рассмотрим наиболее простой алгоритм вычисления собственных значений матрицы, основанный на вычислении корней характеристического полинома матрицы – алгоритм А. Н. Крылова. Алгоритм является следствием теоремы Гамильтона-Кэли.

Теорема: квадратная матрица A является корнем своего характеристического полинома

$$p(s) = \det(Is - A) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0,$$

то есть матрица A удовлетворяет матричному уравнению

$$A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \dots + p_1A + p_0I = 0.$$

Алгоритм А.Н. Крылова основан на вычислении коэффициентов характеристического полинома $p(s)$ матрицы, а собственные значения вычисляют как корни характеристического полинома

$$p(s_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для вычисления коэффициентов характеристического полинома воспользуемся матричным уравнением, следующим из теоремы Гамильтона-Кэли. Умножим обе части этого уравнения на произвольный $x_0 \neq 0 \in R^n$

$$A^n x_0 + p_{n-1}A^{n-1}x_0 + \dots + p_1Ax_0 + p_0x_0 = 0,$$

введем обозначения $x_i = A^i x_0$, после чего исходное матричное уравнение сведется к векторному уравнению:

$$x_n + p_{n-1}x_{n-1} + \dots + p_1x_1 + p_0x_0 = 0.$$

Из коэффициентов $\{p_i\}_{i=0}^{i=n-1}$ составим вектор

$$p = (p_{n-1} \ p_{n-2} \ \dots \ p_1 \ p_0)^T,$$

а из векторов $\{x_i\}_{i=0}^{i=n-1}$ матрицу

$$X = (x_{n-1} \ | \ x_{n-2} \ | \ \dots \ | \ x_1 \ | \ x_0).$$

В результате получена СЛАУ относительно вектора неизвестных коэффициентов характеристического полинома

$$Xp = -x_n$$

Решая эту СЛАУ, получим характеристический полином, корни которого есть собственные значения матрицы.

Лекция 3. Численные методы решения систем линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши для линейной динамической системы

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x \in R^n, u \in R^l, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \quad y \in R^m, x(t_0) = x_0\end{aligned}$$

с заданным для каждого момента времени вектором входа $u(t)$. Если найден, то определить выход $y(t)$ по второму уравнению не представляет труда, поэтому ограничимся рассмотрением только уравнения состояния

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0$$

представляющего собой систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

Для построения решения неоднородной системы предварительно изучим свойства решений линейной однородной системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Для этого рассмотрим n -линейно независимых векторов

$$x_0^{(i)} = \begin{pmatrix} x_{10}^{(i)} \\ x_{20}^{(i)} \\ \vdots \\ x_{n0}^{(i)} \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n.$$

которые примем в качестве начальных условий линейной однородной системы

$$x^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}.$$

По этим n начальным условиям получим n решений однородной системы дифференциальных уравнений

$$x^{(i)}(t), \quad t \in [t_0, T], i = 1, \dots, n,$$

каждое из которых удовлетворяет соотношению

$$\dot{x}^{(i)}(t) = Ax^{(i)}(t), \quad x^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}.$$

Матрица $X(t)$, составленная из этих решений как из столбцов, называется фундаментальной матрицей линейной системы:

$$X(t) = (x^{(1)}(t) | x^{(2)}(t) | \dots | x^{(n)}(t))$$

Любой столбец фундаментальной матрицы удовлетворяет линейной системе, поэтому

$$(\dot{x}^{(1)}(t) | \dot{x}^{(2)}(t) | \dots | \dot{x}^{(n)}(t)) = A(x^{(1)}(t) | x^{(2)}(t) | \dots | x^{(n)}(t)),$$

то есть фундаментальная матрица удовлетворяет матричному линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad X(t_0) = (x_0^{(1)} | x_0^{(2)} | \dots | x_0^{(n)}).$$

Основное свойство фундаментальной матрицы дает следующая теорема.

Теорема: если существует $t_* \in [t_0, T]$ такая, что $\det(X(t_*)) \neq 0$ то для любой $t \in [t_0, T]$ $\det(X(t)) \neq 0$.

В связи с тем, что векторы начальных условий линейно независимы, то $X(t_0)$ состоит из линейно-независимых столбцов, а следовательно, $\det(X(t_0)) \neq 0$. По теореме следует, что для всех $t \in [t_0, T]$ $X(t)$ – невырожденная матрица.

Система линейных дифференциальных уравнений имеет бесконечное число фундаментальных матриц в зависимости от принятого набора линейно независимых векторов начальных условий. Так как $X(t_0)$ – невырожденная матрица, то можно определить матрицу

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0), \quad t \in [t_0, T],$$

называемую переходной матрицей. Переходная матрица обладает следующими свойствами:

1. $\Phi(t_0, t_0) = X(t_0)X^{-1}(t_0) = I.$

2. Переходная матрица невырожденная для любых t_0, t , т.е.

$$\det(\Phi(t, t_0)) = \det(X(t)X^{-1}(t_0)) = \det(X(t))\det(X^{-1}(t_0)) \neq 0.$$

3. Переходная матрица удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A\Phi(t, t_0).$$

Действительно:

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(X(t) X^{-1}(t_0) \right) = \frac{dX(t)}{dt} X^{-1}(t_0) = AX(t) X^{-1}(t_0) = A\Phi(t, t_0).$$

Из свойств 3 и 1 следует, что $\Phi(t, t_0)$ – фундаментальная матрица, для которой $X(t_0) = I$.

4. $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t).$

Действительно

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \left(X(t) X^{-1}(t_0) \right)^{-1} = X(t_0) X^{-1}(t) = \Phi(t_0, t).$$

Переходную матрицу используют для построения решения систем линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений.

Решение задачи Коши систем линейных однородных дифференциальных уравнений через фундаментальную матрицу

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x \in R^n, \quad t \in [t_0, T]$$

Докажем, что решение этой задачи имеет вид

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0.$$

Доказательство. Продифференцируем по t левую и правую часть решения:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0)x_0 = A\Phi(t, t_0)x_0 = Ax(t).$$

Второе равенство следует из свойства 3 переходной матрицы, третье равенство – из определения решения через переходную матрицу. Таким образом, предложенное решение удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений. Осталось показать, что предложенное решение удовлетворяет начальному условию, для чего вычислим

$$x(t_0) = \Phi(t_0, t_0)x_0 = Ix_0 = x_0$$

Следовательно, переходная матрица позволяет вычислить решение ЛОУ для любого момента времени t через решение в другой момент времени t_0 .

Вычисление переходной матрицы

Переходная матрица удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A\Phi(t, t_0).$$

с начальным условием $\Phi(t_0, t_0) = I$.

Требуется найти аналитическое решение этого матричного уравнения. Используем следующий прием: проинтегрируем обе части уравнения в пределах $[t_0, t]$ по переменной t :

$$\int_{t_0}^t \frac{d\Phi(\tau, t_0)}{d\tau} \cdot d\tau = \int_{t_0}^t A\Phi(\tau, t_0) d\tau \quad (4.7).$$

Учитывая, что в левой части содержится полный дифференциал, а матрица A не зависит от τ , получим

$$\Phi(t, t_0) - \Phi(t_0, t_0) = \int_{t_0}^t A\Phi(\tau, t_0) d\tau,$$

или

$$\Phi(t, t_0) = I + A \int_{t_0}^t \Phi(\tau, t_0) d\tau,$$

Подынтегральное выражение можно представить по этой же формуле, то есть

$$\Phi(t, t_0) = I + A \int_{t_0}^t \left(I + A \int_{t_0}^{\tau} \Phi(\tau_1, t_0) d\tau_1 \right) d\tau = I + A(t - t_0) + A^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \Phi(\tau_1, t_0) d\tau_1 d\tau,$$

Подставив (4.7) в подынтегральное выражение, получим:

$$\begin{aligned}
\Phi(t, t_0) &= I + A(t - t_0) + A^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \left(I + A \int_{t_0}^{\tau_1} \Phi(\tau_2, t_0) d\tau_2 \right) d\tau_1 d\tau = \\
&= I + A(t - t_0) + A^2 \int_{t_0}^t (\tau - t_0) d\tau + A^3 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \int_{t_0}^{\tau_1} \Phi(\tau_2, t_0) d\tau_2 d\tau_1 d\tau = \\
&= I + A(t - t_0) + A^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!} + A^3 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \int_{t_0}^{\tau_1} \Phi(\tau_2, t_0) d\tau_2 d\tau_1 d\tau.
\end{aligned}$$

продолжая итерационно этот процесс, получим выражение для переходной матрицы в виде сходящегося матричного ряда

$$\Phi(t, t_0) = I + A(t - t_0) + A^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \dots + A^n \frac{(t - t_0)^n}{n!} + \dots$$

Рассмотрим скалярную функцию $y(t) = e^{at}$. Разложим ее в ряд Тейлора в окрестности точки t_0 .

$$y(t) = y(t_0) + \frac{y'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{y''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \dots$$

Производные от экспоненты вычисляются по формуле

$$y^{(k)}(t_0) = a^k e^{at_0},$$

В результате получим для экспоненты

$$e^{at} = e^{at_0} + e^{at_0} a(t - t_0) + e^{at_0} \frac{a^2(t - t_0)^2}{2!} + \dots + e^{at_0} \frac{a^n(t - t_0)^n}{n!} + \dots$$

откуда

$$e^{a(t-t_0)} = 1 + a(t - t_0) + \frac{a^2(t - t_0)^2}{2!} + \dots + \frac{a^n(t - t_0)^n}{n!} + \dots$$

Из сравнения полученного ряда с выражением для переходной матрицы следует, что переходная матрица представляет собой ряд для матричной экспоненты

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = I + A(t - t_0) + \frac{A^2}{2!}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{A^n}{n!}(t - t_0)^n + \dots$$

Матричная экспонента обладает всеми свойствами, присущими скалярной экспоненциальной функции, в частности

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = e^{At} e^{-At_0}.$$

Численное решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

Решение СЛОДУ определяется с помощью переходной матрицы $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ для вектора начальных условий $x(t_0) = x_0$ следующим выражением:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0.$$

Пусть требуется получить решение СЛОДУ в узлах равномерной сетки

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, \dots, N$$

с известным шагом h . Для этого рассмотрим решения в двух последовательных узлах сетки, например:

$$x(t_1) = x(t_0 + h) = e^{A(t_0+h-t_0)} x(t_0) = e^{Ah} x_0,$$

$$x(t_2) = x(t_0 + 2h) = e^{A(t_0+2h-t_0)} x(t_0) = e^{2Ah} x_0 = e^{Ah} e^{Ah} x_0 = e^{Ah} x_1.$$

Продолжая вычисления указанным способом, получим общее выражение для решения СЛОДУ на узлах равномерной сетки:

$$x(t_{i+1}) = e^{Ah} x(t_i).$$

Таким образом, решение СЛОДУ задается рекуррентным разностным уравнением с постоянной (для фиксированного шага сетки) матрицей системы

$$\Phi = e^{Ah}.$$

Для вычисления матрицы Φ можно воспользоваться тем, что матричный ряд

$$e^{Ah} = I + Ah + \frac{A^2 h^2}{2!} + \dots + \frac{A^n h^n}{n!} + \dots$$

сходится абсолютно для любого h , в связи с чем величину $\Phi = e^{Ah}$ можно вычислять путем непосредственного суммирования ряда из N членов

$$\Phi = I + \sum_{i=1}^N \frac{A^i h^i}{i!},$$

где $A_1 = Ah$.

Решение системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений

Как было выведено ранее, математическая модель линейной динамической системы представляет собой задачу Коши для СЛНДУ:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ x(t_0) &= x_0, \quad x \in R^n, u \in R^l.\end{aligned}$$

где вектор-функция $u(t)$ известна для любого момента времени. Найдем решение СЛНДУ. Для этого произведем замену переменных

$$z(t) = \Phi(t_0, t)x(t),$$

где $x(t)$ – решение СЛНДУ, $\Phi(t_0, t) = e^{A(t_0 - t)} = \Phi(t, t_0)^{-1}$, $\Phi(t, t_0)$ – переходная матрица для СЛНДУ

$$\dot{x}(t) = Ax(t).$$

Продифференцировав величину

$$z(t) = e^{At_0} e^{-At} x(t)$$

по переменной t с учетом того, что $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ в силу СЛНДУ, получим:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= e^{At_0} \left(-Ae^{-At} x(t) + e^{-At} (Ax(t) + Bu(t)) \right) = \\ &= e^{At_0} \left(-Ae^{-At} x(t) + e^{-At} Ax(t) + e^{-At} Bu(t) \right) = e^{At_0} e^{-At} Bu(t).\end{aligned}$$

При переходе к последнему равенству воспользовались равенством

$$Ae^{-At} = e^{-At} A,$$

которое следует из представления e^{-At} в виде ряда.

Интегрируя выражение

$$\frac{dz}{dt} = e^{At_0} e^{-At} Bu(t)$$

на интервале $[t_0, t]$ получим:

$$z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^t e^{A(t_0 - \tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Подставив в него $z(t) = e^{At_0} e^{-At} x(t)$ и $z(t_0) = x(t_0)$ получим

$$e^{A(t_0-t)} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Окончательно решение СЛНДУ будет иметь вид:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Формула для решения СЛНДУ носит название формулы Коши.

3.5 Численное решение СЛНДУ

Воспользуемся формулой Коши для построения алгоритма численного решения СЛНДУ, то есть решений $x(t_i)$, вычисленных в узлах равномерной сетки

$$t_i = t_0 + hi, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Вычислим !!!!!!!!! $x(t_1) = x(t_0 + h)$ в соответствии с формулой Коши:

$$x(t_0 + h) = e^{A(t_0+h-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} e^{A(t_0+h-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Считая величину h малой, можно пренебречь изменением входного сигнала на интервале $[t_0, t_0 + h]$, то есть считать

$$u(\tau) = u(t_i) = \text{const}, \quad \tau \in [t_i, t_i + h],$$

тогда

$$x(t_1) = e^{Ah} x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} e^{A(t_0+h-\tau)} Bu(t_0) d\tau$$

Интеграл вычислим путем замены переменных

$$s = t_0 + h - \tau,$$

откуда

$$ds = -d\tau,$$

$$\tau = t_0 \rightarrow s = h,$$

$$\tau = t_0 + h \rightarrow s = 0,$$

тогда

$$x(t_1) = e^{Ah} x(t_0) + \int_0^h e^{As} ds Bu(t_0).$$

Обозначив величины

$$A_d = e^{Ah}, B_d = \int_0^h e^{As} ds \cdot B,$$

получим выражение для решения в первом узле сетки:

$$x(t_1) = A_d x(t_0) + B_d u(t_0).$$

Вычислив $x(t_2) = x(t_1 + h)$ по указанной методике, получим

$$x(t_2) = A_d x(t_1) + B_d u(t_1).$$

Аналогично для i -го узла сетки решение определяется следующей дискретной системой:

$$x(t_{i+1}) = A_d x(t_i) + B_d u(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Матрицы A_d и B_d вычисляются разложением e^{Ah} в матричный ряд, тогда

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_0^h e^{As} ds = \int_0^h \left(I + \frac{As}{1!} + \frac{(As)^2}{2!} + \dots + \frac{(As)^n}{n!} + \dots \right) ds = I \\ &= h + \frac{Ah^2}{2!} + \dots + \frac{A^n h^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда

$$B_d = \Psi B,$$

$$A_d = I + \Psi A.$$

В MATLAB реализована команда вычисления матриц дискретной системы A_d и B_d по матрицам A, B исходной системы:

$$[\text{sysd}] = \text{c2d}(\text{sysc}, h);$$

где sysc – исходная непрерывная система, h – величина шага по времени, sysd – дискретная система.

Преобразование линейных моделей

Переход От СЛДУ к ЛДУ n -го порядка

Описание линейной динамической системы в виде СЛДУ -

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad x \in R^n, u \in R^l, y \in R^m.$$

называют описанием в форме пространства состояний, т. к. x – вектор состояния или фазовый вектор.

Описание в форме пространства состояний связано с описанием в форме “вход—выход”, т.е. с математическим описанием, непосредственно связывающим выход $y(t)$ и его производные со входом $u(t)$ и его производными:

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1y^{(1)}(t) + \alpha_0y(t) = \\ = \beta_nu^{(n)}(t) + \beta_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + \beta_1u^{(1)}(t) + \beta_0u(t), \end{aligned}$$

где $\alpha_i, i = 0, \dots, n-1$, – квадратные матрицы строения $m \times m$, а $\beta_i, i = 0, \dots, n-1$ – матрицы строения $m \times l$.

Если ввести оператор дифференцирования $p = d/dt$, уравнение преобразуется к виду

$$p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0 = \beta_np^n + \beta_{n-1}p^{n-1} + \dots + \beta_1p + \beta_0,$$

т.е. может быть записано в операторной форме

$$\alpha(p)y(t) = \beta(p)u(t)$$

где $\alpha(p), \beta(p)$ – матричные полиномы от оператора p (коэффициенты этих полиномов — матрицы).

Если ввести $\alpha^{-1}(p)$ – обратную матрицу, то формально можно записать

$$y(t) = \alpha^{-1}(p)\beta(p)u(t) = W(p)u(t),$$

где $W(p)$ – передаточная функция динамической системы. При этом $y(t) = W(p)u(t)$, – условная запись, под которой понимают, строго говоря, выражение

$$\alpha(p)y(t) = \beta(p)u(t),$$

т.е. дифференциальное уравнение !!!!!-го порядка.

Если $y(t)$ и $u(t)$ – скалярные выход и вход, то $\alpha(p), \beta(p)$ – скалярные полиномы, поэтому

$$y(t) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)}u(t) = W(p)u(t),$$

где

$$W(p) = \frac{\beta_n p^n + \beta_{n-1} p^{n-1} + \dots + \beta_1 p + \beta_0}{\alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0},$$

и является дробно-рациональной функцией.

Найдем выражение для матричных полиномов $\alpha(p), \beta(p)$ через матрицы системы A, B, C, D .

Уравнение состояния имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

Уравнение выходов имеет вид

$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

Найдем выражение для r -й производной выхода $y^{(r)}(t)$, где r — произвольное число. Делать это будем путем последовательного дифференцирования уравнений выхода.

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) + D\dot{u}(t) = C(Ax + Bu) + D\dot{u} = CAx + CBu + D\dot{u},$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= (\dot{y})' = CA\dot{x} + CB\dot{u} + D\ddot{u} = CA(Ax + Bu) + CB\dot{u} + D\ddot{u} = \\ &= CA^2x + CABu + CB\dot{u} + D\ddot{u} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$y^{(r)} = CA^r x + \sum_{k=0}^{r-1} CA^{r-1-k} Bu^{(k)} + Du^{(r)}.$$

Для $r = n$ имеем:

$$y^{(n)} = CA^n x + \sum_{k=0}^{n-1} CA^{n-1-k} Bu^{(k)} + Du^{(n)}.$$

Матрицу A^n можно выразить через A^{n-1}, \dots, A . По теореме Гамильтона-Кэли матрица A является корнем своего характеристического полинома. Если $\det(Is - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$ — характеристический полином матрицы A , то при $s = A$.

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$$

где I — единичная матрица, 0 — нулевая матрица строения $n \times n$.

Следовательно, первое слагаемое в выражении для $y^{(n)}$ можно записать как

$$CA^n x = -C(\alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I)x,$$

и выражение для $y^{(n)}$ примет вид:

$$y^{(n)} + \sum_{r=0}^{n-1} \alpha_r CA^r x = \sum_{k=0}^{n-1} CA^{n-1-k} Bu^{(k)} + Du^{(n)}.$$

Из выражения для $y^{(r)}$ получаем:

$$CA^r x = y^{(r)} - \left(\sum_{k=0}^{r-1} CA^{r-1-k} Bu^{(k)} + Du^{(r)} \right),$$

Подставим его в предыдущее выражение. Получим запись следующего вида:

$$y^{(n)} + \sum_{r=0}^{n-1} \alpha_r y^{(r)} = \sum_{r=0}^{n-1} \alpha_r \left(\sum_{k=0}^{r-1} CA^{r-1-k} Bu^{(k)} + Du^{(r)} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} CA^{n-1-k} Bu^{(k)} + Du^{(n)}.$$

Ее преобразуем к виду

$$\sum_{r=0}^n \alpha_r y^{(r)} = \sum_{r=0}^{n-1} \alpha_r \sum_{k=0}^{r-1} CA^{r-1-k} Bu^{(k)} + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_r Du^{(r)} + \sum_{k=0}^{n-1} CA^{n-1-k} Bu^{(k)} + Du^{(n)}, \quad \alpha_n = 1,$$

а затем

$$\sum_{r=0}^n \alpha_r y^{(r)} = \sum_{r=0}^n \alpha_r \sum_{k=0}^{r-1} CA^{r-1-k} Bu^{(k)} + \sum_{k=0}^n \alpha_r Du^{(r)}.$$

В последнем выражении подразумевается $\alpha_n = 1$ (в характеристическом полиноме это коэффициент при A^n). В правой части этого выражения присутствуют следующие слагаемые:

$$\left(\alpha_0 D + \sum_{r=1}^n \alpha_r CA^{r-1} B \right) u^{(0)},$$

$$\left(\alpha_1 D + \sum_{r=2}^n \alpha_r CA^{r-2} B \right) u^{(1)},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 D + \sum_{r=3}^n \alpha_r C A^{r-3} B \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} D + \sum_{r=n}^n \alpha_r C A^{r-n} B \end{pmatrix} u^{(2)},$$

$$\alpha_n D u^{(n)},$$

т.е. правая часть имеет вид

$$\sum_{k=0}^n \left(\alpha_k D + \sum_{r=k+1}^n \alpha_r C A^{r-k-1} B \right) u^{(k)} = \sum_{k=0}^n \beta_k u^{(k)},$$

где

$$\beta_k = \alpha_k D + \sum_{r=k+1}^n \alpha_r C A^{r-k-1} B, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Таким образом $\sum_{r=0}^n \alpha_r y^{(r)} = \sum_{k=0}^n \beta_k u^{(k)}$. Учитывая, что !!!!!!! $y^{(r)} = p^r y$,

$u^{(k)} = p^k u$, получаем

$$\left(\sum_{r=0}^n \alpha_r p^r \right) y(t) = \left(\sum_{k=0}^n \beta_k p^k \right) u(t),$$

что эквивалентно записи

$$(p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0) y(t) = (\beta_n p^n + \beta_{n-1} p^{n-1} + \dots + \beta_1 p + \beta_0) u(t),$$

где $\alpha(p) = p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0$ — характеристический полином.

Последняя запись эквивалентна передаточной функции (ПФ) $W(p)$, рассмотренной выше.

