Понятие бинарного отношения

Бинарным отношением R между двумя непустыми множествами *X и Y* называется подмножество, определенное на декартовом произведении *XxY*

$$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

с функцией принадлежности

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in R \\ 0, & (x,y) \notin R \end{cases}$$

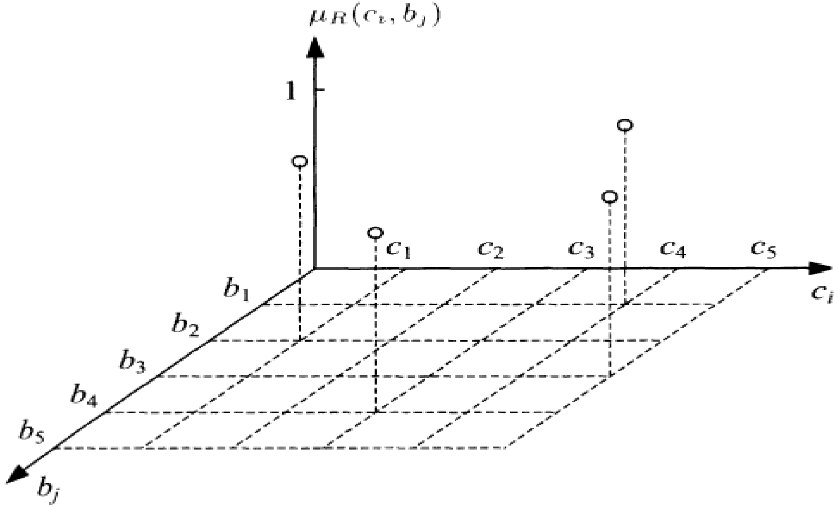
Пример. Даны одномерные множества-составляющие X_1 и X_2. Здесь X_1 — множество граждан:

$$X_1 = \{c_1, c_2, \ldots, c_5\},$$

X_2 — множество банков:

$$X_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_5\}.$$

R «иметь счет в ...»



R	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
b_1	0	0	0	1	0
b_2	1	0	0	0	0
b_3	0	0	0	0	1
b_4	0	0	1	0	0
b_5	0	0	0	0	0

Представление отношения **R** в виде трехмерной функции принадлежности $\mu(c_i, b_j)$ и в виде матрицы отношения

Понятие нечеткого отношения

Пусть $X, Y \subseteq R$ два множества, тогда

$$R = \{((x,y), \mu_R(x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y\}$$

называется нечетким отношением $X \times Y \subseteq \mathrm{R}$

$$R(x,y) = \left\{\frac{\mu_R(x,y)}{(x,y)} \mid (x,y) \in X \times Y\right\}$$

Нечеткое отношение может быть представлено в виде двумерной таблицы

$$R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & \cdots & y_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mu_R(x_1,y_1) & \cdots & \mu_R(x_1,y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_R(x_m,y_1) & \cdots & \mu_R(x_m,y_n) \end{bmatrix} \end{array}$$

Пример.

- Даны два нечетких множества $A = \{0.2/x_1 + 0.5/x_2 + 1/x_3\}$

  $B = \{0.3/y_1 + 0.9/y_2\}$

- Нечеткое отношение находится как декартово произведение

$$A \times B = R = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \end{array}$$

Понятие нечеткого отношения

Другими словами, нечеткое отношение – множество пар

$$R = \{((x, y), R(x, y))\},$$

где

$$\mu_R : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \quad [0, 1]$$

– это функция принадлежности, которая каждой паре (x, y) приписывает ее степень принадлежности $\mu_R(x, y)$, которая интерпретируется как сила связи между элементами $x \in \mathbf{X}$ и $y \in \mathbf{Y}$. В соответствии с принятым соглашением (п. 3.2) нечеткое отношение можно представить в виде

