

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра КСУ

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №5
по дисциплине «ПОСУ»
Тема: ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ. МАКСИМАЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЕ
Вариант 7

Студенты гр. 9492

Ливаренко С.С
Иванов М.К.

Преподаватель

Кавонкин Н.И.

Санкт-Петербург

2024

Цель работы.

Исследовать задачу максимального быстродействия, особенности ее решения на основе принципа максимума Понтрягина, освоить аналитические и численные методы решения.

Постановка задачи.

Дана система ДУ, описывающая динамический объект:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + u, \quad x_1(0) = -2, x_2(0) = 0 \\ |u| \leq u_{\max} = 1.2 \end{cases}$$

Требуется найти такое управление $u_0(t)$, при котором перевод объекта управления из начального состояния в конечное выполняется за минимально возможное время. Конечное состояние системы:

$$x_1(T) = 0, x_2(T) = 0.$$

Таким образом необходимо минимизировать функционал:

$$J = \int_0^T dt.$$

Задание:

1. Получить аналитическое решение задачи быстродействия для параметров, заданных в соответствии с вариантом. Начальные и граничные условия:

$$x_1(0) = -2, x_2(0) = 0, x_1(T) = 0, x_2(T) = 0.$$

2. Получить численное решение задачи методом оптимизации, построение графиков переходных процессов

3. Получить решение задачи графическим способом через линию переключения, построение графиков фазовых траекторий.

Выполнение работы.

1. Аналитическое решение.

Запишем гамильтониан системы:

$$H = \psi_1(-x_1 + x_2) + \psi_2(-2x_2 + u) - 1$$

Как видно, гамильтониан линейно зависит от функции управления, и найти оптимальное управление путем вычисления производной от гамильтониана не удастся. Однако по условию функция управления ограничена значением u_{\max} , поэтому максимум гамильтониана будет соответствовать максимальному по модулю значению функции управления, а знак будет зависеть от сопряженной переменной ψ_2 :

$$u_0 = u_{\max} \operatorname{sign}(\psi_2)$$

Общая система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + 0.5u_{\max} \operatorname{sign}(\psi_2), x_1(0) = 1, x_2(0) = 0 \\ \frac{d\psi_1}{dt} = \psi_1 \\ \frac{d\psi_2}{dt} = 2\psi_2 - \psi_1, \psi_1(0) = \psi_{10}, \psi_2(0) = \psi_{20} \end{cases}$$

Применяя метод преобразования Лапласа получаем уравнения для сопряженных переменных (подробнее решение приведено в лабораторной работе 4):

$$\begin{cases} \psi_1(t) = \psi_{10} e^t \\ \psi_2(t) = \psi_{20} e^{2t} - \psi_{10} (e^{2t} - e^t) \end{cases}$$

Проанализировав полученные выражения можно сказать, что искомое управляющее воздействие имеет вид прямоугольной волны, которая меняет знак не более одного раза. Очевидно, что момент смены знака управления (*момент переключения*) будем выбирать из условия обеспечения заданных граничных условий для состояний объекта управления. Таким образом функция управляющего воздействия имеет вид:

$$u_0 = -u_{\max} t + 2u_{\max} (t - t_1)$$

Преобразованная по Лапласу система уравнений объекта управления, учитывающая воздействие прямоугольной волны имеет вид:

$$\begin{cases} sx_1(s) - 1 = -x_1(s) + x_2(s) \\ sx_2(s) = -2x_2(s) + u(s) \\ u(s) = -\frac{1.2}{s} + 2.4 \frac{e^{-st_1}}{s} \end{cases}$$