В общем случае, когда вход u и выход y являются не скалярными, а векторными, мы имеем дело с матричной ПФ от u к y . В этом случае вместо полинома $\beta(p)$ получается матрица

$$\beta(p) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(p) & \dots & \beta_{1l}(p) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{m1}(p) & \dots & \beta_{ml}(p) \end{pmatrix},$$

где $\beta_{ij}(p)$ — полином. При этом

$$\alpha_{ij}(p)y_j(t) = \beta_{ij}(p)u_i(t).$$

Связь между $u(t)$ и $y(t)$ определяет соотношение

$$y(t) = \frac{1}{\alpha(p)} \beta(p) u(t) = W(p) u(t),$$

где $W(p) = \begin{pmatrix} w_{11}(p) & \dots & w_{1l}(p) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ w_{m1}(p) & \dots & w_{ml}(p) \end{pmatrix}.$

Ее элементы - это $w_{ij}(p) = \frac{\beta_{ij}(p)}{\alpha(p)}$, представляющие собой ПФ от i -го входа

к j -му выходу. Таким образом, знаменатель всех ПФ один и тот же и равен $\alpha(p)$ – характеристическому полиному матрицы A . Матричную ПФ можно

получить и при помощи преобразования Лапласа для системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

Применив преобразование Лапласа L к вектор-функциям $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$:

$$L\{x(t)\} = x(s), \quad L\{u(t)\} = u(s), \quad L\{y(t)\} = y(s),$$

получим

$$L\{\dot{x}(t)\} = L\{Ax(t) + Bu(t)\},$$

или

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s),$$

или

$$(Is - A)x(s) = Bu(s)$$

а также

$$L\{y(t)\} = L\{Cx(t) + Du(t)\} \rightarrow y(s) = Cx(s) + Du(s).$$

Отсюда

$$x(s) = (Is - A)^{-1} Bu(s),$$

$$y(s) = \left(C(Is - A)^{-1} B + D \right) u(s) = W(s) u(s),$$

где $W(s)$ – это матричная ПФ вида

$$W(s) = \frac{1}{\alpha(s)} \begin{pmatrix} \beta_{11}(s) & \dots & \beta_{1l}(s) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{m1}(s) & \dots & \beta_{ml}(s) \end{pmatrix}$$

Здесь $\beta_{ij}(s)$ — полиномы относительно s , они совпадают с полиномами $\beta_{ij}(p)$.

Поэтому в области изображений

$$\alpha(s)y(s) = \beta(s)u(s)$$

Полиномы $\alpha(s), \beta(s)$ можно вычислять приведенным ранее способом.

Переход от описания динамической системы в форме “вход—выход” к описанию в пространстве состояний

Ограничимся объектом с одним входом и одним выходом $u(t) \in R^1, y(t) \in R^1$. Пусть динамическую систему описывает линейное дифференциальное уравнение вида

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1y^{(1)}(t) + \alpha_0y(t) = \\ = \beta_nu^{(n)}(t) + \beta_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + \beta_1u^{(1)}(t) + \beta_0u(t), \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$y^{(n-1)} = y_{n-1}, \dots, y^{(1)} = y_1, y = y_0.$$

Дифференциальному уравнению системы соответствуют скалярные полиномы от оператора дифференцирования p :

$$\alpha(p) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0$$

и

$$\beta(p) = p^n + \beta_{n-1}p^{n-1} + \dots + \beta_1p + \beta_0$$

Для описания системы в пространстве состояний требуется найти матрицы A, B, C, D и вектор начальных условий $x(t_0) = x_0$ — такие, чтобы системе

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) \in R^n, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

и исходному дифференциальному уравнению соответствовали тождественные выходы $y(t)$ для одного и того же $u(t), t \in [t_0, T]$.

Из исходной записи

$$p^n y + \alpha_{n-1} p^{n-1} y + \dots + \alpha_1 p y + \alpha_0 y = \beta_n p^n u + \dots + \beta_1 p u + \beta_0 u,$$

следует, что

$$(y - \beta_n u) = \frac{1}{p}(-\alpha_{n-1} y + \beta_{n-1} u) + \frac{1}{p^2}(-\alpha_{n-2} y + \beta_{n-2} u) + \dots + \frac{1}{p^n}(-\alpha_0 y + \beta_0 u),$$

или

$$(y - \beta_n u) = \frac{1}{p} \left(-\alpha_{n-1} y + \beta_{n-1} u + \frac{1}{p} \left(-\alpha_{n-2} y + \beta_{n-2} u + \frac{1}{p} (\dots (-\alpha_0 y + \beta_0 u) \dots) \right) \right).$$

Введем переменную

$$x_n = y - \beta_n u,$$

отсюда

$$y = x_n + \beta_n u.$$

Очевидно, что

$$x_n = \frac{1}{p} \left(-\alpha_{n-1} y + \beta_{n-1} u + \frac{1}{p} \left(-\alpha_{n-2} y + \beta_{n-2} u + \frac{1}{p} (\dots (-\alpha_0 y + \beta_0 u) \dots) \right) \right),$$

откуда, продифференцировав x_n , получим

$$\dot{x}_n + \alpha_{n-1} y - \beta_{n-1} u = \frac{1}{p} \left(-\alpha_{n-2} y + \beta_{n-2} u + \frac{1}{p} (\dots (-\alpha_0 y + \beta_0 u) \dots) \right)$$

Выражение справа от знака равенства обозначим через x_{n-1} .

Тогда

$$\dot{x}_n = x_{n-1} - \alpha_{n-1} y + \beta_{n-1} u.$$

Продифференцируем x_{n-1} и получим

$$\dot{x}_{n-1} = -\alpha_{n-2} y + \beta_{n-2} u + \frac{1}{p} (\dots (-\alpha_0 y + \beta_0 u) \dots)$$

или

$$\dot{x}_{n-1} + \alpha_{n-2}y - \beta_{n-2}u = \frac{1}{p}(\dots(-\alpha_0y + \beta_0u)\dots) = x_{n-2}.$$

Последнее выражение можно записать как

$$\dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - \alpha_{n-2}y + \beta_{n-2}u.$$

что аналогично выражению для \dot{x}_n . Продолжая этот процесс, получим цепочку равенств, последним из которых будет

$$\dot{x}_1 = -\alpha_0y + \beta_0u.$$

Полученная система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_0y + \beta_0u, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - \alpha_{n-2}y + \beta_{n-2}u, \\ \dot{x}_n = x_{n-1} - \alpha_{n-1}y + \beta_{n-1}u \end{cases}$$

может быть записана как

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_0(x_n + \beta_nu) + \beta_0u, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - \alpha_{n-2}(x_n + \beta_nu) + \beta_{n-2}u, \\ \dot{x}_n = x_{n-1} - \alpha_{n-1}(x_n + \beta_nu) + \beta_{n-1}u \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_0x_n + (\beta_0 + \alpha_0\beta_n)u, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = -\alpha_{n-2}x_n + x_{n-2} - (\beta_{n-2} + \alpha_{n-2}\beta_n)u, \\ \dot{x}_n = -\alpha_{n-1}x_n + x_{n-1} - (\beta_{n-1} + \alpha_{n-1}\beta_n)u. \end{cases}$$

В левой части этой системы стоит вектор производных от компонент вектора $x = (x_1 \dots x_n)^T$.

Полученная система уравнений есть система неоднородных дифференциальных уравнений с вектором состояния x . Запишем эту систему уравнений в матричной форме:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \beta_0 - \alpha_0 \beta_n \\ \beta_1 - \alpha_0 \beta_n \\ \vdots \\ \beta_{n-2} - \alpha_0 \beta_n \\ \beta_{n-1} - \alpha_0 \beta_n \end{pmatrix} u,$$

и добавим уравнение для y :

$$y = [0 \dots 0 1]x + \beta_n u.$$

В итоге получена стандартная запись линейной системы в пространстве состояний. Матрицы A , B , C , D имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_0 - \alpha_0 \beta_n \\ \beta_1 - \alpha_0 \beta_n \\ \vdots \\ \beta_{n-2} - \alpha_0 \beta_n \\ \beta_{n-1} - \alpha_0 \beta_n \end{pmatrix},$$

$$C = [0 \dots 0 1], \quad D = \beta_n.$$

Это так называемая каноническая наблюдаемая форма.

Существует бесконечное число других представлений ПФ в форме пространства состояний. Наиболее распространенная из них – форма Фробениуса или каноническая управляемая форма:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u,$$

$$y = x'_1 + \beta_n u,$$

или

$$y = (1 0 \dots 0) x' + \beta_n u.$$

Здесь вектор состояния обозначен как x' (не путать с символом производной!)

Для фробениусовой формы записи матрицы имеют вид:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$C' = (10\dots 0), \quad D' = \beta_n u.$$

Здесь коэффициенты матрицы B' вычисляются из следующей системы ЛАУ:

$$\begin{aligned} b_1 &= \beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_n, \\ \alpha_{n-1}b_1 + b_2 &= \beta_{n-2} - \alpha_{n-2}\beta_n, \\ &\dots \\ \alpha_1b_1 + \alpha_2b_2 + \dots + b_n &= \beta_0 - \alpha_0\beta_n. \end{aligned}$$

Переход от одного описания в форме пространства состояний к другому (такой переход называют переходом к другому базису) осуществляется неособенной матрицей T , которую называют матрицей преобразования.

Допустим, существуют уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Пусть $x' = Tx$, $x = T^{-1}x'$. Тогда исходную систему можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} T^{-1}\dot{x}'(t) &= AT^{-1}x'(t) + Bu(t), \\ y(t) &= CT^{-1}x'(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Лекция 4. ВЫБОР СТРУКТУРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

4.1. Классификация моделей

Этап построения математической модели системы разбивается на две части: выбор структуры и выбор параметров. Как было сказано на предыдущих лекциях, структура сложной системы определяется типами моделей каждой ее подсистемы и характером связей (отношений) между ними. Все многообразие имеющихся типов ММ можно классифицировать по нескольким основным признакам, см. табл. 4.1.

Таблица 4.1. Математические модели систем

Статические $y(t) = F(u(t))$	Динамические $y(t) = F(\{u(s), -\infty < s \leq t\})$
Дискретные (U, Y, T – конечные (счетные) множества)	Непрерывные (U, Y, T – континуумы (прямые, отрезки, тела в многомерных пространствах))
Детерминированные	Стохастические; нечеткие
Сосредоточенные (уравнения конечные (алгебраические или трансцендентные), разностные, обыкновенные, дифференциальные)	Распределенные (уравнения с запаздыванием, в частных производных, интегральные)
Линейные	Нелинейные
Стационарные (параметры не меняются со временем)	Нестационарные (параметры изменяются со временем)

Кроме того, структура модели определяется также набором размерностей - количеством переменных (входа, выхода, состояния) и параметров. Прежде всего следует дать краткую характеристику основным типам ММ.

4.1.1. Статические и динамические модели

Математическая модель системы называется статической, если значение выхода $y(t)$ зависит от значения входа $u(t)$ в один и тот же момент времени t . Символически это свойство записывается так:

$$y(t) = F(u(t)) \quad (4.1)$$

где F – символ некоторого преобразования (оператора). Кроме явных функциональных зависимостей (4.1) статические модели могут задаваться неявно, в виде уравнения или системы

$$\Phi(y(t), u(t)) = 0. \quad (4.2)$$

Так обычно записываются уравнения статических режимов радиоэлектронных схем, многих механических, энергетических систем и т.д. Уравнение (4.2) должно быть однозначно разрешимо относительно $y(t)$.

Статическими моделями пользуются, когда в рамках поставленной задачи (с точки зрения достижения выбранной цели) инерционностью и «памятью» реальной системы можно пренебречь. Это возможно при выполнении ряда условий, в число которых входят следующие:

1) система устойчива, т.е. переходные процессы после скачкообразного изменения входов затухают. Конечное время затухания с заданной точностью обозначим через t_{per} ;

2] входы меняются медленно, т.е. $\Delta t_{in} > t_{per}$, где Δt_{in} – время между изменениями входных воздействий;

3) выходы изменяются редко, т.е. $\Delta t_{out} > t_{per}$, где Δt_{out} – промежутки между измерениями входных величин.

В динамических моделях значение $y(t)$ может зависеть от всего прошлого (предыстории) входного процесса:

$$y(t) = F(\{u(s), s \leq t\}). \quad (4.3)$$

Динамические модели позволяют учесть наличие «памяти», инерционности системы. Математическим аппаратом описания динамических систем являются дифференциальные, разностные уравнения, конечные автоматы, случайные процессы.

4.1.2. Дискретные и непрерывные модели

Система может быть дискретной или непрерывной по входам, выходам и по времени в зависимости от того, дискретными или непрерывными являются множества U, Y, T соответственно. Под дискретным понимается

конечное или счетное множество. Под непрерывным (континуальным) будем понимать множество объектов, для которого адекватной моделью является отрезок, луч или прямая линия, т.е. связное числовое множество. Если система имеет несколько входов и выходов, то это значит, что соответствующие множества U, T лежат в многомерных пространствах, т.е. непрерывность и дискретность понимаются покомпонентно.

Удобство числового множества как модели реальных совокупностей объектов состоит в том, что на нем естественным образом определяются несколько отношений, формализующих реально встречающиеся отношения между реальными объектами. Например, отношения близости, сходимости формализуют понятия похожести, сходства объектов и могут быть заданы посредством функции расстояния (метрики) $d(x, y)$ (например, $d(x, y) = |x - y|$).

Числовые множества являются упорядоченными: отношение порядка следования ($x \leq y$) формализует предпочтение одного объекта другому. Наконец, над элементами числовых множеств определены естественные операции, например линейные: $x + y, x \cdot a$.

Как правило, дискретность множества U влечет за собой дискретность Y . Кроме того, для статических систем исчезает разница между непрерывным и дискретным временем. Поэтому классификация детерминированных систем (табл. 4.2) по признакам «статические – динамические», «дискретные – непрерывные» включает шесть основных групп; для каждой группы указан математический аппарат описания систем, методы численного моделирования и оценки их параметров методы синтеза (оптимизации), а также типичные области применения.

Таблица 4.2. Детерминированные модели систем

	Статические	
	Дискретные по U, Y	Непрерывные по U, Y
Математический аппарат описания	Графы, булева алгебра, предикаты	Функции вещественных переменных
Методы оценки параметров и анализа	Методы математической логики	Методы интерполяции, аппроксимации
Методы синтеза	Карты Карно, метод Куайна, дискретное программирование	Методы оптимизации (линейное и нелинейное программирование)
Области применения	Релейно-контактные схемы, импульсные и логические схемы, качественные модели исследования операций	Количественные модели исследования операций
	Динамические, дискретные по T	
	Дискретные по U, Y	Непрерывные по U, Y
Математический аппарат описания	Конечные автоматы	Разностные уравнения
Методы оценки параметров и анализа	Теория конечных автоматов	Идентификация, теория устойчивости
Методы синтеза	Методы синтеза микропрограммных автоматов, динамическое программирование	Динамическое программирование, дискретный принцип максимума
Области применения	Цифровые САУ, логическое управление	Импульсные и цифровые САУ
	Динамические, непрерывные по T	
	Дискретные по U, Y	Непрерывные по U, Y
Математический аппарат описания	Асинхронные автоматы, сети Петри, модели теории расписаний	Обыкновенные дифференциальные уравнения
Методы оценки параметров и анализа	Методы идентификации	Идентификация, численное решение ОДУ
Методы синтеза	Динамическое программирование, теория расписаний	Теория управления, методы оптимизации
Области применения	Параллельные процессы	САУ, механические, тепловые, электронные и другие процессы

Пример 4.1.1. Рассмотрим работу турникета на входе в метро. В первом, грубом, приближении множество значений входа этой системы имеет два элемента: человек с жетоном (u_1) и человек без жетона (u_2), т.е. $U = \{u_1, u_2\}$. После небольшого размышления становится ясно, что следует включить еще отсутствие пассажира (u_0), т.е. $U = \{u_0, u_1, u_2\}$. Множество значений выхода

содержит элементы «открыто» (y_0) и «закрыто» (y_1). Таким образом, $Y = \{y_0, y_1\}$, и система является дискретной. В простейшем случае можно пренебречь памятью системы и описывать ее статической моделью, имеющей вид таблицы или графа:

$u(t)$	$y(t)$	
u_0	y_0	$u_0 \searrow$
u_1	y_0	$u_1 \nearrow$
		$u_2 \dashrightarrow$

При необходимости хранить ММ системы в памяти компьютера ее можно представить (закодировать) в виде матрицы $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ или более экономно, в виде списка (0,0,1), в котором на i -м месте стоит j , если значению входа u_{i-1} соответствует значение выхода y_i .

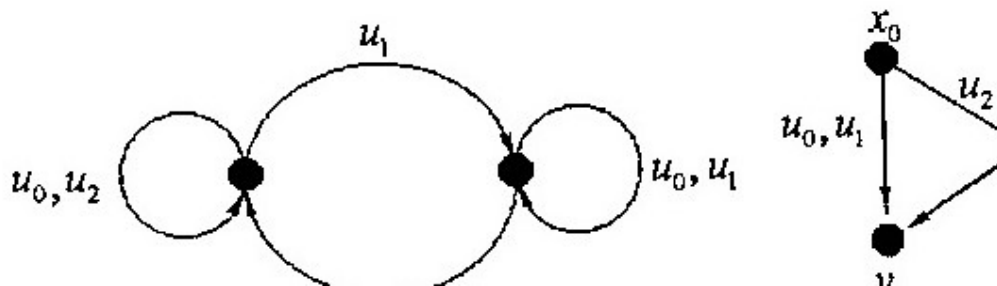
Пример 4.1.2. Если нас интересует более детально устройство самого турникета (т.е. системой является турникет), то придется учесть, что входными воздействиями (сигналами) для него являются опускание жетона и прохождение человека. Таким образом, система имеет два входа, каждый из которых может принимать два значения («есть» или «нет»). Пренебрегая возможностью одновременного опускания жетона и прохождения, вводим три значения входа: u_0 – «нет воздействия», u_1 – «опускание жетона», u_2 – «прохождение». Множество Y можно задать так же, как и в примере 4.1.1. Однако теперь значение выхода $y(t)$ не определяется только значением входа $u(t)$, а зависит еще и от того, был ли опущен жетон раньше, т.е. от значений $u(s)$ при $s < t$. Система имеет «память». Простейший тип ММ для описания дискретных систем с памятью – это конечный автомат. Для его построения вводится конечное множество внутренних состояний системы X , определяющее «память». В данном случае в X достаточно включить два элемента: x_0 – «жетон не был брошен», x_1 – «жетон был брошен». Значения состояния системы в следующий момент времени и выхода в текущий момент зависят от текущих значений состояния и входа, т.е.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= F(x(k), u(k)), \\ y(k) &= G(x(k), u(k)), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где k – номер момента времени такта. Функцию переходов $F(x, u)$ и функцию выходов $G(x, u)$ можно задать таблично:

		u_0	u_1	u_2			u_0	u_1	u_2
$F(x, u)$	x_0	x_0	x_1	x_0	$G(x, u)$	x_0	y_0	y_0	y_1
	x_1	x_1	x_1	x_0		x_1	y_0	y_0	y_0

Можно также построить графы переходов и выходов:



Пример 4.1.3. Рассмотрим простейшую электрическую систему – RC -цепь (рис. 4.1), входом которой является напряжение источника $u(t) = E_0(t)$, а выходом – напряжение на конденсаторе $y(t) = E_1(t)$.

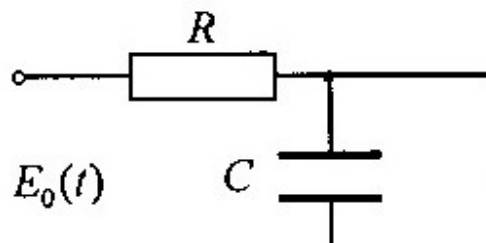


Рисунок 4.1 – Электрическая схема RC -цепи

Закон Кирхгофа дает ММ системы в виде дифференциального уравнения первого порядка

$$\tau \dot{y} = u - y, \quad (4.5)$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени цепи. Модель (4.5) полностью непрерывна: $U = Y = T = R^1$. Если исследователя интересует поведение системы в статических режимах, т.е. при $E_0(t) = \text{const}$, то нужно положить в (4.5) $\dot{y} = 0$ и получить статическую модель

$$y(t) = u(t). \quad (4.6)$$

Моделью (4.6) можно пользоваться как приближенной в случае, когда вход $E_0(t)$ изменяется достаточно редко или медленно (по сравнению с τ).

Пример 4.1.4. Рассмотрим экологическую систему, состоящую из двух взаимодействующих популяций, существующих на некоторой территории. Предположим, что система автономна, т.е. внешними воздействиями (входами) можно пренебречь; за выходы системы примем численности популяций (видов) $y_1(t), y_2(t)$. Пусть второй вид является пищей для первого, т.е. система относится к классу «хищник – жертва» (например, y_1 – численность лис в лесу, y_2 – численность зайцев; или y_1 – число бактерий возбудителей заболевания в городе, y_2 – число заболевших и т.д.). В данном случае y_1, y_2 – целые числа, и на первый взгляд в ММ системы множество Y должно быть дискретным. Однако для построения ММ удобнее считать, что y_1, y_2 могут принимать произвольные вещественные значения, т.е. можно перейти к непрерывной модели (при достаточно больших y_1, y_2 этот переход не внесет существенной погрешности). При этом мы сможем пользоваться такими понятиями, как скорости изменения выходных переменных $\frac{dy_1}{dt} = \dot{y}_1, \frac{dy_2}{dt} = \dot{y}_2$. Простейшая модель динамики популяции получается, если предположить, что:

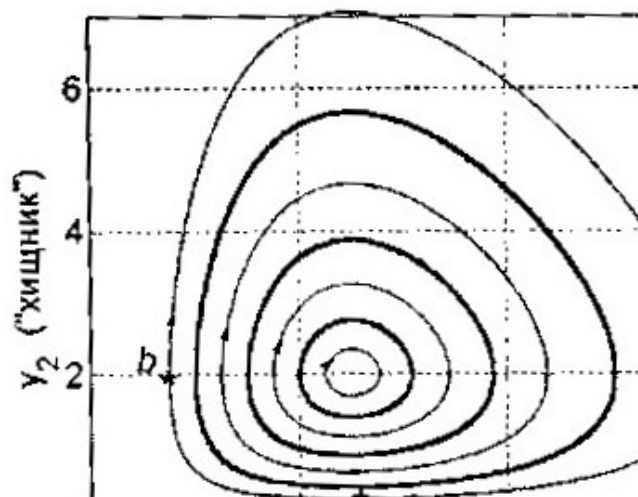
- при отсутствии хищников численность «жертв» растет экспоненциально;
- при отсутствии «жертв» численность хищников убывает экспоненциально;
- численность «съеденных» жертв пропорциональна числу хищников и числу жертв, т.е. величине $y_1 y_2$.

При этих предположениях динамика системы, как нетрудно видеть, описывается так называемой моделью Лотки-Вольтерра:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= ay_1 - by_1 y_2, \\ \dot{y}_2 &= cy_1 y_2 - dy_2,\end{aligned}\tag{4.7}$$

где a, b, c, d – положительные параметры. Если есть возможность изменять параметры, то они превращаются во входные переменные, например, когда изменяются коэффициенты рождаемости и смертности видов, коэффициенты размножения бактерий (при введении лекарств) и т.д.

Как видно из фазового портрета, в системе имеют место нелинейные колебания относительно некоторого состояния равновесия, амплитуда которых зависит от начальных условий. Часто эти кривые трактуются таким образом, что экологическая система имеет естественное состояние равновесия и уничтожение «хищников» (точка a на графике) приводит через некоторое к резкому уменьшению числа «жертв» (точка b). Если также учесть что уменьшение численности популяций может привести к ее полному исчезновению, то следует сделать вывод о необходимости соблюдать осторожность при воздействии на экологические системы.



Фазовый портрет системы «хищник – жертва».

4.2. Гармонический анализ процессов

При исследовании колебательных процессов часто применяются их энергетические характеристики, в первую очередь – мощность и энергия.

Мгновенная мощность $p(t)$ сигнала $y(t)$ определяется как квадрат его мгновенного значения: $p(t) \approx y(t)^2$. Энергия P сигнала на интервале $[t_1, t_2]$ находится как интеграл от мгновенной мощности $P = \int_{t_1}^{t_2} y(t)^2 dt$. Отношение

$\frac{P}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} y(t)^2 dt$ выражает среднюю (на интервале $[t_1, t_2]$) мощность сигнала. Обозначим ее через $\overline{y(t)^2}$. Получить представление об этих характеристиках процесса можно на основе преобразования Фурье. Рассмотрим этот метод более подробно.

