Лекция 1. МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Понятие математической модели

Математическое моделирование – это методология научной и практической деятельности людей, основанная на построении, исследовании и использовании математических моделей. В самостоятельную научную дисциплину математическое моделирование оформилось в последние несколько десятилетий в связи с широким применением компьютеров. Математическое моделирование тесно связано с прикладной математикой и общей теорией систем, но не совпадает с ними, поскольку теория систем, как и другие разделы математики, имеет дело лишь с математическими объектами. Предмет математического моделирование шире и включает, кроме исследования математических объектов, формализацию постановки практической задачи и интерпретацию полученных формальных результатов.

Исходя из определения, выделяют три этапа математического моделирования: построение ММ (формализация задачи), исследование ММ (анализ модели), использование ММ (синтез решения).

Этап формализации задачи связан с научно-инженерной дисциплиной, именуемой системным анализом. На этапе анализа решаются так называемые прямые задачи, т.е. по заданным значениям входов системы определяются ее выходы. Для этапа синтеза характерны обратные задачи, а именно определение входов системы по заданным (желаемым) значениям ее выходов. Использование ММ возможно для различных целей: прогнозирования, исследования, проектирования, управления.

Как уже было сказано в предисловии, центральным понятием математического моделирования является понятие математической модели - совокупности математических объектов и отношений, которые отображают объекты и отношения некоторой области реального мира (предметной области).

Рассмотрим в качестве примера один из простейших видов математических моделей – линейное соотношение между двумя числовыми переменными. Если обозначить входную (независимую) переменную через u, а выходную (зависимую) через y, то такая модель имеет вид

$$y = ku, \tag{1.1}$$

где k – некоторый числовой параметр (коэффициент), выражающий свойства модели. Соотношение (1.1) является формальным выражением того факта, что между величинами u и y существует прямая пропорциональная зависимость. Подобными зависимостями описываются многие процессы в физических, биологических и других реальных (естественных или искусственных) объектах. Соотношение (1.1) (или другое аналогичное соотношение) может описывать как связь между конкретными переменными конкретного объекта, так и целый класс зависимостей, одинаковых для различных объектов.

Наиболее общие и универсальные зависимости в естественных науках называются законами. Например, закон Ньютона в механике выражает тот факт, что ускорение тела прямо пропорционально приложенной к телу силе. Закон Ома в физике говорит, что сила тока, протекающего через участок электрической цепи, прямо пропорциональна падению напряжения на этом участке и т.д.

С точки зрения математического моделирования и закон Ньютона, и закон Ома являются примерами линейных статических математических моделей (1.1). В случае закона Ньютона – это сила, приложенная к телу в момент t, $y \equiv d^2 s(t) / dt^2$ – ускорение тела, т.е. вторая производная от перемещения $s(t)$, $k = m^{-1}$, где m – масса тела. В случае закона Ома $u \equiv i(t)$ – это сила тока в проводнике, $y \equiv \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi(t)$ – падение напряжения на участке проводника (разность потенциалов), $k = R$ – величина сопротивления рассматриваемого участка. Таким образом, математическая модель – это более общее понятие, чем закон, поскольку оно носит междисциплинарный характер. Успехи прикладной математики и математического моделирования основаны на том, что одними и теми же математическими моделями могут описываться совершенно различные по природе процессы, т.е. одни и те же приемы и методы построения и исследования математических моделей пригодны для различных объектов (задач).

С другой стороны, законы естественных наук часто являются «кирпичиками» для построения математической модели реального объекта (так называемые теоретические модели, или модели на основе первичных принципов). Такой подход является основным в теоретической и прикладной механике, а также в теоретической и прикладной физике, где модели конкретных процессов и объектов выводятся из общих вариационных принципов – законов. Однако готовых «кирпичиков» может оказаться недостаточно и тогда при построении математической модели добавляются дополнительные соотношения – связи. В частности, такая ситуация возникает, когда реальный объект состоит из нескольких частей (элементов, компонентов) или требуется описать взаимодействие нескольких различных по природе процессов, протекающих в объекте. Правила соединения отдельных частей в единую математическую модель, отражающие структуру взаимодействия этих частей, часто называются структурно-топологическими уравнениями (связями). Такие правила могут основываться на законах естественных наук, например на законе Д'Аламбера для механических систем и аналогичном (в силу электромеханической аналогии) законе Кирхгофа для электрических цепей. В общем случае для составления моделей целого из моделей отдельных частей используется аппарат теории графов и теории матриц.-

Однако, даже если уравнения отдельных частей и уравнения связей построены, задачу построения математической модели рано считать решенной, поскольку модель может содержать ряд параметров, которые недоступны или трудно определяемы в реальной системе. Их определение может потребовать дополнительных экспериментов с реальной системой с целью определения (идентификации) параметров математической модели. Например, в линейной модели (1.1) требуется оценить коэффициент k по результатам экспериментов.

