

1.Понятие математической модели. Этапы математического моделирования. Состав мат. модели.

Математическая модель – совокупность математических объектов и отношений, которые отражают объекты и отношения некоторой области реального мира (предметной области).

Этапы математического моделирования:

1. Построение математической модели (формализация задачи);
2. Исследование математической модели (анализ модели);
3. Использование математической модели (синтез решения).

Любая модель состоит из множества входных и выходных переменных, а также параметров модели.

2. Понятие и свойства системы. Параметризация систем.

Система – эквивалент понятия математической модели, который задается парой множеств U, Y и отношением на множестве $U \times Y$, формализующим связь между входами и выходами. (U – множество входов, Y – множество выходов).

Свойства системы:

1. Целостность – система отделена от внешней среды и между ними есть связь в виде воздействий и реакций;
2. Структурированность – система может быть разделена на подсистемы, связанных и взаимодействующих между собой так же, как и целая система с внешней средой;
3. Целенаправленность – задание цели, достижение которой будет говорить о правильной работе системы.

Типовым приемом построения математической модели системы является параметризация – выбор в качестве математическом модели семейства соотношений, зависящих от конечного (обычно небольшого) количества чисел - параметров. Существуют два подхода для параметризации системы: подход «черного ящика» и подход «серого ящика».

В случае «черного ящика» внутренняя структура системы игнорируется, а общая структура математической модели и ее параметры выбирались на основании экспериментов с этой системой. В случае наличия априорной информации о системе применяется подход «серого ящика», при котором структура модели задается из физических соображений, а цель опытов с объектом состоит в определении параметров модели. Также допускается использовать комбинацию этих двух подходов.

3. Понятие и свойства временных систем. Детерминизм и бихейворизм в системах.

Временные системы – те системы функционирование которых, разворачивается в реальном времени (U и Y множества функций времени).

Свойства временных систем:

1. Причинность – настоящее не зависит от будущего при заданном прошлом;
2. Функциональность (определенность) – каждой входной функции соответствует единственная выходная функция.

После определения всех параметров может оказаться, что система может быть не детерминирована (определена). В таком случае есть смысл ввести дополнительные параметры, которые бы устраняли вышеописанную проблему. Можно сказать, что выход модели задавался некоторой функцией от входа системы и этих параметров: $y = R(u, a)$. Так как речь идет о временных функциях, то можно разрешить меняться параметрам со временем, в таком случае данные параметры становятся уже переменными, которые называются переменными состояния. Важно отметить, что изменения переменных состояния от времени так же должно быть описано внутри математической модели.

Отметим, что иногда при исследовании системы, не удастся однозначно определить, какие из переменных, связывающих систему с внешним миром, являются входными: а какие – выходными. Так появились бихевиористские модели систем, которые состоят из внешних переменных сигналов, которые могут быть как входные, так и выходные сигналы.

4. Методика математического моделирования.

Системный анализ в широком смысле – это методология (совокупность методических приемов) постановки и решения задач построения и исследования систем, тесно связанная с математическим моделированием. В более узком смысле системный анализ – методология формализации сложных (трудно формализуемых, плохо структурированных) задач.

Выделяя общие части различных приемов и рассматривая их во взаимодействии, можно сформулировать последовательность действий (этапов) при постановке и решении задач, которую будем называть методикой математического моделирования. Эта методика помогает более осмысленно и грамотно ставить и решать прикладные задачи. Методика состоит из следующих этапов:

Этап 1 – Определение системы (выделение системы из среды);

Этап 2 – Определение входов и выходов системы;

Этап 3 – Определение цели;

Этап 4 – Построение математической модели системы (выбор структуры, параметров, проверка адекватности);

Этап 5 – Анализ математической модели (статический, динамический, статистический и др.);

Этап 6 – Формализация цели;

Этап 7 – Формализация ограничений (выбор множества допустимых решений);

Этап 8 – Выбор решения (алгоритмизация, программирование, счет);

Этап 9 – Анализ решения.

В случае если задача не решена ее необходимо поделить на подзадачи и заново пройти по методике.

5. Прямые и численные методы решения СЛАУ. Достоинства, недостатки.

Общий вид СЛАУ описан ниже:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

СЛАУ можно представить в матричной форме:

$$Ax = b, \text{ где}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ и } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Основные определения:

1. A^{-1} – обратная матрица для квадратной матрицы A , если $AA^{-1} = I$, где I – единичная матрица.
2. A – невырожденная, если для A существует A^{-1} .
3. $\det(A) \neq 0$, где A – невырожденная матрица;
4. линейная однородная система $Ax=0$ имеет единственное решение $x=0$;

5. Столбцы (строки) матрицы A линейно независимы, то есть для любой комбинации чисел a_1, a_2, \dots, a_n , не все из которых равны нулю, выполняется следующая линейная комбинация:

$$a_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \dots + a_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6. Ранг матрицы – $\text{rank}(A)$ – число линейно независимых столбцов (строк).
7. Матрица A невырожденная, если и только если A – полного ранга ($\text{rank}(A)=n$).
8. Комплексное или вещественное число λ и вектор $x \neq 0, x \in R^n$ называется собственным значением и собственным вектором матрицы A , если они удовлетворяют алгебраическому уравнению $Ax=\lambda x$. Собственный вектор – это такой вектор, который, будучи умножен на матрицу A , изменяет лишь свою длину.
9. Совокупность всех собственных значений $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ матрицы A называется спектром матрицы A , а величина $\rho(A) = \max |\lambda_i|$ называется спектральным радиусом.
10. Норма матрицы A называется $\|A\| = \sup \frac{|Ax|}{|x|} = \rho(A^T A)^{1/2}$

Что касается методов решения СЛАУ, то они бывают прямыми (точными) и итерационными. Их отличие заключается в том, что прямые методы приводят к формуле, которая дает точное решение. В численных методах нет необходимости получить точное решение, поэтому результатом является приближенное решение. В качестве примера можно привести метод исключения, который относится к прямым методам решения СЛАУ.

$$Ax = b \rightarrow x = A^{-1}b$$

Такое решение будет наблюдаться в том случае, если матрица A невырожденная. Однако данный метод неэффективен в силу большого времени вычислений.

6. Обусловленность СЛАУ

Определение: СЛАУ плохо обусловлена, если малые изменения элементов матрицы A или вектора b приводят к большим изменениям в решении.

В качестве примера можно рассмотреть систему второго порядка, каждое уравнение которой описывает некоторую прямую, пересечение этих прямых есть решение системы. Если оба уравнения описывают одну и ту же прямую, то мы имеем бесконечное множество решений. В том случае если прямые параллельные, то решений нет вообще. В том случае, когда прямые

почти параллельные, в этом случае небольшое изменение параметров может очень сильно повлиять на решение системы.

Для количественной оценки обусловленности СЛАУ вида:

$$Ax = b$$

Изменим вектор правой части $b = b_0 + \Delta b$, при этом изменится решение СЛАУ $x = x_0 + \Delta x$. Опишем зависимость Δx от Δb . Учитывая, что $Ax_0 = b_0$ имеем:

$$\Delta x = A^{-1}\Delta b$$

Вычислим зависимость норм векторов $\|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta b\|$, если $\|A^{-1}\|$ мала, то больше изменения $\|\Delta b\|$ приведут к малым изменениям $\|\Delta x\|$. Более удобно рассматривать относительные величины $\frac{\|\Delta x\|}{\|x_0\|}, \frac{\|\Delta b\|}{\|b_0\|}$.

Умножим полученное неравенство на $\|b_0\|$, получим:

$$\begin{aligned} \|\Delta x\| * \|b_0\| &\leq \|A^{-1}\| * \|\Delta b\| * \|b_0\| = \|A^{-1}\| * \|\Delta b\| * \|Ax_0\| \leq \\ &\leq \|A^{-1}\| * \|\Delta b\| * \|A^{-1}\| * \|\Delta b\| * \|A\| * \|x_0\|. \end{aligned}$$

Разделим обе части неравенства на $\|x_0\| * \|b_0\|$:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x_0\|} \leq \|A\| * \|A^{-1}\| * \frac{\|\Delta b\|}{\|b_0\|}.$$

Величина $\|A\| * \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$ называется числом обусловленности матрицы. Для вычисления числа обусловленности матрицы воспользуемся определением нормы матрицы:

$$\|A\| = \rho(A^T A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A^T A)|,$$

Где $\lambda_i(A^T A)$ – собственные число матрицы $(A^T A)$.

$$\|A^{-1}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\lambda_i(A^T A)}$$

Отсюда

$$\text{cond}(A) = \|A\| * \|A^{-1}\| = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^T A)}{\min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^T A)} \geq 1.$$

Чем ближе к единице, тем лучше.