Для периодических процессов $y(t)$ с периодом T можно записать ряд Фурье в виде

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \right), \quad (4.8)$$

где коэффициенты разложения находятся из формул

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos \left(k \frac{2\pi}{T} t \right) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin \left(k \frac{2\pi}{T} t \right) dt, \\ k = 1, 2, \dots$$

Совокупность величин $s_0 = |a_0|/2, s_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} (k = 1, 2, \dots)$ называется амплитудным частотным спектром периодической функции $y(t)$. Значения s_k представляют собой амплитуды гармоник с частотой $\omega_k = k\Omega, \Omega = 2\pi/T$ в разложении процесса в ряд (4.8). Они зависят от номера гармоники k и обычно графически представляются в виде отрезков высотой s_k , проведенных в точках ω_k оси частот (поэтому спектр периодической функции называют линейчатым, или дискретным). Он несет в себе информацию о частотных свойствах сигнала: если сигнал имеет выраженные колебания на некоторых частотах, то его спектр на этих частотах содержит пики.

Обобщением ряда Фурье на непериодические процессы является интеграл Фурье, при котором используется представление

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (V(\omega) \sin \omega t + U(\omega) \cos \omega t) d\omega \quad (4.9)$$

где

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cos(\omega t) dt, \quad V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \sin(\omega t) dt.$$

Аналогично вводится частотный спектр процесса $y(t)$ как $S(\omega) = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2}$. Это функция от непрерывного аргумента ω .

Поскольку при цифровом моделировании исходной является дискретная реализация процесса и нахождение интеграла выполняется конечным суммированием, то при числовом гармоническом анализе вместо непрерывного преобразования (4.9) выполняется дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Для этого исследуемый процесс $y(t)$ (длительностью T) заменяется выборочной дискретной функцией (т.е. последовательностью) $y[k] = y(t_k)$, где $t_k = kT_0$ ($k = 1, 2, \dots, N$), N – заданное число точек, $T_0 = T/N$ – шаг дискретности (квантования). Далее вычисляется функция

$$Y(k) = \sum_{n=1}^N y[n] \exp\left(-j2\pi(k-1)\frac{n-1}{N}\right), 1 \leq k \leq N, \quad (4.10)$$

(«изображение по Фурье»), имеющая комплексные значения. В пакете MATLAB дискретное преобразование Фурье выполняется процедурой **fft**. Для ускорения вычислений рекомендуется брать число точек $N = 2^v$, где v – некоторое натуральное число. В этом случае программой реализуется так называемое «быстрое преобразование Фурье» (БПФ). Обратный переход от изображения к исходной функции выполняется по формуле

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y(k) \exp\left(j2\pi(k-1)\frac{n-1}{N}\right), 1 \leq n \leq N. \quad (4.11)$$

Для вычисления спектральной плотности с помощью процедуры **fft** исходная реализация процесса разбивается на N точек, соответствующих равноотстоящим моментам времени с интервалом T_0 .

При выборе параметров вычисления спектра (длина реализации T , число точек N и связанный с ними интервал квантования T_0) следует учитывать, что диапазон существенных частот исследуемого процесса не должен выходить за частоту Найквиста $\omega_N = \pi/T_0$. Несоблюдение этого условия может привести к значительным ошибкам при определении характеристик

процесса. Данное требование вытекает из известной теоремы отсчетов Котельникова-Шеннона.

Поскольку рассматриваемый процесс $y(k)$ в общем случае не является периодическим с частотой $\Omega = 2\pi/T$, вычисление его спектра с помощью рассматриваемой процедуры является приближенным. Как видно из формулы (4.10), соседние точки по частоте отстоят на величину $\delta\omega = \frac{2\pi}{T_0 N}$.

Учитывая, что $N = T/T_0$, получим $\delta\omega = \frac{2\pi}{T}$. Таким образом, длительность исследуемой реализации должна быть достаточно большой для получения спектра с заданным шагом дискретности по частоте ($T \gg 1/\delta\omega$).

4.3. Модели состояния динамических систем

4.3.1 Модели общего вида

Важнейшую роль при описании динамических систем играет понятие состояния. Состояние – это совокупность величин (вектор) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, которые вместе с входным воздействием однозначно определяют будущее поведение системы. Например, для RC -цепочки переменная состояния есть E_1 , поскольку значения $E_1(t)$ и входного воздействия $E_0(s)$ при $s \leq t$ однозначно определяют (в силу (4.5)) значение $E_1(s)$ при $s = t$. Для модели динамики популяций (4.7) состоянием является вектор $x = (y_1 \ y_2)^T$.

В общем случае уравнения состояний – это системы дифференциальных или разностных уравнений первого порядка вместе с уравнениями для выходных величин. Начальное состояние представляет «память» системы о прошлом. Модель состояния непрерывной динамической системы записывается в виде.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \\ \dots \\ \dot{x}_n = F_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \\ y_1 = G_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \\ \dots \\ y_l = G_l(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \end{cases} \quad (4.12)$$

где u_1, \dots, u_m – входные переменные, y_1, \dots, y_l – выходные переменные, x_1, \dots, x_n – переменные состояния. Вводя векторные обозначения, можно записать (4.12) в более компактном виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u, t), \\ y &= G(x, u, t), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $u = (u_1, \dots, u_m)^T$, $y = (y_1, \dots, y_l)^T$. Для моделей состояния справедлив следующий факт: любая нелинейная динамическая система. может быть представлена как соединение линейных динамических и нелинейных статических звеньев. Доказательство очевидно из рис 4.2, где в качестве линейного звена взят интегратор.

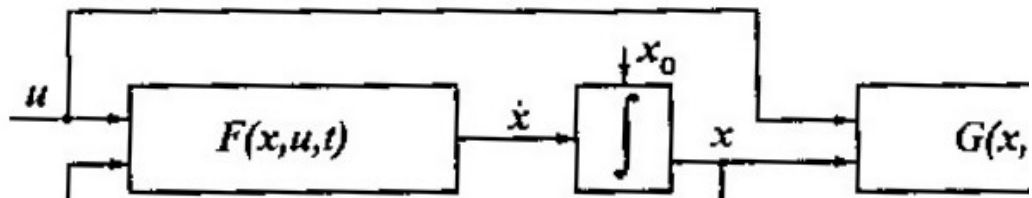


Рисунок 4.2 – Схема интегрирования нелинейных систем

Еще более общей формой описания динамических систем являются сингулярные дифференциальные (алгебро-дифференциальные) системы

$$\begin{aligned} \Phi(\dot{x}, x, u, t) &= 0, \\ G(x, y, u, t) &= 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

частным случаем которых являются неявные системы

$$\Phi(\dot{y}, y, u, t) = 0. \quad (4.15)$$

4.3.2. Линейные модели и линеаризация

Линеаризация является одним из простейших методов изучения нелинейных систем. Суть ее состоит в замене нелинейной системы на эквивалентную ей линейную. Линеаризованная модель не может полностью заменить нелинейную систему, но в некоторых отношениях ее поведение может быть (с определенным расхождением) идентичным поведению нелинейной системы. Поэтому существует возможность применить хорошо разработанные методы анализа линейных систем к линеаризованной модели, а полученные результаты интерпретировать для исходной нелинейной системы.

В технических науках, включая теорию управления, предполагается, что отклонения от некоторой рабочей точки малы, что позволяет нелинейные характеристики заменить эквивалентными линейными. В этом случае говорят о линеаризации вблизи рабочей точки, или о касательной аппроксимации. Линеаризованную модель далее исследуют при малых входных воздействиях.

Помимо касательной аппроксимации существуют и другие методы линеаризации, каждый из них для определенных задач обладает своими преимуществами. Например, метод гармонической линеаризации анализирует нелинейную систему не во временной области, а в частотной. Суть его в том, что рассматривается только основная составляющая выходного сигнала нелинейной системы, а высшие гармоники отбрасываются. Применение этого метода оправдано, когда нелинейная система имеет характеристику фильтра низких частот. Метод статистической линеаризации применяется во временной области. Эквивалентная линейная модель строится в предположении, что возмущения имеют гауссовское распределение. Существуют также комбинированные методы линеаризации.

В качестве примера далее рассмотрим только касательную аппроксимацию, причем когда коэффициенты линеаризованной модели получаются разложением в ряд.

В заключение приведем пример задачи, когда целесообразен переход от нелинейной модели к линеаризованной.

Пусть для некоторого объекта построена его математическая модель в виде системы НДУ, записанной в форме Коши:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ y(t) &= g(x(t), u(t)).\end{aligned}\tag{4.16}$$

В такой модели выделяют вектор состояния x , вектор входных воздействий u , вектор выходных (измеряемых, управляемых) координат y . Ясно, что на произвольном интервале времени T вид функций $x(t), y(t)$ будет зависеть от начальных условий и от вида функции на этом интервале. В таком случае задачей моделирования (или исследования) может быть построение функций $x(t), y(t)$ на интервале T , когда начальные условия и вид $u(t)$ на T заданы. Такая задача решается численным интегрированием системы НДУ, линеаризованная модель здесь является излишней.

Ясно, что вид $x(t), y(t)$ на интервале T будет зависеть от начальных условий и от вида $u(t)$ на T . Поэтому может быть поставлена следующая задача: выбрать такой вид $u_c(t)$, чтобы при заданных (или произвольных) начальных условиях и некотором (известном или неизвестном) виде $u_f(t)$ функция $x(t)$ (или $y(t)$) удовлетворяла бы на T заданным требованиям.

В этом случае целесообразно перейти к линейной модели, например, путем разложения в ряд Тейлора в окрестности статического режима. Переменные x, y, u_c, u_f заменяют их приращениями, а систему НДУ — системой ЛДУ с постоянными коэффициентами.

Если нелинейности в исходной системе НДУ достаточно гладкие, то нелинейный и линейный объекты имеют схожую динамику, что дает основание проводить исследования и синтез регуляторов для линейных систем и полученные результаты переносить на нелинейные, но уже с некоторой погрешностью. В большинстве случаев эта погрешность

оправдана широким набором готовых методов исследования линейных систем и синтеза линейных регуляторов.

В качестве примеров преимуществ линейных объектов перед нелинейными можно назвать следующие: выполнение принципа суперпозиции для входных воздействий; простота определения реакции линейной системы на типовые воздействия, что в совокупности с принципом суперпозиции позволяет использовать, например, методы спектрального анализа; наличие мощного математического аппарата для получения аналитических решений для линейных систем и др.

Вернемся к нелинейному объекту (4.16). Обозначив $z = (x, u)^T$, получим его запись в виде:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(z(t)), \\ y(t) &= g(z(t)).\end{aligned}\tag{4.17}$$

Левая часть первого уравнения (4.17) – функция $\dot{x}(t): R \rightarrow R^n$. Правая часть этого уравнения – сложная функция, т.е. композиция функций: $z(t): R \rightarrow R^{n+l}$ и $f(z(t)): R^{n+l} \rightarrow R^n$. Следует понимать, что функция $f(z)$ задана раз и навсегда, но вид функций $x(t)$ и $\dot{x}(t)$, удовлетворяющих уравнению на некотором интервале времени, зависит от значения $x(t_0)$ и вида $u(t)$ на этом интервале. Уравнение является дифференциальным и нелинейным, т.к. функция $f(z)$ в общем случае нелинейная. Аналогично рассматривается второе уравнение, но оно уже является алгебраическим и нелинейным.

Рассмотрим функцию $f(z): R^{n+l} \rightarrow R^n$. Предполагаем f непрерывной и дифференцируемой в некоторой области из R^{n+l} , содержащей любые допустимые значения вектора z . В этом случае можно построить ряд Тейлора функции f для любой точки z_0 из рассматриваемой области:

$$f(z) = f(z_0) + D_f(h) + o(h),$$

где вектор h вычисляется как $h = z - z_0$, а функция D_f есть линейная функция $D_f: R^{n+l} \rightarrow R^n$. Под $o(h)$ понимают некоторую функцию, значение которой на h пренебрежимо мало по сравнению со значением D_f на h . Смысл этого следующий: если требуется вычислить значение известной функции f в некоторой точке z , а ряд Тейлора задан, то с некоторой погрешностью значение $f(z)$ может быть вычислено как

$$f(z) \approx f(z_0) + D_f(h),$$

где z_0 известно, а $h = z - z_0$. При этом чем меньше значение (норма) h , тем качество приближения лучше. Отсюда следует выражение

$$f(z) - f(z_0) \approx D_f(h),$$

означающее, что изменение функции f относительно значения $f(z_0)$ при отклонении аргумента z от значения z_0 есть почти то же самое, что и значение функции D_f на $h = z - z_0$.

Линейная функция D_f называется дифференциалом функции f в точке z_0 . Функция D_f имеет вид:

$$D_f(h) = Jh,$$

где матрица J носит название матрицы Якоби функции f в точке z_0 .

Известно, что

$$J = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_{n+l}} \right|_{z=z_0} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial z_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial z_{n+l}} \right|_{z=z_0} \end{pmatrix}.$$

В другой точке будет другая матрица, т.е. другой дифференциал. Теперь рассмотрим, как вышесказанное применимо к построению линейного аналога нелинейного уравнения. Пусть статический режим задан, т.е. найдено такое значение вектора z , при котором $\dot{x}(t) = 0 \forall t$. Выбираем это значение z в качестве z_0 .

Строим ряд Тейлора функции $f(z)$ в точке z_0

$$f(z) = f(z_0) + J(z - z_0) + o(z - z_0)$$

и отбрасываем последнее слагаемое. Полученное соотношение следует понимать так: если значения функции $z(t)$ в любой момент времени t не очень сильно отличаются от фиксированного значения z_0 , то значение сложной функции $f(z(t))$ в этот момент времени может быть приближенно получено как сумма вектора z_0 и произведения матрицы J на значение функции $h(t) = z(t) - z_0$ в этот момент времени. При этом матрица J фиксирована, т.е. значение $f(z)$ зависит от значения z , но не связано с моментом времени, в который z имеет это значение.

Функция $h(t)$ суть вектор-функция отклонений значений $z(t)$ от значения z_0 : $h(t) = (\Delta x(t), \Delta u(t))^T$. Итак, имеем:

$$\dot{x}(t) = f(z) \approx f(z_0) + J(\Delta x(t), \Delta u(t))^T$$

Далее отметим, что $f(z_0) = 0$, а также что $x(t) = x_0 + \Delta x(t)$, т.е. $\dot{x}(t) = \Delta \dot{x}(t)$.

Следовательно,

$$\Delta \dot{x}(t) = J(\Delta x(t), \Delta u(t))^T. \quad (4.18)$$

Полученное выражение есть система линейных дифференциальных уравнений, причем неоднородных (т.к. $\Delta u(t) \neq 0$).

Матрицу Якоби J разбивают на две части $J = [A \mid B]$:

$$A = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial x_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial x_n} \right|_{z=z_0} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial x_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial x_n} \right|_{z=z_0} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial u_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial u_l} \right|_{z=z_0} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial u_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial u_l} \right|_{z=z_0} \end{pmatrix}$$

Эти матрицы называют матрицами состояния и входных воздействий соответственно. Причем, если входные воздействия разделены на

возмущающие и управляющие, то матрицу B также разбивают на матрицу возмущения B_1 и матрицу управления B_2 .

Для алгебраического уравнения поступают следующим образом: раскладывают $g(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_0

$$g(z) = g(z_0) + J_1(z - z_0) + o(z - z_0)$$

и рассматривают только $\Delta y(z) = J_1(z - z_0)$, называемое приращением выходных координат. Последнее соотношение представляет собой систему линейных алгебраических уравнений.

В результате получили:

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}(t) &= A \Delta x(t) + B u(t), \\ \Delta y(t) &= C \Delta x(t) + D u(t).\end{aligned}$$

Это и есть линеаризованный объект, то есть линейный аналог нелинейного объекта. Матрица C называется матрицей выхода, матрица D – матрицей обхода.

Часто вместо (4.16) используют упрощенные ММ, основанные на том, что процессы в системе протекают, мало отклоняясь от некоторой так называемой опорной траектории $\{\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{y}(t)\}$, удовлетворяющей уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= F(\bar{x}, \bar{u}), \\ \bar{y} &= G(\bar{x}, \bar{u}).\end{aligned}\tag{4.19}$$

Тогда можно записать приближенную линеаризованную модель в отклонениях от этого режима:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A(t)\tilde{x} + B(t)\tilde{u}, \\ \tilde{y} &= C(t)\tilde{x} + D(t)\tilde{u},\end{aligned}\tag{4.20}$$

где $\tilde{x} = x - \bar{x}, \tilde{u} = u - \bar{u}, \tilde{y} = y - \bar{y}$,

$$\begin{aligned}A(t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), B(t) = \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \\ C(t) &= \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), D(t) = \frac{\partial G}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)),\end{aligned}$$

Если расчетный режим является установившимся, т.е. не зависит от времени, то коэффициенты в (4.20) также не зависят от времени: $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$ и т.д. Такие системы называются стационарными. Особенно часто на практике встречаются стационарные линейные непрерывные системы, описываемые более простыми уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Матрицы A, B, C являются параметрами модели (4.21). Если линеаризация приводит к большим погрешностям, то стараются, по возможности, выбрать математическую модель, линейную по параметрам

$$\dot{x} = A\psi(x, u),$$

где A – матрица параметров порядка $n \times N$; $\psi(\cdot)$ – нелинейная вектор-функция. К этому классу относятся, в частности, билинейные объекты, например $\dot{x} = a_1x + a_2xu + a_3u$, где $A = [a_1, a_2, a_3]$; $\psi(x, u) = (x, xu, u)^T$.

Сказанное выше относится и к уравнениям дискретных по времени систем. Уравнения дискретной системы в общем случае имеют вид

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= F(x_k, u_k), \\ y_k &= G(x_k, u_k).\end{aligned}\tag{4.22}$$

Дискретным аналогом уравнений линейной стационарной системы (4.21) являются уравнения

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Px_k F + Qu_k, \\ y_k &= Rx_k.\end{aligned}\tag{4.23}$$

4.3.3 Дискретизация и континуализация

Дискретизация. Если исходное описание линейной системы непрерывно, можно перейти к дискретному описанию с помощью следующей процедуры.

Пусть состояние $x(t)$ системы (4.21) доступно измерению в дискретные моменты времени $t_k = kh$, $k = 0, 1, \dots$, где $h > 0$ – шаг дискретности. Пусть $u(t)$ постоянно на промежутках между моментами коррекции t_k . Тогда

динамику векторов $x_k = x(t_k)$ можно описать разностными уравнениями (3.23) в которых матрицы P и Q определяются соотношениями

$$\begin{aligned} P &= e^{Ah}, \\ Q &= A^{-1}(P - I_n)B. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Здесь e^{Ah} – экспоненциал матрицы A , определяемый формулой

$$e^{Ah} = I_n + Ah + \frac{1}{2}A^2h^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k A^k}{k!}. \quad (4.25)$$

Если предположение о кусочном постоянстве $u(t)$ не выполняется, то переход от (4.21) к (4.23) является приближенным, но его точность растет по мере уменьшения шага h , если скорость изменения входа (величина $\dot{u}(t)$) ограниченная. При достаточно малых h для вычисления e^{Ah} можно удерживать лишь первые несколько членов ряда (4.25) или аппроксимировать сумму (4.25) каким-либо способом.

Например, при переходе от (4.21) к (4.23) можно пользоваться формулой $e^{Ah} \approx I_n + Ah$, соответствующей численному интегрированию (4.21) методом Эйлера. При такой аппроксимации передаточные функции дискретной $W_d(z)$ и непрерывной $W_n(s)$ систем связаны соотношением

$$W_d(z) = W_n\left(\frac{1-z}{h}\right) \quad (4.26)$$

т.е. при переходе к дискретному времени в передаточной функции нужно

заменить s на $\frac{1-z^{-1}}{h}$. Целый ряд способов перехода от (4.21) к (4.24)

основан на аппроксимации матрицы e^{Ah} матричными дробями Паде (дробями, «числителем» и «знаменателем» которых являются матричные многочлены). Частными случаями этих способов является метод Тастина (формула Паде порядка (1,1)):

$$e^{Ah} \approx \left(I + \frac{Ah}{2}\right) \left(I - \frac{Ah}{2}\right)^{-1}, \quad (4.27)$$

приводящий к соотношению между передаточными функциями

$$W_d(z) = W_n \left(\frac{2}{h} \frac{1-z}{1+z} \right), \quad (4.28)$$

а также метод Дэвисона (формула Паде порядка (2,2)):

$$e^{Ah} \approx \left(I + \frac{Ah}{2} + \frac{A^2 h^2}{12} \right) \left(I - \frac{Ah}{2} - \frac{A^2 h^2}{12} \right)^{-1}. \quad (4.29)$$

Отметим, что формулы (4.27) и (4.29) дают устойчивые аппроксимации при $h > 0$ (разумеется, если A – гурвицева).

Заметим, что формула (4.24) для вычисления матрицы Q применима, если $\det A \neq 0$. Трудностей, связанных с вычислением Q при вырожденной матрице A , можно избежать, если при формальной подстановке выражения для $P = e^{Ah}$, полученного из аппроксимаций Тейлора или Паде в (4.24), произвести «сокращение» матрицы A . Тогда в выражение для Q матрица A^{-1} входить не будет. Например, аппроксимация по методу Эйлера $P = I + Ah$ приводит к формуле $Q = h \cdot B$.

Если непрерывная система нелинейная, то для перехода к ее дискретному описанию также можно использовать методы численного интегрирования. Например, метод Эйлера дает для системы (4.16) дискретное описание:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + hF(x_k, u_k, t_k), \\ y_k &= G(x_k, u_k, t_k). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Континуализация – это переход от дискретной математической модели системы к непрерывной. Если дискретная модель системы имеет вид (4.23), то перейти к непрерывной модели (4.21) можно по формулам

$$A = \frac{1}{h} \ln P, \quad B = \frac{1}{h} \ln P (P - I)^{-1} Q, \quad (4.31)$$

вытекающим из (4.24), где $\ln P$ – логарифм матрицы, функция, обратная к экспоненциальной и также определяемая через ряд

$$\ln(I + X) = X - \frac{X^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n, \quad (4.32)$$

сходящийся при $\|X\| < 1$ (здесь $X = P - I$). С точностью до величин порядка h^2 можно ограничиться формулами

$$A = \frac{1}{h}(P - I), B = \frac{1}{h}Q,$$

соответствующими методу Эйлера. Однако удобнее всего переходить от дискретной передаточной функции к непрерывной по формулам (4.26) и (4.28). Например, по методу Эйлера (4.26) достаточно заменить в передаточной функции $W_d(z^{-1})$ переменную z^{-1} на $1 - hp$.

4.3.4. Редукция моделей

При исследовании линейных систем получили распространение также методы упрощения описаний систем путем редукции (понижение порядка).

Возможность редукции математической модели можно определять по собственным числам матрицы состояния линейной или линеаризованной системы. Вещественные части собственных значений характеризуют скорость затухания переходных процессов. Если одно из собственных чисел минимум на порядок больше остальных, соответствующий ему переходный процесс закончится быстро и не окажет существенного влияния на переходный процесс модели в целом. В этом случае можно уменьшить порядок системы. Применительно к таким системам можно говорить о принципе подчинения.