Хотя методы оценки параметров достаточно хорошо разработаны (см. ниже гл. 4), их применение имеет принципиальные ограничения в силу невозможности построения абсолютно точной модели реальной системы. Наличие неустранимых погрешностей и помех создает ситуацию неопределенности, когда выходные переменные не определяются однозначно входными переменными и параметрами модели. Наличие неопределенности приводит ,к тому, что для одного и того же объекта или процесса может существовать несколько или даже бесконечно много математических моделей.

1.2. Математическое моделирование и теория систем

Важным понятием математического моделирования является понятие «система». Система в абстрактном смысле – эквивалент понятия математической модели и задается парой множеств U, Y (U – множество входов, Y – множество выходов) и отношением на множестве $U \times Y$, формализующим связь (зависимость) между входами и выходами.

Напомним, что отношением R на. множестве $X \times Y$ (или отношение между X и Y) называется подмножество множества $X \times Y$, т.е. некоторый набор пар $R = \{(x, y)\}$, где $x \in X, y \in Y$. Например, функция $y = x^2$ может быть представлена как отношение между множествами $X = (-\infty, \infty)$, $Y = [0, \infty)$, включающее те пары (x, y), для которых $y = x^2$.

Входы (входные сигналы) формализуют воздействия, которые можно прикладывать к системе, а выходы (выходные сигналы) - это совокупность всех данных (величин), доступных наблюдению или измерению. Например, при построении математической модели участка электрической цепи можно в качестве множеств U, Y входных и выходных сигналов взять множество непрерывных вещественнозначных функций, заданных на числовой оси R^1. Тогда в качестве отношения S будет выступать отношение линейной связи между числовыми значениями силы тока и разности потенциалов:

$$\frac{\Delta\varphi(t)}{i(t)} = k = \text{const}.$$

Для системы, описывающей движение материальной точки по закону Ньютона, в качестве U – множества входных функций также можно взять множество непрерывных функций на R^1, но тогда в качестве выходного множества Y следует брать множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, а отношение S устанавливает линейную связь между входной функцией и второй производной от выходной функции по времени.

Соединение систем также является системой и задается отношением. Например, последовательное соединение систем $S_1 \subset U_1 \times Y_1$ и $S_2 \subset U_2 \times Y_2$ есть отношение $S \subset U_1 \times Y_2$, такое что $(u_1, y_2) \in S$, если существуют $y_1 \in Y_1$, $u_2 \in U_2$, удовлетворяющие условиям $(u_1, y_1) \in S_1$, $(u_1, y_2) \in R$, $(u_2, y_2) \in S_2$, где $R \subset Y_1 \times U_2$ – отношение, определяющее связь между y_1 и u_2. Таким образом можно определять сколь угодно сложные системы, исходя из простых, которые становятся частями (подсистемами) составной системы.

Приведенное определение отражает в абстрактном виде особенности, присущие нашему интуитивному представлению о системе: целостность и структурированность. Целостность (единство) означает, что система отделена от внешней среды; среда может оказывать на нее действие (акцию) через входы и воспринимать отклик (реакцию) на эти действия через выходы.

Структурированность означает, что система может быть разделена внутри на несколько подсистем, связанных и взаимодействующих между собой так же, как целая система взаимодействует с внешней средой.

Третье свойство, присущее системе, — целенаправленность, требует задания некоторой цели, достижение которой говорит о правильной работе системы. Цель также задается некоторым отношением, которое иногда включают в математическую модель реальной системы, а иногда - нет в зависимости от удобства для решения конкретной задачи.

Приведенное выше формальное определение весьма общо; под него подпадают практически все виды математических моделей систем: дифференциальные и разностные уравнения, регрессионные модели, системы массового обслуживания, конечные и стохастические автоматы, дедуктивные системы (исчисления) и т.д. Можно трактовать как систему любой преобразователь входных данных в выходные (рис. 1.1, а). Например, системой можно назвать процесс решения любой задачи. При этом входами будут являться исходные данные, выходами - результаты, а целью – правильное решение (рис. 1.1, 6). Такой подход к системе подчеркивает ее целенаправленность и ведет свое происхождение от исследования операций – научной дисциплины, занимающейся разработкой количественных методов обоснования решений. Основное понятие здесь – операция, т.е. действие, которое подвергается исследованию (проектирование, конструирование, управление, экономическая деятельность и т,д.). Операция соответствует некоторой системе. Входами этой системы являются элементы принимаемого решения о проводимой операции, выходами — результаты проведения операции (показатели ее эффективности (рис. 1.1, в).