7. Метод Гаусса. LU-факторизация.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Метод гаусса заключается в преобразовании системы, а точнее ее левой части к треугольной форме. В общем виде изобразим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Исключим x_1 из всех уравнений кроме первого.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ +a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ +a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)}, \\ \vdots \\ +a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}, \end{cases}$$

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} - a_{12} \frac{a_{21}}{a_{11}}; a_{32}^{(1)} = a_{32} - a_{12} \frac{a_{31}}{a_{11}}; a_{n2}^{(1)} = a_{n2} - a_{12} \frac{a_{n1}}{a_{11}};$$

$$a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{13} \frac{a_{21}}{a_{11}}; a_{33}^{(1)} = a_{33} - a_{13} \frac{a_{31}}{a_{11}}; a_{n3}^{(1)} = a_{n3} - a_{13} \frac{a_{n1}}{a_{11}};$$

$$a_{2n}^{(1)} = a_{2n} - a_{1n} \frac{a_{21}}{a_{11}}; a_{3n}^{(1)} = a_{3n} - a_{1n} \frac{a_{31}}{a_{11}}; a_{nn}^{(1)} = a_{nn} - a_{1n} \frac{a_{n1}}{a_{11}};$$

$$b_2^{(1)} = b_2 - b_1 \frac{a_{21}}{a_{11}}; b_3^{(1)} = b_3 - b_1 \frac{a_{31}}{a_{11}}; b_n^{(1)} = b_n - b_1 \frac{a_{n1}}{a_{11}}.$$

Исключим все x_2 для уравнений $3 \dots n$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \quad \quad + a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad + a_{n3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}. \end{array} \right.$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{23}^{(1)} \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; a_{n3}^{(2)} = a_{n3}^{(1)} - a_{23}^{(1)} \frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}};$$

$$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - b_2^{(1)} \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; b_n^{(2)} = b_n^{(1)} - b_2^{(1)} \frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}};$$

$$a_{3n}^{(2)} = a_{3n}^{(1)} - a_{2n}^{(1)} \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; a_{nn}^{(2)} = a_{nn}^{(1)} - a_{2n}^{(1)} \frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}};$$

Таким образом получаем следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \quad \quad + a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad + \dots + a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}. \end{array} \right.$$

Где

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}; b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - b_k^{(k-1)} l_{ik}; a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{kj}^{(k-1)} l_{ik}$$

$k = 1, \dots, n - 1$ — номер шага исключения; $i = k + 1, \dots, n$ — номер строки; $j = k + 1, \dots, n$ — номер столбца

Таким образом решение имеет следующий вид:

$$x_k = \left(b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k-1)} * x_j \right) / a_{kk}^{(k-1)}.$$

После подобного преобразования матрицу A , можно представить в виде:

$$A = LU, \text{ где}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

После подобного преобразования решение системы $Ax = b$ может быть найден следующим путем:

$$LUx = b \rightarrow Ux = y, Ly = b.$$

Таким образом можно решить две СЛАУ, которые уже приведены к треугольной форме:

$$y_k = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki} * y_i; x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left(y_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} * x_j \right), k = n, n-1, \dots, 1.$$

LU факторизация позволяет свести решение системы к решению двух СЛАУ с треугольными матрицами, что является большим преимуществом.

8. Алгоритмы вычисления определителя, обратной матрицы через LU-факторизацию.

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L) * \det(U).$$

$$\det(L) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\det(U) = \det \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} = u_{11} * u_{12} * \dots * u_{nn}.$$

$$\det(A) = u_{11} * u_{12} * \dots * u_{nn}.$$

Обратная матрица удовлетворяет матричное алгебраическое условие:

$$AX = I$$

Пусть $X = (x_1 | x_2 | \dots | x_n), I = (e_1 | e_2 | \dots | e_n), x_i, e_i \in R^n$

$$A(x_1 | x_2 | \dots | x_n) = (e_1 | e_2 | \dots | e_n) \rightarrow Ax_i = e_i, i = 1, \dots, n.$$

При помощи LU факторизации $Ly_i = e_i, Ux_i = y_i, i = 1, \dots, n.$

9. Собственные числа и вектора матрицы. Алгоритм Крылова.

Наиболее простым методом вычисления собственных значений матрицы является метод, основанный на нахождении корней характеристического полинома – алгоритм А.Н. Крылова.

Квадратная матрица A является корнем своего характеристического полинома:

$$p(s) = \det(Is - A) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \dots + p_1s + p_0;$$

то есть матрица A удовлетворяет матричному уравнению

$$A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \dots + p_1A + p_0 = 0.$$

Алгоритм Крылова основан на поиске коэффициентов ХП $p(s)$ матрицы, а собственные значения вычисляться как корни ХП. Для вычисления коэффициентов характеристического полинома воспользуемся матричным уравнением, следующим из теоремы Гамильтона-Кэли. Умножим обе части этого уравнения на произвольный $x_0 \neq 0 \in R^n$:

$$A^n x_0 + p_{n-1}A^{n-1}x_0 + \dots + p_1Ax_0 + p_0x_0 = 0.$$

Введем обозначение $x_i = A^i x_0$:

$$x_n + p_{n-1}x_{n-1} + \dots + p_1x_1 + p_0x_0 = 0.$$

Получим

$$Xp = -x_n, \text{ где } X = (x_{n-1} | x_{n-2} | \dots | x_1 | x_0), p = (p_{n-1} \ p_{n-2} \ \dots \ p_1 \ p_0)^T$$

Решая эту СЛАУ, получим характеристический полином, корни которого есть собственные значения матрицы.

10. Фундаментальная и переходная матрицы. Свойства переходной матрицы.

Для начала необходимо рассмотреть задачу Коши для линейной динамической системы:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x \in R^n, x \in R^l,$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), y \in R^m, x(t_0) = x_0.$$

Для решения второго уравнения не нужно, что-то придумывать так как оно уже было рассмотрено ранее поэтому рассмотрим только первое уравнение:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(t_0) = x_0.$$

Для начала решим однородную систему уравнений:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x(t_0) = x_0.$$

Так же рассмотрим n линейно независимых векторов:

$$x_0^{(i)} = \begin{pmatrix} x_{10}^{(i)} \\ x_{20}^{(i)} \\ \vdots \\ x_{n0}^{(i)} \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n.$$

Которые будут приняты в качестве начальных условий линейной однородной системы:

$$x_0^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}.$$

По этим начальным условиям можно получить n решений однородной системы дифференциальных уравнений:

$$x^{(i)}(t), t \in [t_0, T], i = 1, \dots, n.$$

Каждое из которых удовлетворяет соотношению:

$$\dot{x}^{(i)}(t) = Ax^{(i)}(t), x^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}.$$

Матрица X составленная из этих решений называется фундаментальной матрицей линейной системы:

$$X(t) = \left(x^{(1)}(t) \mid x^{(2)}(t) \mid \dots \mid x^{(n)}(t) \right); \rightarrow \dot{X}(t) = AX(t),$$

$$X(t_0) = \left(x_0^{(1)} \mid x_0^{(2)} \mid \dots \mid x_0^{(n)} \right).$$

Основное свойство фундаментальной матрицы: если существует $t_* \in [t_0, T]$ такая, что $\det(X(t_*)) \neq 0$, то для любой $t \in [t_0, T]$ $\det(X(t)) \neq 0$. Так как векторы начальных условий линейно независимы, то $X(t_0)$ состоит из линейно независимых столбцов, а следовательно, $\det(X(t_0)) \neq 0$. Так из теоремы следует, что для всех $t \in [t_0, T]$ $X(t)$ – невырожденная матрица.

Система линейных дифференциальных уравнений имеет бесконечное число фундаментальных матриц в зависимости от принятого набора начальных условий. Так как $X(t_0)$ невырожденная матрица, то можно определить матрицу:

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0), t \in [t_0, T],$$

Называемую переходной матрицей.

Переходная матрица обладает следующими свойствами:

1. $\Phi(t_0, t_0) = X(t_0)X^{-1}(t_0) = I$.
2. Переходная матрица невырожденная для любых t, t_0 , т.е.

$$\det(\Phi(t, t_0)) = \det(X(t)X^{-1}(t_0)) = \det(X(t))\det(X^{-1}(t_0))$$
3. Переходная матрица удовлетворяет следующее матричное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A\Phi(t, t_0).$$

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = \frac{d(X(t)X^{-1}(t_0))}{dt} = \frac{dX(t)}{dt}X^{-1}(t_0) = AX(t)X^{-1}(t_0) = A\Phi(t, t_0).$$

Из свойств 3 и 1 следует, что $\Phi(t, t_0)$ – фундаментальная матрица для которой $X(t_0) = I$.

$$4. \Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t).$$

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = (X(t)X^{-1}(t_0))^{-1} = X(t_0)X^{-1}(t) = \Phi(t_0, t).$$

11. Вычисление переходной матрицы. Алгоритм решения СЛОДУ.

Переходная матрица удовлетворяет следующее матричное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A\Phi(t, t_0), \Phi(t_0, t_0) = I.$$

Для поиска аналитического решения этого уравнения проинтегрируем обе части уравнения

$$\int_{t_0}^t \frac{d\Phi(\tau, t_0)}{d\tau} d\tau = \int_{t_0}^t A\Phi(\tau, t_0) d\tau \rightarrow \Phi(t, t_0) - \Phi(t_0, t_0) = \int_{t_0}^t A\Phi(\tau, t_0) d\tau,$$

$$\Phi(t, t_0) = I + A \int_{t_0}^t \Phi(\tau, t_0) d\tau \rightarrow \Phi(t, t_0) = I + A \int_{t_0}^t \left(I + A \int_{t_0}^{\tau} \Phi(\tau_1, t_0) d\tau_1 \right)$$

Что в общем случае получим:

$$\Phi(t, t_0) = I + A(t - t_0) + \frac{A^2(t - t_0)^2}{2!} + \dots + \frac{A^n(t - t_0)^n}{n!} + \dots$$

А также приведем разложение в ряд Тейлора функцию вида:

$$e^{a(t-t_0)} = 1 + a(t - t_0) + \frac{a^2(t - t_0)^2}{2!} + \dots + \frac{a^n(t - t_0)^n}{n!} + \dots$$

Из сравнения видно, что $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$

Для решения СЛОДУ имеем: $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$, $x(t_0) = x_0$.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x \in R^n, \quad t \in [t_0, T]$$

Докажем, что решение этой задачи имеет вид

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0, .$$

Доказательство. Продифференцируем по t левую и правую часть решения:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0)x_0 = A\Phi(t, t_0)x_0 = Ax(t).$$

Второе равенство следует из свойства 3 переходной матрицы, третье равенство – из определения решения через переходную матрицу. Таким образом, предложенное решение удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений. Осталось показать, что предложенное решение удовлетворяет начальному условию, для чего вычислим

$$x(t_0) = \Phi(t_0, t_0)x_0 = Ix_0 = x_0$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$$

Для численного решения СЛОДУ с шагом h можно посчитать уравнение:

$$t_i = t_0 + ih, i = 0, \dots, N.$$

$$x(t_1) = x(t_0 + h) = e^{A(t_0+h-t_0)}x_0 = e^{Ah}x_0;$$

$$x(t_2) = x(t_0 + 2h) = e^{A(t_0+2h-t_0)}x_0 = e^{2Ah}x_0 = e^{Ah}x_1;$$

Отсюда следует следующая зависимость:

$$x(t_{i+1}) = e^{Ah}x_i = e^{Ah}x(t_i).$$

Таким образом решение СЛОДУ сводится к нахождению

$$\Phi = e^{Ah} = I + Ah + \frac{A^2h^2}{2!} + \dots + \frac{A^nh^n}{n!} + \dots \rightarrow \Phi = I + \sum_{i=1}^N \frac{A^i h^i}{i!}$$

12. Решение СЛНДУ через переходную матрицу. Дискретное описание СЛНДУ.