В качестве примера можно рассмотреть нелинейную систему 2-го порядка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \lambda_1 x_1 - x_1 x_2, \\ \dot{x}_2(t) &= -\lambda_2 x_2 + x_1^2,\end{aligned}$$

где коэффициент $\lambda_1 \geq 0$ и мал, а коэффициент $\lambda_2 \gg \lambda_1$

Если переменные x_1 и x_2 малы, то x_1 будет изменяться очень медленно. Поскольку $\lambda_2 \gg \lambda_1$, производной $\dot{x}_2(t)$ можно пренебречь в сравнении с величиной $\lambda_2 x_2$. Тогда исходную систему можно привести к виду

$$\dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1 - \frac{x_1^3}{\lambda_2}$$

где осуществлено алгебраическое исключение переменной x_2 . Поведение системы в основном определяется динамикой медленной подсистемы, которая как бы «управляет» быстрой подсистемой. При этом x_2 как бы подчинена x_1 . Медленная переменная x_1 в этом случае называется параметром порядка. В многомерных системах параметру порядка может быть подчинено весьма большое число других переменных. В общем случае параметров порядка может быть несколько, но часто это небольшое число, существенно меньшее размерности исходной системы.

ЛЕКЦИЯ 5. СТОХАСТИЧЕСКИЕ, НЕЧЕТКИЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

5.1 Детерминированные и стохастические модели

Модели систем, о которых мы говорили до сих пор, были детерминированными (определенными), т.е. задание входного воздействия определяло выход системы однозначно. Однако на практике так бывает редко: описанию реальных систем обычно присуща неопределенность. Например, для статической модели неопределенность можно учесть, записывая вместо (4.1) соотношение

$$y(t) = F(u(t)) + \varphi(t), \quad (5.1)$$

где $\varphi(t)$ - погрешность, приведенная к выходу системы. Причины неопределенности разнообразны:

- погрешности и помехи измерений входов и выходов системы (естественные погрешности);
- неточность самой модели системы, учитываемая путем искусственного введения в модель погрешности;
- неполнота информации о параметрах системы и т.д.

Среди различных способов уточнения и формализации неопределенности наибольшее распространение получил стохастический (вероятностный) подход, при котором неопределенные величины считаются случайными. Развитый понятийный и вычислительный аппараты теории вероятностей и математической статистики позволяют дать конкретные рекомендации по выбору структуры системы и оценке ее параметров. Классификация стохастических моделей систем и методов их исследования представлена в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Стохастические модели систем

	Статические	
	Дискретные по U, Y	Непрерывные по U, Y
Математический аппарат описания	Схема независимых испытаний	Регрессионные модели
Методы оценки параметров и анализа	Статистические оценки вероятности, дисперсионный анализ	Регрессионный анализ
Методы синтеза	Стохастическое программирование	Планирование эксперимента, стохастическое программирование
Области применения	Задачи выбора из конечного числа вариантов (испытания, управление)	Обработка результатов измерений и испытаний
	Динамические, дискретные по T	
	Дискретные по U, Y	Непрерывные по U, Y
Математический аппарат описания	Марковские цепи, стохастические автоматы	Стохастические разностные уравнения
Методы оценки параметров и анализа	Стохастическое моделирование, оценка переходных вероятностей	Статистическое оценивание состояний и параметров, анализ стохастической устойчивости
Методы синтеза	Динамическое программирование	Динамическое программирование
Области применения	Компьютеры	Импульсные и цифровые САУ
	Динамические, непрерывные по T	
	Дискретные по U, Y	Непрерывные по U, Y
Математический аппарат описания	Системы массового обслуживания, полумарковские процессы	Стохастические дифференциальные уравнения
Методы оценки параметров и анализа	Теория массового обслуживания, имитационное моделирование	Теория устойчивости
Методы синтеза	Перебор, методы оптимального управления	Оптимальное и адаптивное управление
Области применения	Системы обслуживания (вычислительные, производственные)	САУ, механические, тепловые, электронные и другие процессы

Выводы и рекомендации основаны на эффекте усреднения: случайные отклонения результатов измерения некоторой величины от ее ожидаемого значения при суммировании взаимно уничтожаются и среднее арифметическое большого числа измерений оказывается близким к ожидаемому значению. Математические формулировки этого эффекта даются законом больших чисел и центральной предельной теоремой. Закон больших чисел гласит, что если ξ_1, \dots, ξ_N – случайные величины с

математическим ожиданием (среднее значение) $M\xi_i = a$ и дисперсией $M(\xi_1 - a)^2 = \sigma^2$, то

$$\frac{1}{N}(\xi_1 + \dots + \xi_N) - a \approx 0, \quad (5.2)$$

при достаточно больших N . Это говорит о принципиальной возможности сколь угодно точной оценки $M\xi_i$ по измерениям.

Центральная предельная теорема, уточняя (5.2), утверждает, что

$$\frac{1}{N}(\xi_1 + \dots + \xi_N) - a \approx \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\xi, \quad (5.3)$$

где ξ – стандартная ($M\xi = 0$, $M\xi^2 = 1$) нормально распределенная случайная величина.

Функция распределения нормальной случайной величины ξ хорошо известна и детально затабулирована. Имеются в книгах по статистике и таблицы функций распределения других часто встречающихся случайных величин, например студентовой. Однако нет необходимости добывать статистические таблицы, если под рукой есть компьютер с установленной системой MATLAB. В составе тулбокса STATISTICS есть модули, вычисляющие функции распределения и другие характеристики более двадцати распространенных типов случайных величин. Проиллюстрируем применение MATLAB на простой статистической задаче.

Формулировкам (5.2), (5.3) можно придать более строгий вид и это легко достижимо с помощью понятий вероятностной сходимости. Однако при попытке проверить условия этих строгих утверждений могут возникнуть трудности. В частности, в законе больших чисел и центральной предельной теореме требуется независимость отдельных измерений (реализаций) случайной величины и конечность ее дисперсии. Если эти условия нарушаются, то могут нарушаться и выводы. Например, если все измерения совпадают: $\xi_1 = \dots = \xi_N$, то, хотя все остальные условия выполняются, об усреднении не может быть и речи. Другой пример: закон больших чисел

несправедлив, если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ распределены по закону Коши (с плотностью распределения $p(x) = 1/\pi(1+x^2)$), не обладающему конечным математическим ожиданием и дисперсией. А ведь такой закон встречается в жизни! Например, по Коши распределена интегральная освещенность точек прямолинейного берега равномерно вращающимся прожектором, находящимся в море (на корабле) и включающимся в случайные моменты времени.

Но еще большие трудности вызывает проверка обоснованности самого употребления термина «случайный». Что такое случайная величина, случайное событие и т.д.? Часто говорят, что событие A случайно, если в результате эксперимента оно может наступить (с вероятностью p) или не наступить (с вероятностью $1-p$). Все, однако, не так просто. Сама вероятность события может быть связана с результатами экспериментов лишь через частоту наступления события в некотором ряде (серии) экспериментов: $v_N = N_A/N$, где N_A – число экспериментов, в которых событие наступило; N – общее число экспериментов. Если числа v_N при достаточно большом N приближаются к некоторому постоянному числу P_A :

$$v_N \approx P_A, \quad (5.4)$$

то событие A можно назвать случайным, а число P_A – его вероятностью. При этом частоты, наблюдавшиеся в различных сериях экспериментов, должны быть близки между собой (это свойство называется статистической устойчивостью, или однородностью). Сказанное относится и к понятию случайной величины, поскольку величина ξ является случайной, если случайными являются события $\{a < \xi < b\}$ для любых чисел a, b . Частоты наступления таких событий в длинных сериях экспериментов должны группироваться около некоторых постоянных значений.

Итак, для применимости стохастического подхода должны выполняться следующие требования:

1) массовость проводимых экспериментов, т.е. достаточно большое их число;

2) повторяемость условий экспериментов, оправдывающая сравнение результатов различных экспериментов;

3) статистическая устойчивость.

Стохастический подход заведомо нельзя применять к единичным экспериментам: бессмысленны выражения типа “Вероятность того, что завтра будет дождь”, “с вероятностью 0.8 «Зенит» выиграет кубок” и т.п. Но даже если массовость и повторяемость экспериментов имеются, статистической устойчивости может и не быть, а проверить это - непростое дело. Известные оценки допустимого отклонения частоты от вероятности основаны на центральной предельной теореме или неравенстве Чебышева и требуют дополнительных гипотез о независимости или слабой зависимости измерений.

Опытная же проверка условия независимости еще сложнее, так как требует дополнительных экспериментов.

Как же построить модель системы, если неопределенность в задаче есть, но стохастический подход неприменим? Далее кратко излагается один из альтернативных подходов, основанный на теории нечетких множеств.

5.2 Нечеткие модели

5.2.1. Нечеткие множества и лингвистические переменные

В 1965 г. американский математик П. Заде опубликовал статью под названием “Fuzzy sets”, что можно перевести как «нечеткие множества». В статье было дано новое определение понятия множества, предназначенное для описания и исследования сложных, «плохо определенных» систем. К ним, в частности, относятся гуманистические системы, на поведение которых существенное влияние оказывают знания, суждения и эмоции человека. В таких системах наряду со строгими, объективными, количественными данными и результатами присутствуют неоднозначные, субъективные, качественные данные и результаты, что требует новых подходов.

Поскольку понятие множества лежит в основе всех математических конструкций, статья Л. Заде породила новое научное направление, бурный поток публикаций, специальные конференции и т.д. Произошло «раздвоение» математики: появились нечеткие функции, нечеткие уравнения, нечеткая логика и т.д. Новый математический аппарат описывает свойство нечетких систем, соответствующих трудно формализуемым, плохо структурированным задачам. В последние годы эти методы стали широко применяться в экспертных программных системах. Ниже излагаются основные понятия теории нечетких систем.

Прежде чем говорить о нечетких системах, необходимо ввести понятие нечеткого множества.

Нечетким подмножеством A множества X назовем пару (X, μ_A) , где $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ – функция, каждое значение которой $\mu_A(x) \in [0,1]$ интерпретируется как степень принадлежности точки $x \in X$ множеству A . Функция μ_A называется функцией принадлежности множества A .

Для обычного «четкого» множества B можно положить $\mu_B = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$,

т.е. классическое понятие множества является частным случаем введенного понятия (рис. 5.1 а). Задавать функцию принадлежности можно таблично или аналитически.

Пример 5.1 Пусть $X = \{1, 2, \dots\}$ – множество натуральных чисел, а функция $\mu_A(x)$ задана таблицей

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\mu_A(x)$	0	0.1	0.6	0.8	1	1	0.9	0.7	0.2	0	...

Определенное таким образом нечеткое множество можно принять в качестве формализации понятия «несколько», изначально ясного лишь на интуитивном уровне.

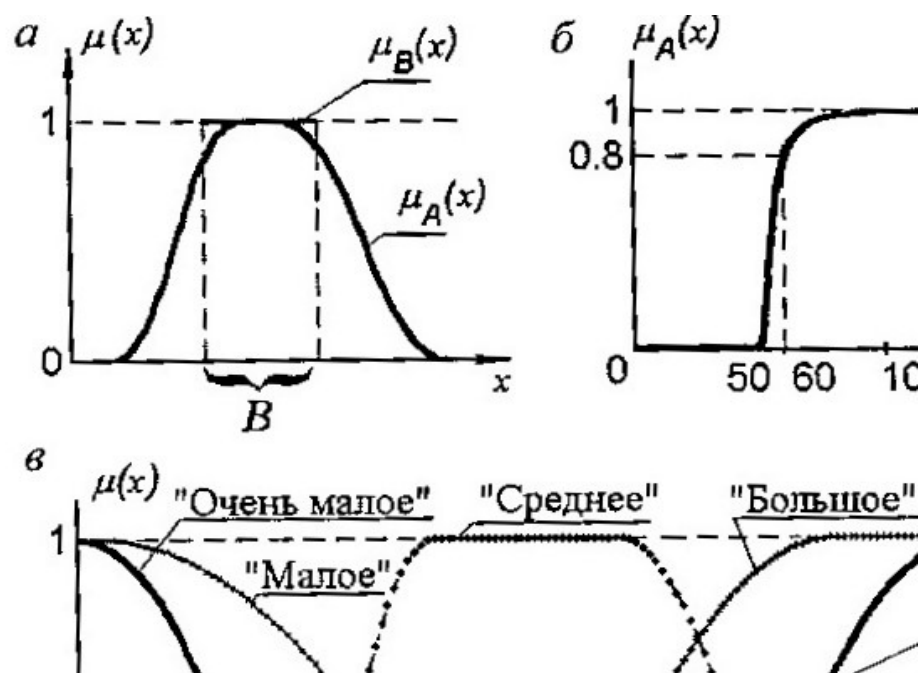


Рисунок 5.1 – Функции принадлежности нечетких переменных

Аналогично можно ввести нечеткие множества соответствующие понятиям: «много», «мало», «около 100», «почти 20» и т.д.

Пример 5.2 Пусть $X = [0, \infty]$ – множество положительных чисел, а функция $\mu_A(x)$ задана формулой

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 50, \\ 1 + \frac{25}{(x-50)^2}, & x > 50 \end{cases} \quad (5.5)$$

график которой изображен на рис.5.1, б. Если переменную x интерпретировать как возраст, то нечеткое множество A соответствует понятию «старый». Аналогично можно формализовать понятия «молодой», «средних лет» и т.д.

Переменные, значениями которых являются нечеткие множества, называются лингвистическими. Это основной тип переменных в естественном языке людей.

Пример 5.3. Переменная «расстояние» принимает обычно числовые значения. Однако в предложениях естественного языка она может фигурировать как лингвистическая со значениями «малое», «большое», «очень малое», «среднее», «около 5 км» и т.д. Каждое значение описывается

нечетким множеством, которое в рамках данной предметной области может иметь конкретную числовую интерпретацию. Например, если речь идет о поездках на такси, то в качестве универсального множества X можно взять отрезок $[0, 100]$ км и задать функции принадлежности значений переменной «расстояние», как показано на рис. 5.1, в.

При первом знакомстве с нечеткими множествами обычно возникает недовольство произволом и субъективизмом в задании функций принадлежности: «почему так, а не иначе?». Однако в этом не слабость, а сила подхода! Ведь если само понятие субъективно, то такова и его формализация, выполняемая человеком. А получаемые результаты должны носить качественный характер и достаточно слабо зависеть от конкретного задания функций принадлежности. С другой стороны, если есть необходимость в более объективных выводах, можно получить оценки $\mu_A(x)$ путем опроса экспертов.

Для нечетких множеств вводятся операции пересечения, объединения, дополнения, концентрации, размывания (табл. 5.2). Первые три являются обобщениями обычных операций; оставшиеся – специфичны для нечетких множеств. Операции позволяют конструировать сложные понятия из простых: «очень много», «не старый и не молодой» и т.п.

Таблица 5.2 Операции над нечеткими множествами

Операция	Лингвистический смысл	Формула для $\mu_C(x)$
Пересечение $C = A \cap B$	И	$\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Объединение $C = A \cup B$	ИЛИ	$\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Дополнение $C = \bar{A}$	НЕ	$1 - \mu_A(x)$
Концентрация	ОЧЕНЬ	$ \mu_A(x) ^2$
Размывание	НЕ ОЧЕНЬ	$\sqrt{\mu_A(x)}$

По аналогии с четким случаем определяется отношение включения множеств: $A \subset B$, если и только если $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ для всех $x \in X$.

5.2.2 Нечеткие системы

Аналогично классическому случаю понятие нечеткой системы вводится через понятие нечеткого отношения (частными случаями которого являются понятия «нечеткое отображение», «нечеткая функция»).

Определение. Нечеткое отношение R на множествах X, Y задается функцией $\mu_R : X \times Y \rightarrow [0,1]$, каждое значение которой $\mu_R(x,y)$ интерпретируется как степень нахождения (совместимости, принадлежности) пары (x,y) в данном отношении.

Таким образом, нечеткое отношение - это нечеткое подмножество множества $X \times Y$ всех пар (x,y) , где $x \in X, y \in Y$. Поэтому стандартным способом вводятся пересечение, объединение, дополнение и другие действия над отношениями. Включение отношений $R \subset S$ ($\mu_R(x,y) \leq \mu_S(x,y)$) интерпретируется как «из R следует S ».

Важную роль в теории нечетких систем играет отношение композиции $R \circ S$. Если даны отношение R на множествах X, Y и отношение S на множествах Y, Z , то функция принадлежности отношения $R \circ S$ на множествах X, Z задается формулой

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \max_{y \in Y} (\min \{ \mu_R(x,y), \mu_S(y,z) \}) \quad (5.6)$$

В полной аналогии с обычными системами (см. лекцию 1) нечеткая система – это нечеткое отношение между множествами U, Y , где U – множество входных функций времени $u(t)$, а Y – множество выходных функций времени $y(t)$. Операция композиции отношений соответствует последовательному соединению систем. Подчеркнем, что для нечетких систем понятие однозначности, детерминированности, теряет смысл: нечеткое отображение и нечеткое отношение неразличимы.

Если множества значений входов и выходов системы конечны, то, как указывалось в лекции 4, ММ системы можно задать таблицами либо набором правил (продукций), например: «ЕСЛИ $(u = u_i)$ И $(x = x_j)$ ТО $(y = y_k)$ », или в более компактном виде:

$$(u = u_i, x = x_j) \rightarrow y = y_k \quad (5.7)$$

Форма (5.7) удобна для представления в компьютере и придает описанию системы вид набора причинно-следственных связей. При этом фактическая причинно-следственная связь может отсутствовать (пример: ЕСЛИ «тебе за сорок» И «с утра у тебя ничего не болит» ТО «ты умер»). Аналогично обстоит дело и для нечетких систем, входные и выходные переменные которых могут принимать нечеткие значения, т.е. являются лингвистическими. Примеры нечетких правил:

$$(u = \text{«малое»}) \rightarrow (y = \text{«большое»}),$$

$$(u(t) = \text{«около 0.5»}, x(t-1) = \text{«большое»}) \rightarrow (x(t) = \text{«очень большое»}).$$

Пример 5.4. Рассмотрим систему простейшего прогноза погоды в городе, основанную на том наблюдении, что погода чаще сохраняется, чем меняется: погода завтра будет скорее всего такая же, как сегодня. Для простоты пусть множество входов системы (возможных значений переменной «погода сегодня») состоит из трех элементов: «ясно» (Я), «пасмурно» (П), «дождь» (Д), т.е. $U = \{Я, П, Д\}$. Таким же пусть будет и множество выходов (прогнозы на завтра). $Y = \{Я, П, Д\}$. Если описать ММ простейшего прогноза как четкую, то ее можно представить таблицей:

U	Y		
	Я	П	Д
Я	1	0	0
П	0	1	0
Д	0	0	1

или, более экономно, набором правил:

$$(u = Я) \rightarrow (y = Я); (u = П) \rightarrow (y = П); (u = Д) \rightarrow (y = Д);$$

Однако прогноз погоды – дело ненадежное и субъективное, поэтому более адекватной является нечеткая ММ, в которой отношение между входами и выходами системы R_0 задается таблицей значений функции принадлежности, имеющей, например вид таблицы:

U	Y		
	Я	П	Д
Я	0.8	0.4	0.3
П	0.4	0.8	0.4
Д	0.3	0.4	0.8

Можно использовать и нечеткие правила (продукции), например:

$$(u = \text{Я}) \rightarrow (y = \text{Я} \mid 0.8 \text{ или } \text{П} \mid 0.4 \text{ или } \text{Д} \mid 0.3).$$

Пусть теперь входная переменная ω_0 («погода сегодня») приняла некоторое значение. Оно, естественно, должно быть нечетким (ведь нет четкой границы между значениями «ясно» и «пасмурно» да и дождь может идти не по всему городу) и определяться, например, по сообщениям экспертов. Пусть в результате усреднения мнений группы экспертов ω_0 задается как

x	Я	П	Д
$\mu_{\omega_0}(x)$	0.4	0.5	0.1

Как узнать прогноз на завтра? Вспомним, что множество – частный случай отношения и представим его как отношение W_0 с фиктивным одноэлементным множеством входов и нечетким множеством выходов. Теперь легко понять, что значение переменной «погода завтра» (ω_1) определится с помощью соответствующего отношения W_1 по формуле композиции отношений (5.6).

Таким образом, $W_1 = R_0 \circ W_0$ и, значит, например,

$$\mu_{\omega_1}(\text{Я}) = \max\{\min\{0.1, 0.3\}, \min\{0.1, 0.3\}, \min\{0.1, 0.3\}\} = \max\{0.1, 0.4, 0.4\}$$

Итоговая таблица прогноза на завтра имеет вид

Y	Я	П	Д
$\mu_{\omega_1}(y)$	0.4	0.5	0.4

Полученный результат можно снова подать на вход системы прогноза и получить новый результат «прогноз на послезавтра»:

$$W_2 = R \circ W_1 = (R \circ R) \circ W_0.$$

Правило вывода, соответствующее композиции нечетких отношений, называется композиционным правилом вывода и составляет основу нечеткой логики. В нечеткой логике значения истинности предложений лежат от нуля до единицы; закон исключенного третьего не выполняется.

Нечеткие отношения, как и обычные, могут обладать специальными свойствами. Для отношения $R: X \times X \rightarrow [0,1]$ рассмотрим свойства:

- рефлексивность $R(x, x) = 1$ для всех $x \in X$;
- симметричность $R(x, y) = R(y, x)$ для всех $x, y \in X$;
- антисимметричность $\min\{R(x, y), R(y, x)\} = 0$ при $x \neq y$
- транзитивность $R(x, z) \geq \min\{R(x, y), R(y, z)\}$ для всех $x, y, z \in X$.

Отношение называется отношением сходства если оно рефлексивно и симметрично. Рефлексивность и антисимметричность характеризуют отношение доминирования. Если к перечисленным свойствам добавляется свойство транзитивности, то отношение соответственно называют эквивалентностью и порядком.

5.2.3. Нечеткие числа

Рассмотрим свойства и применения нечетких подмножеств числовой оси $R^1 = (-\infty, +\infty)$ – так называемых нечетких чисел. Над нечеткими числами можно производить арифметические и иные действия, правила выполнения которых вытекают из правил действий с отношениями и из того, что любую бинарную операцию можно рассматривать как тернарное (3-местное) отношение. Например, функция принадлежности нечеткой суммы $C = A \oplus B$ нечетких чисел A, B имеет вид

$$\mu_C(z) = \sup_{x+y=z} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}. \quad (5.8)$$

Прикладной смысл нечеткого числа – это число, заданное с погрешностью. Для того чтобы работать с такими числами, нужно задавать функции принадлежности и погрешностей, а это невозможно сделать во всех $x \in R^1$ в силу бесконечности множества R^1 . Один из способов преодоления

,этой трудности – использование нечетких $L - R$ -чисел (сокращение от «left – right»).

Чтобы определить нечеткие $L - R$ -числа, на промежутке $[0, \infty)$ задаются две невозрастающие неотрицательные функции $L(x), R(x)$, обладающие свойствами $L(0) = R(0) = 1$. После этого функцию принадлежности нечеткого числа A определяют в виде

$$\mu_A = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right), & x \leq \alpha, \\ R\left(\frac{x-a}{\beta}\right), & x > \beta, \end{cases} \quad (5.9)$$

где a – вещественное число, называемое средним значением (употребляют также термины «центр», «мода») нечеткого числа; $\alpha > 0, \beta > 0$ – левый и правый коэффициенты нечеткости. Если $L(x) = R(x), \alpha = \beta$, то нечеткое число называют симметричным.

Поскольку функции $L(x), R(x)$ задаются заранее и не меняются, для выполнения действий с $L - R$ -числами достаточно помнить лишь тройку $A = \{a, \alpha, \beta\}$. Правила арифметики $L - R$ -чисел вытекают из общих правил арифметики нечетких чисел и напоминают правила распространения ошибок в приближенных вычислениях. Если $A = \{a, \alpha, \beta\}$, $B = \{b, \chi, \delta\}$, то

$$A \oplus B = \{a + b, \alpha + \chi, \beta + \delta\},$$

$$A \ominus B = \{a - b, \alpha + \chi, \beta + \delta\},$$

Если B – четкое число ($\chi = \delta = 0$), то $A \otimes B = \{ab, \alpha|b|, \beta|b|\}$.