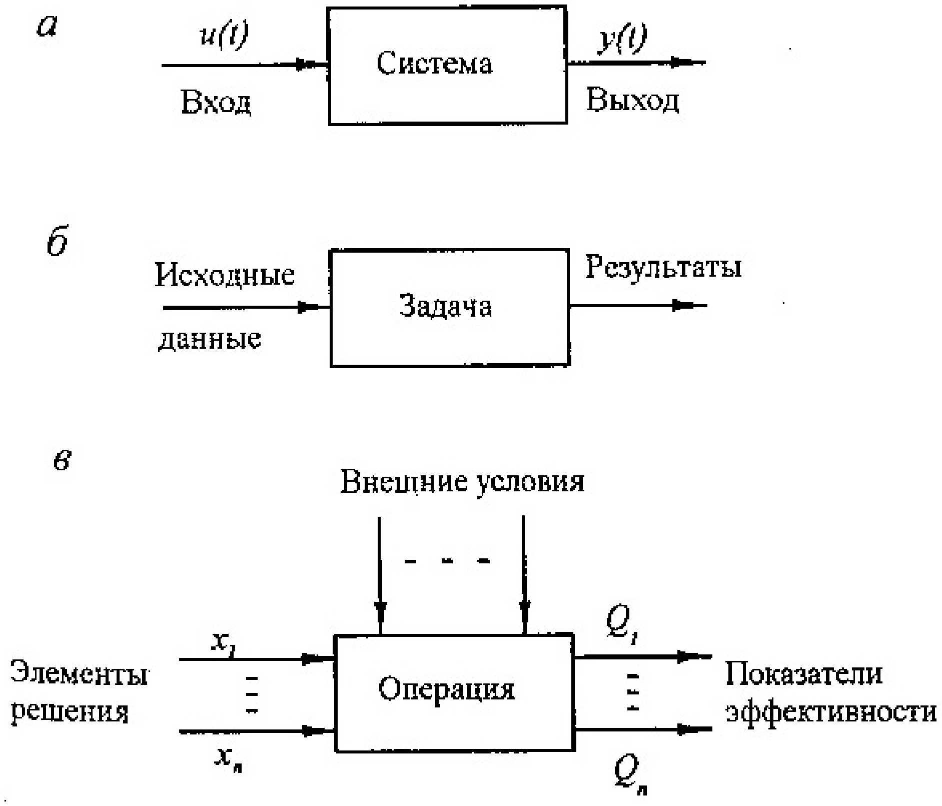

Рисунок 1.1 – Иллюстрация понятия системы

В дальнейшем будем рассматривать так называемые временные системы, функционирование которых – это процесс, разворачивающийся во времени, т.е. множества возможных входов и выходов $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{Y}$ – это множества функций времени со значениями соответственно во множествах U, Y:

$$\mathbf{U} = \{u : T \to U\}, \mathbf{Y} = \{y : T \to Y\}$$

где T – множество моментов времени, на котором рассматривается система.

Система называется функциональной (определенной), если каждой входной функции $u(t)$ соответствует единственная выходная функция $y(t)$. В противном случае система называется неопределенной. Неопределенность обычно возникает из-за неполноты информации о внешних условиях работы системы. Важным свойством, присущим реальным системам, является причинность. Она означает, что если входные функции $u_1(s)$ и $u_2(s)$ совпадают при $s \le t$, т.е. $u_1(s) = u_2(s)$ при $s \le t$, то соответствующие выходные функции удовлетворяют условию $y_1(t) = y_2(t)$, т.е. «настоящее не зависит от будущего при заданном прошлом».

Числовые величины, связанные с системой, делятся на переменные и параметры. Параметры - это величины, которые можно считать постоянными в промежутке времени рассмотрения системы. Остальные числовые величины являются переменными. Значения переменных и параметров определяют количественную информацию о системе. Оставшаяся информация, качественная, определяет структуру системы. Различие между переменными и параметрами, а также между параметрами и структурой может быть условным, однако знание о нем может быть полезным в методическом отношении. Так, типовым приемом построения математической модели системы является параметризация – выбор в качестве математическом модели семейства соотношений, зависящих от конечного (обычно небольшого) количества чисел - параметров.

На ранних этапах развития теории систем и кибернетики в 60 – 70-х гг. XX в., был популярен подходк рассмотрению системы как «черного ящика» (“black box”), когда существующая внутренняя структура системы игнорировалась, а структура и соответствующие параметры ее математической модели выбирались по результатам экспериментов с этой системой, исходя из наилучшей точности описания ее поведения. При отсутствии априорной информации о системе такой подход является единственно возможным. Однако при наличии априорной информации более предпочтителен и современен подход «серого ящика» (“grey box”), при котором структура модели задается из физических соображений, а цель экспериментов с объектом состоит в определении параметров модели.