Зная решение для однородной системы можно попробовать решить неоднородную систему дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x \in R^n, u \in R^l, x(t_0) = x_0$$

Введем замену: $z(t) = \Phi(t_0, t)x(t)$, где $x(t)$ – решение СЛНДУ, $\Phi(t_0, t) = \Phi(t, t_0)^{-1}$, $\Phi(t, t_0)$ – переходная матрица СЛОДУ $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Продифференцируем $z(t)$ по t :

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= \dot{\Phi}(t_0, t)x(t) + \Phi(t_0, t)\dot{x}(t) = \\ &= e^{At_0} \left(-Ae^{-At}x(t) + e^{-At}(Ax(t) + Bu(t)) \right) = e^{At_0}e^{-At}Bu(t). \end{aligned}$$

Теперь проинтегрируем полученное выражение:

$$z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^t e^{At_0}e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Подставим также в это выражение: $z(t) = \Phi(t_0, t)x(t) = e^{At_0}e^{-At}x(t)$, $z(t_0) = x(t_0)$:

$$e^{At_0}e^{-At}x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t e^{At_0}e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau;$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Данная формула носит название формулы Коши.

Для дискретного представления формулы Коши вычислим $x(t_1) = x(t_0 + h)$:

$$x(t_0 + h) = e^{A(t_0+h-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} e^{A(t_0+h-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Сделаем предположение, что u изменяется незначительно за шаг h :

$$x(t_0 + h) = e^{A(t_0+h-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} e^{A(t_0+h-\tau)}Bu(t_0)d\tau$$

Для вычисления интеграла введем замену $s = t_0 + h - \tau$

$$ds = d\tau, \tau = t_0 \rightarrow s = h, \tau = t_0 + h \rightarrow s = 0;$$

$$x(t_1) = e^{Ah}x(t_0) + \int_0^h e^{As}Bu(t_0)ds$$

Введем обозначения:

$$A_d = e^{Ah}, B_d = \int_0^h e^{As}Bds$$

Получим следующее выражение:

$$x(t_1) = A_dx(t_0) + B_du(t_0).$$

Если использовать эту методику для последующих шагов получим:

$$x(t_2) = A_dx(t_1) + B_du(t_1).$$

$$x(t_{i+1}) = A_dx(t_i) + B_du(t_i), i = 1, \dots, N.$$

Матрицы A_d, B_d вычисляются разложением в ряд:

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_0^h e^{As}ds = \int_0^h \left(I + As + \frac{A^2s^2}{2!} + \dots + \frac{A^ns^n}{n!} + \dots \right) ds = \\ &= I + Ah + \frac{A^2h^2}{2!} + \dots + \frac{A^nh^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо следующее:

$$A_d = I + \Psi A, B_d = \Psi A$$

13. Переход от описания систем в пространстве состояний к передаточным функциям.

Описание системы в пространстве состояний выглядит следующим образом:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x \in R^n, u \in R^l,$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), y \in R^m, x(t_0) = x_0.$$

Данную систему также можно описать в форме вход-выход:

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) \\ = \beta_nu^{(n)}(t) + \beta_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + \beta_1u^{(1)}(t) + \beta_0u(t), \end{aligned}$$

Систему в форме вход-выход можно переписать в операторной форме:

$$a(p)y(t) = \beta(p)u(t), \text{ где } p = \frac{d}{dt}.$$

Из этого выражения можно получить передаточную функцию, умножив слева на обратную матрицу $a(p)$:

$$W(p) = \begin{pmatrix} w_{11}(p) & \cdots & w_{n1}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1n}(p) & \cdots & w_{nn}(p) \end{pmatrix}$$

$$w_{ij}(p) = \frac{\beta_{ij}(p)}{a(p)}$$

Аналогичный вид будет иметь ПФ если вместо оператора дифференцирования использовать оператор Лапласа. Операторы дифференцирования и Лапласа идентичны только для линейных систем при нулевых начальных условиях. И этим свойством можно воспользоваться.

$$x(s) = (Is - A)^{-1}Bu(s),$$

$$y(s) = (C(Is - A)^{-1}B + D)u(s) = W(s)u(s)$$

$$W(s) = \frac{1}{\alpha(s)} \begin{pmatrix} \beta_{11}(s) & \cdots & \beta_{1l}(s) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{m1}(s) & \cdots & \beta_{ml}(s) \end{pmatrix}$$

Здесь $\beta_{ij}(s)$ – полиномы относительно s , они совпадают с полиномами $\beta_{ij}(p)$.

14. Классификация математических моделей. Определение, формы записи.

1. Статистические модели – значение выхода $y(t)$ зависит от значения входа $u(t)$ в один и тот же момент времени t . Формы записи явная: $y(t) = F(u(t))$, неявная $\Phi(y(t), u(t)) = 0$. Принципы рассмотрения динамической системы как статической:

1. Система устойчива и имеет конечное время переходного процесса;
2. Входы и выходы должны меняться реже в сравнении с временем переходного процесса.

2. Динамические модели – те модели в которых не выполнены предыдущие условия, т.е. $y(t)$ может зависеть от прошлого входного процесса.(форме переменных состояния, разностные модели)

$$y(t) = F(\{u(s), s \leq t\}).$$

3. Дискретные модели – модели в которых U,Y,T могут представлять дискретные множества.

4. Непрерывные модели – модели в которых U,Y,T могут представлять непрерывные множества (луч, отрезок).

5. Детерминированные модели – это системы наличие информации о состояниях и о входах однозначно говорит о выходах системы.

$$\dot{x} = F(x, u, t),$$

$$y = G(x, u, t).$$

$$x = (x_1 \dots x_n)^T, u = (u_1 \dots u_n)^T, y = (y_1 \dots y_n)^T$$

6. Стохастические модели – модели в которых неопределенности считаются случайными.

$$y(t) = F(u(t)) + \varphi(t),$$

$\varphi(t)$ – погрешность, приведенная к выходу системы.

Остальные модели описываются :

Детерминированные	Стохастические; нечеткие
Сосредоточенные (уравнения конечные (алгебраические или трансцендентные), разностные, обыкновенные, дифференциальные)	Распределенные (уравнения с запаздыванием, в частных производных, интегральные)
Линейные	Нелинейные
Стационарные (параметры не меняются со временем)	Нестационарные (параметры изменяются со временем)

15. Способы упрощения нелинейных математических моделей.

Существуют 4 способа упрощения нелинейных моделей: линеаризация, редукция, дискретизация и континуализация.

Линеаризация – замена нелинейной системы на эквивалентную ей линейную систему. Работать с линейной моделью гораздо легче так как она обладает следующими преимуществами: выполнение принципа суперпозиции для входных воздействий; простота определения реакции линейной системы на типовые воздействия, что в совокупности с принципом суперпозиции позволяет использовать, например, методы спектрального анализа; наличие

мощного математического аппарата для получения аналитических решений для линейных систем, и др.

Методов линеаризации много, мы будем использовать метод касательной аппроксимации, суть которого заключается в предположении малого отклонения от некоторой рабочей точки, что позволяет нелинейные характеристики заменить эквивалентными линейными. В этом случае говорят о линеаризации вблизи рабочей точки.

Математическая модель НДУ имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \rightarrow \dot{x}(t) = f(z(t)), \\ y(t) &= g(x(t), u(t)). \rightarrow y(t) = g(z(t)).\end{aligned}$$

Рассмотрим первое уравнение: левая часть — это функция $\dot{x}(t): R \rightarrow R^n$, правая часть — это композиция функций $z(t): R \rightarrow R^{n+l}, f(z(t)): R^{n+l} \rightarrow R^n$. Предположим, что функция f является непрерывной и дифференцируемой в некоторой области из R^{n+l} . Построим ряд Тейлора для этой функции:

$$f(z) = f(z_0) + D_f(h) + o(h), h = z - z_0.$$

Таким образом можно предположить, что:

$$f(z) \approx f(z_0) + D_f(h)$$

Так как $o(h)$ пренебрежимо мало при сравнении с $D_f(h)$. Из верхнего выражения следует важное выражение:

$$f(z) - f(z_0) \approx D_f(h)$$

Данное выражение можно интерпретировать как изменение функции f относительно значения $f(z_0)$ при отклонении аргумента z от значения z_0 , есть почти тоже самое, что и значение функции $D_f(z - z_0)$. Сама функция имеет вид: $D_f(h) = Jh$, где J матрица Якоби для точки z_0 :

$$J = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_{n+l}} \right|_{z=z_0} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial z_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial z_{n+l}} \right|_{z=z_0} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что статический режим найден, т.е. найдено такое значение z при котором $\dot{x}(t) = 0 \forall t$. Выберем этот z в качестве z_0 и проведем ту же последовательность действий, что и выше и получим:

$$\dot{x}(t) = f(z(t)) \approx f(z_0) + D_f(h) = f(z_0) + Jh(t)$$

При этом отметим, что $h(t) = (\Delta x(t), \Delta u(t))^T$. Тогда с учетом того, что $f(z_0) = 0, x(t) = x_0 + \Delta x(t)$ имеем $\dot{x}(t) = \Delta \dot{x}(t)$, следовательно:

$$\Delta \dot{x}(t) = J(\Delta x(t), \Delta u(t))^T$$

Данное выражение представляет собой СЛНДУ.

