

Лекция 6. Хаотические системы (продолжение), нелинейный анализ.

6.1 Определение хаотической системы.

Терминология в области хаотических моделей еще не устоялась, и существует несколько различных определений хаотических систем. Приведем одно из простейших.

Рассмотрим динамическую систему в непрерывном времени

$$\dot{x} = F(x), \quad (6.1)$$

где $x = x(t) \in R^n$ – вектор состояния системы, $0 \leq t < \infty$.

Определение 1. Замкнутое множество $\Omega \supset R^n$ называется аттрактором системы (3.64), если: а) существует такое открытое множество $\Omega_0 \subset \Omega$, что все траектории $x(t)$ системы (6.1), начинающиеся в Ω_0 , определены при всех $t \geq 0$ и стремятся к Ω при $t \rightarrow \infty$; б) никакое собственное подмножество Ω этим свойством не обладает.

Определение 2. Аттрактор называется странным, если он ограничен и любая траектория, начинающаяся на нем, неустойчива по Ляпунову.

Определение 3. Система называется хаотической, если у нее существует хотя бы один странный аттрактор.

Аналогичные определения даются для систем, дискретных по времени:

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.2)$$

Неустойчивость по Ляпунову характеризует основное свойство хаотических колебаний, называемое «сверхчувствительностью», или «чувствительной зависимостью» от начальных условий: любые две сколь угодно близкие траектории обязательно удаляются друг от друга на конечное расстояние.

Для некоторых общепризнанных хаотических систем (например, для системы Лоренца) доказательства хаотичности весьма громоздки, хотя численных и экспериментальных подтверждений накоплено предостаточно. Поэтому основным методом изучения хаотических систем остается

численное исследование – имитационное моделирование и оценка различных характеристик. Приведем несколько примеров хаотических систем.

Пример 6.1. Система (цепь) Чуа. Около 15 лет назад специалисты по электронным целям Л. Чуа и Т. Мацумото предложили простую электронную цепь с одним нелинейным элементом, способную генерировать весьма разнообразные, в том числе хаотические, колебания.

Электрическая схема цепи Чуа представлена на рис. 6.1. а. Эта цепь содержит нелинейный резистор R_c (диод Чуа), вольт-амперная характеристика которого отражена на рис. 6.1, б. Нетрудно убедиться, что уравнения Кирхгофа для этой цепи имеют вид

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \frac{1}{C_1} \left(\frac{u_2 - u_1}{R} - i_R(u_1) \right), \\ \frac{du_2}{dt} = \frac{1}{C_2} \left(\frac{u_1 - u_2}{R} + i_3 \right), \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{1}{L} (u_2 + R_0 i_3). \end{cases}$$

Пренебрегая активным сопротивлением катушки индуктивности и переходя к безразмерным величинам, получим математическую модель цепи Чуа в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = p(y - f(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -qy, \end{cases} \quad (6.3)$$

где x, y, z – безразмерные переменные, пропорциональные напряжениям на емкостях и току через индуктивность; $f(x) = 0.5(M_1 - M_0)(|x + 1| - |x - 1|) + M_1 x$. При $p = 9$, $q = 14.3$, $M_1 = 6/7$, $M_0 = 5/7$ траектории системы (6.3) демонстрируют хаотическое поведение (рис. 6.2., 6.3).

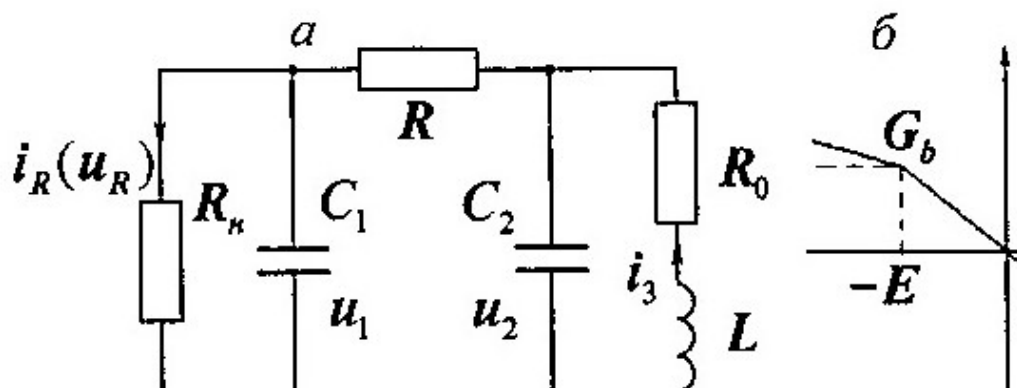


Рисунок 6.1 – Электрическая схема Чуа и вольт-амперная характеристика нелинейного резистора