Для простых систем, подобных уже упоминавшимся в примерах о материальной точке и участке электрической цепи, выбор структуры (например, в виде (1.1)) обычно не вызывает сомнений (если, конечно, нет необходимости учитывать дополнительные факторы, например распределенность массы и заряда, квантовые и релятивистские эффекты) и построение математической модели конкретной системы состоит в оценке единственного параметра k по результатам эксперимента.

Однако, если количество соотношений, описывающих систему, велико, может оказаться разумным учесть только небольшое число основных из них, а остальные задать в упрощенном виде или вообще пренебречь ими. При этом из эксперимента будут определены как параметры, так и (частично) структура, т.е. будет использовано сочетание подходов «серого ящика» и «черного ящика».

Что касается определенности (детерминизма) системы, то может оказаться, что ее нет даже после определения всех параметров математической модели, но неопределенность устраняется, если ввести в математическую модель системы некоторые дополнительные скрытые (латентные) параметры $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Например, закон Ньютона не определяет однозначно движения точки: для этого требуется задать дополнительно два параметра – положение и скорость точки в какой-либо момент времени, например $a_0 = y(0), a_1 = dy/dt|_{t=0}$. В общем случае, формально, это означает, что выход модели задается некоторой функцией от входа системы и от набора скрытых параметров $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$, т.е.

$$y = R(u, a) \tag{1.2}$$

Набор a называется также глобальным состоянием системы, а функция R – глобальной реакцией системы.

В теории систем доказывается, что представление (1.2) всегда существует, если не накладывать ограничений на функцию реакции R. Однако для временных систем в этом результате мало смысла, так как представление (1.2) должно согласовываться с временной структурой системы, в частности сохранять ее причинность. Обеспечить нужное согласование при фиксированных параметрах и часто не представляется возможным.

Однако ничего страшного не произойдет, если разрешить скрытым параметрам изменяться во времени, т.е. стать переменными. Нужно только, чтобы зависимость скрытых параметров от времени поддавалась описанию, т.е. включалась в математическую модель системы. Таким образом, мы приходим к понятиям переменные состояния и моделей состояния, играющих важную роль в естествознании и технике.

Системы, допускающие описание в пространстве состояний, называются системами с памятью, или динамическими системами.

В заключение параграфа, отметим, что иногда при исследовании системы, не удается однозначно определить, какие из переменных, связывающих систему с внешним миром, являются входными: а какие – выходными. Например, если участок цепи рассматривается как часть сложной электрической или электронной схемы, то исследователь не может произвольно, по своему усмотрению, менять напряжение на участке. Эксперимент со схемой может состоять лишь в подаче и измерении сигналов на некоторых узлах схемы (так называемые «порты» или «терминалы»), причем входные и выходные порты могут меняться от эксперимента к эксперименту. Эти и другие соображения мотивировали появление более общего, так называемого бихевиористского подхода в теории систем, особенно удобного для изучения взаимосвязанных систем. Бихевиористская модель системы имеет вид m-арного отношения

$$S \subset W_1 \times W_2 \times \ldots W_m, \tag{1.3}$$

между явными (внешними) переменными сигналами $w_1, w_2, \ldots w_m$, среди которых могут быть как входные, так и выходные сигналы. Разумеется, в системе могут быть и патентные (скрытые) переменные.

Бихевиористские модели являются более общими, чем модели состояния.

1.3. Математическое моделирование и системный анализ

Системный анализ в широком смысле - это методология (совокупность методических приемов) постановки и решения задач построения и исследования систем, тесно связанная с математическим моделированием. В более узком смысле системный анализ – методология формализации сложных (трудно формализуемых, плохо структурированных) задач.

Системный анализ возник как обобщение приемов, накопленных в задачах исследования операций и управления в технике, экономике, в военном деле. Соответствующие модели и методы заимствовались из математической статистики, математического программирования, теории игр: теории массового обслуживания, теории автоматического управления. Фундаментом перечисленных дисциплин является теория систем.

Остановимся на различии в употреблении терминов «системный анализ» и «системный подход» Системный анализ – это целенаправленная творческая деятельность человека, на основе которой составляется представление исследуемого объекта в виде системы. Системный анализ характеризуется упорядоченным составом методических приемов исследования. Что касается термина «системный подход», то традиция его применения связана с исследованиями, проводимыми многоаспектно, комплексно, при изучении с разных сторон предмета или явления. Этот подход предполагает, что все частные задачи, решаемые на уровне подсистем, должны быть увязаны между собой и решаться с позиции целого (принцип системности). Системный анализ – более конструктивное направление, содержащее методику разделения процессов на этапы и подэтапы, систем на подсистемы, целей на подцели и т.д.

