Лекция 4. ВЫБОР СТРУКТУРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОИ МОДЕЛИ

4.1. Классификация моделей

Этап построения математической модели системы разбивается на две части: выбор структуры и выбор параметров. Как было сказано на предыдущих лекциях, структура сложной системы определяется типами моделей каждой ее подсистемы и характером связей (отношений) между ними. Все многообразие имеющихся типов ММ можно классифицировать по нескольким основным признакам, см. табл. 4.1.

Таблица 4.1. Математические модели систем

Статические $y(t)=F(u(t))$	Динамические $y(t)=F(\{u(s), -\infty < s \le t\})$
Дискретные (U,Y,T – конечные (счетные) множества)	Непрерывные (U,Y,T – континуумы (прямые, отрезки, тела в многомерных пространствах)
Детерминироваиные	Стохастические; нечеткие
Сосредоточенные (уравнения конечные (алгебраические или трансцендентные), разностные, обыкновенные, дифференциальные)	Распределенные (уравнения с запаздыванием, в частных производных, интегральные)
Линейные	Нелинейные
Стационарные (параметры не меняются со временем)	Нестационарные (параметры изменяются со временем)

Кроме того, структура модели определяется также набором размерностей - количеством переменных (входа, выхода, состояния) и параметров. Прежде всего следует дать краткую характеристику основным типам ММ.

4.1.1. Статические и динамические модели

Математическая модель системы называется статической, если значение выхода $y(t)$ зависит от значения входа $u(t)$ в один и тот же момент времени t. Символически это свойство записывается так:

$$y(t)=F(u(t)) \tag{4.1}$$

где F – символ некоторого преобразования (оператора). Кроме явных функциональных зависимостей (4.1) статические модели могут задаваться неявно, в виде уравнения или системы

$$\Phi(y(t,)u(t)) = 0. \qquad (4.2)$$

Так обычно записываются уравнения статических режимов радиоэлектронных схем, многих механических, энергетических систем и т.д. Уравнение (4.2) должно быть однозначно разрешимо относительно $y(t)$.

Статическими моделями пользуются, когда в рамках поставленной задачи (с точки зрения достижения выбранной цели) инерционностью и «памятью» реальной системы можно пренебречь. Это возможно при выполнении ряда условий, в число которых входят следующие:

1) система устойчива, т.е. переходные процессы после скачкообразного изменения входов затухают. Конечное время затухания с заданной точностью обозначим через t_{per};

2] входы меняются медленно, т.е. $\Delta t_{in} > t_{per}$, где Δt_{in} – время между изменениями входных воздействий;

3) выходы изменяются редко, т.е. $\Delta t_{out} > t_{per}$, где Δt_{out} – промежутки между измерениями входных величин.

В динамические моделях значение $y(t)$ может зависеть от всего прошлого (предыстории) входного процесса:

$$y(t) = F(\{u(s), s \le t\}). \qquad (4.3)$$

Динамические модели позволяют учесть наличие «памяти», инерционности системы. Математическим аппаратом описания динамических систем являются дифференциальные, разностные уравнения, конечные автоматы, случайные процессы.

4.1.2. Дискретные и непрерывные модели

Система может быть дискретной или непрерывной по входам, выходам и по времени в зависимости от того, дискретными или непрерывными являются множества *U,Y,T* соответственно. Под дискретным понимается конечное или счетное множество. Под непрерывным (континуальным) будем понимать множество объектов, для которого адекватной моделью является отрезок, луч или прямая линия, т.е. связное числовое множество. Если система имеет несколько входов и выходов, то это значит, что соответствующие множества *U,T* лежат в многомерных пространствах, т.е. непрерывность и дискретность понимаются покомпонентно.

Удобство числового множества как модели реальных совокупностей объектов состоит в том, что на нем естественным образом определяются несколько отношений, формализующих реально встречающиеся отношения между реальными объектами. Например, отношения близости, сходимости формализуют понятия похожести, сходства объектов и могут быть заданы посредством функции расстояния (метрики) $d(x,y)$ (например, $d(x,y)=|x-y|$).

Числовые множества являются упорядоченными: отношение порядка следования ($x \le y$) формализует предпочтение одного объекта другому. Наконец, над элементами числовых множеств определены естественные операции, например линейные: $x+y, x \cdot a$.

Как правило, дискретность множества *U* влечет за собой дискретность *Y*. Кроме того, для статических систем исчезает разница между непрерывным и дискретным временем. Поэтому классификация детерминированных систем (табл. 4.2) по признакам «статические – динамические», «дискретные – непрерывные» включает шесть основных групп; для каждой группы указан математический аппарат описания систем, методы численного моделирования и оценки их параметров методы синтеза (оптимизации), а также типичные области применения.