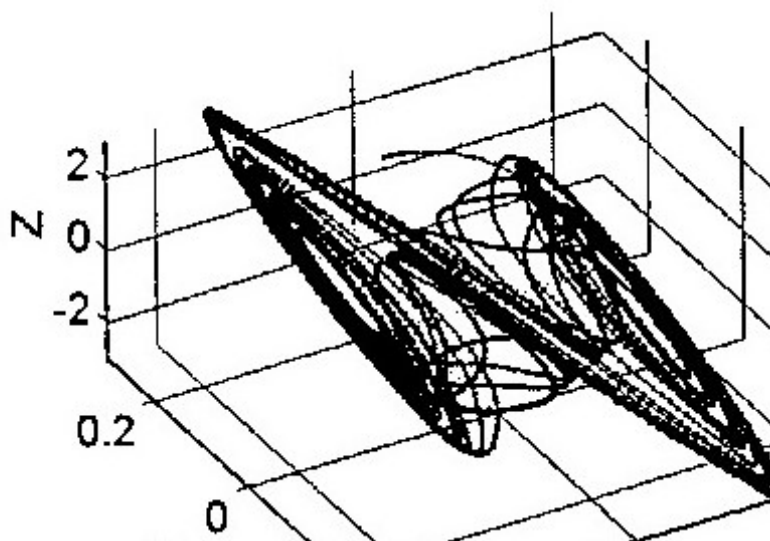


Рисунок 6.2 – Аттрактор системы Чуа

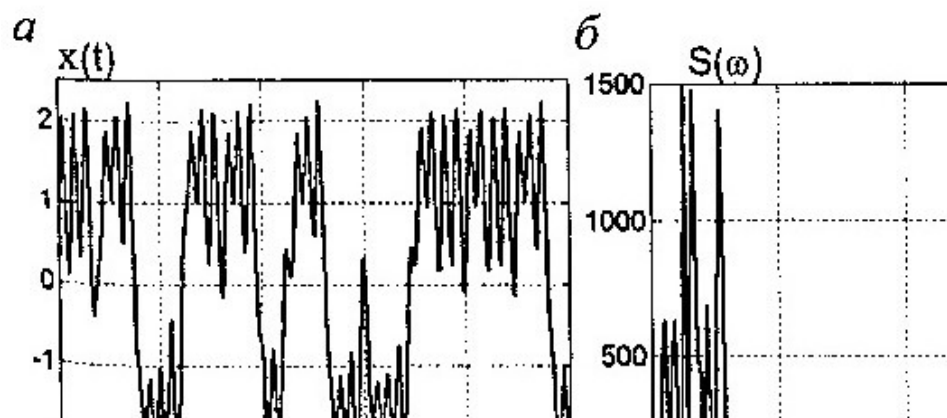


Рисунок 6.3 – Хаотический процесс в системе Чуа и его спектр

Пример 6.2. Дискретная система с квадратичной правой частью

$$x_{k+1} = \lambda x_k (1 - x_k), \quad x_k \in R^1, \quad (6.4)$$

гостроенная с помощью так называемого логистического отображения $F(x) = \lambda x(1-x)$, является хаотической при $3.57 < \lambda < 4$. Ее аттрактором является отрезок $[0, 1]$.