$$R = \sum_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)}$$

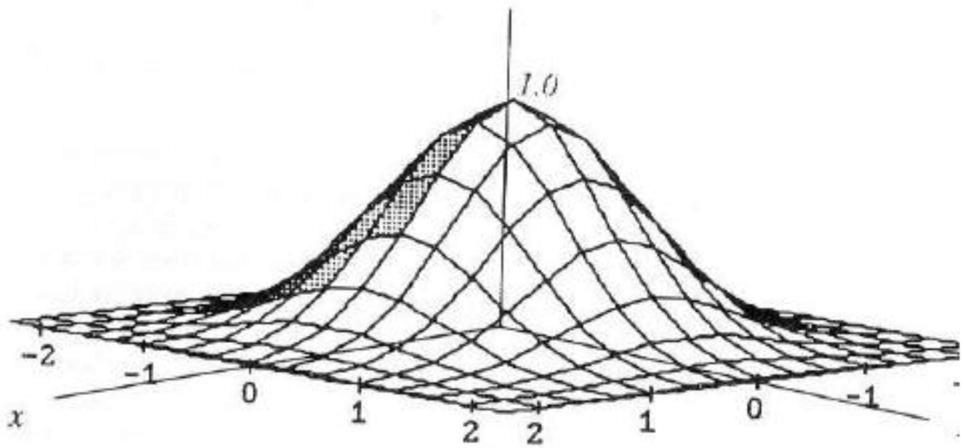
или

$$R = \int_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}} \frac{\mu_R(x, y)}{(x, y)}$$

Непрерывные нечеткие отношения

Понятие нечеткого отношения может быть расширено на случай декартового произведения непрерывных множеств.

$$R = \int_{X \times Y} \mu_R(x, y) / (x, y) = \int_{X \times Y} e^{-(x^2 + y^2)} / (x, y)$$



Упражнение 1.

Имеется два множества : A = {3, 4, 5} and B = {3, 4, 5, 6, 7}

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} (y-x)/(y+x+2) & \text{if } y > x \\ 0, & \text{if } y \le x \end{cases}$$

Требуется найти нечеткое отношение **R.**

Упражнение 1. Результаты

$$R = \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0.11 & 0.2 & 0.27 & 0.33 \\ 0 & 0 & 0.09 & 0.17 & 0.23 \\ 0 & 0 & 0 & 0.08 & 0.14 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \end{array}$$

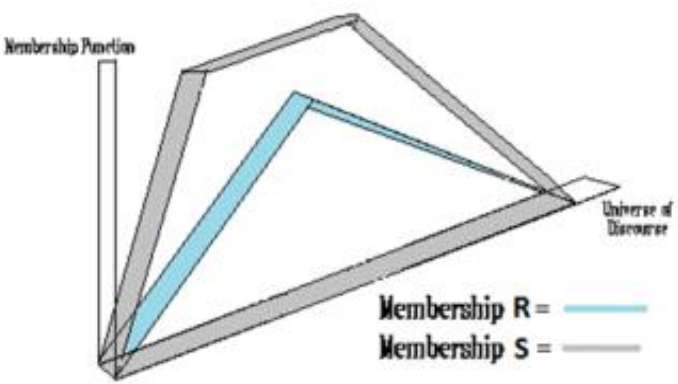
Основные операции над нечеткими отношениями. Включение.

R и L – нечеткие отношения, ***R содержится в*** L, $R \subseteq L$, если $\forall\, (u, v) \in U \times V$:

$$\mu_R(u,v) \le \mu_L(u,v).$$

R	v_1	v_2
u_1	0.3	0.4
u_2	0.5	0.1

L	v_1	v_2
u_1	0.4	0.6
u_2	0.5	1.0



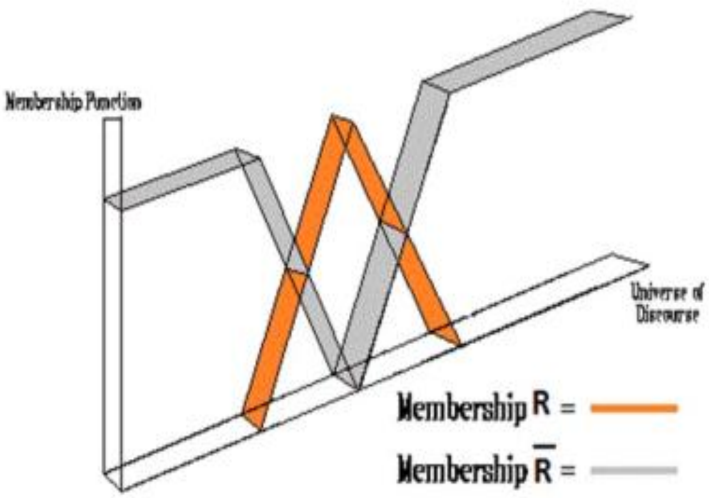
Дополнение.

Дополнение нечеткого отношения $\overline{R}: \forall (u, v) \in U \times V: \quad \mu_{\overline{R}}(u,v) = 1 - \mu_R(u,v).$

Дополнение – отрицание исходного отношения. Для R = (лучше), дополнение $\overline{R}$ = (не лучше).

R	v_1	v_2
u_1	0.7	0.2
u_2	0.9	0.1

$\overline{R}$	v_1	v_2
u_1	0.3	0.8
u_2	0.1	0.9



Объединение

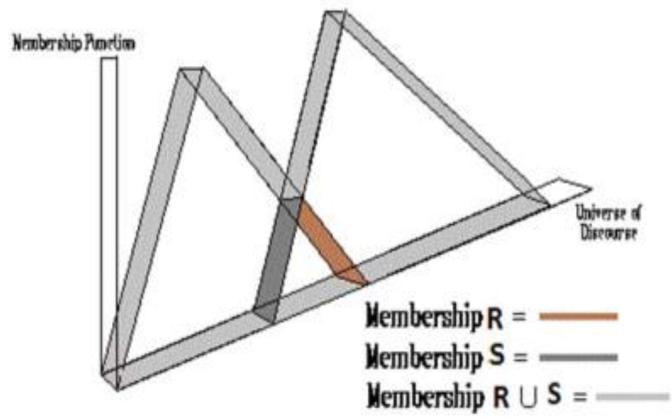
Объединение двух отношений R и $L - R \cup L$:

$$\forall (u, v) \in U \times V: \ \mu_{R \cup L}(u,v) = \mu_R(u,v) \ \vee \ \mu_L(u,v) == \max[\mu_R(u,v), \ \mu_L(u,v)].$$

R	v_1	v_2
u_1	0.7	0.2
u_2	0.9	0.1

L	v_1	v_2
u_1	0.4	0.6
u_2	0.5	1.0

R∪L	v_1	v_2
u_1	0.7	0.6
u_2	0.9	1.0



Graphical representation of union operation of two relations R and S

Пересечение

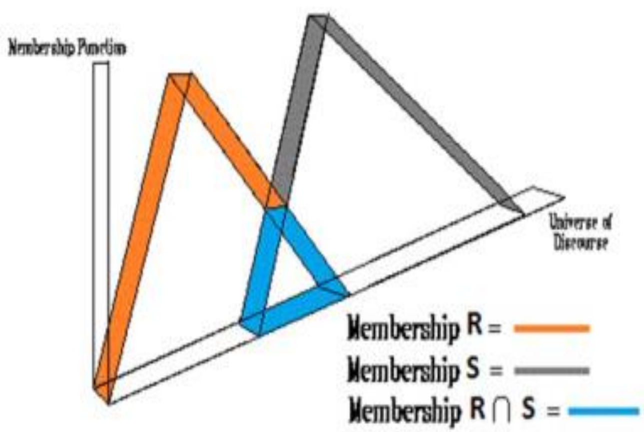
Пересечение двух отношений R и L – $R \cap L$:

$$\forall (u,v) \in U \times V: \ \mu_{R \cap L}(u,v) = \mu_R(u,v) \ \wedge \ \mu_L(u,v) = \min[\mu_R(u,v), \ \mu_L(u,v)]$$