Таблица 4.2. Детерминированные модели систем

	Статические	
	Дискретные по *U, Y*	Непрерывные по *U, Y*
Математический аппарат описания	Графы, булева алгебра, предикаты	Функции вещественных переменных
Методы оценки параметров и анализа	Методы математической логики	Методы интерполяции, аппроксимации
Методы синтеза	Карты Карно, метод Куайна, дискретное программирование	Методы оптимизации (линейное и нелинейное программирование)
Области применения	Релейно-контактные схемы, импульсные и логические схемы, качественные модели исследования операций	Количественные модели исследования операций
	Динамические, дискретные по *T*	
	Дискретные по *U, Y*	Непрерывные по *U, Y*
Математический аппарат описания	Конечные автоматы	Разностные уравнения
Методы оценки параметров и анализа	Теория конечных автоматов	Идентификация, теория устойчивости
Методы синтеза	Методы синтеза микропрограммных автоматов, динамическое программирование	Динамическое программирование, дискретный принцип максимума
Области применения	Цифровые САУ, логическое управление	Импульсные и цифровые САУ
	Динамические, непрерывные по *T*	
	Дискретные по *U, Y*	Непрерывные по *U, Y*
Математический аппарат описания	Асинхронные автоматы, сети Петри, модели теории расписаний	Обыкновенные дифференциальные уравнения
Методы оценки параметров и анализа	Методы идентификации	Идентификация, численное решение ОДУ
Методы синтеза	Динамическое программирование, теория расписаний	Теория управления, методы оптимизации
Области применения	Параллельные процессы	САУ, механические, тепловые, электронные и другие процессы

Пример 4.1.1. Рассмотрим работу турникета на входе в метро. В первом, грубом, приближении множество значений входа этой системы имеет два элемента: человек с жетоном (u_1) и человек без жетона (u_2), т.е. $U = \{u_1, u_2\}$. После небольшого размышления становится ясно, что следует включить еще отсутствие пассажира (u_0), т.е. $U = \{u_0, u_1, u_2\}$. Множество значений выхода

содержит элементы «открыто» (y_0) и «закрыто» (y_1). Таким образом, $Y = \{y_0, y_1\}$, и система является дискретной. В простейшем случае можно пренебречь памятью системы и описывать ее статической моделью, имеющей вид таблицы или графа:

$u(t)$	$y(t)$
u_0	y_0
u_1	y_0

При необходимости хранить ММ системы в памяти компьютера ее можно представить (закодировать) в виде матрицы $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ или более экономно, в виде списка (0,0,1), в котором на *i*-м месте стоит *j*, если значению входа u_{i-1} соответствует значение выхода y_i.

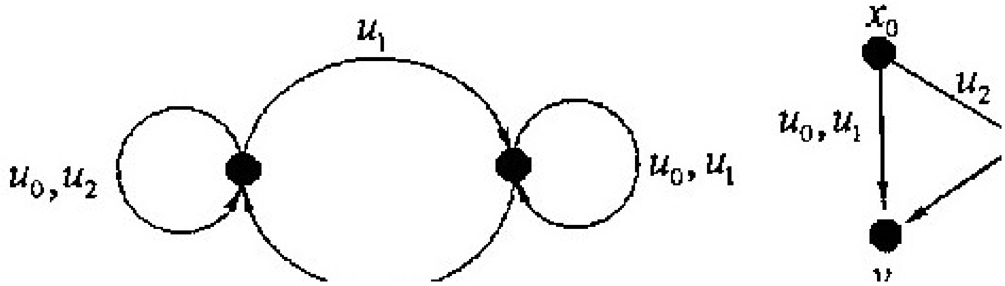
Пример 4.1.2. Если нас интересует более детально устройство самого турникета (т.е. системой является турникет), то придется учесть, что входными воздействиями (сигналами) для него являются опускание жетона и прохождение человека. Таким образом, система имеет два входа, каждый из которых может принимать два значения («есть» или «нет») Пренебрегая возможностью одновременного опускания жетона и прохождения, вводим три значения входа: u_0 – «нет воздействия», u_1 – «опускание жетона», u_2 – «прохождение». Множество *Y* можно задать так же, как и в примере 4.1.1. Однако теперь значение выхода $y(t)$ не определяется только значением входа $u(t)$, а зависит еще и от того, был ли опущен жетон раньше, т.е. от значений $u(s)$ при $s < t$. Система имеет «память». Простейший тип ММ для описания дискретных систем с памятью – это конечный автомат. Для его построения вводится конечное множество внутренних состояний системы *X*, определяющее «память». В данном случае в *X* достаточно включить два элемента: x_0 – «жетон не был брошен», x_1 – «жетон был брошен». Значения состояния системы в следующий момент времени и выхода в текущий момент зависят от текущих значений состояния и входа, т.е.