6.2 Критерии хаотичности

Как уже было сказано, основным критерием хаотичности является локальная неустойчивость, т.е. разбегание близких вначале траекторий. Соответственно основной характеристикой хаотичности является скорость разбегания, определяемая так называемым старшим показателем Ляпунова. Показатели Ляпунова определяются для заданной «опорной» траектории $\bar{x}(t)$ системы (3.64) с начальным условием $\bar{x}(0) = x_0$. Для этого составляется уравнение в вариациях (система, линеаризованная вблизи $\bar{x}(t)$):

$$\frac{d}{dt} \delta x = W(t) \delta x, \quad (6.5)$$

где $\delta x = x - \bar{x}(t)$; $W(t) = \frac{\partial F(x(t))}{\partial x}$ – матрица Якоби системы (6.1) (матрица частных производных от правых частей), вычисленная вдоль решения $\bar{x}(t)$. Задав начальное отклонение $z = \delta x(0)$, можно вычислить величину

$$\alpha(x_0, z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(t)\|}{\|z\|}, \quad (6.6)$$

характеризующую скорость экспоненциального роста решений (6.5) в направлении z и называемую характеристическим показателем (ляпуновской экспонентой) в направлении z .

Еще А.М. Ляпунов показал, что при небольших дополнительных предположениях предел в (6.6) существует, конечен для любого $z \in R^n$ и не зависит от начального выбора точки x_0 на траектории $x(t)$. Более того, число различных характеристических показателей конечно, их можно пронумеровать в порядке убывания $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ и существует базис $z_i \in R^n$, $i = 1, \dots, n$, для которого $\alpha(x_0, z_i) = \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$.

Наиболее важен старший ляпуновский показатель α_1 . Если $\alpha_1 > 0$ вдоль ограниченного решения $\bar{x}(t)$, плотного в аттракторе Ω , то это решение неустойчиво по Ляпунову, а аттрактор является странным. При этом величина α_1 характеризует степень неустойчивости, или, другими словами, показатель экспоненциальной чувствительности к начальным данным. Для линейной системы с постоянной матрицей $\dot{x} = Ax$ и нулевого опорного решения $\bar{x}(t) = 0$, очевидно, $\alpha_1 = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A)$, т.е. $|\alpha_1|$ совпадает с обычной степенью устойчивости (или неустойчивости) системы.

Показатели Ляпунова характеризуют прогнозируемость траекторий системы. Действительно, траектория $\bar{x}(t)$ аппроксимируется через время T другой траекторией с погрешностью Δ , если

$$T \leq \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{\Delta}{\varepsilon}, \quad (6.7)$$

где ε – начальная погрешность. Следовательно, хаотическую траекторию можно спрогнозировать с заданной точностью на некоторое время вперед. Это принципиально отличает хаотические системы как модели неопределенности от стохастических систем в которых ошибка прогноза может, вообще говоря, принимать сколь угодно большие значения, даже при сколь угодно малом горизонте (время прогноза).

Другой важной характеристикой хаотической системы является фрактальная размерность аттрактора, характеризующая его «густоту» или «пористость». Для ее подсчета аттрактор Ω покрывается кубиками размера ε . Пусть $N(\varepsilon)$ – количество кубиков в покрытии. Вычислим величину

$$\mu(d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \varepsilon^d. \quad (6.8)$$

Можно показать, что существует число $d_f > 0$, такое что $\mu(d) = +\infty$ при $d < d_f$, $\mu(d) = 0$ при $d > d_f$. Это число называется фрактальной размерностью, или емкостью множества Ω . Емкость можно определить из соотношения

$$d_f = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log \varepsilon}. \quad (6.9)$$

Можно показать, что если множество Ω есть точка, гладкая кривая или двумерная поверхность, то d_f будет равна 0, 1 или 2 соответственно. Однако есть множества, у которых d_f – дробная величина. Такие множества были названы Б. Мандельбротом фрактальными, или фракталами. Примерами фракталов являются странные аттракторы: для системы Лоренца $d_f \approx 2.07$, а для цепи Чуа $d_f \approx 2.81$. Доказано, что поведение траекторий на аттракторе, имеющем фрактальную размерность d_f может быть описано моделью в пространстве состояний с размерностью, не превышающей $2d_f + 1$.

6.3. Зачем нужны хаотические модели?