R	v_1	v_2
u_1	0.7	0.2
u_2	0.9	0.1

L	v_1	v_2
u_1	0.4	0.6
u_2	0.5	1.0

R∩L	v_1	v_2
u_1	0.4	0.2
u_2	0.5	0.1



Graphical representation of intersection operation of two relations R and S

Обратное отношение

Обратное к $\boldsymbol{R}$ НО R^{-1}:

$$\forall\,(u,v)\in U\times V: uRv \Leftrightarrow vR^{-1}u, \text{ или } \forall\,(u,v)\in U\times V: \quad \mu_R(u,\ v)=\mu_{R^{-1}}(v,\ u).$$

Матрица R^{-1} является транспонированной к матрице R.

R	v_1	v_2
u_1	0.7	0.2
u_2	0.9	0.1

R^{-1}	u_1	u_2
v_1	0.7	0.9
v_2	0.2	0.1

Упражнение 2.

Рассмотрим два нечетких отношения

R1 = “x много больше y”

R2 = “y много больше чем x”

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.8 \\ 0.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.8 & 1.0 & 0.8 \end{bmatrix} \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Нужно найти объединение и пересечение двух нечетких отношений

Упражнение 2. Результаты.

$$R_1 \cup R_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.8 & 1.0 & 1.0 \\ 0.5 & 0.8 & 1.0 & 0.8 \end{bmatrix} \qquad R_1 \cap R_2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Упражнение 3.

Let $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ and $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

$\tilde{R} =$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	.8	1	.1	.7
x_2	0	.8	0	0
x_3	.9	1	.7	.8

$\tilde{Z} =$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	.4	0	.9	.6
x_2	.9	.4	.5	.7
x_3	.3	0	.8	.5

$\tilde{R} \cup \tilde{Z}$

$\tilde{R} \cap \tilde{Z}$:

Упражнение 3. Результаты

$\tilde{R} \cup \tilde{Z}$:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	.8	1	.9	.7
x_2	.9	.8	.5	.7
x_3	.9	1	.8	.8

$\tilde{R} \cap \tilde{Z}$:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	.4	0	.1	.6
x_2	0	.4	0	0
x_3	.3	0	.7	.5

Упражнение 4.

Имеются два нечетких отношения

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 1 & 0{,}3 & 0 \\ x_2 & 0{,}7 & 1 & 0{,}8 \end{array} \qquad \underset{\sim}{L} = \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 0{,}2 & 0{,}6 & 1 \\ x_2 & 0{,}8 & 0 & 0{,}2 \end{array}$$

Необходимо найти

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}} \oplus \underset{\sim}{\mathcal{L}} = \left(\underset{\sim}{\mathcal{R}} \cap \overline{\underset{\sim}{\mathcal{L}}}\right) \cup \left(\overline{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} \cap \underset{\sim}{\mathcal{L}}\right).$$

Упражнение 4. Результаты

$\underset{\sim}{R}$	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0,3	0
x_2	0,1	1	0,8

$\underset{\sim}{L}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,2	0,6	1
x_2	0,8	0	0,2

$\overline{\underset{\sim}{R}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0	0,7	1
x_2	0,9	0	0,2

$\overline{\underset{\sim}{L}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,8	0,4	0
x_2	0,2	1	0,8

$\underset{\sim}{R} \cap \overline{\underset{\sim}{L}}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,8	0,3	0
x_2	0,1	1	0,8

$\overline{\underset{\sim}{R}} \cap \underset{\sim}{L}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0	0,6	1
x_2	0,8	0	0,2

$\underset{\sim}{R} \oplus \underset{\sim}{L}$	y_1	y_2	y_3
x_1	0,8	0,6	1
x_2	0,8	1	0,8

$$\underset{\sim}{\mathcal{R}} \oplus \underset{\sim}{\mathcal{L}} = \left(\underset{\sim}{\mathcal{R}} \cap \overline{\underset{\sim}{\mathcal{L}}}\right) \cup \left(\overline{\underset{\sim}{\mathcal{R}}} \cap \underset{\sim}{\mathcal{L}}\right).$$