5.2.5. Вероятность или нечеткость?

Продemonстрируем на простом примере разницу между стохастическим и нечетким подходами. Пусть сделано несколько измерений x_1, \dots, x_n некоторой неизвестной величины a с погрешностью, не превосходящей величины a . Требуется оценить значение a и определить погрешность оценки.

Предположим, что в качестве оценки выбрано среднее арифметическое $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. При стохастическом подходе мы постулируем, что x_i случайны и независимы, $Mx_i = a$, и, поскольку погрешность может быть произвольным числом из $[-\alpha, \alpha]$, считаем, что x_i равномерно распределены на $[a - \alpha, a + \alpha]$. Отсюда $Dx_i = (2\alpha^2)/12 = \alpha^2/3$. В силу независимости $D\bar{x} = (1/n)Dx_i = \alpha^2/3n$ и по формуле (5.3) из центральной предельной теоремы получим, что

$$|\bar{x} - a| \leq 2\alpha/\sqrt{3n}, \quad (5.9)$$

с вероятностью 0.95.

Примем теперь нечеткую модель измерений. Естественнее представить измерение как нечеткое $L-R$ -число $X_i = \{a, \alpha, \alpha\}$ со следующей характеристикой: $L(x) = R(x) = 1$ при $0 \leq x \leq 1$, $L(x) = R(x) = 0$ при $x > 1$. Тогда $\sum X_i = \{na, n\alpha, n\alpha\}$, откуда $\bar{X} = \{a, \alpha, \alpha\}$, т.е. погрешность оценки определится неравенством

$$|\bar{x} - a| \leq \alpha. \quad (5.10)$$

Сравнивая (5.9) и (5.10), мы видим, что интервал (5.9) меньше примерно в \sqrt{n} раз. Это получено за счет эффекта усреднения. Если же нет уверенности в том, что погрешности ведут себя нерегулярно и уничтожаются при усреднении, то доверять (5.9) нельзя и мы возвращаемся к оценке (5.10). Однако за нечетким подходом остаются дополнительные возможности. Например, имея информацию о том, что малые значения погрешностей встречаются чаще, чем большие, мы можем взять соответствующие функции $L(x), R(x)$. Соответственно меняется функция принадлежности \bar{X} и (5.10) уточняется.

Кроме того, если n мало, например $n = 10$, то проверить правомерность усреднения практически невозможно. В результате оценка погрешности при

$n = 10$ по (5.9) получается всего в 2.7 раза меньше, чем по (5.10), причем она верна лишь в 95% случаев и при труднопроверяемых предположениях.

5.3 Хаотические модели

5.3.1 От колебаний — к хаосу

Сравнительно недавно, в 70–х годах XX века, в науку о математических моделях вошло новое понятие, перевернувшее многие привычные представления, - понятие хаоса (точнее, детерминированного хаоса). Хаотические системы предоставили исследователям новый класс моделей неопределенности, отличающихся по своим свойствам как от стохастических, так и от нечетких моделей. Если в детерминированной модели будущую траекторию можно предсказать на сколь угодно большое время вперед, зная текущее состояние системы, а в стохастической модели точный прогноз, вообще говоря, невозможен даже на сколь угодно малое время, то в хаотической модели ошибка прогноза растет экспоненциально и, следовательно, возможен прогноз на ограниченное время вперед, определяемое допустимой ошибкой прогноза. Процессы в хаотических моделях имеют вид нерегулярных колебаний, в которых меняется, «плавает», как частота, так и амплитуда.

Колебательные процессы часто встречаются в природе и технике, поэтому формы их описания непрерывно развиваются и совершенствуются. В течение многих лет, до начала XX в. основным видом математических моделей колебаний в механических, электрических и других системах считались дифференциальные уравнения, например

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0, 0 \leq t \leq \infty. \quad (5.11)$$

Решениями (5.11) являются гармонические колебания

$$y(t) = A_0 \sin \omega t + A_1 \cos \omega t, \quad (5.12)$$

с круговой частотой ω и периодом $T = 2\pi/\omega$, амплитуда которых $A = \sqrt{A_0^2 + A_1^2}$ зависит от начальных условий: $A_1 = y(0), A_0 = \dot{y}(0)/\omega$ (рис. 5.2, а, для $\omega = 1$).

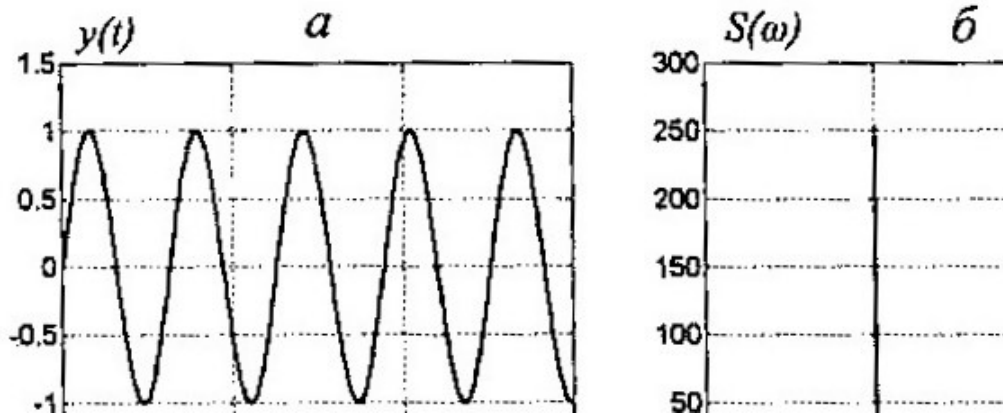


Рисунок 5.2 – Гармонические колебания

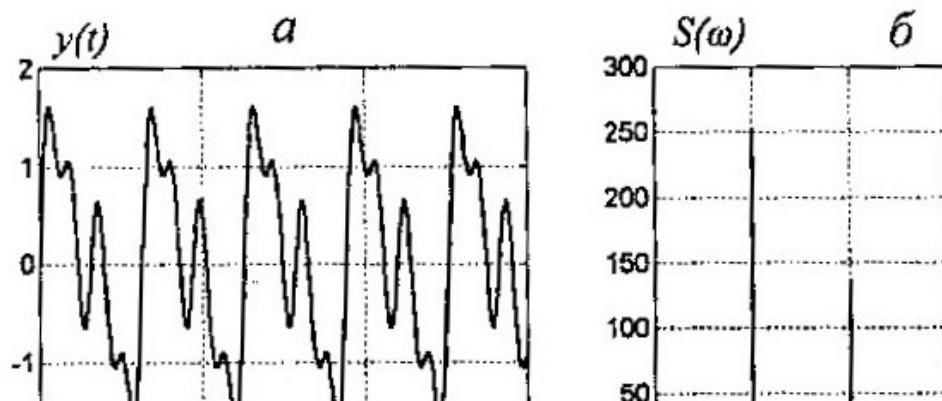


Рисунок 5.3 – Периодические колебания

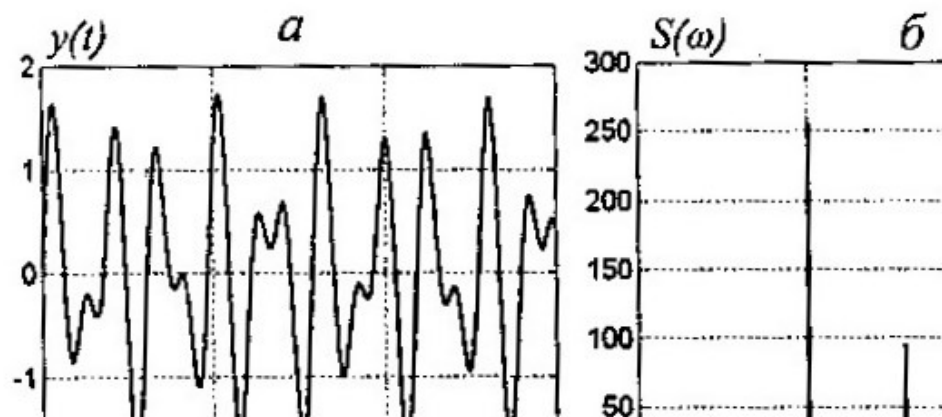


Рисунок 5.4 – Квазипериодические колебания

Очевидно, решение (5.12) непрерывно зависит от начальных условий, т.е. малое изменение величин $y(0), \dot{y}(0)$ приводит к равномерно малому

изменению решения $y(t)$ на всей временной полуоси $0 \leq t \leq \infty$. Частотный спектр функции (5.12) дискретен и состоит из одной точки $\omega/2\pi$ (рис. 5.2, б).

Для описания колебаний более сложной формы можно соединять модели вида (5.11) с различными частотами колебаний $\omega_1, \dots, \omega_r$. Например, последовательное соединение двух моделей вида (5.11) описывается соотношениями

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) &= 0, \\ \ddot{y}_2(t) + \omega_2^2 y_2(t) &= y_1(t),\end{aligned}$$

и имеет частные решения вида $y_2(t) = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$, где коэффициенты A_1, A_2 зависят от начальных условий. Если частоты $\omega_1, \dots, \omega_r$ соизмеримы (являются целыми кратными некоторой частоты ω_0), то колебания будут периодическими с периодом $2\pi/\omega$ (рис. 5.3 для $r=3$, $\omega_1=1$, $\omega_2=2$, $\omega_3=4$). Если же частоты ω_i несоизмеримы, то такие колебания не являются периодическими; они относятся к классу квазипериодических (рис. 5.4, где $r=2$, $\omega_1=1$, $\omega_2=5/\pi$). В обоих случаях решение непрерывно зависит от начальных условий, а его спектр является дискретным конечным множеством.

Заметим, что «на глаз» различить периодические и квазипериодические колебания может быть затруднительно, поскольку реальные измерения (в том числе измерение частоты колебаний) выполняются с конечной точностью и отличить рациональное отношение частот от иррационального оказывается практически невозможным.

На рубеже XIX-XX веков выяснилось, что линейных моделей колебаний недостаточно для описания новых явлений и процессов в физике и технике. Важнейшим в теории нелинейных колебаний является понятие устойчивого предельного цикла – периодической траектории, к которой сходятся все другие траектории (но крайней мере, траектории с близкими начальными условиями).

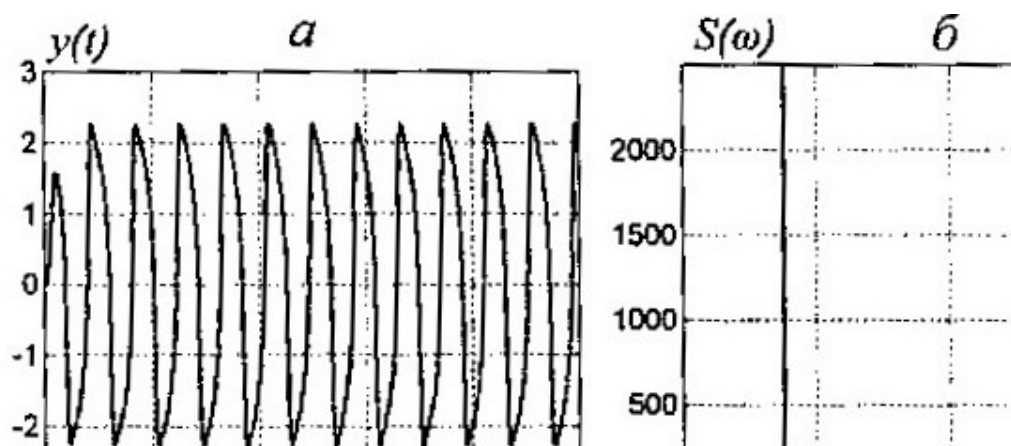


Рисунок 5.5 – Предельный цикл и его спектр

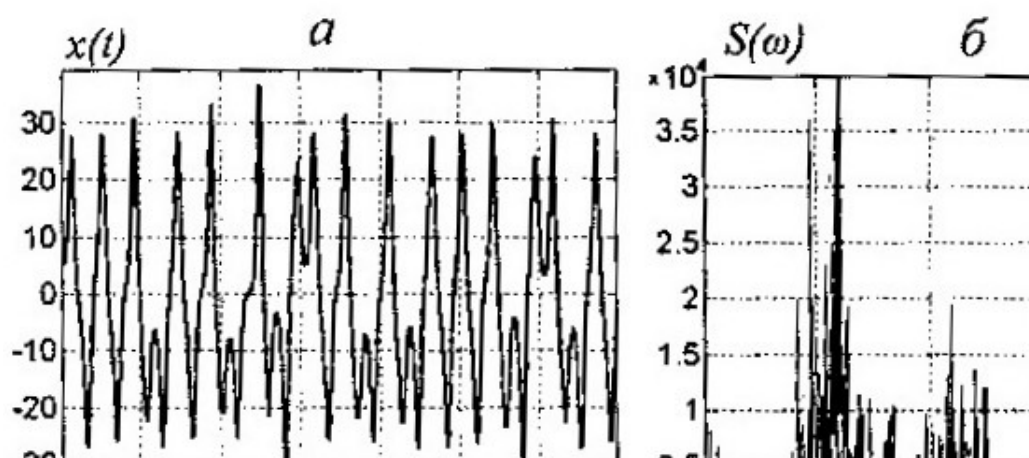


Рисунок 5.6 – Хаотический процесс в системе Лоренца и его спектр

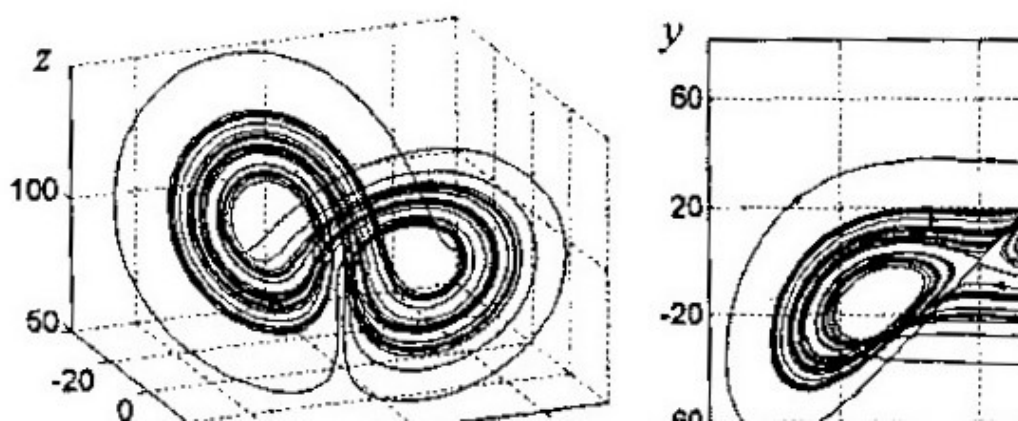


Рисунок 5.7 – Хаотический аттрактор в системе Лоренца

К числу классических примеров нелинейных дифференциальных моделей, обладающих предельным циклом, относятся уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{y} + \varepsilon(y^2 - 1)\dot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (5.13)$$

где $\varepsilon > 0$; уравнение Дуффинга

$$\ddot{y} + p\dot{y} - qy + q_0y^3 = 0 \quad (5.14)$$

где $p > 0$, $q > 0$, $q_0 > 0$; система с релейным элементом

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy - \text{sign}(y) = 0. \quad (5.15)$$

Даже простые нелинейные модели позволяют описывать колебания сложной формы, например релаксационные (близкие к прямоугольным) колебания, учитывать изменение формы колебания в зависимости от начальных условий (системы с несколькими предельными циклами) и т.д. Теоремы о разложении периодической функции в ряд Фурье показывают, что спектр предельного цикла состоит из счетного набора частот, кратных некоторой основной частоте. На рис. 5.5, а приведен график решения системы (5.13) при $\varepsilon = 2.5$, $\omega = 1$ и начальных условиях $y(0) = 0.5$, $\dot{y}(0) = 0$. Соответствующий спектр изображен на рис. 5.5, б.

В течение нескольких десятилетий линейные модели колебаний и нелинейные модели с предельными циклами удовлетворяли потребности инженеров. Считалось, что они описывают все возможные типы колебаний детерминированных систем. Однако в середине XX века сами математики обнаружили, что уже для систем третьего порядка это не так: в системе становятся возможными весьма сложные движения – ограниченные непериодические колебания. Настоящий переворот начался с работы физика Е. Лоренца, опубликованной в 1963 г., где было показано, что качественный характер явлений атмосферной турбулентности, описываемых сложными уравнениями в частных производных Навье-Стокса, может быть передан простой нелинейной моделью третьего порядка (уравнение Лоренца):

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases} \quad (5.16)$$

Решения системы (5.16) при некоторых значениях параметров (например, при $\sigma = 10$, $r = 97$, $b = 8/3$ выглядят как нерегулярные колебания

(рис. 5.6, а, где изображен график $x(t)$). Траектории в пространстве состояний (фазовом пространстве) могут приближаться к предельному множеству (аттрактору), имеющему весьма причудливое строение (рис. 5.7, а). Внимание многих физиков и математиков, а затем и инженеров к подобным моделям было привлечено после работы Д. Рюэля и Ф. Такенса, опубликованной в 1971 г., которые называли такие аттракторы «странными», а также работы Т. Ли и Дж. Йорке (1975), которые ввели термин «хаос» для обозначения подобных нерегулярных явлений в детерминированных системах. Разработанные новые методы аналитического и численного исследования систем показали, что хаос – это отнюдь не исключительный вид поведения нелинейной системы. Грубо говоря, хаотические движения возникают, когда траектории системы глобально ограничены и локально неустойчивы. В хаотической системе сколь угодно малое начальное расхождение траекторий не остается малым, а в течение некоторого времени растет экспоненциально. Частотный спектр хаотической траектории является непрерывным (рис. 5.6, б, где изображен спектр функции $x(t)$). Во многих случаях подобные нерегулярные, непериодические колебания лучше отражают свойства процессов, протекающих в реальных системах. Опять-таки следует отметить, что «на глаз» отличить хаотический процесс от квазипериодического может быть не менее трудно, чем отличить квазипериодический процесс от периодического.

Лекция 6. Хаотические системы (продолжение), нелинейный анализ.

6.1 Определение хаотической системы.

Терминология в области хаотических моделей еще не устоялась, и существует несколько различных определений хаотических систем. Приведем одно из простейших.

Рассмотрим динамическую систему в непрерывном времени

$$\dot{x} = F(x), \quad (6.1)$$

где $x = x(t) \in R^n$ – вектор состояния системы, $0 \leq t < \infty$.

Определение 1. Замкнутое множество $\Omega \supset R^n$ называется аттрактором системы (3.64), если: а) существует такое открытое множество $\Omega_0 \subset \Omega$, что все траектории $x(t)$ системы (6.1), начинающиеся в Ω_0 , определены при всех $t \geq 0$ и стремятся к Ω при $t \rightarrow \infty$; б) никакое собственное подмножество Ω этим свойством не обладает.

Определение 2. Аттрактор называется странным, если он ограничен и любая траектория, начинающаяся на нем, неустойчива по Ляпунову.

Определение 3. Система называется хаотической, если у нее существует хотя бы один странный аттрактор.

Аналогичные определения даются для систем, дискретных по времени:

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.2)$$

Неустойчивость по Ляпунову характеризует основное свойство хаотических колебаний, называемое «сверхчувствительностью», или «чувствительной зависимостью» от начальных условий: любые две сколь угодно близкие траектории обязательно удаляются друг от друга на конечное расстояние.

Для некоторых общепризнанных хаотических систем (например, для системы Лоренца) доказательства хаотичности весьма громоздки, хотя численных и экспериментальных подтверждений накоплено предостаточно. Поэтому основным методом изучения хаотических систем остается

численное исследование – имитационное моделирование и оценка различных характеристик. Приведем несколько примеров хаотических систем.

Пример 6.1. Система (цепь) Чуа. Около 15 лет назад специалисты по электронным целям Л. Чуа и Т. Мацумото предложили простую электронную цепь с одним нелинейным элементом, способную генерировать весьма разнообразные, в том числе хаотические, колебания.

Электрическая схема цепи Чуа представлена на рис. 6.1. а. Эта цепь содержит нелинейный резистор R_c (диод Чуа), вольт-амперная характеристика которого отражена на рис. 6.1, б. Нетрудно убедиться, что уравнения Кирхгофа для этой цепи имеют вид

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \frac{1}{C_1} \left(\frac{u_2 - u_1}{R} - i_R(u_1) \right), \\ \frac{du_2}{dt} = \frac{1}{C_2} \left(\frac{u_1 - u_2}{R} + i_3 \right), \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{1}{L} (u_2 + R_0 i_3). \end{cases}$$

Пренебрегая активным сопротивлением катушки индуктивности и переходя к безразмерным величинам, получим математическую модель цепи Чуа в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = p(y - f(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -qy, \end{cases} \quad (6.3)$$

где x, y, z – безразмерные переменные, пропорциональные напряжениям на емкостях и току через индуктивность; $f(x) = 0.5(M_1 - M_0)(|x + 1| - |x - 1|) + M_1 x$. При $p = 9$, $q = 14.3$, $M_1 = 6/7$, $M_0 = 5/7$ траектории системы (6.3) демонстрируют хаотическое поведение (рис. 6.2., 6.3).