Из предыдущего ясно, что хаотические модели следует использовать для описания непериодических колебательных процессов с непостоянными, меняющимися характеристиками (например, частотой и фазой). Существующие методы позволяют оценивать эти характеристики по результатам измерений. При этом такая величина как частота колебаний становится «нечеткой» и уступает место спектру, который является непрерывным. Вводятся новые важные величины: старший ляпуновский показатель (степень неустойчивости), характеризующий скорость разбегания траектории и, следовательно, время прогнозируемости процесса; фронтальная размерность, характеризующая «пористость» клубка траекторий. Важно, что известные хаотические модели имеют небольшое число параметров, а процессы в них обладают малой (несколько единиц) фрактальной размерностью. Это повышает надежность и прогнозирующую силу моделей. Перечислим некоторые из уже известных применений хаотических моделей.

Описание нерегулярного поведения реальных систем. На сегодняшний день известен целый ряд реальных физических устройств и процессов,

проявляющих при некоторых условиях хаотическое поведение. Приведем несколько примеров:

- газовые или полупроводниковые лазеры в так называемых многомодовых режимах;
- механические системы, состоящие из нескольких связанных осцилляторов (например, маятников), а также системы с ударами и люфтами;
- электронные схемы с активными элементами, например, полупроводниковыми приборами с отрицательным дифференциальным сопротивлением (такими как туннельные диоды, диоды Ганна и та.);
- химические и физико-химические реакции с нелинейной кинетикой;
- временные ряды в экономике и финансах (например, бизнес-циклы, цены на акции, обменные курсы валют. Заметим, что в экономических и финансовых приложениях хаотические модели в последнее время потеснили традиционные для этих областей стохастические модели.

Генерация нерегулярных сигналов. Во многих технических системах возникает необходимость использования псевдослучайных чисел и сигналов. В качестве генераторов псевдослучайных чисел можно использовать хаотические системы.

Простейший подход к построению хаотических генераторов состоит в том, что берется динамическая система, описываемая одной из типовых хаотических моделей, и по внешнему виду траекторий выбирается та, в которой качественный характер колебаний наиболее близок к желаемому. После этого путем подбора параметров моделей устанавливаются желаемые качественные характеристики колебаний (амплитуда, спектр и т.д.). Использование характеристик хаотической динамики (показатели Ляпунова, фрактальные размерности и т.п.) позволяет задавать дополнительные свойства шумов и помех при их генерации. Заметим, что «на глаз» квазипериодические колебания с большим числом составляющих гармоник и хаотические колебания бывает трудно различить. В то же время, как и при моделировании нерегулярных процессов, малая размерность и малое число

параметров хаотических моделей дают им дополнительные преимущества перед линейными моделями с большим числом гармоник.

Синхронизация нерегулярных колебаний и управление ими. Двойственность природы хаотических систем (детерминированные системы с хаотическим поведением) приводит к новым неожиданным их применениям. Например, две хаотические системы можно заставить колебаться синхронно (в одной фазе), если подавать на одну или на обе системы сигнал обратной связи по ошибке рассогласования. Использование этого эффекта, например, в технике связи позволяет использовать хаотический несущий сигнал вместо периодического, что в свою очередь дает возможность повысить надежность и скрытность процесса передачи сообщений.

Поясним идею управляемой синхронизации для упрощенного случая, когда ведущая система (эталонный генератор) описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x), \quad (6.10)$$

а ведомая (управляемый генератор) – уравнением

$$\dot{z} = f(z) + u(t), \quad (6.11)$$

где x , z , u – n -мерные векторы. Выбирая вектор обратной связи $u(t)$ пропорциональным ошибке

$$u(t) = -Ke(t), \quad (6.12)$$

где $e = x - z$ – вектор ошибок, $K > 0$ – коэффициент усиления, получим уравнение ошибок:

$$\dot{e} = f(x(t)) - f(x(t) - e) - Ke \quad (6.13)$$

в котором $x(t)$ – заданная функция времени, являющаяся решением (3.76).