Композиция нечетких отношений

Операция композиции двух отношений R1 в XxY и R2 в YxZ позволяет определить третье отношение R3 в XxZ

1. ***Максиминная композиция*** $R \circ L$ двух нечетких отношений $R \subset U \times V$ и $L \subset V \times W$

$$\mu_{R \circ L}(u,w) = \bigvee_{v}(\mu_R(u,v) \wedge \mu_L(v,w)) = \max_{v}\{\min[\mu_R(u,v),\ \mu_L(v,w)]\}.$$

$X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, and $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$

Consider the following fuzzy relations:

$$\tilde{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix}\end{array} \quad \text{and} \quad \tilde{S} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}\end{array}$$

Using max-min composition,

$$\left.\begin{aligned} \mu_{\tilde{T}}(x_1, z_1) &= \bigvee_{y \in Y}(\mu_{\tilde{R}}(x_1, y) \wedge \mu_{\tilde{S}}(y, z_1)) \\ &= \max[\min(0.7, 0.9), \min(0.5, 0.1)] \\ &= 0.7 \end{aligned}\right\} \tilde{T} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.5 \\ 0.8 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}\end{array}$$

Упражнение 5.

Даны два нечетких отношения

Необходимо найти max-min композицию

$\underset{\sim}{R}_1$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,1	0,2	0	1	0,7
x_2	0,3	0,5	0	0,2	1
x_3	0,8	0	1	0,4	0,3

$\underset{\sim}{R}_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	0,3	0,4
y_2	0,2	1	0,8	0
y_3	0,8	0	0,7	1
y_4	0,4	0,2	0,3	0
y_5	0	1	0	0,8

$\underset{\sim}{R}_2 \circ \underset{\sim}{R}_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,4	0,7	0,3	0,7
x_2	0,3	1	0,5	0,8
x_3	0,8	0,3	0,7	1

$$\mu_{R \circ L}(u, w) = \bigvee_{v} (\mu_R(u,v) \wedge \mu_L(v, w)) = \max_{v}\{\min[\mu_R(u,v),\ \mu_L(v, w)]\}.$$

Композиция нечетких отношений

2. ***Минимаксная композиция*** $R \bullet L$ двух нечетких отношений $R \subset U \times V$ и $L \subset V \times W$

$$\mu_{R \bullet L}(u,w) = \underset{v}{\wedge}(\mu_R(u,v) \vee \mu_L(v,w)) = \min_{v}\{\max[\mu_R(u,v),\ \mu_L(v,w)]\}.$$

3. ***Максимультипликативная композиция*** $R * L$ двух нечетких отношений $R \subset U \times V$ и $L \subset V \times W$ определяется ФП в виде

$$\mu_{R*L}(u,w) = \underset{v}{\vee}(\mu_R(u,v)\,\mu_L(v,w)) = \max_{v}(\mu_R(u,v)\,\mu_L(v,w)).$$

$$X = \{x_1, x_2\}, \quad Y = \{y_1, y_2\}, \text{ and } \quad Z = \{z_1, z_2, z_3\}$$

Consider the following fuzzy relations:

$$\tilde{R} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{and} \quad \tilde{S} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Jsing max-product composition,

$$\left.\begin{aligned} \mu_{\tilde{T}}(x_2, z_2) &= \underset{y \in Y}{\vee}(\mu_{\tilde{R}}(x_2, y) \bullet \mu_{\tilde{S}}(y, z_2)) \\ &= \max[(0.8, 0.6), (0.4, 0.7)] \\ &= 0.48 \end{aligned}\right\} \quad \tilde{T} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .63 & .42 & .25 \\ .72 & .48 & .20 \end{bmatrix} \end{array}$$

Упражнение 6.

