Лабораторная работа 2.
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Цель работы: изучить основные методы исследования линейных моделей, овладеть навыками приведения моделей к разным формам, освоить основные функции языка MATLAB из библиотеки Control System Toolbox.

Общие положения

Для работы с динамическими объектами, математическим описанием которых являются системы обыкновенных линейных дифференциальных (или разностных) уравнений с постоянными коэффициентами, в системе MATLAB предназначен пакет Control System Toolbox (CST). Такие объекты и системы управления в целом именуются в документации по пакету LTI-системами (linear time-invariant system). В отечественной литературе используется эквивалентное наименование «линейные стационарные системы».

Пусть некоторый линейный стационарный динамический объект имеет вектор состояний $\mathbf{x} \in R^n$, вектор управлений $\mathbf{u} \in E^m$ (вектор входа объекта) и вектор измерений $\mathbf{y} \in E^k$ (вектор выхода). В пакете CST используются два взаимосвязанных способа представления дифференциальных уравнений линейной инвариантной во времени математической модели такого объекта:

1) уравнения пространства состояний:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u},$$
$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u},$$

где A, B, C, D – матрицы с постоянными компонентами размеров $n \times n$, $n \times m$, $k \times n$, $k \times m$ соответственно;

2) уравнения в изображениях по Лапласу:

$$\mathbf{y} = H(s)\mathbf{u},$$

где $H(s)$ – передаточная матрица от входа $\mathbf{u}$ к выходу $\mathbf{y}$,

$$H(s) = \begin{pmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) & \ldots & h_{1m}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) & \ldots & h_{2m}(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{k1}(s) & h_{k2}(s) & \ldots & h_{km}(s) \end{pmatrix},$$

где $h_{ij}(s)$ – рациональные дроби от переменной Лапласа s.

Указанные компоненты $h_{ij}(s)$ передаточной матрицы $H(s)$ могут быть заданы в двух вариантах:

а) полиномами $n_{ij}(s)$, $d_{ij}(s)$ в числителе и знаменателе соответственно

$$h_{ij}(s) = \frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)}; \tag{2.1}$$

б) коэффициентами усиления k_{ij} и совокупностями нулей α_{ij}^{p} и полюсов β_{ij}^{q}:

$$h_{ij}(s) = k_{ij} \prod_{p=1}^{N_{ij}} \left(s - \alpha_{ij}^{p}\right) \bigg/ \prod_{q=1}^{K_{ij}} \left(s - \beta_{ij}^{q}\right),$$

где N_{ij} и K_{ij} – степени полиномов $n_{ij}(s)$ и $d_{ij}(s)$.

В соответствии с приведенными соотношениями для формирования математической модели, описывающей динамику LTI-объекта, можно задать один из трех наборов параметров:

1) четыре числовые матрицы A, B, C, D для системы уравнений в пространстве состояний;

2) две полиномиальные матрицы $N(s) = \{n_{ij}(s)\}$ и $D(s) = \{d_{ij}(s)\}$;

3) числовую матрицу $K = \{k_{ij}\}$ с действительными компонентами и две матрицы $Z = \{\alpha_{ij}^{p}\}$ и $P = \{\beta_{ij}^{q}\}$, элементами которых служат векторы с комплексными компонентами – нулями и полюсами дробей $h_{ij}(s)$.

Приведенные выше три способа задания исходных данных линейных математических моделей определяют три формы представления LTI-систем в пакете прикладных программ CST. Эти формы реализуются с использованием переменных объектного типа – класса системных матриц. Каждая такая переменная является объектом в смысле объектной технологии программирования и представляет конкретную LTI-систему, с которой выполняются те или иные действия в процессе анализа или синтеза. Далее приводятся основные функции для создания и редактирования моделей линейных систем.

1. Создание LTI-моделей.

SYS = SS(A,B,C,D) – в пространстве состояний,

SYS = SS(A,B,C,D,E) – создание дескрипторной модели,

SYS = TF(NUM,DEN) – в форме передаточной функции,

SYS = ZPK(Z,P,K) – через нули, полюса и весовые множители (разложение передаточной функции).

Применение указанных функций без параметров приводит к созданию пустых моделей ss-, tf- и zpk-типов. При одном входном параметре

SYS = SS(D)

SYS = TF(D)

SYS = ZPK(D)

LTI-модель представляет собой пропорциональное звено.