Если матрица Якоби $A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$ ограничена в некоторой области Ω , содержащей решение системы (6.10) – (6.12), то легко подобрать такое $K > 0$, чтобы собственные числа симметричной матрицы $A(x) + A^T(x) - 2KI_n$ (где I_n – единичная $n \times n$ -матрица) лежали левее мнимой оси при $x \in \Omega$. При

этом система (6.10) – (6.12) будет обладать свойством так называемой конвергентности в Ω : все ее траектории, лежащие в Ω , сходятся при $t \rightarrow \infty$ к единственному ограниченному решению. Поскольку $e(t) \equiv 0$ является решением (6.13) то к нему и сходятся все траектории. Таким образом, решения систем (6.10) и (6.11) неограниченно сближаются, что и означает синхронизацию двух систем. При этом поведение каждой из систем может быть хаотическим и оставаться таковым.

6.4 Линейные или нелинейные?

Часто методы теории нелинейных систем создаются путем аналогий с линейной теорией или сведением нелинейной задачи к линейной.

Построение нелинейной теории на «линейном» фундаменте порождается представлением о линейной системе как о простейшем классе систем, а о гармоническом сигнале как о простейшем виде сигналов.

Например, подход теории абсолютной устойчивости, развиваемый с середины XX века, основан на рассмотрении систем, разделенных на линейную и нелинейную части (такие модели часто называют системами Лурье, см. рис. 6.4), и выведении свойств полной системы из свойств частотной характеристики линейной части (ее реакции на гармонический сигнал) и свойств множества, где лежит график нелинейности. На таком подходе основаны и современные частотные методы нелинейного анализа. Аналогично в задачах синтеза приобрел популярность метод линеаризации обратной связью (“feedback linearization”), основанный на преобразовании модели нелинейной системы к линейной форме при помощи нелинейных замен координат и обратных связей с последующим применением хорошо разработанных методов синтеза линейных систем.

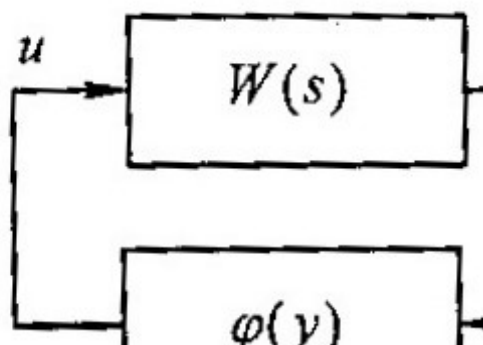


Рисунок 6.4 – Система Лурье

В 80-е годы возникла новая идея: не опираться на анализ частотных свойств линейной части модели, а развивать «частотную философию» для исходной нелинейной системы. Однако и этот подход имеет границы применимости: если на величину управляющих сигналов или на функции обратной связи наложены ограничения, то «частотная философия» и линеаризация теряют свою силу. Аналогично в присутствии нерегулярных колебаний гармонические сигналы перестают играть роль простейших сигналов а, применение частотных методов как средства анализа существенно усложняется.

Прежде всего необходимо найти адекватную замену частотной характеристике. Чтобы сделать это, сначала вернемся к классической задаче Лурье об абсолютной устойчивости системы, состоящей из линейной части, описываемой передаточной функцией

$$y = W(p)u, \quad (6.14)$$

и статической нелинейности

$$u = \varphi(y), \quad (6.15)$$

график которой лежит в симметричном секторе

$$|\varphi(y)| \leq K_\varphi |y|. \quad (6.16)$$

Неравенство (6.16) означает, что коэффициент усиления нелинейного блока не превосходит K_φ . Для устойчивости (6.14) – (6.16) достаточно выполнения неравенства

$$K_W K_\varphi < 1, \quad (6.17)$$

где

$$K_W = \max_{\omega} |W(j\omega)| \quad (6.18)$$

Таким образом, для анализа устойчивости представляет интерес не вся амплитудно-частотная характеристика $A(\omega) = |W(j\omega)|$, а только ее максимум K_W , определяемый резонансными свойствами линейной части и достигаемый на одной из резонансных частот. Для практического определения K_W для линейной системы на ее вход следует подать гармонический сигнал $u(t) = \sin \omega t$ и найти ω , реализующую $\max_{\omega} \max_{t \geq 0} |y(t)|$ (начальные условия на систему следует брать нулевыми).