$$x(k+1) = F(x(k), u(k)),$$
$$y(k) = G(x(k), u(k)), \qquad (4.4)$$

где k – номер момента времени такта. Функцию переходов $F(x,u)$ и функцию выходов $G(x,u)$ можно задать таблично:

		u_0	u_1	u_2			u_0	u_1	u_2
$F(x,u)$	x_0	x_0	x_1	x_0	$G(x,u)$	x_0	y_0	y_0	y_1
	x_1	x_1	x_1	x_0		x_1	y_0	y_0	y_0

Можно также построить графы переходов и выходов:



Пример 4.1.3. Рассмотрим простейшую электрическую систему – *RC*-цепь (рис. 4.1), входом которой является напряжение источника $u(t) = E_0(t)$, а выходом - напряжение на конденсаторе $y(t) = E_1(t)$.

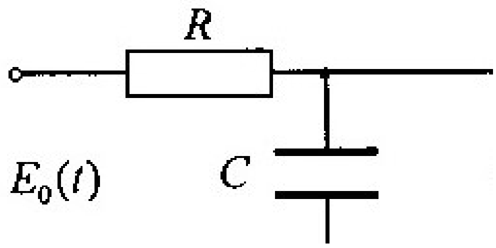


Рисунок 4.1 – Электрическая схема *RC*-цепи

Закон Кирхгофа дает ММ системы в виде дифференциального уравнения первого порядка

$$\tau\dot{y} = u - y, \qquad (4.5)$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени цепи. Модель (4.5) полностью непрерывна: $U = Y = T = R^1$. Если исследователя интересует поведение системы в статических режимах, т.е. при $E_0(t) = \text{const}$, то нужно положить в (4.5) $\dot{y} = 0$ и получить статическую модель

$$y(t) = u(t). \qquad (4.6)$$

Моделью (4.6) можно пользоваться как приближенной в случае, когда вход $E_0(t)$ изменяется достаточно редко или медленно (по сравнению с τ).

Пример 4.1.4. Рассмотрим экологическую систему, состоящую из двух взаимодействующих популяции, существующих на некоторой территории. Предположим, что система автономна, т.е. внешними воздействиями (входами) можно пренебречь; за выходы системы примем численности популяций (видов) $y_1(t), y_2(t)$. Пусть второй вид является пищей для первого, т.е. система относится к классу «хищник – жертва» (например, y_1 – численность лис в лесу, y_2 – численность зайцев; или y_1 – число бактерий возбудителей заболевания в городе, y_2 – число заболевших и т.д.). В данном случае y_1, y_2 – целые числа, и на первый взгляд в ММ системы множество Y должно быть дискретным. Однако для построения ММ удобнее считать, что y_1, y_2 могут принимать произвольные вещественные значения, т.е. можно перейти к непрерывной модели (при достаточно больших y_1, y_2 этот переход не внесет существенной погрешности). При этом мы сможем пользоваться такими понятиями, как скорости изменения выходных переменных $\frac{dy_1}{dt} = \dot{y}_1, \frac{dy_2}{dt} = \dot{y}_2$. Простейшая модель динамики популяции получается, если предположить, что:

- при отсутствии хищников численность «жертв» растет экспоненциально;

- при отсутствии «жертв» численность хищников убывает экспоненциально;

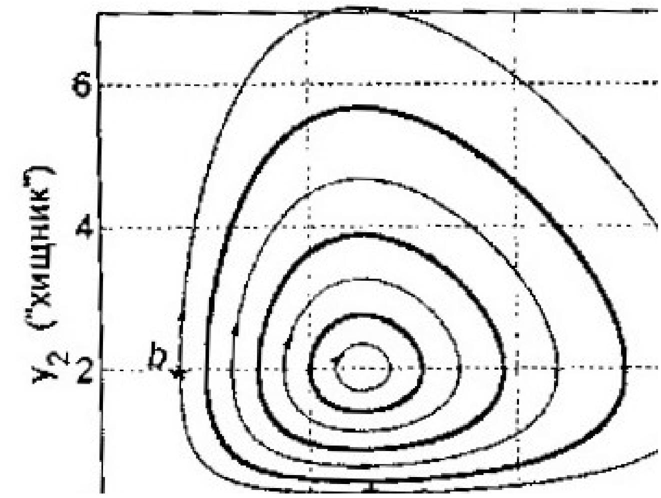
– численность «съеденных» жертв пропорциональна числу хищников и числу жертв, т.е. величине $y_1 y_2$.