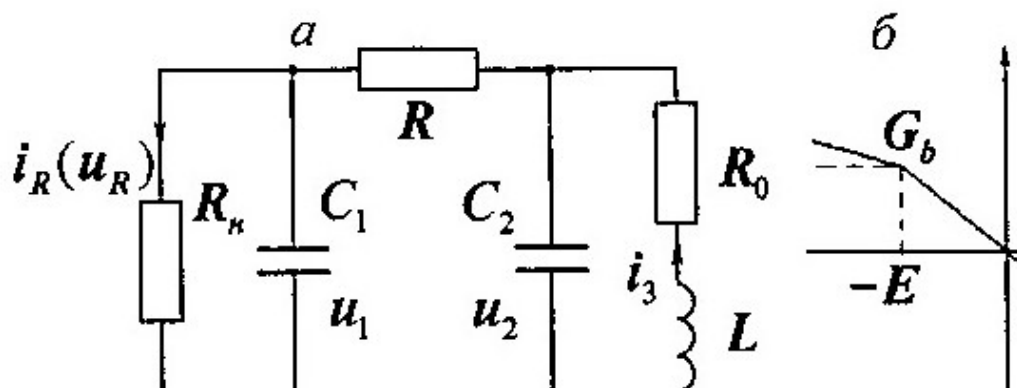


Рисунок 6.1 – Электрическая схема Чуа и вольт-амперная характеристика нелинейного резистора

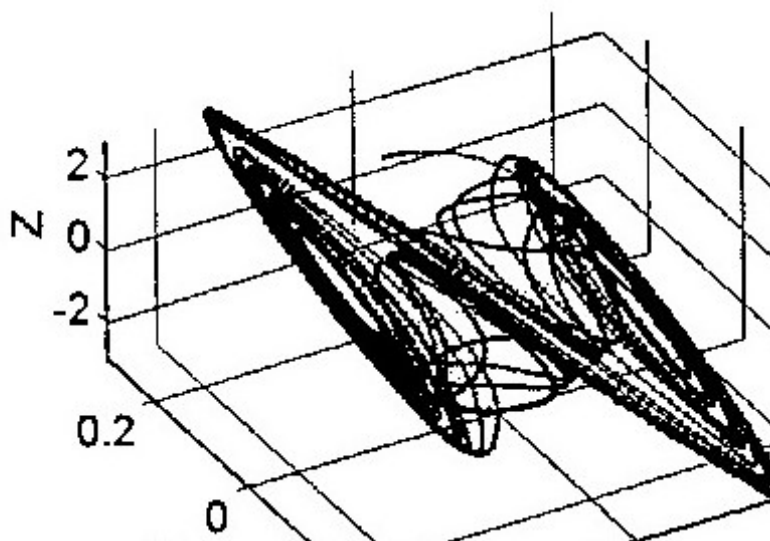


Рисунок 6.2 – Аттрактор системы Чуа

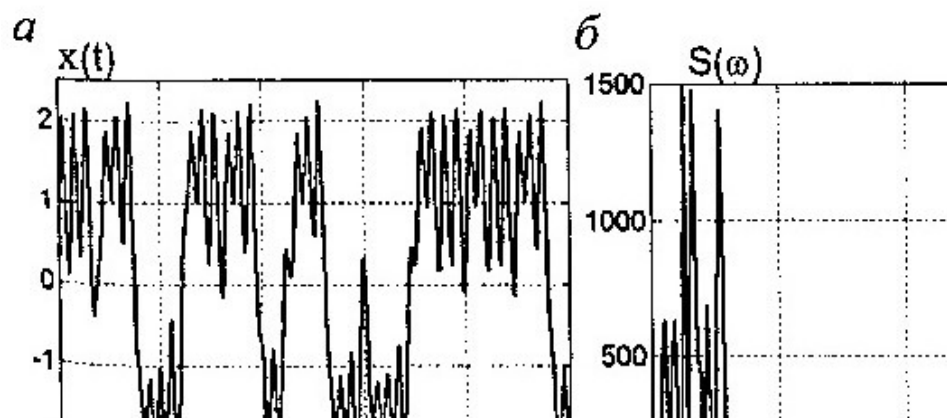


Рисунок 6.3 – Хаотический процесс в системе Чуа и его спектр

Пример 6.2. Дискретная система с квадратичной правой частью

$$x_{k+1} = \lambda x_k (1 - x_k), \quad x_k \in R^1, \quad (6.4)$$

гостроенная с помощью так называемого логистического отображения $F(x) = \lambda x(1-x)$, является хаотической при $3.57 < \lambda < 4$. Ее аттрактором является отрезок $[0, 1]$.

6.2 Критерии хаотичности

Как уже было сказано, основным критерием хаотичности является локальная неустойчивость, т.е. разбегание близких вначале траекторий. Соответственно основной характеристикой хаотичности является скорость разбегания, определяемая так называемым старшим показателем Ляпунова. Показатели Ляпунова определяются для заданной «опорной» траектории $\bar{x}(t)$ системы (3.64) с начальным условием $\bar{x}(0) = x_0$. Для этого составляется уравнение в вариациях (система, линеаризованная вблизи $\bar{x}(t)$):

$$\frac{d}{dt} \delta x = W(t) \delta x, \quad (6.5)$$

где $\delta x = x - \bar{x}(t)$; $W(t) = \frac{\partial F(x(t))}{\partial x}$ – матрица Якоби системы (6.1) (матрица частных производных от правых частей), вычисленная вдоль решения $\bar{x}(t)$. Задав начальное отклонение $z = \delta x(0)$, можно вычислить величину

$$\alpha(x_0, z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(t)\|}{\|z\|}, \quad (6.6)$$

характеризующую скорость экспоненциального роста решений (6.5) в направлении z и называемую характеристическим показателем (ляпуновской экспонентой) в направлении z .

Еще А.М. Ляпунов показал, что при небольших дополнительных предположениях предел в (6.6) существует, конечен для любого $z \in R^n$ и не зависит от начального выбора точки x_0 на траектории $x(t)$. Более того, число различных характеристических показателей конечно, их можно пронумеровать в порядке убывания $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ и существует базис $z_i \in R^n$, $i = 1, \dots, n$, для которого $\alpha(x_0, z_i) = \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$.

Наиболее важен старший ляпуновский показатель α_1 . Если $\alpha_1 > 0$ вдоль ограниченного решения $\bar{x}(t)$, плотного в аттракторе Ω , то это решение неустойчиво по Ляпунову, а аттрактор является странным. При этом величина α_1 характеризует степень неустойчивости, или, другими словами, показатель экспоненциальной чувствительности к начальным данным. Для линейной системы с постоянной матрицей $\dot{x} = Ax$ и нулевого опорного решения $\bar{x}(t) = 0$, очевидно, $\alpha_1 = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A)$, т.е. $|\alpha_1|$ совпадает с обычной степенью устойчивости (или неустойчивости) системы.

Показатели Ляпунова характеризуют прогнозируемость траекторий системы. Действительно, траектория $\bar{x}(t)$ аппроксимируется через время T другой траекторией с погрешностью Δ , если

$$T \leq \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{\Delta}{\varepsilon}, \quad (6.7)$$

где ε – начальная погрешность. Следовательно, хаотическую траекторию можно спрогнозировать с заданной точностью на некоторое время вперед. Это принципиально отличает хаотические системы как модели неопределенности от стохастических систем в которых ошибка прогноза может, вообще говоря, принимать сколь угодно большие значения, даже при сколь угодно малом горизонте (время прогноза).

Другой важной характеристикой хаотической системы является фрактальная размерность аттрактора, характеризующая его «густоту» или «пористость». Для ее подсчета аттрактор Ω покрывается кубиками размера ε . Пусть $N(\varepsilon)$ – количество кубиков в покрытии. Вычислим величину

$$\mu(d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \varepsilon^d. \quad (6.8)$$

Можно показать, что существует число $d_f > 0$, такое что $\mu(d) = +\infty$ при $d < d_f$, $\mu(d) = 0$ при $d > d_f$. Это число называется фрактальной размерностью, или емкостью множества Ω . Емкость можно определить из соотношения

$$d_f = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log \varepsilon}. \quad (6.9)$$

Можно показать, что если множество Ω есть точка, гладкая кривая или двумерная поверхность, то d_f будет равна 0, 1 или 2 соответственно. Однако есть множества, у которых d_f – дробная величина. Такие множества были названы Б. Мандельбротом фрактальными, или фракталами. Примерами фракталов являются странные аттракторы: для системы Лоренца $d_f \approx 2.07$, а для цепи Чуа $d_f \approx 2.81$. Доказано, что поведение траекторий на аттракторе, имеющем фрактальную размерность d_f может быть описано моделью в пространстве состояний с размерностью, не превышающей $2d_f + 1$.

6.3. Зачем нужны хаотические модели?

Из предыдущего ясно, что хаотические модели следует использовать для описания непериодических колебательных процессов с непостоянными, меняющимися характеристиками (например, частотой и фазой). Существующие методы позволяют оценивать эти характеристики по результатам измерений. При этом такая величина как частота колебаний становится «нечеткой» и уступает место спектру, который является непрерывным. Вводятся новые важные величины: старший ляпуновский показатель (степень неустойчивости), характеризующий скорость разбегания траектории и, следовательно, время прогнозируемости процесса; фронтальная размерность, характеризующая «пористость» клубка траекторий. Важно, что известные хаотические модели имеют небольшое число параметров, а процессы в них обладают малой (несколько единиц) фрактальной размерностью. Это повышает надежность и прогнозирующую силу моделей. Перечислим некоторые из уже известных применений хаотических моделей.

Описание нерегулярного поведения реальных систем. На сегодняшний день известен целый ряд реальных физических устройств и процессов,

проявляющих при некоторых условиях хаотическое поведение. Приведем несколько примеров:

- газовые или полупроводниковые лазеры в так называемых многомодовых режимах;
- механические системы, состоящие из нескольких связанных осцилляторов (например, маятников), а также системы с ударами и люфтами;
- электронные схемы с активными элементами, например, полупроводниковыми приборами с отрицательным дифференциальным сопротивлением (такими как туннельные диоды, диоды Ганна и та.);
- химические и физико-химические реакции с нелинейной кинетикой;
- временные ряды в экономике и финансах (например, бизнес-циклы, цены на акции, обменные курсы валют. Заметим, что в экономических и финансовых приложениях хаотические модели в последнее время потеснили традиционные для этих областей стохастические модели.

Генерация нерегулярных сигналов. Во многих технических системах возникает необходимость использования псевдослучайных чисел и сигналов. В качестве генераторов псевдослучайных чисел можно использовать хаотические системы.

Простейший подход к построению хаотических генераторов состоит в том, что берется динамическая система, описываемая одной из типовых хаотических моделей, и по внешнему виду траекторий выбирается та, в которой качественный характер колебаний наиболее близок к желаемому. После этого путем подбора параметров моделей устанавливаются желаемые качественные характеристики колебаний (амплитуда, спектр и т.д.). Использование характеристик хаотической динамики (показатели Ляпунова, фрактальные размерности и т.п.) позволяет задавать дополнительные свойства шумов и помех при их генерации. Заметим, что «на глаз» квазипериодические колебания с большим числом составляющих гармоник и хаотические колебания бывает трудно различить. В то же время, как и при моделировании нерегулярных процессов, малая размерность и малое число

параметров хаотических моделей дают им дополнительные преимущества перед линейными моделями с большим числом гармоник.

Синхронизация нерегулярных колебаний и управление ими. Двойственность природы хаотических систем (детерминированные системы с хаотическим поведением) приводит к новым неожиданным их применениям. Например, две хаотические системы можно заставить колебаться синхронно (в одной фазе), если подавать на одну или на обе системы сигнал обратной связи по ошибке рассогласования. Использование этого эффекта, например, в технике связи позволяет использовать хаотический несущий сигнал вместо периодического, что в свою очередь дает возможность повысить надежность и скрытность процесса передачи сообщений.

Поясним идею управляемой синхронизации для упрощенного случая, когда ведущая система (эталонный генератор) описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x), \quad (6.10)$$

а ведомая (управляемый генератор) – уравнением

$$\dot{z} = f(z) + u(t), \quad (6.11)$$

где x , z , u – n -мерные векторы. Выбирая вектор обратной связи $u(t)$ пропорциональным ошибке

$$u(t) = -Ke(t), \quad (6.12)$$

где $e = x - z$ – вектор ошибок, $K > 0$ – коэффициент усиления, получим уравнение ошибок:

$$\dot{e} = f(x(t)) - f(x(t) - e) - Ke \quad (6.13)$$

в котором $x(t)$ – заданная функция времени, являющаяся решением (3.76).

Если матрица Якоби $A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$ ограничена в некоторой области Ω , содержащей решение системы (6.10) – (6.12), то легко подобрать такое $K > 0$, чтобы собственные числа симметричной матрицы $A(x) + A^T(x) - 2KI_n$ (где I_n – единичная $n \times n$ -матрица) лежали левее мнимой оси при $x \in \Omega$. При

этом система (6.10) – (6.12) будет обладать свойством так называемой конвергентности в Ω : все ее траектории, лежащие в Ω , сходятся при $t \rightarrow \infty$ к единственному ограниченному решению. Поскольку $e(t) \equiv 0$ является решением (6.13) то к нему и сходятся все траектории. Таким образом, решения систем (6.10) и (6.11) неограниченно сближаются, что и означает синхронизацию двух систем. При этом поведение каждой из систем может быть хаотическим и оставаться таковым.

6.4 Линейные или нелинейные?

Часто методы теории нелинейных систем создаются путем аналогий с линейной теорией или сведением нелинейной задачи к линейной.

Построение нелинейной теории на «линейном» фундаменте порождается представлением о линейной системе как о простейшем классе систем, а о гармоническом сигнале как о простейшем виде сигналов.

Например, подход теории абсолютной устойчивости, развиваемый с середины XX века, основан на рассмотрении систем, разделенных на линейную и нелинейную части (такие модели часто называют системами Лурье, см. рис. 6.4), и выведении свойств полной системы из свойств частотной характеристики линейной части (ее реакции на гармонический сигнал) и свойств множества, где лежит график нелинейности. На таком подходе основаны и современные частотные методы нелинейного анализа. Аналогично в задачах синтеза приобрел популярность метод линеаризации обратной связью (“feedback linearization”), основанный на преобразовании модели нелинейной системы к линейной форме при помощи нелинейных замен координат и обратных связей с последующим применением хорошо разработанных методов синтеза линейных систем.

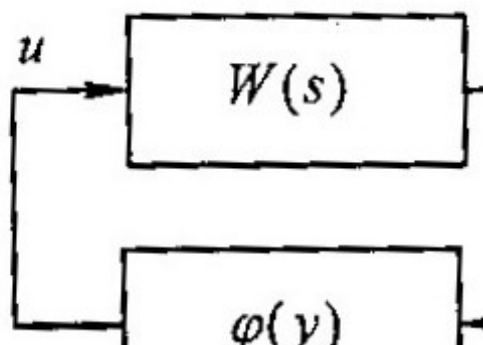


Рисунок 6.4 – Система Лурье

В 80-е годы возникла новая идея: не опираться на анализ частотных свойств линейной части модели, а развивать «частотную философию» для исходной нелинейной системы. Однако и этот подход имеет границы применимости: если на величину управляющих сигналов или на функции обратной связи наложены ограничения, то «частотная философия» и линеаризация теряют свою силу. Аналогично в присутствии нерегулярных колебаний гармонические сигналы перестают играть роль простейших сигналов а, применение частотных методов как средства анализа существенно усложняется.

Прежде всего необходимо найти адекватную замену частотной характеристике. Чтобы сделать это, сначала вернемся к классической задаче Лурье об абсолютной устойчивости системы, состоящей из линейной части, описываемой передаточной функцией

$$y = W(p)u, \quad (6.14)$$

и статической нелинейности

$$u = \varphi(y), \quad (6.15)$$

график которой лежит в симметричном секторе

$$|\varphi(y)| \leq K_{\varphi}|y|. \quad (6.16)$$

Неравенство (6.16) означает, что коэффициент усиления нелинейного блока не превосходит K_{φ} . Для устойчивости (6.14) – (6.16) достаточно выполнения неравенства

$$K_W K_{\varphi} < 1, \quad (6.17)$$

где

$$K_W = \max_{\omega} |W(j\omega)| \quad (6.18)$$

Таким образом, для анализа устойчивости представляет интерес не вся амплитудно-частотная характеристика $A(\omega) = |W(j\omega)|$, а только ее максимум K_W , определяемый резонансными свойствами линейной части и достигаемый на одной из резонансных частот. Для практического определения K_W для линейной системы на ее вход следует подать гармонический сигнал $u(t) = \sin \omega t$ и найти ω , реализующую $\max_{\omega} \max_{t \geq 0} |y(t)|$ (начальные условия на систему следует брать нулевыми).

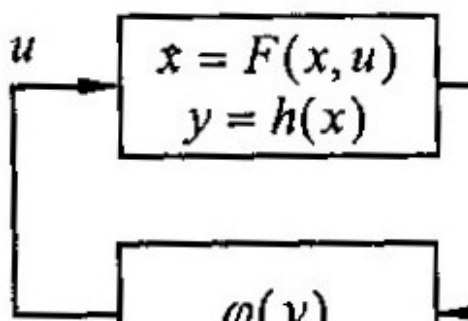


Рисунок 6.5 – Нелинейная система

Пусть теперь линейная модель системы (6.14) заменяется на нелинейную и система описывается дифференциальным уравнением состояния вместе с конечным уравнением выходов (рис. 6.5):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u), \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (6.19)$$

где x – n -мерный вектор состояния системы. Интуитивно ясно, что устойчивость системы (6.19), (6.15), (6.16), как и в линейном случае, должна зависеть от резонансных свойств системы (6.19). Однако изучение резонансных свойств нелинейной системы затруднено, поскольку частота вынужденных колебаний в нелинейной системе зависит от амплитуды входного гармонического сигнала. С ростом амплитуды входа в системе могут возникать сложные, в том числе хаотические режимы, т.е. входной

гармонический сигнал не может в полной мере вскрыть резонансные свойства нелинейной системы.

Задачу определения формы сигнала, обеспечивающего при заданной амплитуде входа максимальную амплитуду выхода, можно поставить как задачу оптимального управления системой (6.19):

$$\max_{|u(t)| \leq \gamma} y^2(t) \quad (6.20)$$

При этом входной сигнал, создающий максимальное возбуждение системы, будет зависеть не только от времени, но и от состояния системы, т.е. иметь вид обратной связи. Величина оптимума в задаче (6.20) зависит от γ квадратично. Поэтому естественно ввести характеристику возбудимости системы ограниченным входным сигналом как величину

$$E(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{Q(\gamma)}, \quad (6.21)$$

где $Q(\gamma)$ – оптимальное значение в задаче (6.20). Для линейных асимптотически устойчивых систем величина (6.21) не зависит от γ , а для нелинейных – представляет собой функцию от γ , которую естественно назвать степенью возбудимости системы.

Решение задачи оптимального управления в общем случае весьма трудоемко даже при использовании эффективных численных методов. Однако для приближенного решения можно воспользоваться известным результатом о возможности приближенной замены оптимального управления на локально-оптимальное, получаемое максимизацией скорости изменения целевого функционала в силу свободной системы (при $u = 0$). Точность такой замены тем выше, чем меньше амплитуда входа γ .

Для вычисления локально-оптимального управления представим первую часть уравнения (6.19) в виде

$$F(x, u) = f(x) + g(x)u + R(x, u) \quad (6.22)$$

где $f(x) = F(x, 0)$, $g(x) = \partial f / \partial u(x, 0)$, а остаточный член $R(x, u)$ и имеет высший порядок малости по u . Скорость изменения целевого функционала $\dot{Q}_t = y^2(t)$ равна

$$\dot{Q}(t) = 2y(\nabla h)^T (f(x) + g(x)u + R(x, u)) \quad (6.23)$$

Пренебрегая величиной $R(x, u)$, видим, что локально-оптимальное значение входа при малых γ равно

$$u(x) = \gamma \operatorname{sign}(h(x) \nabla h(x)^T g(x)) \quad (6.24)$$

Таким образом, для вычисления степени возбудимости системы при малых γ достаточно подавать на вход системы сигнал (6.24) и измерять достигаемую амплитуду выхода. Это можно делать как в физическом (натурном), так и в вычислительном эксперименте. Примеры построенных таким образом графиков степени возбудимости для классических нелинейных систем (уравнения маятника и системы Дуффинга) приведены на рис. 6.6.

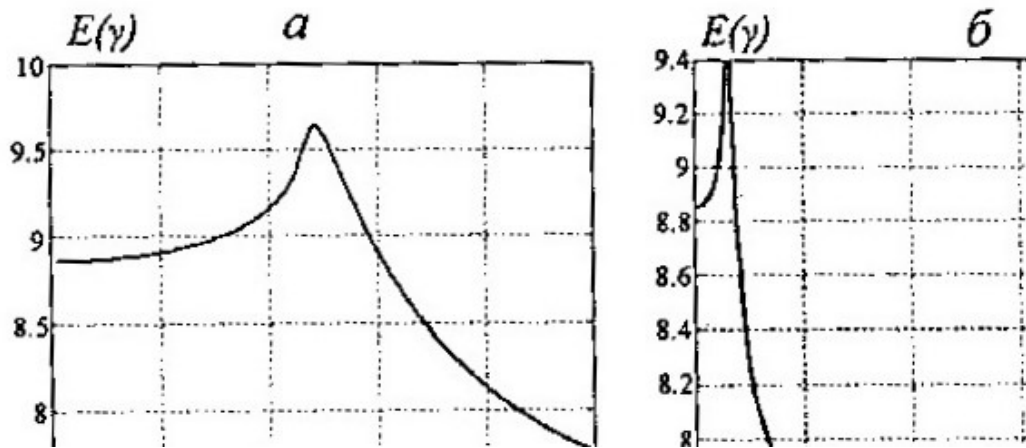


Рисунок 6.6 – Характеристики возбудимости маятника и системы Дуффинга

Полученные графики можно использовать для оценки устойчивости замкнутой системы с нелинейностью в обратной связи. Условия устойчивости аналогичны (6.17):

$$K_F K_\phi < 1. \quad (6.25)$$

При этом роль максимума амплитудно-частотной характеристики играет максимальная степень возбудимости

$$K_F = \max_{\gamma} E(\gamma). \quad (6.26)$$

Исследование динамических свойств систем с помощью непериодических тестовых сигналов представляется весьма перспективным инструментом в теории нелинейных систем.

Другой областью, где гармонические сигналы, линейные системы и спектральные методы традиционно играли и играют ключевую роль, является теория передачи информации (теория связи). Однако и здесь «нелинейная философия» предлагает новые подходы.

Напомним, что в теории связи гармонический сигнал

$$y(t) = a \sin(\omega t + \alpha), \quad (6.26)$$

рассматривается как базовый, простейший. Сигнал может изменяться (модулироваться) путем изменения его параметров – величин a (амплитуда), ω (частота) α (начальная фаза). Например, при частотной модуляции модулирующим параметром является частота ω , которая становится таким образом, переменной, т.е. с системной точки зрения становится сигналом: $\omega = \omega(t)$. Передаваемый модулированный сигнал $y(t)$ может содержать в себе закодированное сообщение. Для передачи сообщения по каналу связи, на стороне приемника сообщение должно восстанавливаться по принимаемому сигналу $\hat{y}(t) = y(t) + \xi(t)$, где $\xi(t)$ – шум (помеха) в канале связи. Выделение полезного сообщения из принимаемого сигнала и является основной задачей теории связи.

В 90-х годах XX века усилился интерес к использованию в качестве несущих сигналов нерегулярных (хаотических) колебаний. Для построения соответствующей теории необходимо сделать решительный шаг: перейти от явного описания сигнала как функции времени к заданию модели системы, генерирующей этот сигнал. Очевидно, например, что генератором

гармонического сигнала (6.26) может служить линейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0. \quad (6.27)$$

Однако для генерации нерегулярных, непериодических сигналов линейные модели непригодны. Следующим шагом к построению новой теории является использование в качестве основных объектов нелинейных генераторов, описываемых дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u), \\ y &= h(x). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Здесь входной вектор $u \in R^m$ может иметь смысл не только входного сигнала, но и модулирующего сигнала, т.е. задавать набор изменяемых параметров генератора. Например, система (6.28) в частном случае может быть системой Лоренца или системой Чуа, а вектор входов может включать часть коэффициентов соответствующего уравнения.

Таким образом, существующие математические методы позволяют решать многие задачи анализа и синтеза нелинейных систем без опоры на «линейные костыли» – гармонические сигналы и линеаризованные модели. Это обстоятельство следует учитывать при выборе модели.

В то же время многие задачи в этой области математического моделирования не решены и даже не поставлены, что открывает широкий простор для дальнейших исследований.

ЛЕКЦИЯ 7 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Основные принципы построения стабилизирующих алгоритмов управления

Построение управляющих алгоритмов базируется на единых принципах и, прежде всего, на понятии стабилизирующего управления, т.е. такого управления с обратной связью, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость по Ляпунову тех или иных движений объекта.