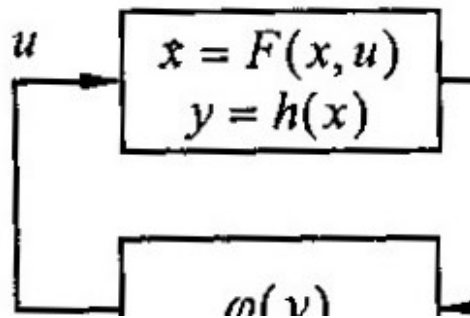


Рисунок 6.5 – Нелинейная система

Пусть теперь линейная модель системы (6.14) заменяется на нелинейную и система описывается дифференциальным уравнением состояния вместе с конечным уравнением выходов (рис. 6.5):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u), \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (6.19)$$

где x – n -мерный вектор состояния системы. Интуитивно ясно, что устойчивость системы (6.19), (6.15), (6.16), как и в линейном случае, должна зависеть от резонансных свойств системы (6.19). Однако изучение резонансных свойств нелинейной системы затруднено, поскольку частота вынужденных колебаний в нелинейной системе зависит от амплитуды входного гармонического сигнала. С ростом амплитуды входа в системе могут возникать сложные, в том числе хаотические режимы, т.е. входной

гармонический сигнал не может в полной мере вскрыть резонансные свойства нелинейной системы.

Задачу определения формы сигнала, обеспечивающего при заданной амплитуде входа максимальную амплитуду выхода, можно поставить как задачу оптимального управления системой (6.19):

$$\max_{|u(t)| \leq \gamma} y^2(t) \quad (6.20)$$

При этом входной сигнал, создающий максимальное возбуждение системы, будет зависеть не только от времени, но и от состояния системы, т.е. иметь вид обратной связи. Величина оптимума в задаче (6.20) зависит от γ квадратично. Поэтому естественно ввести характеристику возбудимости системы ограниченным входным сигналом как величину

$$E(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{Q(\gamma)}, \quad (6.21)$$

где $Q(\gamma)$ – оптимальное значение в задаче (6.20). Для линейных асимптотически устойчивых систем величина (6.21) не зависит от γ , а для нелинейных – представляет собой функцию от γ , которую естественно назвать степенью возбудимости системы.

Решение задачи оптимального управления в общем случае весьма трудоемко даже при использовании эффективных численных методов. Однако для приближенного решения можно воспользоваться известным результатом о возможности приближенной замены оптимального управления на локально-оптимальное, получаемое максимизацией скорости изменения целевого функционала в силу свободной системы (при $u = 0$). Точность такой замены тем выше, чем меньше амплитуда входа γ .

Для вычисления локально-оптимального управления представим первую часть уравнения (6.19) в виде

$$F(x, u) = f(x) + g(x)u + R(x, u) \quad (6.22)$$

где $f(x) = F(x, 0)$, $g(x) = \partial f / \partial u(x, 0)$, а остаточный член $R(x, u)$ и имеет высший порядок малости по u . Скорость изменения целевого функционала $\dot{Q}_t = y^2(t)$ равна

$$\dot{Q}(t) = 2y(\nabla h)^T (f(x) + g(x)u + R(x, u)) \quad (6.23)$$

Пренебрегая величиной $R(x, u)$, видим, что локально-оптимальное значение входа при малых γ равно

$$u(x) = \gamma \operatorname{sign}(h(x) \nabla h(x)^T g(x)) \quad (6.24)$$

Таким образом, для вычисления степени возбудимости системы при малых γ достаточно подавать на вход системы сигнал (6.24) и измерять достигаемую амплитуду выхода. Это можно делать как в физическом (натурном), так и в вычислительном эксперименте. Примеры построенных таким образом графиков степени возбудимости для классических нелинейных систем (уравнения маятника и системы Дуффинга) приведены на рис. 6.6.

