Обозначив величины

$$A_d = e^{Ah}, B_d = \int_0^h e^{As} ds \cdot B,$$

получим выражение для решения в первом узле сетки:

$$x(t_1) = A_d x(t_0) + B_d u(t_0)..$$

Вычислив $x(t_2) = x(t_1 + h)$ по указанной методике, получим

$$x(t_2) = A_d x(t_1) + B_d u(t_1).$$

Аналогично для *i*-го узла сетки решение определяется следующей дискретной системой:

$$x(t_{i+1}) = A_d x(t_i) + B_d u(t_i), \quad i = 0,1,\ldots,N.$$

Матрицы A_d и B_d вычисляют разложением e^{Ah} в матричный ряд, тогда

$$\Psi = \int_0^h e^{As} ds = \int_0^h \left(I + \frac{As}{1!} + \frac{(As)^2}{2!} + \ldots + \frac{(As)^n}{n!} + \ldots \right) ds = I$$

$$= h + \frac{Ah^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n h^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots.$$

Отсюда

$$B_d = \Psi B,$$

$$A_d = I + \Psi A.$$

В MATLAB реализована команда вычисления матриц дискретной системы A_d и B_d по матрицам *A*, *B* исходной системы:

[sysd]=c2d(sysc,h);

где sysc – исходная непрерывная система, h – величина шага по времени, sysd –дискретная система.

Преобразование линейных моделей

Переход От СЛДУ к ЛДУ *n*-го порядка

Описание линейной динамической системы в виде СЛДУ -

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad x \in R^n, u \in R^l, y \in R^m.$$

называют описанием в форме пространства состояний, т. к. . x – вектор состояния или фазовый вектор.

Описание в форме пространства состояний связано с описанием в форме “вход—выход”, т.е. с математическим описанием, непосредственно связывающим выход $y(t)$ и его производные со входом $u(t)$ и его производными:

$$y^{(n)}(t)+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+\alpha_1 y^{(1)}(t)+\alpha_0 y(t)=$$
$$=\beta_n u^{(n)}(t)+\beta_{n-1}u^{(n-1)}(t)+\ldots+\beta_1 u^{(1)}(t)+\beta_0 u(t),$$

где $\alpha_i, i=0,\ldots,n-1$, – квадратные матрицы строения $m\times m$, а $\beta_i, i=0,\ldots,n-1$ – матрицы строения $m\times l$.

Если ввести оператор дифференцирования $p=d/dt$, уравнение преобразуется к виду

$$p^n+\alpha_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\alpha_1 p+\alpha_0=\beta_n p^n+\beta_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\beta_1 p+\beta_0,$$

т.е. может быть записано в операторной форме

$$\alpha(p)y(t)=\beta(p)u(t)$$

где $\alpha(p),\beta(p)$- матричные полиномы от оператора p (коэффициенты этих полиномов — матрицы).

Если ввести $\alpha^{-1}(p)$ – обратную матрицу, то формально можно записать

$$y(t)=\alpha^{-1}(p)\beta(p)u(t)=W(p)u(t),$$

где $W(p)$ – передаточная функция динамической системы. При этом $y(t)=W(p)u(t),$ – условная запись, под которой понимают, строго говоря, выражение

$$\alpha(p)y(t)=\beta(p)u(t),$$

т.е. дифференциальное уравнение !!!!!!-го порядка.

Если $y(t)$ и $u(t)$ – скалярные выход и вход, то $\alpha(p),\beta(p)$ – скалярные полиномs, поэтому

$$y(t)=\frac{\beta(p)}{\alpha(p)}u(t)=W(p)u(t),$$

где

$$W(p)=\frac{\beta_n p^n+\beta_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\beta_1 p+\beta_0}{\alpha_n p^n+\alpha_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\alpha_1 p+\alpha_0},$$

и является дробно-рациональной функцией.

Найдем выражение для матричных полиномов $\alpha(p),\beta(p)$ через матрицы системы *A*, *B*, *C*, *D*.