Эти же функции используются для перевода LTI-моделей из одной формы в другую:

SYS_SS = SS(SYS_TF)

SYS_TF = TF(SYS_ZPK)

SYS_ZPK = ZPK(SYS_TF)

Примечание: tf- и zpk-модели определяются однозначно, ss-модель является одной из бесконечного числа реализаций. Для получения минимальной реализации следует применять команду:

SYS_SS = SS(SYS_TF, ‘min’)

Минимальная реализация соответствует минимальной сумме модулей элементов матриц состояния, управления, выхода (наблюдения) и обхода.

2. Доступ к свойствам моделей.

LTI-модели в среде MATLAB являются объектами, обладающими набором свойств. Вывод полного списка свойств модели осуществляется при помощи функции **get**:

GET(имя объекта)

Для получения списка свойств типовой модели можно применять функцию **LTIPROPS**(‘тип модели’).

Есть два способа доступа к свойствам объекта. Первый использует ту же функцию **get**:

GET(имя объекта,’имя свойства’)

Изменять значение того или иного свойства позволяет функция **set**.

SET(имя объекта,’имя свойства1’, новое значение1,’имя свойства2’, новое значение2…)

Второй способ предполагает доступ к свойству объекта, как к полю структуры или типа, заданного пользователем:

имя объекта.имя свойства = новое значение.

Примечание. При изменении размерностей входов-выходов LTI-модели следует применять функцию **set**, которая позволяет менять одновременно несколько значений разных свойств.

Есть также набор функций быстрого доступа к образующим свойствам моделей:

[A,B,C,D] = SSDATA(SYS)

[NUM,DEN] = TFDATA(SYS)

[Z,P,K] = ZPKDATA(SYS)

3. Частотные и временные характеристики моделей:

а) функция **BODE** – АЧХ и ФЧХ системы (диаграммы Боде).

Есть несколько форматов использования функции:

BODE(SYS) строит АЧХ и ФЧХ системы SYS в логарифмическом масштабе. Частотный диапазон и число точек выбирается автоматически.

BODE(SYS,{WMIN,WMAX}) строит характеристики для заданного частотного диапазона (в радианах в секунду).

BODE(SYS,W) – построение характеристик для вектора частоты **W**, определенного пользователем (в равномерном или логарифмическом масштабе).

BODE(SYS1,SYS2,...,W) строит характеристики для множества моделей на одном графике. Вектор **W** определяется пользователем.

Аналогично можно применять функцию **BODEMAG** – построение амплитудной характеристики.

[MAG,PHASE] = BODE(SYS,W) и **[MAG,PHASE,W] = BODE(SYS)** возвращают матрицы значений амплитуд и фаз (в градусах) по вектору частот, заданному или автоматическому. График при таком формате записи не строится;

б) функция **NYQUIST** – диаграмма Найквиста (расположение корней передаточной функции $H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$ на комплексной плоскости при изменении частоты). Форматы записи аналогичны функции **BODE**.

Примечание: частотные и временные характеристики LTI-модели можно построить графически с помощью универсальной функции **LTIVIEW**.

В современных версиях MATLAB возможности библиотеки CTS существенно возросли. В центре помощи только часть библиотеки, которая отвечает за построение и анализ линейных систем содержит следующие подразделы:

Linear System Representation – представление линейных систем;

Model Interconnection – соединение линейных систем (полезно ознакомиться с функциями **FEEDBACK**, **SERIES**, **PARALLEL**, **LFT**);

Model Type Conversion – преобразование линейных систем;

Model Reduction – упрощение линейных систем;

Modal Decomposition – декомпозиция линейных систем (разбиение на подсистемы);

Linear Analysis – линейный анализ динамических систем.

Структура описания CTS может отличаться в зависимости от используемой версии MATLAB, поэтому при изучении библиотеки лучше использовать встроенную систему помощи.