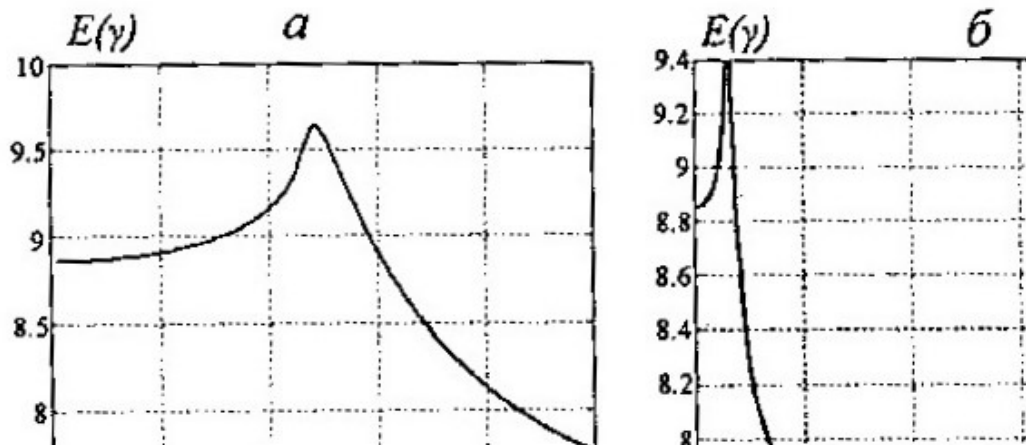


Рисунок 6.6 – Характеристики возбудимости маятника и системы Дуффинга

Полученные графики можно использовать для оценки устойчивости замкнутой системы с нелинейностью в обратной связи. Условия устойчивости аналогичны (6.17):

$$K_F K_\phi < 1. \quad (6.25)$$

При этом роль максимума амплитудно-частотной характеристики играет максимальная степень возбудимости

$$K_F = \max_{\gamma} E(\gamma). \quad (6.26)$$

Исследование динамических свойств систем с помощью непериодических тестовых сигналов представляется весьма перспективным инструментом в теории нелинейных систем.

Другой областью, где гармонические сигналы, линейные системы и спектральные методы традиционно играли и играют ключевую роль, является теория передачи информации (теория связи). Однако и здесь «нелинейная философия» предлагает новые подходы.

Напомним, что в теории связи гармонический сигнал

$$y(t) = a \sin(\omega t + \alpha), \quad (6.26)$$

рассматривается как базовый, простейший. Сигнал может изменяться (модулироваться) путем изменения его параметров – величин a (амплитуда), ω (частота) α (начальная фаза). Например, при частотной модуляции модулирующим параметром является частота ω , которая становится таким образом, переменной, т.е. с системной точки зрения становится сигналом: $\omega = \omega(t)$. Передаваемый модулированный сигнал $y(t)$ может содержать в себе закодированное сообщение. Для передачи сообщения по каналу связи, на стороне приемника сообщение должно восстанавливаться по принимаемому сигналу $\hat{y}(t) = y(t) + \xi(t)$, где $\xi(t)$ – шум (помеха) в канале связи. Выделение полезного сообщения из принимаемого сигнала и является основной задачей теории связи.

В 90-х годах XX века усилился интерес к использованию в качестве несущих сигналов нерегулярных (хаотических) колебаний. Для построения соответствующей теории необходимо сделать решительный шаг: перейти от явного описания сигнала как функции времени к заданию модели системы, генерирующей этот сигнал. Очевидно, например, что генератором

гармонического сигнала (6.26) может служить линейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0. \quad (6.27)$$

Однако для генерации нерегулярных, непериодических сигналов линейные модели непригодны. Следующим шагом к построению новой теории является использование в качестве основных объектов нелинейных генераторов, описываемых дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u), \\ y &= h(x). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Здесь входной вектор $u \in R^m$ может иметь смысл не только входного сигнала, но и модулирующего сигнала, т.е. задавать набор изменяемых параметров генератора. Например, система (6.28) в частном случае может быть системой Лоренца или системой Чуа, а вектор входов может включать часть коэффициентов соответствующего уравнения.

Таким образом, существующие математические методы позволяют решать многие задачи анализа и синтеза нелинейных систем без опоры на «линейные костыли» – гармонические сигналы и линеаризованные модели. Это обстоятельство следует учитывать при выборе модели.

В то же время многие задачи в этой области математического моделирования не решены и даже не поставлены, что открывает широкий простор для дальнейших исследований.