В обширной литературе по системному анализу содержится большое число рекомендаций и методических приемов построения математических моделей и принятия решений на их основе. Выделяя общие части различных приемов и рассматривая их во взаимодействии, можно сформулировать последовательность действий (этапов) при постановке и решении задач, которую будем называть методикой математического моделирования. В упрощенном виде один из возможных вариантов такой методики представлен на схеме рис. 1.2. Эта методика помогает более осмысленно и грамотно ставить и решать прикладные задачи. Опыт показал, что она полезна и в преподавании предмета, легко воспринимается обучающимися с различной степенью подготовки. Если на каком-то этапе возникают затруднения, то нужно вернуться на один из предыдущих этапов и изменить (модифицировать) его. Если и это не помогает, то, значит, задача оказалась слишком сложной и ее нужно разбить на несколько более простых подзадач, т.е. провести декомпозицию (см. п. 1.4}. Каждую из полученных подзадач решают по той же методике. Для иллюстрации применения методики ,математического моделирования приведем пример.

Пример 1.3.1. Рассмотрим автомобиль, находящийся перед гаражом на некотором расстоянии от него (рис. 1.3, а). Требуется поставить автомобиль в гараж и сделать это по возможности наилучшим образом. При решении попытаемся руководствоваться алгоритмом системного анализа (см. рис 1.2).

Этап 1. Система – автомобиль и гараж (автомобиль, приближающийся к гаражу).

Этап 2. Вход – сила тяги двигателя. Выход – пройденный путь.

Этап 3. Цель – автомобиль должен проехать заданный путь и затормозить.