Задания на лабораторную работу

Вариант 1. Объект управления – пассажирский самолет Боинг-747, который управляется в боковом движении с помощью руля направления и элеронов: их отклонения от нейтрального положения обозначены как δ_n и δ_e соответственно. В вектор состояния входят следующие компоненты: v_z – скорость бокового сноса; ω_y – угловая скорость по рысканию; ω_x – угловая скорость по крену; φ – угол рыскания; γ – угол крена; z – боковой снос. Система линейных дифференциальных уравнений, описывающих процесс стабилизации самолета в боковом движении при посадке, имеет следующий вид:

$$\dot{v}_z = -0.089v_z - 2.19\omega_y + 0.328\omega_x + 0.319\gamma + 0.0327\delta_n + 0.089F;$$

$$\dot{\omega}_y = 0.076v_z - 0.217\omega_y - 0.166\omega_x + 0.0264\delta_e - 0.151\delta_n - 0.076F;$$

$$\dot{\varphi} = \omega_y;$$

$$\dot{\omega}_x = -0.602v_z + 0.327\omega_y - 0.975\omega_x + 0.227\delta_e + 0.0636\delta_n + 0.602F;$$

$$\dot{\gamma} = 0.15\omega_y + \omega_x;$$

$$\dot{z} = 2.21\varphi + v_z,$$

где через F обозначена скорость ветра. Система уравнений записана в безразмерных величинах: для угловых координат в качестве единицы измерения принято 0.01 рад, а для линейной скорости – 0.305 м/с.

Содержание работы:

1. Сформировать ss-объект, соответствующий LTI-модели самолета со входом $\mathbf{u} = (\delta_e \quad \delta_n \quad F)^{\mathrm{T}}$ и выходом $\mathrm{y} = \mathrm{x}$.

2. Замкнуть этот объект регулятором

$$\begin{pmatrix} \delta_e \\ \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.947 & -3.59 & -1.421 & -1.672 & -7.29 & -0.859 \\ 1.263 & 6.42 & 0.799 & 1.424 & 6.08 & 0.487 \end{pmatrix} y.$$

3. Найти передаточную функцию от входа F к выходной переменной γ в виде размерных величин.

4. Построить диаграммы Боде и Найквиста замкнутой системы для диапазона частот $\omega = \{0.01 \ldots 100\}$.

Вариант 2. Объект управления – транспортный реактивный самолет, выполняющий полет на высоте 12 км с постоянной скоростью 180 м/с.

Процесс стабилизации самолета описывается LTI-моделью, представленной в tf-форме с помощью передаточной функции от входного сигнала δ – угла отклонения руля высоты – к выходному сигналу θ – углу тангажа, которая имеет следующий вид:

$$F_{\delta\theta}(s) = \frac{1.39\,(s + 0.306)}{s\,(s^2 + 0.805s + 1.325)}.$$

Содержание работы:

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели.

2. Замкнуть объект автоматом стабилизации с передаточной функцией

$$F_a(s) = \frac{5}{s + 10}.$$

Примечание: использовать функцию замыкания с суммированием.

3. Построить диаграмму Боде для разомкнутого и замкнутого объектов и найти частоты, на которых ее амплитудная часть достигает локального максимума.

4. Произвести декомпозицию замкнутой системы на быструю и медленную подсистемы. Построить диаграммы Боде для подсистем.

5. Построить LTI-объект в ss-форме, соответствующий замкнутой системе.

Вариант 3. Объект управления – транспортный реактивный самолет, выполняющий полет на высоте 12 км с постоянной скоростью 180 м/с.

Будем рассматривать процесс стабилизации самолета в горизонтальной плоскости по углу φ курса с помощью отклонения руля направления на угол δ.

Процесс стабилизации самолета в горизонтальной плоскости описывается LTI-моделью, представленной в tf-форме с помощью передаточной функции от входного сигнала δ – угла отклонения руля направления – к выходному сигналу φ – углу курса, которая имеет следующий вид:

$$F_{\delta\varphi}(s) = \frac{1.38(s+2.07)\left(s^2+0.05s+0.066\right)}{s\left(s^2+0.380s+1.813\right)(s+2.09)(s-0.004)}.$$

Содержание работы:

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели.

2. Построить диаграмму Боде для этого объекта и найти частоту, на которой ее амплитудная часть достигает локального максимума.

3. Замкнуть автоматом стабилизации с передаточной функцией:

$$F_a(s) = \frac{10}{s+1}.$$

4. Произвести декомпозицию системы на устойчивую и неустойчивую подсистемы. Определить время нарастания и время переходного процесса для переходной характеристики устойчивой подсистемы.

5. Построить LTI-объект, соответствующий замкнутой системе. Преобразовать его к ss-форме.