Из этой системы получаем следующие выражения для изображений по Лапласу переменных состояния объекта управления:

$$\begin{cases} x_1(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1.2}{s(s+2)(s+1)} + 2.4 \frac{e^{-st_1}}{s(s+2)(s+1)} \\ x_2(s) = \frac{-1.2}{s(s+2)} + 2.4 \frac{e^{st_1}}{s(s+2)} \\ u(s) = -\frac{1.2}{s} + 2.4 \frac{e^{st_1}}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{0.6}{s} - \frac{0.6}{(s+2)} + \frac{1.2}{(s+1)} + e^{-st_1} \left(\frac{1.2}{s} + \frac{1.2}{(s+2)} - \frac{2.4}{(s+1)} \right) \\ x_2(s) = -\frac{0.6}{s} + \frac{0.6}{s+2} + e^{st_1} \left(\frac{1.2}{s} - \frac{1.2}{s+2} \right) \\ u(s) = -\frac{1.2}{s} + 2.4 \frac{e^{st_1}}{s} \end{cases}$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа получаем:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t} - 0.6 - 0.6e^{-2t} + 1.2e^{-t} + (1.2 + 1.2e^{-2(t-t_1)} - 2.4e^{t_1-t}) \cdot 1(t-t_1) \\ x_2(t) = -0.6 + 0.6e^{-2t} + (1.2 - 1.2e^{-2(t-t_1)}) \cdot 1(t-t_1) \\ u(s) = -1.2 + 2.4 \cdot 1(t-t_1) \end{cases}$$

где $-1(t)$ единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда).

Найдём значение момента переключения t_1 , и значение момента времени перевода объекта управления в требуемое состояние T , при помощи подстановки в решение граничных условий.

$$\begin{cases} x_1(T) = e^{-T} - 0.6 - 0.6e^{-2T} + 1.2e^{-T} + (1.2 + 1.2e^{-2(T-t_1)} - 2.4e^{t_1-T}) \cdot 1(T-t_1) \\ x_2(T) = -0.6 + 0.6e^{-2T} + (1.2 - 1.2e^{-2(T-t_1)}) \cdot 1(T-t_1) \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} t_1 = 1.072 \\ T = 1.388 \end{matrix}$$

На рис.1. приведены результаты моделирования системы при t_1 и T , полученных аналитическим методом.

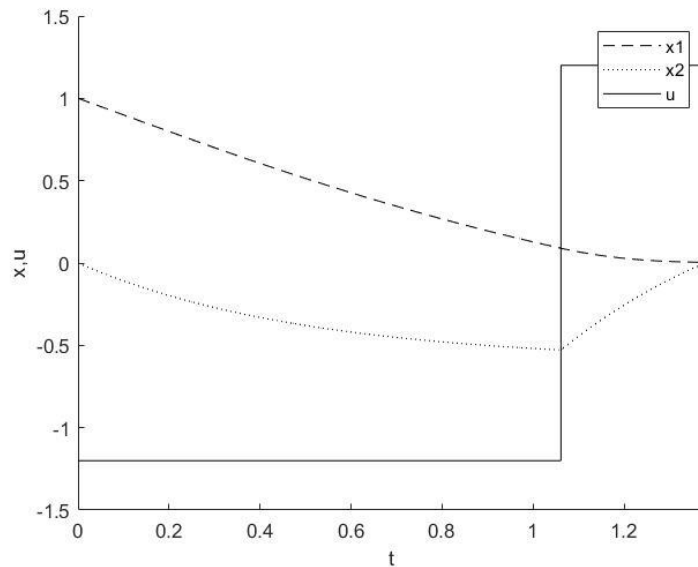


Рис.1. результаты моделирования системы при t_1 и T , полученных аналитическим методом.

Конечные значения переменных состояния:

$$x_1(T) = 0$$

$$x_2(T) = 0$$

2. Численное решение.

В листинге.2. приведён скрипт для поиска t_1 и T .

Листинг.2.

```
%вектор начальных приближений для моментов переключения и завершения интервала
управления
ti0=[1 1];
T=fminsearch('costfunc5',ti0)
legend('x1','x2','u')
ylabel('x,u')
xlabel('t')
```

В листинге.3. приведена функция потерь.