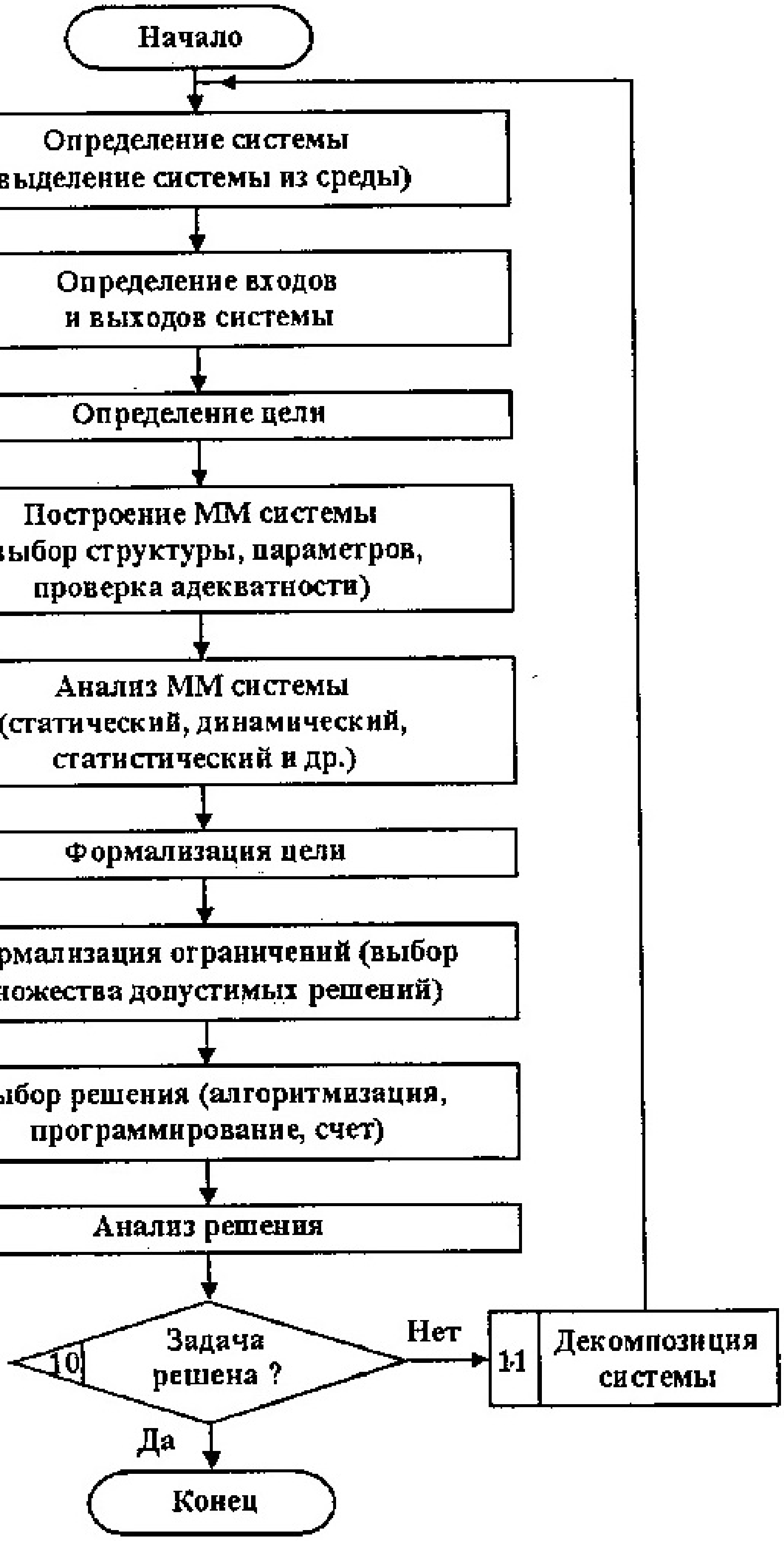

Рисунок 1.2 – Алгоритм математического моделирования

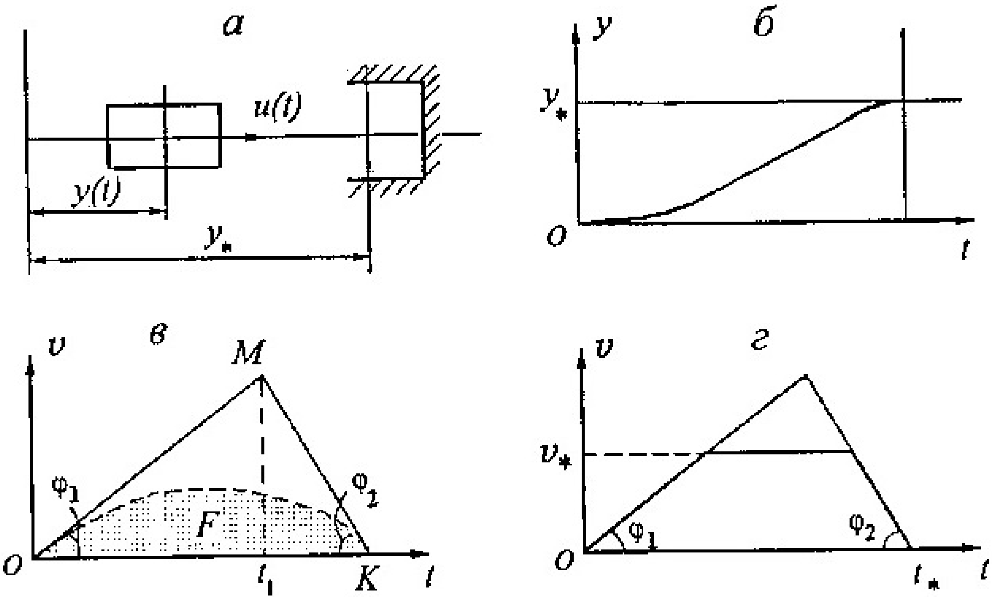

Рисунок 1.3 – Графическое решение задачи торможения автомобиля

Этап 4. Построение ММ начинается с обозначения всех величин (переменных и постоянных), существенных для задачи. Введем следующие обозначения:

$u(t)$ – сила тяги в момент времени t (входная переменная);

$y(t)$ – путь, пройденный к моменту t (выходная переменная);

y_* – расстояние от автомобиля до гаража (параметр).

Затем выписываются все уравнения и соотношения, существующие между введенными величинами, как в школьных задачках на составление уравнений. Если возможных уравнений несколько, выбирают простейшее. В нашей задаче - это уравнение динамики (второй закон Ньютона)

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}=u(t), \tag{1.4}$$

где m – масса автомобиля, а также начальные условия

$$y(0)=0, \dot{y}(0)=0. \tag{1.5}$$

Здесь и далее через $\dot{y}(t)$ будем обозначать производную по времени от функции $y(t)$. Будем также использовать обозначение $\dot{y}(t)=py(t)$.

Этап 5. Модель (1.4), (1.5) достаточно хорошо изучена и в детальном анализе не нуждаются. Укажем лишь, что она адекватна, если можно пренебречь размерами автомобиля, ограничением на его мощность, силами трения и сопротивления и другими более второстепенными факторами.