Матрицу Якоби J разбивают на две части $J = [A \mid B]$:

$$A = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial x_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial x_n} \right|_{z=z_0} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial x_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial x_n} \right|_{z=z_0} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial u_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_1(z)}{\partial u_l} \right|_{z=z_0} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial u_1} \right|_{z=z_0} & \dots & \left. \frac{\partial f_n(z)}{\partial u_l} \right|_{z=z_0} \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы называют матрицами состояния и входных воздействий соответственно. Аналогичным образом поступают с вторым уравнением и получают:

$$\Delta \dot{x}(t) = A\Delta x(t) + Bu(t),$$

$$\Delta y(t) = C\Delta x(t) + Du(t).$$

Если линеаризация приводит к большим погрешностям, то стараются, по возможности, выбрать математическую модель, линейную по параметрам:

$$\dot{x}(t) = A\psi(x, u),$$

Где ψ нелинейная векторная функция.

Редукция – понижение порядка системы. Возможность редукции математической модели можно определять по собственным числам матрицы состояния линейной или линеаризованной системы. Вещественные части собственных значений характеризуют скорость затухания переходных процессов. Если одно из собственных чисел минимум на порядок больше остальных, соответствующий ему переходный процесс закончится быстро и не окажет существенного влияния на переходный процесс модели в целом. В этом случае можно уменьшить порядок системы. Применительно к таким системам можно говорить о принципе подчинения.

16. Переход от непрерывных моделей к дискретным и обратно. Аппроксимация матричной экспоненты.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t).$$

Для перехода к дискретной модели предположим, что $x(t)$ доступен к измерению в моменты времени $t_k = kh, k = 0, 1, \dots, N, h$ – шаг дискретности, при этом $u(t)$ постоянно на промежутках времени t_k . Тогда динамику векторов $x_k = x(t_k)$ можно описать разностными уравнениями

$$x_{k+1} = Px_kF + Qu_k,$$

$$y_k = Rx_k.$$

Где P и Q определяются следующими соотношениями:

$$P = e^{Ah},$$

$$Q = A^{-1}(P - I)B,$$

$$e^{Ah} = I + Ah + \frac{A^2h^2}{2!} + \dots + \frac{A^nh^n}{n!} + \dots \rightarrow \Phi = I + \sum_{i=1}^N \frac{A^i h^i}{i!}.$$

При достаточно малых h можно удерживать лишь первые несколько членов ряда ($e^{Ah} \approx I + Ah$). В таком случае непрерывная и дискретная передаточные функции связаны соотношением:

$$W_d(z) = W_n\left(\frac{1-z}{h}\right)$$

Т.е. при переходе к дискретному времени в ПФ нужно заменить s на $\frac{1-z^{-1}}{h}$. Для перехода от $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t)$ к $x_{k+1} = Px_kF + Qu_k, y_k = Rx_k$ в большинстве методов используется аппроксимация e^{Ah} матричными дробями Паде. Например, метод Тастина (формула Паде порядка (1,1)):

$$e^{Ah} \approx \left(I + \frac{Ah}{2}\right) \left(I + \frac{Ah}{2}\right)^{-1}$$

$$W_d(z) = W_n\left(\frac{2}{h} * \frac{1-z}{1+z}\right)$$

Или метод Дэвидсона (формула Паде порядка (2,2))

$$e^{Ah} \approx \left(I + \frac{Ah}{2} + \frac{A^2h^2}{12}\right) \left(I + \frac{Ah}{2} + \frac{A^2h^2}{12}\right)^{-1}$$

В случае обратного перехода от модели вида:

$$x_{k+1} = Px_kF + Qu_k,$$

$$y_k = Rx_k.$$

К

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t).$$

Можно воспользовавшись формулами:

$$A = \frac{1}{h} \ln P; \quad B = \frac{1}{h} \ln P(P - I)^{-1} Q,$$

При этом стоит отметить, что $\ln P$ логарифм матрицы, функция, обратная к экспоненциальной и также определяется через ряд

$$\ln(I + X) = X - \frac{X^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n,$$

17. Стохастический подход в математическом моделировании. Условия применения.

Во всех моделях присутствует неопределённости. Среди различных способов уточнения и формализации неопределенности наибольшее распространение получил стохастический (вероятностный) подход, при котором неопределенные величины считаются случайными.

Следовательно, в стохастическом подходе будут задействованы аппараты теории вероятности и математической статистики. Математическое обоснование к стохастическому подходу дают две теоремы: Закон больших чисел и Центральная предельная теорема.

Закон больших чисел гласит, что если ξ_1, \dots, ξ_n —случайные величины с математическим ожиданием $M\xi_i = a$ и дисперсией $M(\xi_1 - a)^2 = \sigma^2$, то

$$\frac{1}{N} (\xi_1 + \dots + \xi_N) - a \approx 0,$$

Для больших N . Центральная теорема утверждает, что

$$\frac{1}{N} (\xi_1 + \dots + \xi_N) - a \approx \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \xi,$$

ξ — стандартная нормально распределенная случайная величина ($M\xi = 0, M\xi^2 = 1$).

Однако для того, чтобы пользоваться данным подходом необходимо чтобы выполнялись следующие требования:

1. Массовость проводимых экспериментов (большое число экспериментов);
2. Повторяемость условий этих экспериментов, оправдывающее сравнение результатов этих экспериментов;
3. Статистическая устойчивость вероятности на серии экспериментов мало отличаться друг от друга.

18. Нечеткие системы. Определение, операции над системами.

Аналогично классическому случаю понятие нечеткой системы вводится через понятие нечеткого отношения (частными случаями которого являются понятия «нечеткое отображение», «нечеткая функция»).

Определение. Нечеткое отношение R на множествах X, Y задается функцией $\mu_R: X \times Y \rightarrow [0,1]$, каждое значение которой $\mu_R(x, y)$, интерпретируется как степень нахождения (совместимости, принадлежности) пары (x, y) в данном отношении.

В полной аналогии с обычными системами нечеткая система – это нечеткое отношение между множествами U, Y , где U – множество входных функций времени $u(t)$, а Y – множество выходных функций времени $y(t)$.

Важную роль в теории нечетких систем играет отношение композиции $R \circ S$. Если даны отношение R на множествах X, Y и отношение S на множествах Y, Z , то функция принадлежности отношения $R \circ S$ на множествах X, Z задается формулой

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \max_{y \in Y} (\min \{ \mu_R(x, y), \mu_S(y, z) \}). \quad (3.21)$$

Композиция последовательное соединение нечетких систем.

19. Понятие нечеткого множества и лингвистической переменной. Операции над нечеткими множествами.

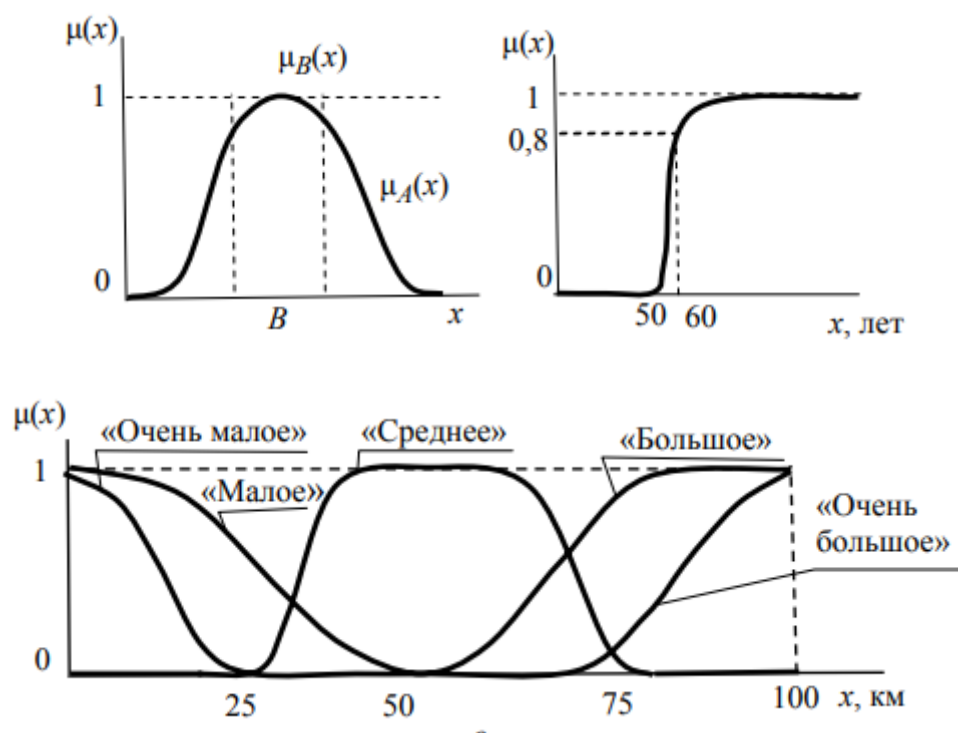
В том случае если нельзя применить стохастический подход используют теории нечетких множеств. Прежде чем говорить о нечетких системах, необходимо ввести понятие нечеткого множества.

Нечетким подмножеством A множества X назовем пару (X, μ_A) , где $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ – функция, каждое значение которой $\mu_A(x) \in [0,1]$ интерпретируется как степень принадлежности $x \in X$ множеству A . Функция μ_A называется функцией принадлежности множества A .

Задавать функции принадлежности в виде таблицы:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\mu_A(x)$	0	0.1	0.6	0.8	1	1	0.9	0.7	0.2	0	...

Или в виде графика (аналитически)



Переменные, значениями которых являются нечеткие множества, называются лингвистическими. Переменная «расстояние» принимает обычно числовые значения. Однако в предложениях естественного языка она может фигурировать как лингвистическая со значениями «малое», «большое», «очень малое», «среднее», «около 5 км» и т.д. Каждое значение описывается нечетким множеством, которое в рамках данной предметной области может иметь конкретную числовую интерпретацию.

Операции над нечеткими множествами:

Операция	Лингвистический смысл	Формула для $\mu_C(x)$
Пересечение $C = A \cap B$	И	$\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Объединение $C = A \cup B$	ИЛИ	$\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Дополнение $C = \bar{A}$	НЕ	$1 - \mu_A(x)$
Концентрация	ОЧЕНЬ	$ \mu_A(x) ^2$
Размывание	НЕ ОЧЕНЬ	$\sqrt{\mu_A(x)}$

20. Нечеткие числа. Сравнение нечеткого и стохастического подхода.