Листинг.3.

```
function f=costfunc5(T)
global t1
```

```

t=[]; x=[]; u=[];
t1=T(1);
umax=1.2;
h_u=@(t) umax*(t>t1)-umax*(t<=t1); % прямоугольная волна
h_odefun = @(t,x) [-x(1)+x(2); -2*x(2)+h_u(t)];
[t,x]=ode45(h_odefun,[0 abs(T(2))],[1 0]);
%вычисление невязки
f=x(end,1)^2+x(end,2)^2;
plot(t,x(:,1),'k --',t,x(:,2),'k :',t,h_u(t),'k')
pause(0.5)

```

В результате работы скрипта были получены t_1 и T :

$$t_1 = 1.073$$

$$T = 1.391$$

На рис.2. приведены результаты моделирования системы при t_1 и T , полученных численным методом.

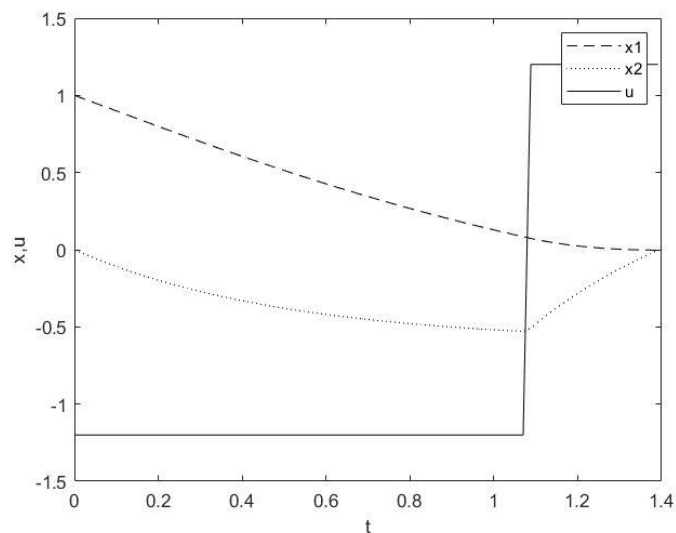


Рис.2. результаты моделирования системы при t_1 и T , полученных численным методом.

Конечные значения переменных состояния:

$$x_1(T) = -0.002$$

$$x_2(T) = -0.002$$

Сравнивая результаты моделирования полученные аналитическим и численным методом, можно сделать вывод что при численном методе получились больше отклонения конечных значений переменных состояния от заданных, а также получилось больше время достижения конечного состояния объектом.

3. Графический способ решения.

В листинге.4. приведён скрипт для поиска t_1 и T .

Листинг.2.

```
% Построение линии переключения
t=[]; x=[]; u=[];
umax=1.2;
h_odefun = @(t,x) [-x(1)+x(2); -2*x(2)+umax];
[t,x]=ode45(h_odefun,[1.3 0],[0 0]);
figure(1)
hold on
plot(x(:,1),x(:,2),'k--')
xt=x(:,1);
h_odefun = @(t,x) [-x(1)+x(2); -2*x(2)-umax];
[t,x]=ode45(h_odefun,[0 1.3],[1 0]);
figure(1)
plot(x(:,1),x(:,2),'k')
xlabel('x1');
ylabel('x2');
xlim([-0.5 4.5])
ylim([-8 0])
% Определение t1 и T
[x0,y0]=ginput()
del=x0*ones(size(x(:,1)))-abs(x(:,1));
[M,I]=min(abs(del));
t1=t(I);
h_u = @(t) umax*(t>t1)-umax*(t<=t1);
h_odefun = @(t,x) [-x(1)+x(2); -2*x(2)+h_u(t)];
[t,x]=ode45(h_odefun,[0:0.001:2],[1 0]);
[M,I]=min(abs(x(:,1)))
T=t(I)
% Моделирование системы
h_u=@(t) umax*(t>t1)-umax*(t<=t1); % прямоугольная волна
h_odefun = @(t,x) [-x(1)+x(2); -2*x(2)+h_u(t)];
[t,x]=ode45(h_odefun,[0 T],[1 0]);
figure(2)
plot(t,x(:,1),'k--',t,x(:,2),'k:',t,h_u(t),'k')
xlim([0 T])
legend('x1','x2','u')
ylabel('x,u')
xlabel('t')
```