Вариант 4. Объект управления – катер, управляемый с помощью вертикальных рулей направления и специальных щитков – интерцепторов, выдвигающихся из днища судна и создающих управляющий момент по крену.

Рассматривается процесс стабилизации катера в боковом движении по рысканию и крену на постоянной скорости хода $v = 20$ м/с с помощью отклонения рулей направления на угол δ_v и с помощью разностного выдвига δ_x внешних секций кормовых интерцепторов.

Процесс стабилизации описывается с помощью системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\beta} = -0.366\beta + 0.767\omega_y + 0.143\theta - 0.081\delta_v + 0.0029F_z,$$

$$\dot{\omega}_y = -1.77\beta - 0.678\omega_y - 0.0888\theta + 0.404\delta_v + 0.0011M_y,$$

$$\dot{\varphi} = \omega_y,$$

$$\dot{\omega}_x = 1.72\beta + 1.23\omega_y - 0.8\omega_x - 0.819\theta - 0.773\delta_v - 1.11\delta_x + 0.0102M_x,$$

$$\dot{\theta} = \omega_x,$$

где β – угол дрейфа; ω_y – угловая скорость по рысканию; ω_x – угловая скорость по крену; φ – угол рыскания; θ – угол крена; F_z, M_y и M_x – внешние возмущения.

Содержание работы:

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели. Входом считать вектор $\mathbf{u}$ с компонентами δ_v, δ_x, F_z, M_y и M_x. Выходом – вектор $\mathbf{y}$ с компонентами φ и θ.

2. Найти передаточные функции от входа δ_v к выходу φ и от входа δ_x к выходу θ. Построить диаграммы Боде для этих функций и найти частоты, на которых их амплитудные части достигают локального максимума. Диапазон построения частот $\omega = \{0.001 \ldots 1000\}$.

3. Создать новый tf-объект, содержащий только две передаточные функции из п. 2. Преобразовать его к ss-форме.

Вариант 5. Объект управления – корабль, движение которого рассматривается в горизонтальной плоскости. Управление обеспечивается с помощью вертикального руля направления с учетом инерционности привода рулей. В качестве математической модели процесса стабилизации на заданном курсе рассматривается система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
\dot\beta &= a_{11}\beta + a_{12}\omega + b_1\delta,\\
\dot\omega &= a_{21}\beta + a_{22}\omega + b_2\delta,\\
\dot\varphi &= \omega,\\
\dot\delta &= u,
\end{aligned}
$$

где β – угол дрейфа; ω_y – угловая скорость по рысканию; φ – угол рыскания; δ - угол отклонения руля; u – управляющий сигнал. Значения параметров: $a_{11} = -0.159$, $a_{12} = 0.267$, $b_1 = -0.0215$, $a_{21} = 0.103$, $a_{22} = -0.188$, $b_1 = -0.0213$.

Содержание работы:

1. Сформировать управление в виде $u = k_1\beta + k_2\omega + k_3(\varphi - z) + k_4\delta$.

2. Аналитически (формулой) найти такое значение постоянного командного сигнала z, который обеспечит для замкнутой системы равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \varphi_0$, где φ_0 – заданное число.

3. Задать коэффициенты закона управления $k_1 = 10$, $k_2 = 20$, $k_3 = 5$, $k_4 = -1$ и сформировать LTI-объект, соответствующий математической модели замкнутой системы, причем его входом считать переменную z, а выходом – переменную φ.

4. Найти передаточную функцию полученного объекта от входа к выходу.

5. Определить основные параметры переходной характеристики (время нарастания и пр.)

Вариант 6. Объект управления – вертолет, движущийся в вертикальной плоскости. Управление движением осуществляется с помощью наклона плоскости несущего винта на угол δ.

Динамические параметры движения: θ – угол тангажа, x – перемещение в горизонтальном направлении. В качестве математической модели процесса стабилизации рассматривается СЛДУ:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = a_1 \frac{d\theta}{dt} + a_2 \frac{dx}{dt} + b_1\delta,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_3\theta + a_4 \frac{d\theta}{dt} + a_5 \frac{dx}{dt} + b_2\delta,$$

где $a_1 = -0.415$, $a_2 = -0.0111$, $b_1 = 6.27$, $a_3 = 9.80$, $a_4 = -1.43$, $a_5 = -0.0198$, $b_2 = 9.80$. При этом θ измеряется в радианах, а x – в метрах.