Рассмотрим математическую модель динамической системы – объекта управления, представленную в векторно-матричной форме вида

$$\dot{\bar{x}} = F(\bar{x}, \bar{\delta}, \bar{f}_{out}) \quad (7.1)$$

Выделим некоторое контролируемое движение ДС $\bar{x} = \bar{x}_p(t)$, $\bar{\delta} = \bar{\delta}_p(t)$, $\bar{f}_{out} = \bar{f}_p(t)$, определяемое заданными векторами-функциями, которые удовлетворяют системе уравнений (7.1). При этом обеспечивается выполнение тождества

$$\dot{\bar{x}}_p = F(\bar{x}_p, \bar{\delta}_p, \bar{f}_p) \quad (7.2)$$

Обозначим через $x = x(t)$, $\delta = \delta(t)$, $f = f(t)$ отклонения соответствующих переменных в (7.1) от указанного движения, определяя этим соотношения

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_p(t) + x(t), \quad \bar{\delta}(t) = \bar{\delta}_p(t) + \delta(t), \quad \bar{f}_{out}(t) = \bar{f}_p(t) + f(t), \quad (7.3)$$

С учетом (7.3), запишем нелинейную систему, описывающую динамику объекта в отклонениях:

$$\dot{x} = G(x, \delta, f) \quad (7.4)$$

а также осуществим линеаризацию системы (7.2) или (7.4) в малой окрестности выбранного контролируемого движения. При этом получим систему линейных дифференциальных уравнений в отклонениях вида

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)x + B(t)\delta + C(t)f \quad (7.5)$$

Как указано в работах В. И. Зубова, рассматриваемое контролируемое движение $\bar{x} = \bar{x}_p(t)$, $\bar{\delta} = \bar{\delta}_p(t)$, $\bar{f}_{out} = \bar{f}_p(t)$, можно сделать асимптотически устойчивым в смысле А. М. Ляпунова при условии $f(t) \equiv 0$ с помощью обратных связей, если выполняются два следующих требования:

$$1) \|G(x, \delta, 0) - A(t)x - B(t)\delta\| \leq \theta(\|x\| + \|\delta\|),$$

где $\theta \rightarrow 0$ при $\|x\| \rightarrow 0$ и $\|\delta\| \rightarrow 0$

2) неизменяемая часть линейного приближения (7.5) является устойчивой.

В дальнейшем будем считать, что контролируемое движение таково, что матрицы A, B, C имеют постоянные компоненты.

Второе требование заведомо выполняется, если имеет место условие полной управляемости линейной модели.

$$\text{Rang}(B, AB, A^2B, \dots, A^{N-1}B) = n \quad (7.6)$$

Если приведенные выше условия выполняются, то нулевое положение равновесия линейной системы

$$\dot{x} = Ax + B\delta + C_f f, \quad (7.7)$$

может быть сделано асимптотически устойчивым с помощью регулятора прямого действия

$$\delta = Kx \quad (7.8)$$

или с помощью регулятора непрямого действия

$$\dot{\delta} = K_0\delta + Kx, \quad (7.9)$$

где K, K_0 – постоянные матрицы.

Нетрудно убедиться в том, что аналогичное утверждение справедливо и для обобщенного понятия регулятора непрямого действия, математическая модель которого может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Mz + M_1x + M_2\dot{x} + \dots + M_\mu x^{(\mu-1)}, \\ \delta &= Kz, \end{aligned} \quad (7.10)$$

где $z \in R^\nu$ – вектор состояния регулятора. Иными словами, обобщенный регулятор непрямого действия (в ряде работ его именуют динамическим компенсатором) — это самостоятельная динамическая система, на вход которой поступает информация от измерителей, а выходом служит вектор управляющих воздействий. С помощью регулятора (7.10) можно стабилизировать объект (7.7), обеспечивая произвольный спектр корней характеристического полинома замкнутой системы, задавая матрицы с постоянными компонентами K, M, M_i ($i = 1 \dots \mu$).

Замечание. Вопрос о возможности введения в состав регулятора производных $(\mu-1)$ -го порядка от измеряемых координат должен в каждом конкретном случае обсуждаться особо.

Уравнения регулятора непрямого действия (7.10) с использованием преобразования Лапласа могут быть представлены на базе понятия передаточной матрицы динамической системы от входа к выходу:

$$\delta = W(s)x, \quad (7.11)$$

где s - переменная Лапласа, $W(s) = W_1(s)/W_2(s)$ – передаточная матрица регулятора, $W_1(s)$ – полиномиальная матрица размера $m \times n$, $W_2(s)$ – полином степени $v = \dim z$. То есть компонентами передаточной матрицы $W(s)$ являются дробно-рациональные функции комплексной переменной s . Записывая уравнения регулятора (7.10) в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях по вектору z , нетрудно убедиться в том, что модели (7.10) и (7.11) связаны соотношением

$$W(s) = K(I_v s - M)^{-1}(M_1 + sM_2 + \dots + s^{\mu-1}M_\mu), \quad (7.12)$$

где I_v – единичная матрица размера $v \times v$, $W_2(s) = \det(I_v s - M)$.

Следует отметить, что математическая модель (7.11) может быть трактована как наиболее общее представление линейных регуляторов, охватывающее как регуляторы прямого (7.8) ($v = 0$), так и непрямого (7.9), (7.10) действия.

Очевидно, что при выполнении условия (7.6), существует бесконечно много регуляторов, стабилизирующих заданное контролируемое движение объекта (7.1). При этом естественно внести в рассмотрение количественные характеристики качества стабилизации. С этой целью на движениях замкнутой системы, уравнения которой согласно (7.1), (7.3) и (7.11) могут быть представлены в виде

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = F(\bar{x}, \bar{\delta}, \bar{f}_p + f), \\ \bar{\delta} = \bar{\delta}_p + W(p)(\bar{x} - \bar{x}_p), \end{cases}$$

из каких-либо соображений содержательного (неформального) характера зададим некоторый неотрицательный функционал

$$J_H = J_H(\bar{x}(t), \bar{\delta}(t)) \quad (7.14)$$

Очевидно, что при одних и тех же начальных условиях для замкнутой системы (7.13) и одной и той же функции $f(t)$ функционал (7.14) зависит от выбора передаточной матрицы $W(p)$ регулятора (7.11) (или, что то же самое, от выбора степеней μ и v и матриц K, M, M_i ($i = 1 \dots \mu$) в (7.10)), т.е.

$$J_H = J_H(\bar{x}(t, W(p)), \bar{\delta}(t, W(p))) = J_H(W(p)) = J_H(W) \quad (7.15)$$

Определение. Регулятор $\delta = W^0(p)x$ будем называть оптимальным по отношению к функционалу (7.15), если он является стабилизирующим в

указанном выше смысле и среди всех регуляторов вида (7.11) доставляет величине $J_H(W)$ наименьшее возможное значение.

Определение. Задачей аналитического оптимального синтеза линейных регуляторов будем называть задачу

$$J_H = J_H(W) \rightarrow \inf_{W \in \Omega_1} \quad (7.16)$$

о поиске оптимального стабилизирующего регулятора по отношению к функционалу J_H . Здесь Ω_1 – множество передаточных матриц регуляторов вида (7.11) — матриц размера $m \times n$ с дробно-рациональными компонентами такими, что характеристический полином замкнутой линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\delta + C_f f, \\ \dot{z} &= Mz + M_1 x + M_2 \dot{x} + \dots + M_\mu x^{(\mu-1)}, \\ \delta &= Kz, \end{aligned} \quad (7.17)$$

является гурвицевым.

Определение. Задачей параметрической синтеза будем называть задачу нелинейного программирования, состоящую в поиске всех компонентов матриц K, M, M_i ($i = 1 \dots \mu$) при заданных фиксированных μ и ν (или варьируемых параметрах, от которых эти компоненты зависят) регулятора вида (7.11), обеспечивающих минимум функционала (7.15)

$$J_H = J_H(W(p, h)) = J_H^* \rightarrow \inf_{h \in \Omega_H}$$

Здесь $h \in R^r$ – вектор варьируемых параметров, подлежащих поиску, $\Omega_H = \{h \in R^r : W(p, h) \in \Omega_1\}$ – область гурвицевости характеристического полинома $\Delta(s)$ замкнутой системы (7.17).

Нетрудно убедиться в том, что проведенное обсуждение основных положений, которые кладутся в основу проектирования алгоритмов автоматического управления, в равной мере распространяется и на тот случай, когда наряду с математической моделью ДС рассматривается уравнение инерционности исполнительных органов.

$$\dot{\delta} = F_\delta(u)$$

Отличие состоит лишь в том, что при этом роль управления играет управляющий сигнал u .

Другим базовым принципом, на котором основывается разработка алгоритмов автоматического управления, является использование асимптотических наблюдающих устройств. Особую роль наблюдатели

играют при формировании штатных законом управления, что обусловлено необходимостью достижения следующих целей:

- для получения асимптотических оценок тех компонент вектора состояния, которые недоступны для непосредственного измерения, однако используются в законах управления;
- для получения асимптотических оценок производных компонент вектора состояния, используемых в законах управления;
- для придания процессам в замкнутой системе определенных свойств, в частности – астатизма по регулируемым координатам;
- для обеспечения возможности грубой (инерционной) и точной (среднеквадратичной настраиваемой) фильтрации волновых помех.

Рассмотрим некоторые свойства асимптотических наблюдателей, которые непосредственно используются в системах управления движением подвижных объектов. Пусть задана линейная математическая модель, описывающая динамику ДС в виде (7.5).

Определение. Динамическую систему вида

$$\dot{z} = Az + B\delta + F(x - z), \quad (7.18)$$

будем называть асимптотическим наблюдателем по отношению к модели (7.5), если матрица F при невязках в (7.18) выбрана таким образом, что характеристический полином $\Delta_H(s) = \det(Is - A + F)$ этой системы имеет корни только в открытой левой полуплоскости (является гурвицевым).

Определение. Вектор состояния z асимптотического наблюдателя (7.18) будем именовать вектором оценок (или просто оценками) по отношению к вектору состояния x в (7.5) при $f(t) = 0$ в том смысле, что имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - z(t)) = 0.$$

Доказательство справедливости приведенного условия элементарно. Действительно, введем в рассмотрение вектор невязок $\varepsilon(t) = x(t) - z(t)$ и, вычитая из (7.5) (при $f = 0$) уравнение (7.19), получим

$$\dot{x} - \dot{z} = A(x - z) + F(x - z),$$

или

$$\dot{\varepsilon} = (A - F)\varepsilon. \quad (7.19)$$

Поскольку при условии гурвицевости полинома $\Delta_H(s) = \det(Is - A + F)$ нулевое положение равновесия системы (7.19) асимптотически устойчиво по Ляпунову, выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - z(t)) = 0,$$

что и требовалось показать.

Как и ранее, в рамках данного параграфа с целью упрощения выкладок будем считать, что управлением для системы (7.5) непосредственно является вектор δ , характеризующий отклонения исполнительных органов.

Введем в рассмотрение управление для объекта (7.5), формируемое в виде обратной связи по закону

$$\delta = K(x - x^*(t)) \quad (7.20)$$

где $x^*(t)$ – вектор задающих командных сигналов. Будем считать, что управление (7.20) является стабилизирующим по отношению к отклонению от заданного движения. Это значит, что матрица K в (7.20) выбрана из условия гурвицевости характеристического полинома $\Delta_0(s) = \det(Is - A - BK)$ замкнутой системы (7.5), (7.20).

Базовым утверждением, на котором основывается применение асимптотических наблюдателей в системах управления движением ДС, является следующая теорема.

Теорема. Пусть начальные условия для объекта (7.5) и наблюдателя (7.18) совпадают, выполняется равенство $x(0) = z(0)$. Тогда движение замкнутой системы (7.5), (7.18) при $f = 0$ тождественно совпадает (для любых $t \in [0, \infty]$) с движением устойчивой замкнутой системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B\delta, \\ \dot{z} &= Az + B\delta + F(x - z), \\ \delta &= K(z - x^*(t)), \end{aligned} \quad (7.21)$$

в которой управление формируется, в отличие от (7.20), по выходу асимптотического наблюдателя.

Приведенное утверждение, которое достаточно широко известно в теории асимптотических наблюдателей, допускает ряд весьма существенных обобщений, на которых непосредственно и основывается общая структура штатных алгоритмов автоматического управления. Указанные обобщения сформулируем в виде двух следующих теорем.

Теорема. Пусть начальные условия для объекта (7.5) и наблюдателя (7.18) совпадают, т.е. выполняется равенство $x(0) = z(0)$. Тогда движение замкнутой системы (7.5), (7.20) (при $f \equiv 0$) тождественно совпадает (для любых $t \in [0, \infty]$) с движением устойчивой замкнутой системы вида

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B\delta, \\
\dot{z} &= Az + B\delta + F(x - z), \\
\delta &= K(z - x^*(t)) + G(p)(x - z),
\end{aligned}
\tag{7.22}$$

где $G(p) = M(p)/\Phi(p)$ – произвольная матрица с дробно-рациональными компонентами от оператора дифференцирования $p = d/dt$, имеющими гурвицев общий знаменатель $\Phi(p)$.

В дальнейшем вектор $L\xi = G(p)(x - z)$ будем называть выходом дополнительного фильтра, а вектор ξ – вектором его состояния.

И, наконец, рассмотрим последнее обобщающее утверждение, сформулировав его в виде следующей теоремы.

Теорема. Если начальные условия для объекта (7.5) и наблюдателя (7.18) совпадают, т.е. выполняется равенство $x(0) = z(0)$, и если передаточная функция $F(s) = M_1(s)/\Phi_1(s)$, такова, что характеристический полином $\Delta_\Phi(s)$ системы

$$\dot{z} = Az + B\delta + F(p)(x - z), \tag{7.23}$$

является гурвицевым, то движение замкнутой системы (7.5), (7.20) (при $f \equiv 0$) тождественно совпадает (для любых $t \in [0, \infty]$) с движением устойчивой замкнутой системы

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B\delta, \\
\dot{z} &= Az + B\delta + F(p)(x - z), \\
\delta &= K(z - x^*(t)) + G(p)(x - z).
\end{aligned}
\tag{7.24}$$

Основной смысл всех приведенных утверждений состоит в том, что любые процессы маневрирования и стабилизации при отсутствии внешних возмущений могут быть реализованы с тождественным качеством не через реальные координаты, которые мы не можем измерять в полном составе, а через их оценки, получаемые с помощью асимптотических наблюдателей.

Введение в состав наблюдателя и уравнения управления нетрадиционной дополнительной динамики, определяемой передаточными матрицами $G(s)$ и $F(s)$, призвано обеспечивать борьбу с внешними возмущениями (их «фильтрацию» - подавление), отклоняющими оценки z от оцениваемого вектора x . В качестве возмущений обычно выступают волновые помехи и (возможно) шумы датчиков измерений.

Общая структура алгоритмов управления

Линейная математическая модель замкнутой системы управления движением со штатными алгоритмами управления, включающими асимптотические наблюдатели, в векторно-матричной форме представляется следующими уравнениями:

а) линейная модель ДС вида (7.5):

б) линейная модель инерционности исполнительных органов:

$$\dot{\delta} = u \quad (7.25)$$

в) уравнение асимптотического наблюдателя:

$$\dot{z} = Az + B\delta + Ry + Q(x - z), \quad (7.26)$$

г) уравнение инерционного фильтра:

$$\dot{y} = \Gamma y + P(x - z) \quad (7.27)$$

д) уравнение дополнительного фильтра:

$$\dot{\zeta} = A_{\zeta}\zeta + B_{\zeta}y, \quad \xi = C_{\zeta}\zeta. \quad (7.28)$$

е) уравнение основного управляющего сигнала:

е1) позиционный вариант:

$$u = K(z - x^*) - \delta + K_{\Delta}y + \xi, \quad (7.29)$$

е2) скоростной вариант:

$$u = L\dot{z} + N(z - x^*) + \xi. \quad (7.30)$$

В приведенных соотношениях уравнения (7.5) и (7.25) представляют математическую модель объекта управления, а уравнения (7.26) – (7.28) и (7.29) либо (7.26) – (7.28) и (7.30) – математическую модель алгоритмов управления, которая в равной мере используется как для управления линейной, так и нелинейной моделью объекта.

В приведенных уравнениях использованы следующие обозначения

x – вектор состояния объекта;

u – вектор управляющих воздействий;

z – вектор состояния наблюдателя;

y – вектор состояния грубого фильтра (оценок возмущений);

ζ – вектор состояния точного фильтра;

ξ – вектор выхода точного фильтра;

x^* – вектор командных сигналов.

Все матрицы в приведенных уравнениях имеют постоянные компоненты при фиксированной скорости хода.

В дальнейшем уравнения (7.26) и (7.27), рассматриваемые совместно, будем называть уравнениями обобщенного наблюдателя фильтра (ОНФ)

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + B\delta + Ry + Q(x - z), \\ \dot{y} &= \Gamma y + P(x - z)\end{aligned}\quad (7.31)$$

которые после исключения вектора y могут быть записаны в свернутой форме вида

$$\dot{z} = Az + B\delta + F(p)(x - z), \quad (7.32)$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования.

Уравнения дополнительного фильтра (ДФ) (7.28) также могут быть свернуть: к форме «вход-выход»:

$$\xi = G(p)(x - z) \quad (7.33)$$

С учетом (7.32) и (7.33), математическая модель алгоритмов автоматического управления (в позиционном варианте) представляется следующими формулами

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + B\delta + F(p)(x - z), \\ u &= K(z - x^*) - \delta + [G(p) + K_{\Delta}F(p)](x - z),\end{aligned}\quad (7.34)$$

При выбранной структуре обратной связи (7.34), выбору в процессе проектирования системы подлежат ее следующие элементы:

- матрица K базового закона управления $u = K(z - x^*) - \delta$;
- передаточная матрица $F(s)$ при невязках в обобщенном наблюдателе-фильтре (или $\dim y$ и матрицы R, Q, Γ, P в системе (7.31));
- передаточная матрица $G(s)$ дополнительного фильтра (или $\dim \xi$ и матрицы $A_{\xi}, B_{\xi}, C_{\xi}$ в уравнении системы (7.28));
- постоянная матрица K_{Δ} в уравнении (7.29) для позиционного варианта алгоритмов управления;
- законы формирования командных сигналов x^* , как функций времени, либо состояния объекта управления.

Перечисленные искомые элементы несут следующую функциональную основную нагрузку в замкнутой системе (как линейной, так и нелинейной).

1. Числовая матрица K полностью определяет динамику собственного движения системы управления, т.е. качество стабилизации отклонений регулируемых координат от движения, определяемого задающими командными сигналами.

2. Передаточная матрица $F(s)$ обеспечивает желаемую динамику движения замкнутой системы, вызванного низкочастотными внешними воздействиями типа $f(t) = f_0 1(t)$ и, возможно, грубую (инерционную) фильтрацию волновых помех.

3. Постоянная матрица K_{Δ} , обеспечивает астатизм замкнутой системы по регулируемым координатам.

4. Передаточная матрица $G(s)$ обеспечивает точную (настраиваемую) фильтрацию волновых возмущений в канале управления.

7. Задающие командные сигналы, являющиеся компонентами вектора x^* , определяют качество процессов маневрирования по регулируемым координатам.

Синтез базовых алгоритмов автоматической стабилизации

Базовые алгоритмы стабилизации являются ключевым элементом штатных законов автоматического управления. Они однозначно характеризуются заданием матрицы K в уравнении (7.29), которая, как было отмечено выше, полностью определяет динамику собственного движения системы управления, т. е. качество стабилизации отклонений регулируемых координат от желаемого движения, определяемого задающими командными сигналами.

В связи с отмеченным обстоятельством, целью рассматриваемой задачи синтеза является поиск такой матрицы K , которая удовлетворяет совокупности требований, предъявляемых к качеству собственного движения (при отсутствии возмущений).

В соответствии с приведенными выше теоремами, для формализованной постановки подобной задачи не обязательно рассматривать уравнения (7.5), (7.25) – (7.30) полной замкнутой системы со штатными автоматами управления. Здесь вполне достаточно ограничиться рассмотрением линейной замкнутой системы, в которой обратная связь формируется по вектору состояния. Это связано с тем, что рассматриваемые динамические процессы для такой системы не отличаются от процессов для штатных алгоритмов управления.

Математическая модель указанной системы имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B\delta, \quad x(0) = 0, \\ \dot{\delta} &= K(x - x^*) - \delta,\end{aligned}\tag{7.35}$$

где через x^* обозначен вектор задающего командного сигнала, имеющий постоянные компоненты. Состав указанных компонент зависит от выбранной плоскости стабилизации и от конкретного режима движения объекта.

На движениях замкнутой системы (7.35) зададим функционал, определяющий качество динамического процесса, значениями которого

являются величины перерегулирования по соответствующей координате или обобщенное перерегулирование вида

$$J_1 = J_1(x(t, K), \delta(t, K)) = J_1(K) = \sup_{t \in (0, \infty)} \frac{\|x(t, K) - x^*\|}{\|x^*\|}$$

Введем в рассмотрение допустимое множество Ω_K матриц K , определяя его следующим образом

$$\Omega_K = \{K : \Delta_i \in C_\Delta, \Delta_0(\Delta_i) = 0, i = 1 \dots n, T_p(k) \leq T_0\}. \quad (7.36)$$

В формуле (7.36) через $T_p(k)$ обозначена длительность переходного процесса, а через T_0 допустимое значение этой длительности. Через $\Delta_0(s)$ обозначен характеристический полином системы (7.35), т.е.,

$$\Delta_0(s) = \det \begin{pmatrix} I_n s - A & -B \\ -K & (s+1)I_m \end{pmatrix},$$

а через Δ_i – его корни. И наконец, через символ C_Δ обозначена область на комплексной плоскости, которой должны принадлежать указанные корни. Эта область, условно изображенная на рисунке 7.1, может быть формально представлена следующим образом

$$C_\Delta = \left\{ \Delta_i \in C^1 : \operatorname{Re} \Delta_i \leq -\alpha, \operatorname{arctg} \left| \frac{\operatorname{Im} \Delta_i}{\operatorname{Re} \Delta_i} \right| \leq \beta \right\},$$

где величина α определяет заданную степень устойчивости, а величина β – заданную степень колебательности замкнутой системы (7.35).

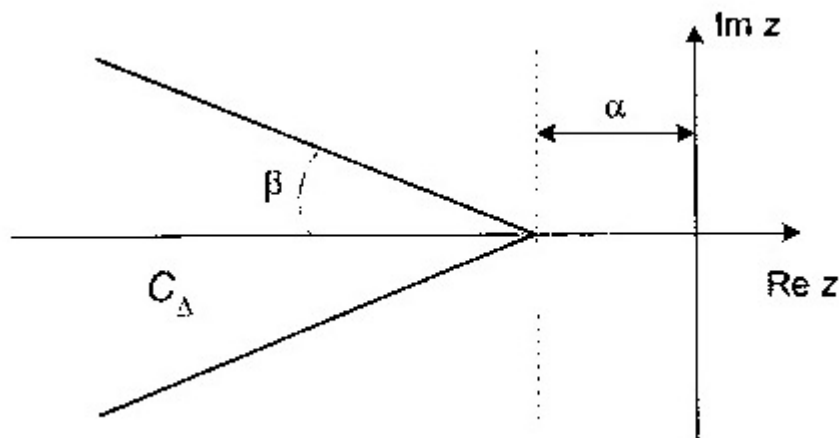


Рисунок 7.1 – Степень устойчивости динамической системы

С учетом введенных обозначений, сформулируем задачу о поиске матрицы K для базовых алгоритмов стабилизации вида $u = Kx - \delta$, которая имеет вид

$$J_1(K) = \min_{K \in \Omega_K} \quad (7.37)$$

Поставленная задача (7.37) является типичным примером задачи оптимального параметрического синтеза. Она представляет собой исключительно сложный вариант проблемы нелинейного программирования,отягощенный сложным заданием целевой функции и допустимого множества, определяемого наложенными ограничениями.

Тем не менее, в настоящее время разработаны различные численные методы приближенного решения, позволяющие найти искомую матрицу K .