Уравнение состояния имеет вид

$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t).$

Уравнение выходов имеет вид

$y(t)=Cx(t)+Du(t).$

Найдем выражение для *r*-й производной выхода $y^{(r)}(t)$, где r – произвольное число. Делать это будем путем последовательного дифференцирования уравнений выхода.

$$\dot{y}(t)=C\dot{x}(t)+D\dot{u}(t)=C(Ax+Bu)+D\dot{u}=CAx+CBu+D\dot{u},$$

$$\ddot{y}=(\dot{y})'=CA\dot{x}+CB\dot{u}+D\ddot{u}=CA(Ax+Bu)+CB\dot{u}+D\ddot{u}=$$

$$=CA^2x+CABu+CB\dot{u}+D\ddot{u}$$

$$\ldots$$

$$y^{(r)}=CA^r x+\sum_{k=0}^{r-1}CA^{r-1-k}Bu^{(k)}+Du^{(r)}.$$

Для $r=n$ имеем:

$$y^{(n)}=CA^n x+\sum_{k=0}^{n-1}CA^{n-1-k}Bu^{(k)}+Du^{(n)}.$$

Матрицу A^n можно выразить через $A^{n-1},\ldots,A$. По теореме Гамильтона-Кэли матрица *A* является корнем своего характеристического полинома. Если

$\det(Is-A)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\ldots+\alpha_1 s+\alpha_0$ – характеристический полином матрицы *A*, то при $s=A$.

$$A^n+\alpha_{n-1}A^{n-1}+\ldots+\alpha_1 A+\alpha_0 I=0$$

где *I* –- единичная матрица, 0 – нулевая матрица строения $n\times n$.

Следовательно, первое слагаемое в выражении для можно записать как

$$CA^n x = -C\left(\alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I\right)x,$$

и выражение для $y^{(n)}$ примет вид:

$$y^{(n)} + \sum_{r=0}^{n-1}\alpha_r CA^r x = \sum_{k=0}^{n-1} CA^{n-1-k}Bu^{(k)} + Du^{(n)}.$$

Из выражения для $y^{(r)}$ получаем:

$$CA^r x = y^{(r)} - \left(\sum_{k=0}^{r-1} CA^{r-1-k}Bu^{(k)} + Du^{(r)}\right),$$

Подставим его в предыдущее выражение. Получим запись следующего вида:

$$y^{(n)} + \sum_{r=0}^{n-1}\alpha_r y^{(r)} = \sum_{r=0}^{n-1}\alpha_r\left(\sum_{k=0}^{r-1} CA^{r-1-k}Bu^{(k)} + Du^{(r)}\right) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} CA^{n-1-k}Bu^{(k)} + Du^{(n)}.$$

Ее преобразуем к виду

$$\sum_{r=0}^{n}\alpha_r y^{(r)} = \sum_{r=0}^{n-1}\alpha_r \sum_{k=0}^{r-1} CA^{r-1-k}Bu^{(k)} + \sum_{k=0}^{r-1}\alpha_r Du^{(r)} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} CA^{n-1-k}Bu^{(k)} + Du^{(n)}, \quad \alpha_n = 1,$$

а затем

$$\sum_{r=0}^{n}\alpha_r y^{(r)} = \sum_{r=0}^{n}\alpha_r \sum_{k=0}^{r-1} CA^{r-1-k}Bu^{(k)} + \sum_{k=0}^{n}\alpha_r Du^{(r)}.$$

В последнем выражении подразумевается $\alpha_n = 1$ (в характеристическом полиноме это коэффициент при A^n. В правой части этого выражения присутствуют следующие слагаемые:

$$\left(\alpha_0 D + \sum_{r=1}^{n}\alpha_r CA^{r-1}B\right)u^{(0)},$$

$$\left(\alpha_1 D + \sum_{r=2}^{n}\alpha_r CA^{r-2}B\right)u^{(1)},$$

$$\left(\alpha_2 D + \sum_{r=3}^{n} \alpha_r C A^{r-3} B\right) u^{(2)},$$

$$\vdots$$

$$\left(\alpha_{n-1} D + \sum_{r=n}^{n} \alpha_r C A^{r-n} B\right) u^{(n-1)},$$

$$\alpha_n D u^{(n)},$$

т.е. правая часть имеет вид

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\alpha_k D + \sum_{r=k+1}^{n} \alpha_r C A^{r-k-1} B\right) u^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \beta_k u^{(k)},$$

где

$$\beta_k = \alpha_k D + \sum_{r=k+1}^{n} \alpha_r C A^{r-k-1} B, \quad k = 0,1,\ldots n.$$

Таким образом $\sum_{r=0}^{n} \alpha_r y^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} \beta_k u^{(k)}$. Учитывая, что !!!!!!! $y^{(r)} = p^r y$, $u^{(k)} = p^k u$, получаем

$$\left(\sum_{r=0}^{n} \alpha_r p^r\right) y(t) = \left(\sum_{k=0}^{n} \beta_k p^k\right) u(t),$$

что эквивалентно записи

$$\left(p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \ldots + \alpha_1 p + \alpha_0\right) y(t) = \left(\beta_n p^n + \beta_{n-1} p^{n-1} + \ldots + \beta_1 p + \beta_0\right) u(t),$$

где $\alpha(p) = p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \ldots + \alpha_1 p + \alpha_0$ – характеристический полином. Последняя запись эквивалентна передаточной функции (ПФ) $W(p)$, рассмотренной выше.