Этап 6. Простейший вариант формализации цели

$$y(t_*) = y_*, \tag{1.6}$$

где t_* – момент остановки, который оказывается неудовлетворительным, поскольку в (1.6) не формализовано само требование остановки $\dot{y}(t_*) = 0$, и, значит, не ясно, как система будет ,вести себя при $t \geq t_*$. Правильнее задать цель соотношением

$$y(t_*) = y_*, \text{ при } t \geq t_*, \tag{1.7}$$

из которого следует, в частности, что $\dot{y}(t) = 0$ при $t > t_*$. На первый взгляд, задача поставлена и можно, пропуская этап 7 (см. рис. 1.2), переходить к ее решению, т.е. к этапу 8. Но, оказывается, однозначного решения так поставленная задача не имеет: здравый смысл подсказывает, что существует бесконечно много способов достичь цели (1.7). Значит, нужно дополнить цель правилом отбора способов, позволяющим ответить на вопрос, какой способ лучше. Зададимся следующим разумным правилом: тот способ считается лучшим, который позволяет быстрее достичь цели. Формально новую цель можно записать так:

$$\min\{t_* : y(t) = y_*, t \geq t_*\} \tag{1.8}$$

Но теперь физические соображения показывают, что решение поставленной задачи тривиально: искомый минимум в (1.3) равен нулю! Действительно, выбрав достаточно большую силу тяги, можно придать автомобилю как математическому объекту, описываемому ММ (1.4), (1.5), сколь угодно большое ускорение и сколь угодно быстро переместить его на любое заданное расстояние. Видимо, требуется ввести какие-то ограничения, исключающие бессмысленные решения. Можно было бы усложнить ММ системы: учесть ограниченную мощность двигателя, его инерционность, силы трения и т.д. Однако разумнее попытаться остаться в рамках ММ (1.4), (1.5), (1.8), введя дополнительно лишь ограничения на силу тяги:

$$-a \le u(t) \le b. \qquad (1.9)$$

Таким образом, чтобы придать задаче смысл, нам пришлось возвратиться на этап 7.

Этап 8. Для решения задачи можно было бы применить мощный и хорошо разработанный аппарат теории оптимального управления (вариационное исчисление, принцип максимума Понтрягина и др. Однако сначала надо попытаться решить задачу элементарными средствами. Для этого часто бывает полезно перейти к геометрической интерпретации задачи, чтобы привлечь нашу геометрическую интуицию. Естественная интерпретация, в координатах «время — пройденный путь» (рис. 1.3, б), не дает ключа к решению, так как не позволяет в удобной форме представить ограничения на допустимые траектории движения автомобиля. Дело меняется коренным образом, если перейти к другой ММ. Введем новую переменную $v(t) = \dot{y}(t)$ (скорость). Тогда вместо (1.4),(1.5) возникает уравнение

$$m\dot{v} = u, \quad v(0) = 0, \qquad (1.10)$$

цель (1.8) запишется в виде

$$\min\left\{t_* : \int_0^t v(s)ds = y_*,\, t \ge t_*\right\} \qquad (1.11)$$

а ограничения (1.9) превратятся в ограничения на скорость изменения новой переменной:

$$-a/m \le \dot{v}(t) \le b/m. \qquad (1.12)$$

Итак, мы изменили выход системы, из-за чего пришлось заново пройти этапы 2 – 6.

Геометрическая интерпретация движения системы (1.10) – (1.12) в плоскости $\{v, t\}$ изображена на рис. 1.3, в. Из него видно, что для решения задачи нужно найти кривую $v(t)$ $(t \ge 0)$ с заданной площадью фигуры F под ней и наименьшей возможной координатой правого конца t_*, лежащую в треугольнике ОМК с заданными углами наклона φ_1, φ_2 боковых сторон (в соответствии с (1.12) $tg\,\varphi_1 = b/m$ при $tg\,\varphi_2 = a/m$).

Геометрическое решение очевидно: фигура F должна заполнять весь треугольник ОМК. Это значит, что автомобиль должен двигаться с максимальным ускорением до некоторого момента t_1, затем включить максимальное торможение и в момент t_* выключить двигатель. Формулы для определения момента переключения t_1 выводятся из элементарного расчета треугольника ОМК по заданной площади и углам. Они имеют вид

$$t_1 = \sqrt{\frac{2may_*}{b(a+b)}}, \quad t_* = \sqrt{\frac{2m(a+b)y_*}{ab}} \qquad (1\ 13)$$

Рассмотренная геометрическая модель позволяет решать и более сложные задачи. Например, если по соображениям безопасности нужно учесть ограничение на максимальную скорость: $|\dot{y}(t)| \le v^*$, то легко усмотреть решение из рис. 1.3: график оптимальной траектории представляет собой трапецию.

Еще более сложные задачи (например, при введении ограничений на расход топлива в виде $\int_0^\infty |u(t)| dt \le A$ не имеют простого аналитического решения, подобного (1.13), и практически решаются лишь численно, с привлечением математического аппарата приближенной минимизации функционалов. Однако и для них решение упрощенной задачи не теряет важности, поскольку оно позволяет получить начальное приближение к решению сложной задачи, установить качественные свойства решения сложной задачи, выявить факторы, наиболее сильно влияющие на решение сложной задачи, и, главное, соотнести результаты математического исследования со здравым смыслом.