Нечеткое число – это число, заданное с погрешностью. Рассмотрим свойства и применения нечетких подмножеств числовой оси $R^1 = (-\infty, +\infty)$ – так называемых нечетких чисел. Над нечеткими числами можно производить арифметические и иные действия, правила выполнения которых вытекают из правил действий с отношениями и из того, что любую бинарную операцию можно рассматривать как тернарное (3-местное) отношение. Например, функция принадлежности нечеткой суммы $C = A \oplus B$ нечетких чисел A, B имеет вид

$$\mu_C(z) = \sup_{x+y=z} \min \{ \mu_A(x), \mu_B(y) \}.$$

Для того чтобы работать с такими числами, нужно задавать функции принадлежности и погрешностей, а это невозможно сделать во всех $x \in R^1$ в силу бесконечности множества R^1 . Один из способов преодоления этой трудности – использование нечетких $L - R$ -чисел (сокращение от «left – right»).

Чтобы определить нечеткие $L - R$ -числа, на промежутке $[0, \infty)$ задаются две невозрастающие неотрицательные функции $L(x), R(x)$, обладающие свойствами $L(0) = R(0) = 1$. После этого функцию принадлежности нечеткого числа A определяют в виде

$$\mu_A = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha}\right), & x \leq \alpha, \\ R\left(\frac{x-a}{\beta}\right), & x > \beta, \end{cases} \quad (5.9)$$

где a – вещественное число, называемое средним значением (употребляют также термины «центр», «мода») нечеткого числа; $\alpha > 0, \beta > 0$ – левый и правый коэффициенты нечеткости. Если $L(x) = R(x), \alpha = \beta$, то нечеткое число называют симметричным.

Поскольку функции $L(x), R(x)$ задаются заранее и не меняются, для выполнения действий с $L - R$ -числами достаточно помнить лишь тройку $A = \{a, \alpha, \beta\}$. Правила арифметики $L - R$ -чисел вытекают из общих правил арифметики нечетких чисел и напоминают правила распространения ошибок в приближенных вычислениях. Если $A = \{a, \alpha, \beta\}$, $B = \{b, \chi, \delta\}$, то

$$A \oplus B = \{a + b, \alpha + \chi, \beta + \delta\},$$

$$A \ominus B = \{a - b, \alpha + \chi, \beta + \delta\},$$

Если B – четкое число ($\chi = \delta = 0$), то $A \otimes B = \{ab, \alpha|b|, \beta|b|\}$.

Стохастический подход: меньше погрешности за счет эффекта усреднения, но не всегда можно его применить или обосновать его применение.

Нечеткий подход: улучшение точности при наличии дополнительной информации о системе, но заведомо меньшая точность при сравнении с стохастическим подходом.

21. Энергетические характеристики сигналов. Преобразование Фурье.

При исследовании колебательных процессов часто применяются их энергетические характеристики, в первую очередь мощность и энергия.

Мгновенная мощность $p(t)$ сигнала $y(t)$ определяется как квадрат его мгновенного значения $p(t) \approx y^2(t)$. Энергия сигнала на интервале $[t_1, t_2]$ находится как интеграл от мгновенной мощности $P = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt$. Отношение $\frac{P}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) dt$ выражает среднюю (на интервале $[t_1, t_2]$) мощность сигнала. Обозначим это как $\overline{y^2(t)}$. Получить представление об этих характеристиках процесса можно на основе преобразования Фурье. Рассмотрим этот метод более подробно.

Для периодических процессов $y(t)$ с периодом T можно записать ряд Фурье в виде:

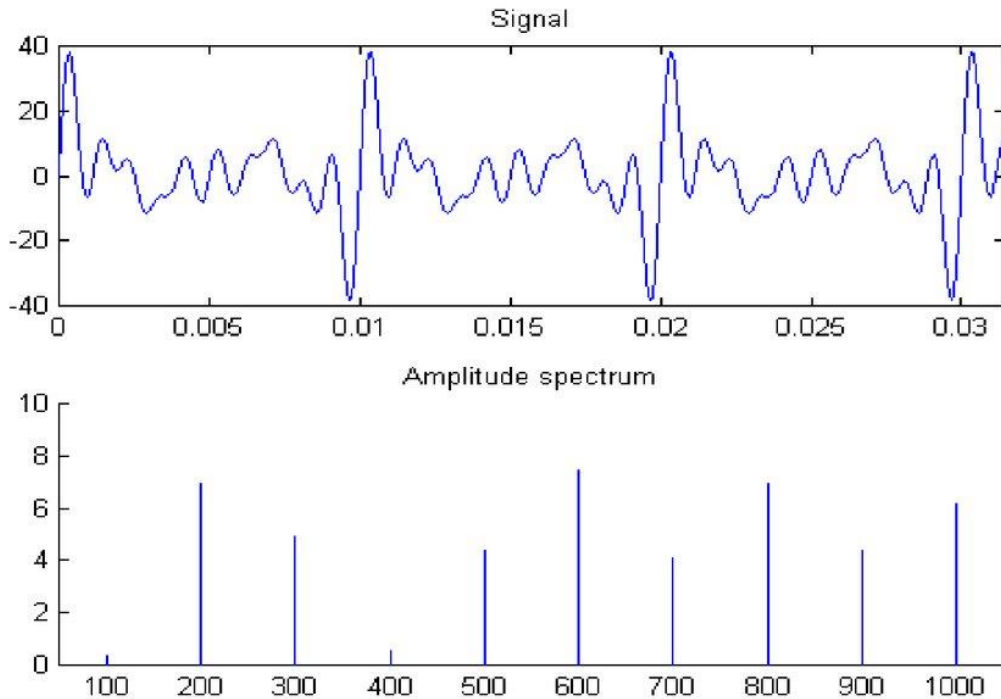
$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \right),$$

Где коэффициенты разложения находятся из формул:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T y(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt, \quad b_k = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Совокупность величин $s_0 = \frac{|a_0|}{2}$, $s_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ ($k = 1, 2, \dots$) называется амплитудным частотным спектром периодической функции $y(t)$. Величины s_k представляют собой амплитуды гармоник с частотой $\omega_k = k\Omega$, $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ в разложении процесса в ряд Фурье. Спектр несет в себе информацию о частотных свойствах сигнала: если сигнал имеет выраженные колебания на некоторых частотах, то его спектр на этих частотах содержит пики.

Амплитудно-частотный спектр



Обобщением ряда Фурье на непериодические процессы является интеграл Фурье, при котором используется представление

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (V(\omega) \sin \omega t + U(\omega) \cos \omega t) dt,$$

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cos(\omega t) dt, V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \sin(\omega t) dt$$

Аналогично вводится частотный спектр процесса $y(t)$ как $S(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$. Поскольку при цифровом моделировании исходной является дискретная реализация процесса и нахождение интеграла выполняется конечным суммированием, то при числовом гармоническом анализе вместо непрерывного преобразования выполняется дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Для этого исследуемый процесс $y(t)$ (длительностью T) заменяет выборочной дискретной функцией (т.е. последовательностью) $y[k] = y(t_k)$, где $t_k = kT_0$ ($k = 1, 2, \dots, N$), N – заданное число точек, $T_0 = \frac{T}{N}$ – шаг дискретности (квантования).

Далее вычисляется функция

$$Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \left(y[n] \exp \left(-j2\pi(k-1) \frac{n-1}{N} \right) \right), 1 \leq k \leq N,$$

(«изображение по Фурье»), имеющая комплексные значения. Для ускорения процесса рекомендуется брать количество точек $N = 2^v$, v – некоторое натуральное число.

22. Хаотические системы. Сравнение периодических, квазипериодических и хаотических колебаний.

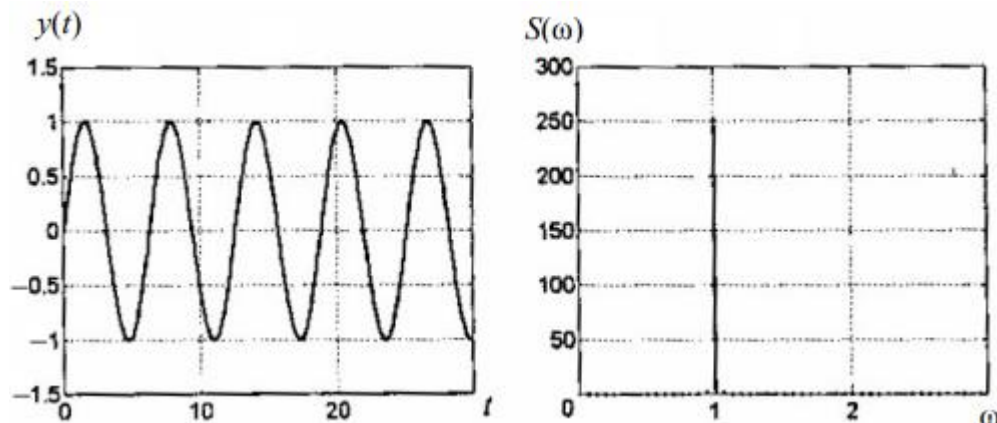
Хаотические системы предоставили исследователям новый класс моделей неопределенности, отличающихся по своим свойствам как от стохастических, так и от нечетких моделей. Если в детерминированной модели будущую траекторию можно предсказать на сколь угодно большое время вперед, зная текущее состояние системы, а в стохастической модели точный прогноз, вообще говоря, невозможен даже на сколь угодно малое время, то в хаотической модели ошибка прогноза растет экспоненциально и, следовательно, возможен прогноз на ограниченное время вперед, определяемое допустимой ошибкой прогноза. Процессы в хаотических моделях имеют вид нерегулярных колебаний, в которых меняется, «плавает», как частота, так и амплитуда.

Основным видом математических моделей колебаний в механических, электрических и других системах считались дифференциальные уравнения, например

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0, 0 \leq t \leq \infty$$

$$y(t) = A_0 \sin \omega t + A_1 \cos \omega t$$

ω – круговая частота, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период колебаний, $A_1 = y(0)$, $A_0 = \dot{y}(0)/\omega$ – амплитуды колебаний.