ЛЕКЦИЯ 8. ФИЛЬТРАЦИЯ И АСТАТИЗМ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Синтез обобщенного наблюдателя-фильтра

Обобщенный наблюдатель-фильтр (ОНФ) является центральным звеном штатных алгоритмов автоматического управления ДС, выходной вектор $\{z, y\}$ которого по существу замещает реально измеряемые физические координаты объекта, а также те координаты и их производные, которые недоступны непосредственному измерению при формировании управляющих сигналов.

В соответствии с общей структурой штатных алгоритмов управления, уравнения ОНФ имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + B\delta + Ry + Q(x - z), \\ \dot{y} &= \Gamma y + P(x - z)\end{aligned}$$

Здесь матрицы A и B соответствуют линейной модели движения ДС. Остальные матрицы R, Q, P, Γ в уравнениях ОНФ априорно являются неизвестными и подлежат поиску в процессе синтеза ОНФ. Как было отмечено выше, эти постоянные (при фиксированной скорости хода) матрицы или однозначно определяемая ими передаточная матрица $F(s) = R(I_2 s - \Gamma)^{-1} P + Q$ обеспечивают желаемую динамику движения замкнутой системы, вызванного низкочастотными скачкообразными внешними воздействиями типа $f(t) = f_0 1(t)$, а также грубую (инерционную) фильтрацию волновых помех.

В соответствии с теоремой, характеристический полином замкнутой системы с обратной связью, формируемой по выходу ОНФ, представляется формулой $\Delta(s) = \Delta_0(s) \Delta_\Phi(s) \Phi(s)$, откуда следует, что его корнями одновременно являются и корни характеристического полинома $\Delta_\Phi(s)$.

В связи с отмеченным обстоятельством, для выполнения требований по динамике замкнутой системы на низких частотах выбор искомых матриц R, Q, P, Γ следует осуществлять, обеспечивая размещение корней полинома

$$\Delta_\Phi(s) = \det \begin{pmatrix} I_4 s - A + Q & -R \\ P & I_2 s - \Gamma \end{pmatrix},$$

в пределах заданной области C_Δ на комплексной плоскости. Как и в предшествующем подпункте, определим эту область соотношением

$$C_\Delta = \left\{ \Delta_i \in C^1 : \operatorname{Re} \Delta_i \leq -\alpha, \operatorname{arctg} \left| \frac{\operatorname{Im} \Delta_i}{\operatorname{Re} \Delta_i} \right| \leq \beta \right\}$$

где величина α определяет заданную степень устойчивости, а величина β заданную степень колебательности ОНФ (7.31). Напомним, что схематичное изображение области C_Δ , приведено на рисунке 7.1.

Проблема грубой фильтрации волновой помехи с помощью ОНФ решается следующим образом. Будем трактовать ОНФ как динамическую систему с входным векторным сигналом $\{x, \delta\}$ и выходным сигналом $\{z, y\}$. При этом уравнения (7.31) могут быть записаны в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях в виде

$$\begin{pmatrix} sz \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-Q & R \\ -P & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q & B \\ P & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix},$$

что эквивалентно

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = W_\Phi(s) \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

где через

$$W_\Phi(s) = \left(I_6 s - \begin{pmatrix} A-Q & R \\ -P & \Gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Q & B \\ P & O \end{pmatrix} \right),$$

обозначена передаточная матрица ОНФ от входа к выходу.

Заметим, что входной сигнал $\{x, \delta\}$ для ОНФ является источником волновых помех, поступающих в канал управления через измерения. Очевидно, что степень подавления этих помех с помощью ОНФ определяется выбором матриц R, Q, P, Γ и будет тем большей, чем «меньше» матричный коэффициент усиления W_Φ в уравнении (8.1) в рамках допустимого расположения корней полинома Δ_Φ в пределах области C_Δ .

Введем количественную характеристику «малости» передаточной матрицы $W_\Phi(s)$, в качестве которой примем ее матричную норму для гильбертового пространства Харди H_2 . Эта характеристика является функционалом, имеющим вид

$$J_2 = J(R, Q, P, \Gamma) = \|W_\Phi(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[W_\Phi^T(-j\omega)W_\Phi(j\omega)]d\omega}. \quad (8.2)$$

С учетом (8.2), представляется целесообразной следующая постановка формализованной задачи об инерционной фильтрации волновых помех с помощью ОНФ:

$$J_2(R, Q, P, \Gamma) = \|W_\Phi(s)\|_2 \rightarrow \min_{\{R, Q, P, \Gamma\} \in \Omega_\Delta} \quad (8.3)$$

где допустимое множество искомых матриц определяется формулой

$$\Omega_{\Delta} = \{R, Q, P, \Gamma : \Delta_i \in C_{\Delta}, \Delta_{\Phi}(\Delta_i) = 0, i = 1 \dots n_j, n_j = \deg \Delta_{\Phi}\}$$

Заметим, что решение поставленной задачи (8.3) существенно определяется заданием величины α допустимой степени устойчивости ОНФ. В дальнейшем будем вместо этой величины задавать параметр T , связанный с α прямой пропорциональной зависимостью $\alpha = k_{\alpha} T$, где k_{α} – фиксированный множитель. Нетрудно показать, что чем меньше значение T , тем меньшей является величина минимума функционала $J_2(R, Q, P, \Gamma)$, т.е. тем лучше качество подавления волновой помехи. В связи с этим в дальнейшем параметр T будем называть степенью инерционной фильтрации (или просто степенью фильтрации) волновой помехи.

Обратим особое внимание на ‘тот факт, что уменьшение величины T , улучшающее качество фильтрации, входит в противоречие с качеством динамики при скачкообразных возмущениях, поскольку влечет за собой приближение корней полинома $\Delta_{\Phi}(s)$ к мнимой оси. В связи с этим степень фильтрации T в процессе движения объекта может изменяться по мере необходимости путем задания с пульта. При отсутствии высокочастотного возмущения величина этого параметра должна принимать максимальное значение. При наличии высокочастотного возмущения (волнения), в зависимости от его интенсивности, величина параметра T уменьшается. Сформулированная оптимизационная задача (8.3) синтеза ОНФ по существу является сложной задачей нелинейного программирования, приближенно решаемой с помощью специально разработанных численных методов.

Обеспечение астатизма замкнутой системы по регулируемым координатам

Требование астатизма замкнутой системы по регулируемым координатам является довольно распространенным условием функционирования штатных алгоритмов управления динамической системы.

В соответствии с общей структурной схемой штатных алгоритмов управления, запишем линейные уравнения динамики замкнутой системы в соответствующей плоскости стабилизации в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B\delta + C_f f(t), \\
\dot{\delta} &= u, \\
\dot{z} &= Az + B\delta + Ry + Q(x - z), \\
\dot{y} &= \Gamma y + P(x - z), \\
u &= W_{uz}(p)z + W_{ux}(p)x + W_{u\delta}(p)\delta.
\end{aligned} \tag{8.4}$$

С формальной точки зрения, условие астатизма по регулируемой координате x_i для системы (8.4) записываются следующим образом:

для любого $f_0 \in R^2$ при $f(t) = f_0 1(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$.

Эти условия могут быть с очевидностью представлены в следующей эквивалентной форме:

$$F_{fx_i}(0) = 0, \tag{8.5}$$

где $F_{fx_i}(s)$ – передаточная матрица замкнутой системы (8.4) от возмущения к регулируемой координате x_i соответственно. Эта матрица может быть определена следующим образом:

$$F_{fx}(s) = \Delta^{-1}(s) \det \begin{pmatrix} C_f & -B & 0 & 0 \\ 0 & I_2 s - W_{u\delta}(s) & -W_{uz}(s) & 0 \\ 0 & -B & I_4 s - A + Q & -R \\ 0 & 0 & P & I_2 s - \Gamma \end{pmatrix}, \tag{8.6}$$

где $\Delta(s)$ – характеристический полином системы (8.4).

Таким образом, проблема обеспечения астатизма замкнутой системы по регулируемой координате сводится к такому выбору матриц $W_{uz}(s), W_{ux}(s), W_{u\delta}(s)$ в уравнении для основного управляющего сигнала, чтобы выполнялось условие (8.5). Регулируемых координат может быть несколько, тогда соответственно в (8.5) увеличится количество условий.

Заметим, что при непосредственном использовании базовых статических алгоритмов стабилизации

$$u = Kx - \delta$$

с последующим формированием управляющих сигналов по выходу ОНФ в виде

$$u = Kz - \delta \tag{8.7}$$

мы имеем $W_{uz}(s) = K$, $W_{ux}(s) = 0$, $W_{u\delta}(s) = -I_2$. Непосредственная подстановка указанных матриц в формулы (8.6) позволяет убедиться в том, что условия (8.5) не выполняются, т.е. закон управления (8.7) не обеспечивают астатизм и нуждается в коррекции.

Заметим, что при проектировании систем управления могут быть применены два подхода к обеспечению астатизма (или, что то же самое, к обеспечению выполнения условия (8.5)), именуемые соответственно позиционной и скоростной астатической коррекцией.

а) Астатические позиционные алгоритмы стабилизации.

Эти алгоритмы формируются на базе (8.7) путем введения дополнительного адаптивного корректирующего (балансирующего) сигнала:

$$u = Kz - \delta + K_{\Delta} y. \quad (8.8)$$

С учетом соотношения $y = F(p)(x - z)$, уравнение (8.8) принимает вид

$$u = Kz - \delta + K_{\Delta} F(p)(x - z),$$

откуда следует, что в данном случае мы имеем

$$W_{uz}(s) = K - K_{\Delta} F(s), W_{ux}(s) = K_{\Delta} F(s), W_{u\delta}(s) = -I_2 \quad (8.9)$$

Подставляя соотношения (8.9) в формулы (8.6), а затем в условие (8.5), получим систему из четырех неоднородных линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными – компонентами матрицы коррекции.

Замечание. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для более общего способа введения позиционной астатической коррекции в виде

$$u = Kz - \delta + K_{\Delta}(p)y.$$

б) Астатические скоростные алгоритмы стабилизации.

При данном способе обеспечения астатизма алгоритмы также формируются на базе (8.7). Однако здесь вместо введения дополнительного аддитивного корректирующего сигнала используется эквивалентное линейное выражение векторного слагаемого $Kx - \delta$ через производные \dot{x} и регулируемые координаты в силу уравнений объекта при $f \equiv 0$. Этот подход приводит к переходу от (8.7) к эквивалентному (в определенном смысле) регулятору

$$u = L\dot{x} + Nx \quad (8.10)$$

Синтез настраиваемых фильтров волновых помех в канале управления

Дополнительные фильтры (ДФ) являются вспомогательным элементом штатных алгоритмов управления, который не функционирует постоянно и включается лишь по мере необходимости. ДФ рационально использовать в тех режимах движения, при которых ДС подвергается существенному воздействию высокочастотного возмущения (волнения). Как известно,

характерной особенностью этих режимов, как правило, является малая скорость хода. Это обстоятельство определяет недостаточную эффективность исполнительных органов в плане повышения точности стабилизации заданного движения при наличии волнения. В связи с отмеченным обстоятельством, введение ДФ должно обеспечить максимальное подавление бесполезного сигнала (волновой помехи), порождаемой волнением и поступающей в канал управления через измерительный комплекс.

В отличие от грубой инерционной фильтрации. Обеспечиваемой ОНФ. дополнительные фильтры являются адаптивно настраиваемым элементом, который в ходе функционирования приспособливается к частотным свойствам волнения.

Детальное рассмотрение задачи синтеза ДФ будет осуществлено ниже, а здесь приведем лишь основные положения применяемого подхода.

Считая матрицы $A, B, C_f, R, Q, P, \Gamma, K$ и K_Δ заданными как в предшествующем подпункте, рассмотрим линейные уравнения системы, замкнутой астатическим позиционным регулятором

$$u = Kz - \delta + K_\Delta(p)y \quad (8.11)$$

В соответствии с общей структурой штатных алгоритмов управления, введем в состав математической модели замкнутой системы уравнение дополнительного фильтра в нормальной форме

$$\dot{\zeta} = A_\zeta \zeta + B_\zeta y, \quad \xi = C_\zeta \zeta$$

или в операторной форме

$$\xi = E_d(p)y.$$

Выходной сигнал ξ дополнительного фильтра аддитивно включим в алгоритм управления, переходя от (7.49) к уравнению

$$u = Kz - \delta + K_\Delta(p)y + \xi = Kz - \delta + K_\Delta(p)y + E_d(p)y$$

или

$$u = Kz - \delta + E(p)y, \quad (8.12)$$

где

$$E(p) = K_\Delta(p) + E_d(p). \quad (8.13)$$

Теперь рассмотрим линейные уравнения замкнутой дополненной системы, которые представим в матричной форме, предварительно исключив из состава переменных вектор управляющих сигналов u :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B\delta + C_f f(t), \\
\dot{\delta} &= Kz - \delta + E(p)y, \\
\dot{z} &= Az + B\delta + Ry + Q(x - z), \\
\dot{y} &= \Gamma y + P(x - z).
\end{aligned} \tag{8.14}$$

Переходя к изображениям по Лапласу при нулевых начальных условиях, систему (8.14) можно представить в матричной форме

$$\begin{pmatrix} I_4 s - A & -B & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)I_2 & -K & -E(s) \\ -Q & -B & I_4 s - A + Q & -R \\ -P & 0 & P & I_2 s - \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \delta \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot f(s). \tag{8.15}$$

В соответствии с уравнениями (8.15), запишем передаточную матрицу $W_{f\delta}$ замкнутой дополненной системы от возмущения f к управляющим воздействиям δ :

$$W_{f\delta} = W_{f\delta}(s, E) = \det \begin{pmatrix} I_4 s - A & C_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K & -E(s) \\ -Q & 0 & I_4 s - A + Q & -R \\ -P & 0 & P & I_2 s - \Gamma \end{pmatrix} \tag{8.16}$$

Введем в рассмотрение функционал $J(E)$, зависящий от задания матрицы $E(s)$ и определяемый некоторой матричной нормой передаточной матрицы $\|W_{f\delta}\|$, представленной формулой (8.16).

Выбор конкретной нормы указанной передаточной матрицы порождает различные классы задач оптимального синтеза стабилизирующих управлений, среди которых в настоящее время наиболее популярными являются следующие:

задачи о минимизации нормы $\|H\|_2$ (типичный представитель - задача LQG-оптимального синтеза):

задачи о минимизации нормы $\|H\|_\infty$ (задача H_∞ -оптимального синтеза);

задачи о минимизации указанных выше норм для «взвешенных» передаточных матриц HS_1 , где $S_1(s)$ – заданная весовая матричная функция (например, задачи средне-квадратичного оптимального синтеза и синтеза гарантирующих регуляторов соответственно).

Приведенные нормы вводятся следующими соотношениями:

а) норма $\|H\|_2$:

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[H^T(-j\omega)H(j\omega)]d\omega},$$

в частности, для SISO-задачи (со скалярными входом (d и выходом e)) получим

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega}.$$

б) норма $\|H\|_{\infty}$:

$$\|H\|_{\infty} = \max_{\omega \in (0, \infty)} \bar{\sigma}(\omega),$$

где $\bar{\sigma}(\omega)$ – максимальное сингулярное число матрицы $H(j\omega)$ (корень квадратный из максимального собственного значения эрмитовой матрицы $H^T(-j\omega)H(j\omega)$), в частности, для SISO-задачи имеем

$$\|H\|_{\infty} = \max_{\omega \in (0, \infty)} |H(j\omega)|,$$

в) взвешенная норма $\|HS_1\|_2$

$$\begin{aligned} \|HS_1\|_2 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[S_1^T(-j\omega)H^T(-j\omega)H(j\omega)S_1(j\omega)]d\omega} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[H(j\omega)S_v(\omega)H^T(-j\omega)]d\omega} \end{aligned}$$

где $S_v(\omega) = S_1(j\omega)S_1^T(-j\omega)$; в частности, для SISO-задачи –

$$\|HS_1\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_v(\omega) d\omega}$$

где $S_v(\omega) = |S_1(j\omega)|^2$;

г) взвешенная норма $\|HS_1\|_{\infty}$

$$\|HS_1\|_{\infty} = \max_{\omega \in (0, \infty)} \bar{\sigma}_v(\omega),$$

где $\bar{\sigma}_v(\omega)$, – максимальное сингулярное число матрицы $H(j\omega)S_1(j\omega)$,

Для целей фильтрации чаще всего используется взвешенная матричная норма $\|HS_1\|_2$ передаточной матрицы $W_{j\delta}$. Здесь в качестве весовой матрицы S_1 принимается результат факторизации матрицы $S_f(\omega)$ спектральных плотностей возмущения, определяемого высокочастотным возмущением $S_f(\omega) = S_1(j\omega)S_1^T(-j\omega)$. В соответствии с выбором нормы $\|HS_1\|_2$,

функционал, определяемый этой нормой и задающий качество фильтрации, можно представить в следующем виде:

$$J(E) = \|W_{f\delta} S_1\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[W_{f\delta}(j\omega) S_v(\omega) W_{f\delta}^T(-j\omega)] d\omega} \quad (8.17)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что введенный функционал (8.17) характеризует интенсивность функционирования исполнительных органов в условиях высокочастотного возмущения. В связи с этим представляется целесообразным поставить задачу об обеспечении минимума этого функционала за счет выбора матрицы $E(s)$ в уравнении (8.16) для основного управляющего сигнала:

$$J(E) = \|W_{f\delta} S_1\|_2 \rightarrow \min_{E \in \Omega_E} \quad (8.18)$$

Сформулированная оптимизационная задача по существу является задачей о поиске оптимальной передаточной функции дополнительного фильтра. Действительно, если найдена оптимальная матрица – решение задачи (8.18):

$$E_0(s) = \arg \min_{E \in \Omega_E} J(E) = \arg \min_{E \in \Omega_E} \|W_{f\delta} S_1\|_2$$

то оптимальная передаточная матрица $E_{d0}(s)$ ДФ, в соответствии с (8.13), может быть найдена по формуле

$$E_{d0}(s) = E_0(s) - K_{\Delta}(s).$$

Допустимое множество Ω_E в задаче (7.56) определяется требованиями, предъявляемыми к динамическим свойствам замкнутой системы, аналогично рис. 7.1. В наиболее простом варианте его можно принять в виде

$$\Omega_E = \{E : \Delta_i \in C_{\Delta}, \Phi_d(\Delta_i) = 0, i = 1 \dots n_d\},$$

где $\Phi_d(\Delta_i)$ – характеристический полином ДФ, n_d – степень этого полинома, C_{Δ} – область на комплексной плоскости, описанная выше и представленная на рисунке 7.1.

Необходимо отметить, что сформулированная оптимизационная задача (8.18) на допустимом множестве Ω_E является исключительно сложной в аналитическом плане. В настоящее время разработана теория и численные методы решения подобных задач, относящихся к области многоцелевой стабилизации динамических объектов.

Следует отметить, что введение дополнительных фильтрующих сигналов сохраняет устойчивость и не нарушает свойство астатизма замкнутой системы по регулируемым координатам.

Алгоритмы автоматического маневрирования подвижным объектом

Под маневрированием подвижного объекта в плоскостях стабилизации понимают изменение на заданные величины соответствующих угловых и линейных координат объекта управления. Перед началом маневра и после его завершения все угловые и линейные скорости (исключая скорость хода), а также отклонения исполнительных органов при отсутствии внешних возмущений должны быть нулевыми. Главными требованиями, которые предъявляются к качеству маневра, являются предельное быстродействие и минимальное перерегулирование по управляемой координате.

Для математической формализации проблемы автоматического маневрирования в принципе могут быть применены следующие подходы:

- теория оптимального программного быстродействия с реализацией управления в виде программы отклонения исполнительных органов в функции времени;
- теория оптимального быстродействия с реализацией управления в виде нелинейной обратной связи;
- теория линейных регуляторов с их параметрической оптимизацией по коэффициентам закона управления.

Необходимо отметить, что, к сожалению, при построении штатных законов управления не удастся ограничиться каким-либо одним из указанных подходов в силу целого ряда присущих им недостатков.

В первую очередь, укажем недостатки подхода, базирующегося на теории оптимального быстродействия.

1. Большие пределы изменения координат объекта в ходе маневров не позволяют пользоваться при синтезе оптимальных программ линейными моделями объекта, что с учетом большой размерности исключает построение оптимальных программ на борту в ходе движения.

2. Реализация оптимальных программ (даже при их наличии) невозможна без использования обратных связей, поскольку любое программное движение в вертикальной плоскости не является асимптотически устойчивым по Ляпунову и, кроме того. Поскольку на ДС постоянно воздействуют внешние неопределенные факторы, требующие непрерывного функционирования системы стабилизации.

3. Формирование нелинейного оптимального по быстродействию регулятора в силу сложности нелинейных уравнений динамики практически невозможно. Отметим, что всякие приближения к нему нежелательны, поскольку движения оптимальных нелинейных систем имеют ряд

динамических особенностей вблизи поверхностей переключения, которые отрицательно сказываются на приводе исполнительных органов.

4. Непосредственное использование нелинейных регуляторов, которые существенно отличаются по своей структуре от штатных линейных алгоритмов управления, требует выполнения соответствующих переключений перед началом маневра, что крайне нежелательно с позиций качества управления и его надежности.

Альтернативным подходом по отношению к теории оптимального быстрогодействия является обеспечение автоматического маневрирования с помощью линейных алгоритмов обратной связи вида

$$u = \tilde{K}\tilde{x} + k_p(x_p - x_{pz}) - \delta, \quad x = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ x_p \end{pmatrix} \quad (8.19)$$

с позиционным базовым законом управления или

$$u = L\dot{x} + v_p(x_p - x_{pz}) \quad (8.20)$$

со скоростным базовым алгоритмом стабилизации. Здесь через x_p обозначена регулируемая координата объекта, а через x_{pz} — ее желаемое (заданное) значение в конце маневра. Заметим, что при каждом фиксированном значении скорости хода и заданной величине x_{pz} , коэффициенты законов (8.19) и (8.20) могут быть выбраны так, чтобы обеспечить оптимальный по быстродействию маневр. Однако изменение коэффициентов автомата в столь широких пределах крайне нежелательно. С другой стороны, фиксация коэффициентов по отношению к x_{pz} на некотором уровне приводит к существенному недоиспользованию возможностей органов управления либо к большим перерегулированием.

В связи с отмеченными обстоятельствами, обеспечение автоматического маневрирования объекта осуществляется на базе специального подхода, объединяющего достоинства оптимального быстрогодействия и линейного регулирования. Предлагаемый подход состоит в следующем.

1. По известной скорости хода для существенно упрощенной линейной модели движения объекта тем или иным способом (построением оптимальной программы либо синтезом оптимальной обратной связи) формируются квазиоптимальные по отношению к соответствующей базовой модели законы

$$x_p = x_p^*(t), \dot{x}_p = \dot{x}_p^*(t), \delta = \delta^*(t), \quad (8.21)$$

изменения регулируемой координаты, ее производной и положения исполнительных органов при маневре.

2. С целью определенной компенсации неучтенных свойств объекта управления и условий его функционирования, тем или иным способом осуществляется коррекция функций (8.22).

3. В соответствии с (8.19) или (8.20) формируются базовые алгоритмы автоматического маневрирования вида

$$u = Kx + k_p^p (\dot{x}_p - \dot{x}_p^*(t)) + k_p (x_p - x_p^*(t)) - (\delta - \delta^*(t)), \quad (8.21)$$

или

$$u = L\tilde{x} + \mu_p^p (\dot{x}_p - \dot{x}_p^*(t)) + v_p (x_p - x_p^*(t)) + \delta^*(t)$$

для позиционного или скоростного варианта соответственно.

4. Осуществляется переход от базовых алгоритмов (8.21) к законам управления по выходу ОНФ.