Резюмируя сказанное, можно дать совет изучающему математическое моделирование: «Не решай сложную задачу, не решив сначала, более простую».

1.4. Сложные системы и декомпозиция

Известно, что системный анализ родился как метод исследования и проектирования сложных систем. Что же такое «сложная» система? Понятие это неформальное, и обычно, говоря о сложных системах, перечисляют их основные особенности:

- наличие большого числа разнородных элементов (подсистем);

— сложный характер, неоднородность связей между подсистемами;

- сложность функций, выполняемых системой;

— наличие неопределенности в описании системы;

— сложность определения (организации) требуемого управляющего воздействия на систему и т.д.

Однако понятно, что каждая из этих особенностей может оказаться существенной или несущественной: все зависит от конкретной ситуации и целей исследования. Поэтому более универсальный способ выделения класса сложных систем связан со сложностью самого процесса исследования системы. Если методика математического моделирования (см. рис. 1.2) приводит к успеху сразу же, «за один проход», то нет оснований называть систему «сложной». Введение этого термина оправдано, если решить задачу в исходном виде не удается. В этом случае она разбивается на несколько вспомогательных подзадач, решаемых по отдельности. Такой прием называется декомпозицией и является основным методом исследования сложных систем.

При декомпозиции исходная система делится на подсистемы, а цель – на подцели. Далее для решения каждой подзадачи пользуются той же методикой, что и для всей системы. Если в ходе решения (а возможно, и до того) какие-то из подзадач окажутся слишком сложными, то снова проводится декомпозиция: возникают подзадачи следующего уровня и т.д. Результатом этого процесса является структуризация. Исходная система приобретает иерархическую (многоуровневую) структуру. Соответствующая структура возникает и в множестве подцелей; она называется деревом целей (рис.1.4), поскольку представляет собой граф типа, дерева (без циклов).

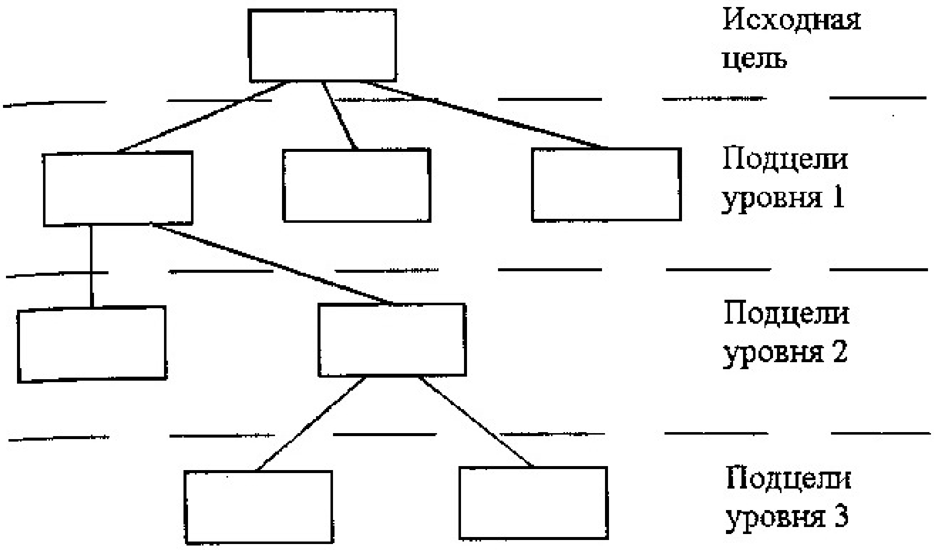

Рисунок 1.4 – Декомпозиция сложных систем

Приведенное понятие декомпозиции вполне соответствует идее структурного программирования. Создание сложных программных систем - одна из важнейших областей применения системного анализа. Отметим лишь, что раздробление системы на подсистемы обычно проводится по принципу «слабых» связей, т.е. так, чтобы связи между подсистемами были слабее, чем связи между элементами каждой подсистемы.

В сложных системах часто приходится проводить несколько вариантов декомпозиции и соответственно строить несколько деревьев целей. Это обычно связано с наличием нескольких критериев функционирования системы. Возникающие при этом задачи многокритериального выбора изучаются в теории принятия решений. Успех декомпозиции часто определяется интуицией и опытом исследователя. Человек, по данным психологов, может мысленным взором охватить структуру декомпозированной системы, если на каждом уровне возникает не более чем 5 ± 2 подзадач.