Для описания колебаний более сложной формы можно соединять модели вида с различными частотами колебаний $\omega_1, \dots, \omega_r$. Рассмотрим последовательно соединение моделей вида

$$\ddot{y}_1(t) + \omega_1^2 y_1(t) = 0;$$

$$\ddot{y}_2(t) + \omega_2^2 y_2(t) = y_1(t)$$

$$y_2(t) = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$$

Если частоты ω_1, ω_2 соизмеримы, т.е. являются целыми кратными некоторой частоты ω_0 , то колебания будут периодическими, в противном случае они относятся к классу квазипериодических.

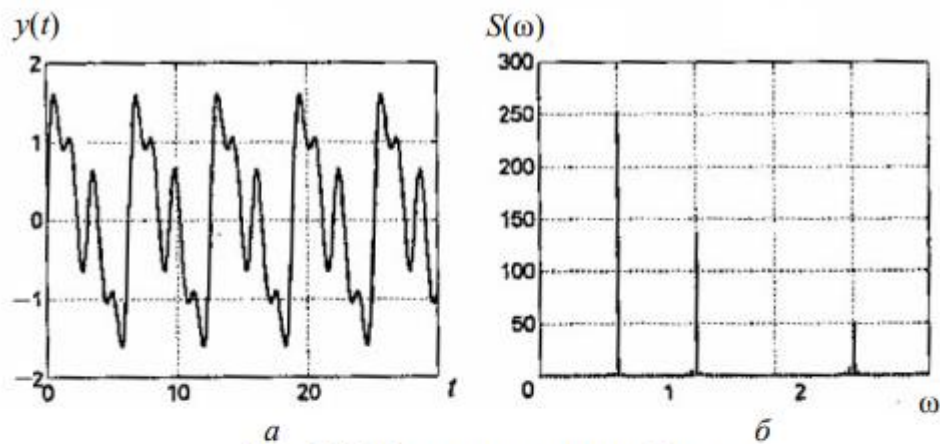


Рис. 3.4. Периодические колебания

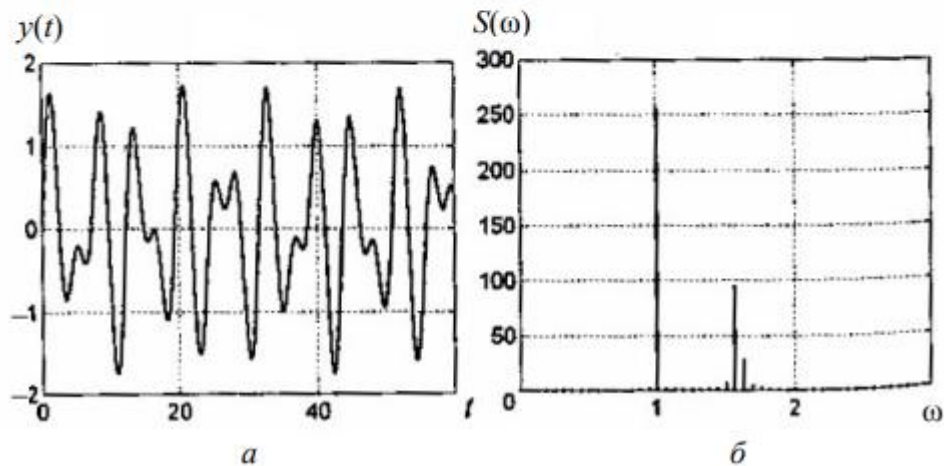


Рис. 3.5. Квазипериодические колебания

В обоих случаях решение непрерывно зависит от начальных условий, а его спектр является дискретным конечным множеством. Можно заметить, что «на глаз» различить периодические и квазипериодические колебания иногда затруднительно, поскольку реальные измерения (в том числе измерение частоты колебаний) выполняются с конечной точностью и отличить

рациональное отношение частот от иррационального оказывается практически невозможным.

Хаотические движения возникают, когда траектории системы глобально ограничены и локально неустойчивы. В хаотической системе сколь угодно малое начальное расхождение траекторий не остается малым, а в течение некоторого времени растет экспоненциально. Частотный спектр хаотической траектории является непрерывным (рис. 3.7, б). Во многих случаях подобные нерегулярные, непериодические колебания лучше отражают свойства процессов, протекающих в реальных системах. Также следует отметить, что «на глаз» отличить хаотический процесс от квазипериодического может быть не менее трудно, чем отличить квазипериодический процесс от периодического.

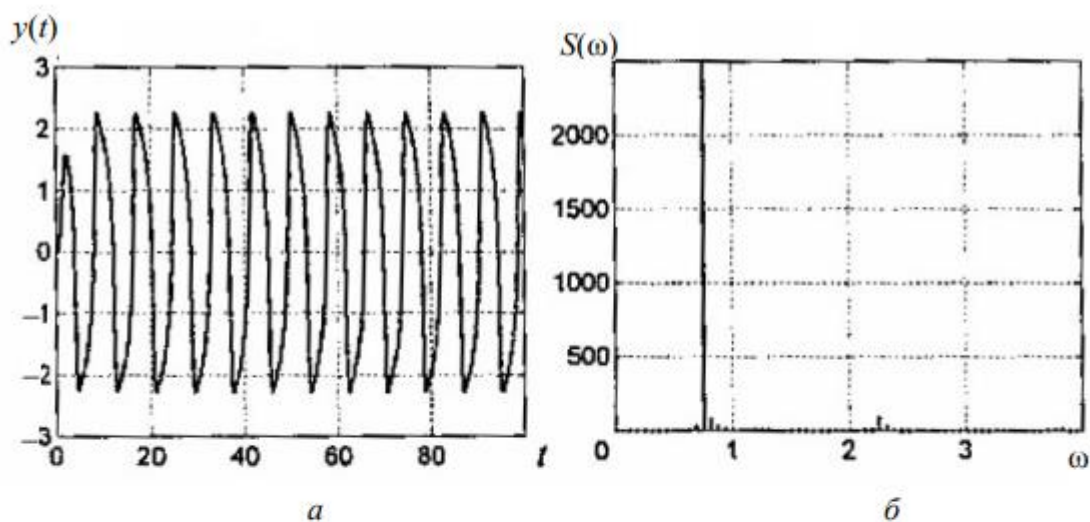


Рис. 3.6. Предельный цикл и его спектр

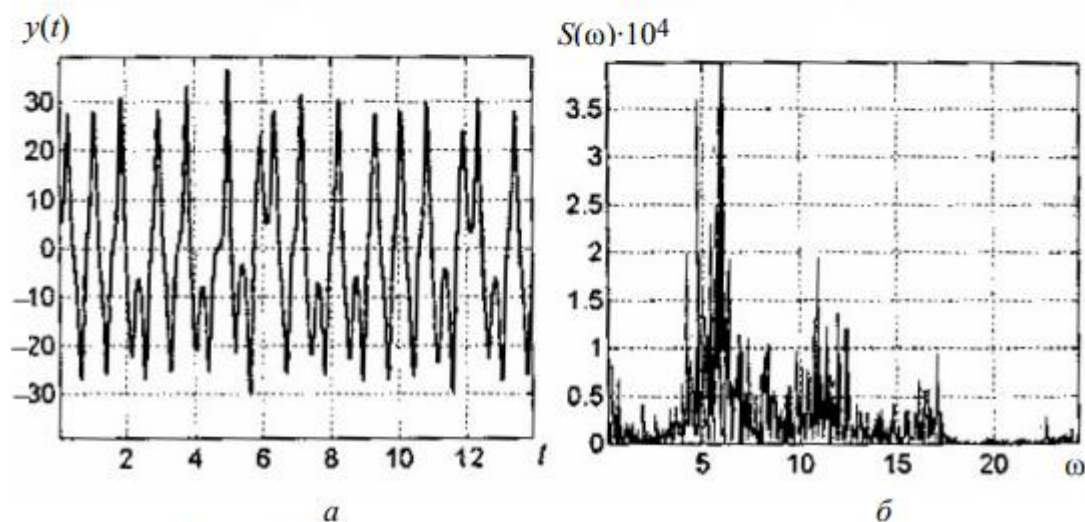


Рис. 3.7. Хаотический процесс в системе Лоренца и его спектр

Устойчивый предельный цикла— периодическая траектория, к которой сходятся все другие траектории (по крайней мере, траектории с близкими начальными условиями)

23. «Странные» аттракторы. Определение, количественные характеристики.

Терминология в области хаотических моделей еще не устоялась, и существует несколько различных определений хаотических систем. Приведем одно из простейших.

Рассмотрим динамическую систему в непрерывном времени:

$$\dot{x} = F(x),$$

Где $x = x(t) \in R^n$ — вектор состояния системы, $0 \leq t \leq \infty$.

Определение. Замкнутое множество $\Omega \in R^n$ называется аттрактором системы $\dot{x} = F(x)$, если а) существует такое открытое множество $\Omega_0 \in \Omega$, что все траектории $x(t)$ системы $\dot{x} = F(x)$, начинающиеся в Ω_0 , определены при всех $t \geq 0$ и стремятся к Ω при $t \rightarrow \infty$; б) никакое собственное подмножество Ω этим свойством не обладает.

Определение. Аттрактор называется странным если он ограничен и любая траектория, начинающаяся на нем неустойчива по Ляпунову.

Определение. Система называется хаотической, если у нее есть хотя бы один странный аттрактор.

Аналогичные определения даются для систем, дискретных по времени:

$$x_{k+1} = F(x_k), k = 0, 1, 2, \dots$$

Неустойчивость по Ляпунову характеризует основное свойство хаотических колебаний, называемое «сверхчувствительностью», или «чувствительной зависимостью» от начальных условий: любые две сколь угодно близкие траектории обязательно удаляются друг от друга на конечное расстояние.