При этих предположениях динамика системы, как нетрудно видеть, описывается так называемой моделью Лотки-Вольтерра:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a y_1 - b y_1 y_2, \\ \dot{y}_2 &= c y_1 y_2 - d y_2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где *a, b, c, d* – положительные параметры. Если есть возможность изменять параметры, то они превращаются во входные переменные, например, когда изменяются коэффициенты рождаемости и смертности видов, коэффициенты размножения бактерий (при введении лекарств) и т.д.

Как видно из фазового портрета, в системе имеют место нелинейные колебания относительно некоторого состояния равновесия, амплитуда которых зависит от начальных условий. Часто эти кривые трактуются таким образом, что экологическая система имеет естественное состояние равновесия и уничтожение «хищников» (точка *a* на графике) приводит через некоторое к резкому уменьшению числа «жертв» (точка *b*). Если также учесть что уменьшение численности популяций может привести к ее полному исчезновению, то следует сделать вывод о необходимости соблюдать осторожность при воздействии на экологические системы.



Фазовый портрет системы «хищник – жертва».

4.2. Гармонический анализ процессов

При исследовании колебательных процессов часто применяются их энергетические характеристики, в первую очередь – мощность и энергия.

Мгновенная мощность $p(t)$ сигнала $y(t)$ определяется как квадрат его мгновенного значения: $p(t) \approx y(t)^2$ Энергия P сигнала на интервале $[t_1, t_2]$ находится как интеграл от мгновенной мощности $P = \int_{t_1}^{t_2} y(t)^2 \, dt$. Отношение

$\frac{P}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} y(t)^2 \, dt$ выражает среднюю (на интервале $[t_1, t_2]$) мощность сигнала. Обозначим ее через $\overline{y(t)^2}$. Получить представление об этих характеристиках процесса можно на основе преобразования Фурье. Рассмотрим этот метод более подробно.

Для периодических процессов $y(t)$ с периодом T можно записать ряд Фурье в виде

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \right), \qquad (4.8)$$

где коэффициенты разложения находятся из формул

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) dt, \; a_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t \right) dt, \; b_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t \right) dt,$$

$k = 1, 2, \ldots$

Совокупность величин $s_0 = |a_0|/2, s_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \, (k = 1, 2, \ldots)$ называется амплитудным частотным спектром периодической функции $y(t)$. Значения s_k представляют собой амплитуды гармоник с частотой $\omega_k = k\Omega, \quad \Omega = 2\pi/T$ в разложении процесса в ряд (4.8). Они зависят от номера гармоники k и обычно графически представляются в виде отрезков высотой s_k, проведенных в точках ω_k оси частот (поэтому спектр периодической функции называют линейчатым, или дискретным). Он несет в себе информацию о частотных свойствах сигнала: если сигнал имеет выраженные колебания на некоторых частотах, то его спектр на этих частотах содержит пики.

Обобщением ряда Фурье на непериодические процессы является интеграл Фурье, при котором используется представление

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(V(\omega) \sin \omega t + U(\omega) \cos \omega t \right) dt \qquad (4.9)$$

где

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cos(\omega t) dt, V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \sin(\omega t) dt.$$

Аналогично вводится частотный спектр процесса $y(t)$ как $S(\omega)=\sqrt{U(\omega)^2+V(\omega)^2}$. Это функция от непрерывного аргумента ω.

Поскольку при цифровом моделировании исходной является дискретная реализация процесса и нахождение интеграла выполняется конечным суммированием, то при числовом гармоническом анализе вместо непрерывного преобразования (4.9) выполняется дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Для этого исследуемый процесс $y(t)$ (длительностью *T*) заменяется выборочной дискретной функцией (т.е. последовательностью) $y[k]=y(t_k)$, где $t_k=kT_0$ ($k=1,2,\dots,N$), *N* – заданное число точек, $T_0=T/N$ – шаг дискретности (квантования). Далее вычисляется функция

$$Y(k)=\sum_{n=1}^{N} y[n]\exp\left(-j2\pi(k-1)\frac{n-1}{N}\right), 1\le k\le N, \qquad (4.10)$$

(«изображение по Фурье»), имеющая комплексные значения. В пакете MATLAB дискретное преобразование Фурье выполняется процедурой **fft**. Для ускорения вычислений рекомендуется брать число точек $N=2^{\nu}$, где ν – некоторое натуральное число. В этом случае программой реализуется так называемое «быстрое преобразование Фурье» (БПФ). Обратный переход от изображения к исходной функции выполняется по формуле

$$y[n]=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Y(k)\exp\left(j2\pi(k-1)\frac{n-1}{N}\right), 1\le n\le N. \qquad (4.11)$$

Для вычисления спектральной плотности с помощью процедуры **fft** исходная реализация процесса разбивается на *N* точек, соответствующих равноотстоящим моментам времени с интервалом T_0.

