

1. Практическое задание (освоение численных методов решения СЛАУ)
Задача: написать программу, реализующую один из численных методов, приведенных ниже.

Описание задачи

Дано: система линейных алгебраических уравнений

$$Au = f,$$

A – известная матрица, f – известный вектор правой части, u – точное решение (недостижимое), обращающее уравнение в тождество.

Вместо точного решения вводится вектор y приближенного решения, вычисляемого итерационно.

Основные определения:

Невязка на k -м шагу – мера приближения численного решения к точному:

$$r_k = Ay_k - f \quad (1)$$

Поправка – взвешенная невязка:

$$\omega_k = B^{-1}r_k \quad (2)$$

B – весовая матрица простой структуры (диагональная), при удачном выборе увеличивает скорость метода (по умолчанию можно принять единичной);

Погрешность: ошибка численного решения

$$z_k = y_k - u \quad (3)$$

Описание методов:

1) Двухслойные градиентные методы (ДГМ).

К ДГМ относятся: метод скорейшего спуска, метод минимальных невязок, метод минимальных поправок, метод минимальных погрешностей.

Эти методы имеют общую итерационную формулу:

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

и различаются только способом вычисления итерационного параметра τ_{k+1} :
метод скорейшего спуска:

$$\tau_{k+1} = \frac{(\omega_k, r_k)}{(A\omega_k, \omega_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

метод минимальных невязок:

$$\tau_{k+1} = \frac{(A\omega_k, r_k)}{(A\omega_k, A\omega_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

метод минимальных поправок:

$$\tau_{k+1} = \frac{(A\omega_k, \omega_k)}{(B^{-1}A\omega_k, A\omega_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

метод минимальных погрешностей:

$$\tau_{k+1} = \frac{(r_k, r_k)}{(A^*r_k, A^*r_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (8)$$

2) Метод релаксации

В данном методе итерационная формула имеет вид

$$(D + \omega L) \frac{y_{k+1} - y_k}{\omega} + Ay_k = f, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

Где матрица A представлена в виде суммы диагональной, ниже- и верхнетреугольной матриц:

$$A = D + L + U \quad (10)$$

Параметр ω может меняться в диапазоне $(0 \dots 2)$, по умолчанию $= 1$.

3) Трехслойный градиентный метод

В трехслойном методе решение вычисляется по значениям двух предыдущих итераций. Итерационные формулы имеют вид:

$$By_{k+1} = \alpha_{k+1}(B - \tau_{k+1}A)y_k + (1 - \alpha_{k+1})By_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1}f, \quad (11)$$

$$k = 1, 2, \dots,$$

$$By_1 = (B - \tau_1A)y_0 + \tau_1f \quad (12)$$

а итерационные параметры α_{k+1} и τ_{k+1} находятся по формулам

$$\tau_{k+1} = \frac{(A\omega_k, r_k)}{(A\omega_k, \omega_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (13)$$

$$\alpha_{k+1} = \left(1 - \frac{\tau_{k+1}}{\tau_k} \frac{(A\omega_k, r_k)}{(A\omega_{k-1}, r_{k-1})} \cdot \frac{1}{\alpha_k} \right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \alpha_1 = 1 \quad (14)$$

Примерный алгоритм решения СЛАУ:

1. Задать СЛАУ (матрицу и вектор правой части)
2. Выбрать произвольное значение для начального y_0 .
3. Написать цикл, в котором итерационно вычисляются невязка, итерационные параметры, следующее приближение.
4. Определить решение с заданной точностью (0.001), определить число итераций для выбранного метода.

5. В случае большого числа итераций изменить параметр B или ω (в методе релаксации), зафиксировать новое число итераций

Рекомендации и указания по программированию

1. Распределение методов по вариантам – по указанию преподавателя.
2. Исходные данные – **у всей группы одинаковые!** (для сравнения методов между собой).
3. Получить исходные данные следует, запустив в командной строке `rng(num)`, `A = rand(4)`, где `num` – номер генератора квазислучайных чисел, рекомендованный преподавателем (**убедиться, что матрица A у всех одинаковая!**). Вектор правой части выбрать $f = [x \ x \ x \ x]^T$, где `xxxx` – номер группы.
4. Сначала реализовать цикл с ограниченным числом итераций (30-50), убедиться в сходимости метода. Когда будет очевидно, что метод работает корректно, изменить цикл на `while`, с условием остановки по достижению заданной точности.
5. Если метод не сходится, преобразовать уравнение таким образом, чтобы матрица A стала положительно определенной.
6. Заменить скрипт на функцию пользователя, продумать состав входных и выходных данных функции. Предусмотреть в функции задание входных параметров по умолчанию (ключевое слово - `nargin`).