Как уже было сказано, основным критерием хаотичности является локальная неустойчивость, т.е. разбегание близких вначале траекторий. Соответственно основной характеристикой хаотичности является скорость разбегания, определяемая так называемым старшим показателем Ляпунова. Показатели Ляпунова определяются для заданной «опорной» траектории $\bar{x}(t)$ системы с начальным условием $\bar{x}(0) = x_0$. Для этого составляется уравнение в вариациях (система, линеаризованная вблизи $\bar{x}(t)$):

$$\frac{d}{dt}\delta x = W(t)\delta x,$$

Где $\delta x = x - \bar{x}(t)$; $W(t) = \frac{\partial F(x(t))}{\partial x}$ – матрица Якоби, вычисленная вдоль решения $\bar{x}(t)$. Задав начальное отклонения $z = \delta x(0)$, можно вычислить величину

$$\alpha(x_0, z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(t)\|}{\|z\|}$$

характеризующую скорость экспоненциального роста решений в направлении z и называемую характеристическим показателем (ляпуновской экспонентой) в направлении z . Более того, число различных характеристических показателей конечно, их можно пронумеровать в порядке убывания $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ и существе базис $z_i \in R^n, i = 1, \dots, n$, для которого $\alpha(x_0, z_i) = \alpha_i, 1, \dots, n$.

Наиболее важен старший ляпуновский показатель α_1 . Если $\alpha_1 > 0$ вдоль ограниченного решения $\bar{x}(t)$, плотного в аттракторе Ω , то это решение неустойчиво по Ляпунову, а аттрактор является странным. При этом величина α_1 характеризует степень неустойчивости, или, другими словами, показатель экспоненциальной чувствительности к начальным данным. Показатели Ляпунова характеризуют прогнозируемость траекторий системы.

Другой важной характеристикой хаотической системы является фрактальная размерность аттрактора, характеризующая его «густоту» или «пористость». Для ее подсчета аттрактор Ω покрывается кубиками размера ε . Пусть $N(\varepsilon)$ – количество кубиков в покрытии. Вычислим величину

$$\mu(d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \varepsilon^d.$$

Можно показать, что существует число $d_f > 0$, такое что $\mu(d) = \infty$ при $d < d_f$, что $\mu(d) = 0$ при $d > d_f$. Это число называется фрактальной размерностью, или емкостью множества Ω . Емкость можно определить из соотношения

$$d_f = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log \varepsilon}$$

При этом оно должно быть дробным.

24. Области применения хаотических колебаний. Синхронизация хаотических колебаний.

Из предыдущего ясно, что хаотические модели следует использовать для описания непериодических колебательных процессов с непостоянными, меняющимися характеристиками (например, частотой и фазой). Существующие методы позволяющие оценивать эти характеристики по результатам измерений. При этом такая величина как частота колебаний становится «нечеткой» и уступает место спектру, который является непрерывным. Вводятся новые важные величины: старший ляпуновский показатель (степень неустойчивости), характеризующий скорость разбегания траектории и, следовательно, время прогнозируемости процесса; фрактальная размерность, характеризующая «пористость» клубка траекторий. Важно, что известные хаотические модели имеют небольшое число параметров, а процессы в них обладают малой (несколько единиц) фрактальной размерностью. Это повышает надежность и прогнозирующую силу моделей. Перечислим некоторые из уже известных применений хаотических моделей.

Описание нерегулярного поведения реальных систем. На сегодняшний день известен целый ряд реальных физических устройств и процессов, проявляющих при некоторых условиях хаотическое поведение. Приведем несколько примеров:

- газовые или полупроводниковые лазеры в так называемых многомодовых режимах;
- механические системы, состоящие из нескольких связанных осцилляторов (например, маятников), а также системы с ударами и люфтами;
- электронные схемы с активными элементами, например, полупроводниковыми приборами с отрицательным дифференциальным сопротивлением (такими как туннельные диоды, диоды Ганна и та.);
- химические и физико-химические реакции с нелинейной кинетикой;
- временные ряды в экономике и финансах (например, бизнес-циклы, цены на акции, обменные курсы валют. Заметим, что в экономических и финансовых приложениях хаотические модели в последнее время потеснили традиционные для этих областей стохастические модели.

Генерация нерегулярных сигналов. Во многих технических системах возникает необходимость использования псевдослучайных чисел и сигналов. В качестве генераторов псевдослучайных чисел можно использовать хаотические системы.

Простейший подход к построению хаотических генераторов состоит в том, что берется динамическая система, описываемая одной из типовых хаотических моделей, и по внешнему виду траекторий выбирается та, в которой качественный характер колебаний наиболее близок к желаемому.

После этого путем подбора параметров моделей устанавливаются желаемые качественные характеристики колебаний (амплитуда, спектр и т.д.). Использование характеристик хаотической динамики (показатели Ляпунова, фрактальные размерности и т.п.) позволяет задавать дополнительные свойства шумов и помех при их генерации. Заметим, что «на глаз» квазипериодические колебания с большим числом составляющих гармоник и хаотические колебания бывает трудно различить. В то же время, как и при моделировании нерегулярных процессов, малая размерность и малое число параметров хаотических моделей дают им дополнительные преимущества перед линейными моделями с большим числом гармоник.

Синхронизация нерегулярных колебаний и управление ими. Двойственность природы хаотических систем (детерминированные системы с хаотическим поведением) приводит к новым неожиданным их применениям. Например, две хаотические системы можно заставить колебаться синхронно (в одной фазе), если подавать на одну или на обе системы сигнал обратной связи по ошибке рассогласования. Использование этого эффекта, например, в технике связи позволяет использовать хаотический несущий сигнал вместо периодического, что в свою очередь дает возможность повысить надежность и скрытность процесса передачи сообщений.

Поясним идею управляемой синхронизации для упрощенного случая, когда ведущая система (эталонный генератор) описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x), \quad (6.10)$$

а ведомая (управляемый генератор) – уравнением

$$\dot{z} = f(z) + u(t), \quad (6.11)$$

где x, z, u – n -мерные векторы. Выбирая вектор обратной связи $u(t)$ пропорциональным ошибке

$$u(t) = -Ke(t), \quad (6.12)$$

где $e = x - z$ – вектор ошибок, $K > 0$ – коэффициент усиления, получим уравнение ошибок:

$$\dot{e} = f(x(t)) - f(x(t) - e) - Ke \quad (6.13)$$

в котором $x(t)$ – заданная функция времени, являющаяся решением (3.76).

Если матрица Якоби $A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$ ограничена в некоторой области Ω , содержащей решение системы (6.10) – (6.12), то легко подобрать такое $K > 0$, чтобы собственные числа симметричной матрицы $A(x) + A^T(x) - 2KI_n$ (где I_n – единичная $n \times n$ -матрица) лежали левее мнимой оси при $x \in \Omega$. При

этом система (6.10) – (6.12) будет обладать свойством так называемой конвергентности в Ω : все ее траектории, лежащие в Ω , сходятся при $t \rightarrow \infty$ к единственному ограниченному решению. Поскольку $e(t) \equiv 0$ является решением (6.13) то к нему и сходятся все траектории. Таким образом, решения систем (6.10) и (6.11) неограниченно сближаются, что и означает синхронизацию двух систем. При этом поведение каждой из систем может быть хаотическим и оставаться таковым.

25. Абсолютная устойчивость системы Лурье. Понятие о степени возбудимости нелинейной системы.

Часто методы теории нелинейных систем создаются путем аналогий с линейной теорией или сведением нелинейной задачи к линейной. Построение нелинейной теории на «линейном» фундаменте порождается представлением о линейной системе как о простейшем классе систем, а о гармоническом сигнале как о простейшем виде сигналов.

Модель, в которой используется подход разделения на линейную и нелинейную часть называется системой Лурье.

Классическая задача Лурье об абсолютной устойчивости системы, состоящей из линейной части, описываемой передаточной функцией

$$y = W(p)u,$$

И статической нелинейности

$$u = \varphi(y),$$

График которой лежит в симметричном секторе

$$|\varphi(y)| \leq K_\varphi |y|.$$

Вышеописанное неравенство означает, что коэффициент усиления нелинейного блока не превосходит K_φ . Для устойчивости достаточно обеспечить выполнение неравенства:

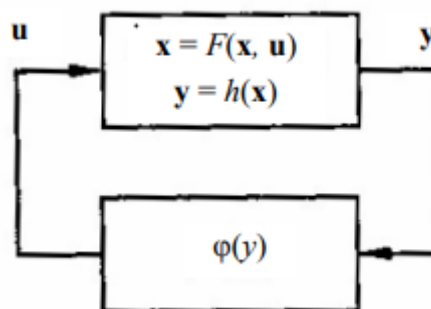
$$K_\varphi K_W < 1, K_W = \max_{\omega} |W(j\omega)|$$

Таким образом, для анализа устойчивости представляет интерес не вся АЧХ, а только ее максимум K_W , определяемый резонансными свойствами линейной части и достигаемый на одной из резонансных частот. Для определения K_W для линейной системы на ее вход следует подать гармонический сигнал $u(t) = \sin(\omega t)$ и найти ω , реализующую $\max_{\omega} \max_{t \geq 0} |y(t)|$, начальные условия следует брать нулевыми.

Пусть теперь линейная модель системы Лурье заменяется на нелинейную и система описывается дифференциальным уравнением состояния вместе с конечным уравнением выходов:

$$\dot{x} = F(x, u), x - n - \text{мерный вектор состояния}$$

$$y = h(x).$$



Очевидно, что устойчивость нелинейной системы, как и в линейном случае, должна зависеть от резонансных свойств системы. Однако изучение резонансных свойств нелинейной системы затруднительно, поскольку частота вынужденных колебаний в нелинейной системе зависит от амплитуды входного гармонического сигнала. С ростом амплитуды входа в системе могут

возникать сложные, в том числе хаотические режимы, т. е. входной гармонический сигнал не может в полной мере вскрыть резонансные свойства нелинейной системы. Задачу определения формы сигнала, обеспечивающего при заданной амплитуде входа максимальную амплитуду выхода, можно поставить как задачу оптимального управления системой

$$\max_{|u(t)| \leq \gamma} y^2(t)$$

При этом входной сигнал, создающий максимальное возбуждение системы, будет зависеть не только от времени, но и от состояния системы, т.е. иметь вид обратной связи. Величина оптимума в задаче зависит от γ квадратично. Поэтому естественно ввести характеристику возбудимости системы ограниченным входным сигналом как величину

$$E(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{Q(\gamma)},$$

где $Q(\gamma)$ – оптимальное значение в задаче. Для линейных асимптотически устойчивых систем величина E не зависит от γ , а для нелинейных – представляет собой функцию от γ , которую естественно назвать степенью возбудимости системы.