Задача системы стабилизации – удержать машину в заданном положении при воздействии внешних возмущений.

Содержание работы:

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели. Входом считать переменную δ, а выходом – вектор $\mathbf{y}$ с компонентами θ и x.

2. Найти передаточные функции от входа к выходным переменным. Построить диаграммы Боде для этих функций в диапазоне частот $\omega = \{0.1 \ldots 1000\}$.

3. Определить нули и полюса передаточных функций.

4. Создать frd-объект для частотного анализа модели. Проверить, что объект соответствует созданному в п. 2.

Вариант 7. Объект управления – водоизмещающий танкер, движущийся с постоянной скоростью хода. Задача – стабилизировать курс судна, управляя им с помощью вертикальных рулей.

Процесс стабилизации судна описывается с помощью передаточной функции от входного сигнала δ – угла перекладки вертикальных рулей – к выходному сигналу φ – рысканию судна (отклонению от заданного курса), которая имеет следующий вид:

$$F_{\delta\varphi}(s)=\frac{K_{\omega}\,(\tau_3 s+1)}{s\,(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)},$$

где $K_{\omega}=-5.775$; $\tau_1=-1.338$; $\tau_2=0.1475$; $\tau_3=0.603$.

Содержание работы:

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели.

2. Замкнуть объект последовательным корректирующим устройством с передаточной функцией:

$$F_a(s)=\frac{s+8}{s^2+2s+4}.$$

3. Построить диаграммы Боде для разомкнутой и замкнутой систем.

4. Произвести декомпозицию систему на устойчивую и неустойчивую подсистемы. Определить время нарастания и время переходного процесса для переходной характеристики устойчивой подсистемы.

5. Преобразовать замкнутую систему к ss-форме.

Вариант 8. Объект управления – маневренный самолет в режиме дозаправки на высоте 5000 м. Задача управления – обеспечить маневрирование таким образом, чтобы выдерживать относительную скорость (относительно самолета-заправщика). Математическая модель движения самолета может быть представлена в линейной форме при постоянной скорости $V=192.3$ м/с и имеет вид:

$$\frac{dZ_f}{dt}=192.3\,\beta+2.4\,\omega_x-6.1\,\omega_y;$$

$$\frac{d\beta}{dt}=-0.172\,\beta+0.0631\,\omega_x+0.998\,\omega_y+0.051\,\gamma-0.034\,\delta_{dir};$$

$$\frac{d\omega_x}{dt}=-26.05\,\beta-2.749(\omega_x+\Delta\omega_x)-0.533\,\omega_x-4.757\,\delta_{el}-18.665\,\delta_{dir};$$

$$\frac{d\omega_y}{dt}=-4.337\,\beta-0.006\,\omega_x-0.301(\omega_y+\Delta\omega_y)-3.07\,\delta_{el}+0.666\,\delta_{dir};$$

$$\frac{d\gamma}{dt}=\omega_x-0.0632\omega_y.$$

где Z_f – отклонение топливозаправочной штанги от заданного положения; β – угол скольжения; ω_x, ω_y – угловые скорости по продольной и поперечной осям самолета; γ – угол крена; $\delta_{el}, \delta_{dir}$ – углы отклонения элеронов и рулей направления; $\Delta\omega_x, \Delta\omega_y$ – внешние возмущения, приведенные к угловым скоростям.

Содержание работы:

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели, считая выходом объекта вектор состояния.

2. Произвести замыкание объект регулятором вида:

$$\delta_{dir} = 0.0929 Z_f + 5.8727\beta + 0.1157\,\omega_x + 1.8203\,\omega_y + 0.0482\,\gamma;$$

$$\delta_{el} = 0.037 Z_f + 1.6773\beta + 0.0859\,\omega_x + 0.2407\,\omega_y + 0.1017\,\gamma$$

3. Построить передаточные функции по возмущениям относительно выходной переменной Z_f .

4. Построить диаграммы Боде замкнутой системы для диапазона частот $\omega = \{0.001 \ldots 100\}$.

Содержание отчета

1. Исходные данные и постановка задачи.
2. Текст скрипта на языке MATLAB.
3. Полученные LTI-модели объектов управления и замкнутой системы.
4. Результаты моделирования, графики.
5. Выводы.