При выборе параметров вычисления спектра (длина реализации *T*, число точек *N* и связанный с ними интервал квантования T_0) следует учитывать, что диапазон существенных частот исследуемого процесса не должен выходить за частоту Найквиста $\omega_N=\pi/T_0$. Несоблюдение этого условия может привести к значительным ошибкам при определении характеристик процесса. Данное требование вытекает из известной теоремы отсчетов Котельникова-Шеннона.

Поскольку рассматриваемый процесс $y(k)$ в общем случае не является периодическим с частотой $\Omega = 2\pi/T$, вычисление его спектра с помощью рассматриваемой процедуры является приближенным. Как видно из формулы (4.10), соседние точки по частоте отстоят на величину $\delta\omega = \dfrac{2\pi}{T_0 N}$. Учитывая, что $N = T/T_0$, получим $\delta\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Таким образом, длительность исследуемой реализации должна быть достаточно большой для получения спектра с заданным шагом дискретности по частоте ($T >> 1/\delta\omega$).

4.3. Модели состояния динамических систем

4.3.1 Модели общего вида

Важнейшую роль при описании динамических систем играет понятие состояния. Состояние – это совокупность величин (вектор) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, которые вместе с входным воздействием однозначно определяют будущее поведение системы. Например, для *RC*-цепочки переменная состояния есть E_1, поскольку значения $E_1(t)$ и входного воздействия $E_0(s)$ при $s \le t$ однозначно определяют (в силу (4.5)) значение $E_1(s)$ при $s = t$. Для модели динамики популяций (4.7) состоянием является вектор $x = (y_1\ y_2)^{\mathrm{T}}$.

В общем случае уравнения состояний – это системы дифференциальных или разностных уравнений первого порядка вместе с уравнениями для выходных величин. Начальное состояние представляет «память» системы о прошлом. Модель состояния непрерывной динамической системы записывается в виде.

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = F_1(x_1, \ldots x_n, u_1, \ldots u_m, t), \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\dot{x}_n = F_n(x_1, \ldots x_n, u_1, \ldots u_m, t),
\end{cases}
$$
$$
\begin{cases}
y_1 = G_1(x_1, \ldots x_n, u_1, \ldots u_m, t), \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
y_l = G_l(x_1, \ldots x_n, u_1, \ldots u_m, t),
\end{cases}
\tag{4.12}
$$

где $u_1, \ldots u_m$ – входные переменные, $y_1, \cdots y_l$ – выходные переменные, $x_1, \ldots x_n$ – переменные состояния. Вводя векторные обозначения,можно записать (4.12) в более компактном виде:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= F(x, u, t), \\
y &= G(x, u, t),
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{T}}$, $y = (y_1, \ldots, y_l)^{\mathrm{T}}$. Для моделей состояния справедлив следующий факт: любая нелинейная динамическая система. может быть представлена как соединение линейных динамических и нелинейных статических звеньев. Доказательство очевидно из рис 4.2, где в качестве линейного звена взят интегратор.

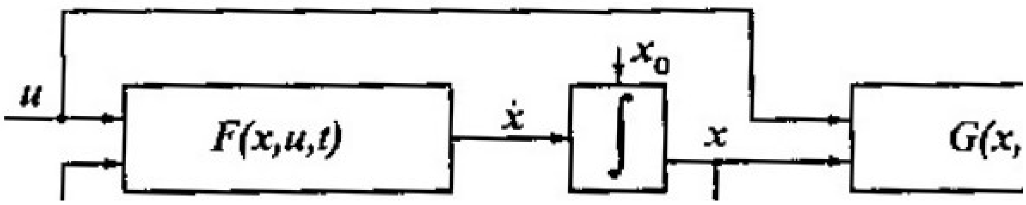


Рисунок 4.2 – Схема интегрирования нелинейных систем

Еще более общей формой описания динамических систем являются сингулярные дифференциальные (алгебро-дифференциальные) системы

$$
\begin{aligned}
\Phi(\dot{x}, x, u, t) &= 0, \\
G(x, y, u, t) &= 0,'
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

частным случаем которых являются неявные системы

$$
\Phi(\dot{y}, y, u, t) = 0\,. \tag{4.15}
$$