В общем случае, когда вход u и выход у являются не скалярными, а векторными, мы имеем дело с матричной ПФ от u к y. В этом случае вместо полинома $\beta(p)$ получается матрица

$$\beta(p) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(p) & \ldots & \beta_{1l}(p) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \beta_{m1} & \ldots & \beta_{ml}(p) \end{pmatrix},$$

где $\beta_{ij}(p)$ - полином. При этом

$$\alpha_{ij}(p)y_j(t)=\beta_{ij}(p)u_i(t).$$

Связь между $u(t)$ и $y(t)$ определяет соотношение

$$y(t)=\frac{1}{\alpha(p)}\beta(p)u(t)=W(p)u(t),$$

где $W(p)=\begin{pmatrix} w_{11}(p) & \dots & w_{1l}(p) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ w_{m1}(p) & \dots & w_{ml}(p) \end{pmatrix}.$

Ее элементы - это $w_{ij}(p)=\dfrac{\beta_{ij}(p)}{\alpha(p)}$, представляющие собой ПФ от i-го входа к j-му выходу. Таким образом, знаменатель всех ПФ один и тот же и равен $\alpha(p)$ – характеристическому полиному матрицы A. Матричную ПФ можно получить и при помощи преобразования Лапласа для системы

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad x(t_0)=x_0,$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t).$$

Применив преобразование Лапласа L к вектор-функциям $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$:

$$L\{x(t)\}=x(s),\quad L\{u(t)\}=u(s),\quad L\{y(t)\}=y(s),$$

получим

$$L\{\dot{x}(t)\}=L\{Ax(t)+Bu(t)\},$$

или

$$sx(s)=Ax(s)+Bu(s),$$

или

$$(Is-A)x(s)=Bu(s)$$

а также

$$L\{y(t)\}=L\{Cx(t)+Du(t)\},\rightarrow y(s)=Cx(s)+Du(s).$$

Отсюда

$$x(s)=(Is-A)^{-1}Bu(s),$$
$$y(s)=\left(C(Is-A)^{-1}B+D\right)u(s)=W(s)u(s),$$

где $W(s)$ – это матричная ПФ вида

$$W(s)=\frac{1}{\alpha(s)}\begin{pmatrix}\beta_{11}(s) & \dots & \beta_{1l}(s)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \beta_{m1}(s) & \dots & \beta_{ml}(s)\end{pmatrix}$$

Здесь $\beta_{ij}(s)$ – полиномы относительно s, они совпадают с полиномами $\beta_{ij}(p)$.

Поэтому в области изображений

$$\alpha(s)y(s)=\beta(s)u(s)$$

Полиномы $\alpha(s),\beta(s)$ можно вычислять приведенным ранее способом.

Переход от описания динамической системы в форме "вход—выход" к описанию в пространстве состояний

Ограничимся объектом с одним входом и одним выходом $u(t)\in R^1, y(t)\in R^1$. Пусть динамическую систему описывает линейное дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)}(t)+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+\alpha_1 y^{(1)}(t)+\alpha_0 y(t)=$$
$$=\beta_n u^{(n)}(t)+\beta_{n-1}u^{(n-1)}(t)+\ldots+\beta_1 u^{(1)}(t)+\beta_0 u(t),$$

Введем обозначения:

$$y^{(n-1)}=y_{n-1},\ldots y^{(1)}=y_1, y=y_0\,.$$

Дифференциальному уравнению системы соответствуют скалярные полиномы от оператора дифференцирования p:

$$\alpha(p)=p^n+\alpha_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\alpha_1 p+\alpha_0$$

и

$$\beta(p)=p^n+\beta_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\beta_1 p+\beta_0$$

Для описания системы в пространстве состояний требуется найти матрицы A, B, C, D и вектор начальных условий $x(t_0)=x_0$ – такие, чтобы системе

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad x(t_0)\in R^n,$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t).$$