В результате работы скрипта были получены t_1 и T :

$$t_1 = 1.073$$

$$T = 1.389$$

На рис.3. приведена линия переключения.

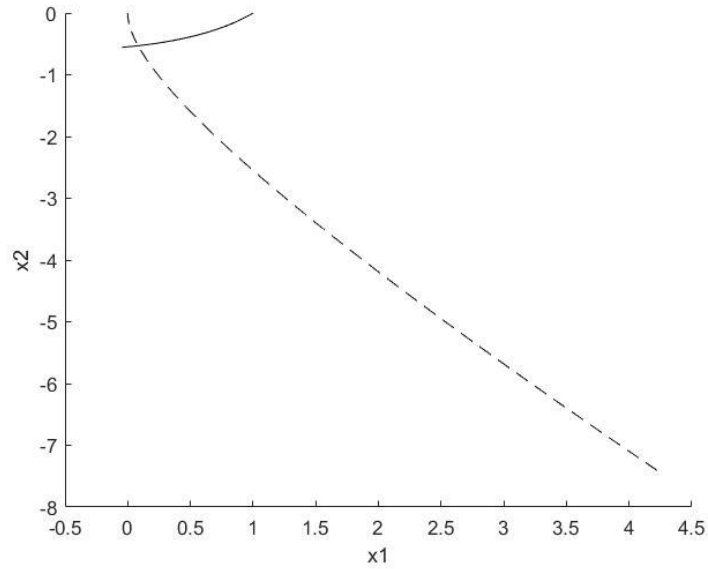


Рис.3. Линия переключения.

На рис.4. приведены результаты моделирования системы при t_1 и T , полученных графическим методом.

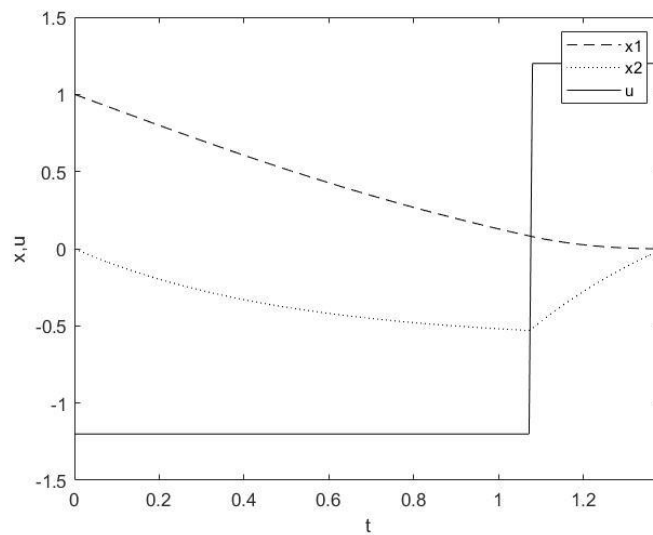


Рис.4. результаты моделирования системы при t_1 и T , полученных графическим методом.

Конечные значения переменных состояния:

$$x_1(T) = 0$$

$$x_2(T) = 0$$

Графический метод даёт наибольшее отклонение конечных значений переменных состояния от заданных.

Вывод.

В данной лабораторной работе была решена краевая задача оптимального управления по минимизации времени достижения конечного состояния. аналитическим, численным и графическим методами. Наилучший результат дал аналитический метод с временем достижения конечного состояния $T = 1.388$.