Даны два нечетких отношения

$\tilde{R}_1$:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	.1	.2	0	1	.7
x_2	.3	.5	0	.2	1
x_3	.8	0	1	.4	.3

$\tilde{R}_2$:

	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	.9	0	.3	.4
y_2	.2	1	.8	0
y_3	.8	0	.7	1
y_4	.4	.2	.3	0
y_5	0	1	0	.8

Требуется найти max-min и max=prod композиции

Упражнение 6. Результаты

Let $x = x_1$, $z = z_1$, and $y = y_i$, $i = 1, \ldots, 5$:

$$\min\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_1), \mu_{\tilde{R}_2}(y_1, z_1)\} = \min\{.1, .9\} = .1$$

$$\min\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_2), \mu_{\tilde{R}_2}(y_2, z_1)\} = \min\{.2, .2\} = .2$$

$$\min\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_3), \mu_{\tilde{R}_2}(y_3, z_1)\} = \min\{0, .8\} = 0$$

$$\min\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_4), \mu_{\tilde{R}_2}(y_4, z_1)\} = \min\{1, .4\} = 4$$

$$\min\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_5), \mu_{\tilde{R}_2}(y_5, z_1)\} = \min\{.7, 0\} = 0$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2(x_1, z_1) &= ((x_1, z_1), \mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x_1, z_1)) \\ &= ((x_1, z_1), \max\{.1, .2, 0, .4, 0\}) = ((x_1, z_1), .4)\end{aligned}$$

In analogy to the above computation we now determine the grades of membership for all pairs (x_i, z_j), $i = 1, \ldots, 3$, $j = 1, \ldots, 4$ and arrive at

$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$:	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	.4	.7	.3	.7
x_2	.3	1	.5	.8
x_3	.8	.3	.7	1

Упражнение 6. Результаты

For the max-prod, we obtain

$$x = x_1,\ z = z_1,\ y = y_i,\ i = 1, \ldots, 5:$$

$$\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_1) \cdot \mu_{\tilde{R}_2}(y_1, z_1) = .1 \cdot .9 = .09$$

$$\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_2) \cdot \mu_{\tilde{R}_2}(y_2, z_1) = .2 \cdot .2 = .04$$

$$\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_3) \cdot \mu_{\tilde{R}_2}(y_3, z_1) = 0 \cdot .8 = 0$$

$$\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_4) \cdot \mu_{\tilde{R}_2}(y_4, z_1) = 1 \cdot .4 = 4$$

$$\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_5) \cdot \mu_{\tilde{R}_2}(y_5, z_1) = .7 \cdot 0 = 0$$

Hence

$$\begin{aligned}\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2(x_1, z_1) &= ((x_1, z_1), (\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x_1, z_1))) \\ &= ((x_1, z_1), \max\{.09, .04, 0, .4, 0\}) \\ &= ((x_1, z_1), .4)\end{aligned}$$

After performing the remaining computations, we obtain

$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$:

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	.4	.7	.3	.56
x_2	.27	1	.4	.8
x_3	.8	.3	.7	1

Упражнение 7.

Let the fuzzy relation $\tilde{R}$ be defined as

$\tilde{R}$:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	.2	1	.4	.4
x_2	0	.6	.3	0
x_3	0	1	.3	0
x_4	.1	1	1	.1

Требуется найти max-min композицию

Then $\tilde{R} \circ \tilde{R}$ is

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	.2	.6	.4	.2
x_2	0	.6	.3	0
x_3	0	.6	.3	0
x_4	.1	1	.3	.1

Упражнение 8.

Требуется найти max-min и max-prod композиции

$$M_Q = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_T = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{bmatrix},$$

max-min-*композиция*:

$$\mu_{(Q\circ T)} = \{< x_1, x_2, \ldots x_k >\} = \max\{\min\{\mu_Q(< x_i, x_j), \mu_T(< x_j, x_k)\}.$$

$$M_{(Q\circ T)} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

max-prod-*композиция*:

$$\mu_{(Q\circ T)} = \{< x_1, x_2, \ldots x_k >\} = \max_{x\in X}\{\mu_T(x)\cdot \mu_Q < x, y >\},$$

$$M_{(Q\circ T)} = \begin{bmatrix} 0{,}45 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}63 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}21 \\ 0{,}9 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

Проекции нечетких отношений

Определение: *Если* $\boldsymbol{R}$ *— нечеткое отношение с областью определения* $X_1 \times X_2$, *то* ***проекцией*** *этого отношения на область* X_1 *называется нечеткое множество* A^*, *имеющее следующий вид:*

$$A^*(x_1) = \operatorname*{Proj}_{x_1} \boldsymbol{R}(x_1, x_2) = \operatorname*{MAX}_{x_2}[\boldsymbol{R}(x_1, x_2)].$$

Для нечетких отношений вводятся понятия проекций следующим образом. Первая проекция нечеткого бинарного отношения $\mathcal{R}$ определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\mathcal{R}}^{(1)}(x) = \max_y \mu_{\mathcal{R}}(x, y).$$

Вторая проекция нечеткого бинарного отношения $\mathcal{R}$ определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\mathcal{R}}^{(2)}(y) = \max_x \mu_{\mathcal{R}}(x, y).$$

Глобальной проекцией $h(\mathcal{R})$ нечеткого бинарного отношения $\mathcal{R}$ называется вторая проекция первой проекции (или наоборот):

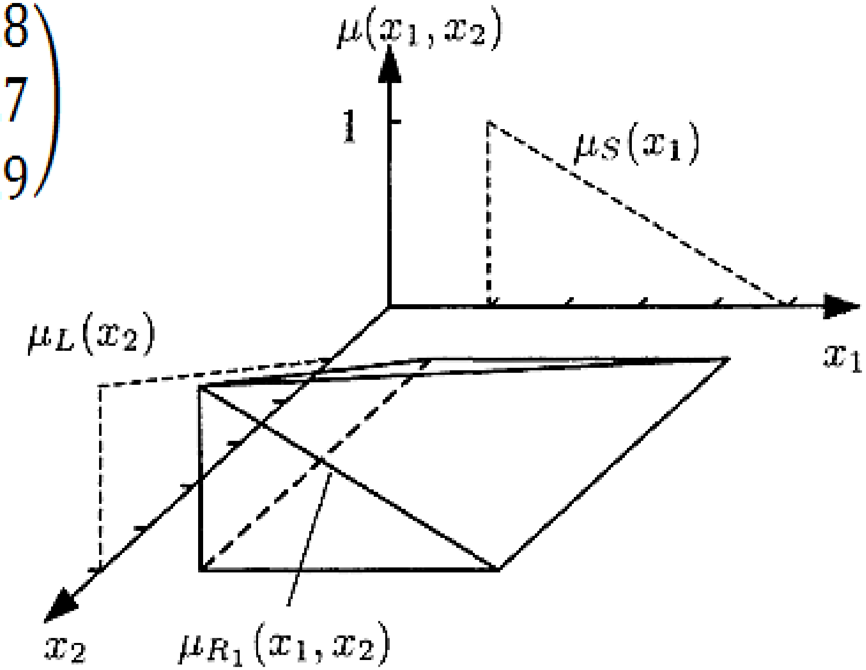
$$h(\mathcal{R}) = \max_x \max_y \mu_{\mathcal{R}}(x, y) = \max_y \max_x \mu_{\mathcal{R}}(x, y).$$

Проекции нечетких отношений

$$R = \begin{array}{c|cccc} x/y & y1 & y2 & y3 & y4 \\ \hline x1 & .3 & .8 & .7 & .5 \\ x2 & .7 & .3 & .5 & .4 \\ x3 & .9 & 0 & .2 & .3 \end{array}$$

$$\Pi_x(x) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.7 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_Y(y) = (0.9 \quad 0.8 \quad 0.7 \quad 0.5)$$



Упражнение 9.

Пусть имеется нечеткое отношение R(x_1, x_2):

x_2 \ x_1	3	4	5
6	1	0.5	0
7	0.5	0.5	0
8	0	0	0

Требуется найти проекции R на x_1 и x_2.

Упражнение 9. Результаты

x_2 \ x_1	3	4	5
6	1	0.5	0
7	0.5	0.5	0
8	0	0	0

Пx_2
1
0.5
0

Пx_1	**1**	**0.5**	**0**