Решение задачи оптимального управления в общем случае весьма трудоемко даже при использовании эффективных численных методов. Однако для приближенного решения можно воспользоваться известным результатом о возможности приближенной замены оптимального управления на субоптимальное, получаемое максимизацией скорости изменения целевого функционала в силу свободной системы (при $\mathbf{u} = 0$). Точность такой замены тем выше, чем меньше амплитуда входа γ . Для вычисления локально-оптимального управления представим первую часть уравнения (3.52) в виде

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u} + R(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (3.55)$$

где $f(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, 0)$, $g(\mathbf{x}) = \partial f / \partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$, а остаточный член $R(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ и имеет высший порядок малости по \mathbf{u} . Скорость изменения целевого функционала $\dot{Q}_t = y^2(t)$ составляет

$$\dot{Q}(t) = 2\mathbf{y}(\nabla \mathbf{h})^T (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u} + R(\mathbf{x}, \mathbf{u})).$$

Пренебрегая величиной $R(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, видим, что субоптимальное значение входа при малых γ равно

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \gamma \operatorname{sign}(\mathbf{h}(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})^T g(\mathbf{x})). \quad (3.56)$$

Таким образом, для вычисления степени возбудимости системы при малых γ достаточно подавать на вход системы сигнал и измерять достигаемую амплитуду выхода. Это можно делать как в физическом (натурном), так и в вычислительном эксперименте.

Условия устойчивости следуют из теоремы о пассивности [12] и аналогичны (3.50):

$$K_F K_\varphi < 1. \quad (3.57)$$

При этом роль максимума амплитудно-частотной характеристики играет максимальная степень возбудимости

$$K_F = \sup_{\gamma} E(\gamma). \quad (3.58)$$

Величина K_F конечна для так называемых строго пассивных систем.

Отметим, что воздействие вида (3.56) создает в системе аналог резонансного режима: для слабодемпфированных систем малое воздействие вида (3.58) приводит к возбуждению больших колебаний выхода и может сообщить системе значительную энергию. Можно показать, что для механических систем

26. Базовые принципы построения алгоритмов управления.

Построение управляющих алгоритмов базируется на единых принципах и, прежде всего, на понятии стабилизирующего управления, т.е. такого управления с обратной связью, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость, по Ляпунову тех или иных движений объекта.

Обратимся к математической модели динамической системы:

$$\dot{\bar{x}} = F(\bar{x}, \bar{\delta}, \bar{f}_{out}),$$

Где $\bar{x}, \bar{\delta}, \bar{f}_{out}$ – векторы соответственно состояния, управления и возмущения.

Выделим некоторое контролируемое движение динамической системы $\bar{x} = \bar{x}_p(t), \bar{\delta} = \bar{\delta}_p(t), \bar{f}_{out} = \bar{f}_p(t)$, определяемое заданными векторными функциями, которые удовлетворяют системе $\dot{\bar{x}} = F(\bar{x}, \bar{\delta}, \bar{f}_{out})$. При этом обеспечивается выполнение множества

$$\dot{\bar{x}}_p = F(\bar{x}_p, \bar{\delta}_p, \bar{f}_p).$$

Обозначим через $x = x(t), \delta = \delta(t), f = f(t)$ отклонения соответствующих переменных от указанного движения, определяя этим соотношения:

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_p(t) + x(t), \bar{\delta}(t) = \bar{\delta}_p(t) + \delta(t), \bar{f}_{out}(t) = \bar{f}_p(t) + f(t).$$

Запишем нелинейную систему, описывающую динамику объекта в отклонениях:

$$\dot{x} = G(x, \delta, f),$$

А также осуществим линеаризацию системы $\dot{\bar{x}}_p = F(\bar{x}_p, \bar{\delta}_p, \bar{f}_p)$ или $\dot{x} = G(x, \delta, f)$ в малой окрестности выбранного контролируемого движения. При этом получим систему линейных дифференциальных уравнений в отклонениях вида:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)x(t) + B(t)\delta(t) + C(t)f(t).$$

Как указано в работах В.И. Зубова, рассматриваемое контролируемое движение $\bar{x}(t) = \bar{x}_p(t), \bar{\delta}(t) = \bar{\delta}_p(t), \bar{f}_{out}(t) = \bar{f}_p(t)$, можно сделать асимптотически устойчивым в смысле А.М. Ляпунова при условии $f(t) \equiv 0$ с помощью обратных связей, если выполняются два следующих требования:

1. $\|G(x, \delta, 0 - A(t)x - B(t)\delta)\| \leq \theta(\|x\| + \|\delta\|), \theta \rightarrow 0$ при $\|x\| \rightarrow 0$ и $\|\delta\| \rightarrow 0$; (коррекция линеаризации системы, левая часть неравенства представляет ошибку при 0 воздействии)
2. Неуправляемая часть линейного приближения $\dot{\bar{x}}(t) = A(t)x(t) + B(t)\delta(t) + C(t)f(t)$ является устойчивой.

В дальнейшем будем считать, что контролируемое движение таково, что матрицы А, В, С имеют постоянные компоненты. Второе требование заведомо выполняется, если имеет место условие полной управляемости линейной модели:

$$\text{rank}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n.$$

Если указанные условия выполняются, то нулевое положение равновесия линейной системы $\dot{\bar{x}} = Ax + B\delta + Cf$ может быть сделано асимптотически устойчивым с помощью регулятора прямого действия $\delta = Kx$ или с помощью регулятора непрямого действия $\dot{\delta} = K_0\delta + Kx$, K_0, K — постоянные матрицы. Нетрудно убедиться в том, что аналогичное утверждение справедливо и для обобщенного понятия регулятора непрямого действия, математическая модель которого может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Mz + M_1x + M_2\dot{x} + \dots + M_{\mu}x^{(\mu-1)}; \\ \delta &= Kz, \end{aligned}$$

Где $z \in R^v$ — вектор состояния регулятора.

27. Определение оптимального регулятора. Регуляторы прямого и непрямого действия.

Как было сказано в прошлом вопросе с помощью регуляторов прямого и непрямого действия можно решать задачи управления. Разберемся с регулятором непрямого действия.

Регулятор непрямого действия (динамический компенсатор) – самостоятельная динамическая система, на вход которой поступает информация от измерителей, а выходом служит вектор управляющих воздействий. Задачи стабилизации решаются путем обеспечения произвольного спектра корней ХП замкнутой системы, задавая матрицы с постоянными компонентами $K, M, M_i (i = 1, \dots, \mu)$.

Регулятор непрямого действия может быть представлен в виде передаточной матрицы при помощи преобразования Лапласа:

$$\delta = W(s)x, W(s) = W_1(s)/W_2(s), \quad (5.11)$$

$W(s)$ – ПФ регулятора, $W_1(s)$ – полиномиальная матрица $m \times n$, $W_2(s)$ – полином степени v . Если записать уравнение регулятора

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Mz + M_1x + M_2\dot{x} + \dots + M_\mu x^{(\mu-1)}; \\ \delta &= Kz, \end{aligned}$$

В изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях по вектору z , нетрудно убедиться в том, что:

$$W(s) = K(I_v s - M)^{-1} (M_1 + sM_2 + \dots + s^{\mu-1} M_\mu),$$

где I_v – единичная матрица размером $v \times v$; $W_2(s) = \det(I_v s - M)$.

Следует отметить, что математическая модель $\delta = W(s)x$ может быть трактована как представление о регуляторах прямого действия ($v = 0$), так и непрямого.

При выполнении

$$\text{rank}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n.$$

Существует бесконечно много регуляторов, стабилизирующих заданное контролируемое движение объекта. При этом естественно внести в рассмотрение количественные характеристики качества стабилизации. С этой целью на движениях замкнутой системы, уравнения которой могут быть представлены в виде

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = F(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\delta}}, \bar{\mathbf{f}}_p + \mathbf{f}); \\ \bar{\boldsymbol{\delta}} = \bar{\boldsymbol{\delta}}_p + W(p)(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_p), \end{cases}$$

из каких-либо соображений содержательного (неформального) характера зададим некоторый неотрицательный функционал:

$$J_H = J_H(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\boldsymbol{\delta}}(t)).$$

При одних и тех же начальных условиях для замкнутой системы и одной и той же функции $\mathbf{f}(t)$ функционал зависит от выбора передаточной матрицы $W(p)$ регулятора (или, что то же самое, от выбора степеней μ и ν и матриц $(K, M, M_i (i = 1, \dots, \mu))$), т. е.

$$J_H = J_H(\bar{\mathbf{x}}(t, W(p)), \bar{\boldsymbol{\delta}}(t, W(p))) = J_H(W(p)) = J_H(W). \quad (5.15)$$

Определение. Регулятор $\delta = W^0(p)x$ будем называть оптимальным по отношению к функционалу, если он является стабилизирующим в указанном выше смысле и среди всех регуляторов вида $\delta = W(s)x$ доставляет величине $J_H(W)$ наименьшее возможное значение.

Определение. Задачей аналитического оптимального синтеза линейных регуляторов будем называть задачу

$$J_H = J_H(W) \rightarrow \inf_{W \in \Omega_1} \quad (5.16)$$

о поиске оптимального стабилизирующего регулятора по отношению к функционалу J_H . Здесь Ω_1 – множество передаточных матриц регуляторов вида (5.11) – матриц размером $m \times n$ с дробно-рациональными компонентами, такими, что характеристический полином замкнутой линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\delta + C_f \mathbf{f}; \\ \dot{\mathbf{z}} &= M\mathbf{z} + M_1\mathbf{x} + M_2\dot{\mathbf{x}} + \dots + M_\mu \mathbf{x}^{(\mu-1)}; \\ \delta &= K\mathbf{z} \end{aligned} \quad (5.17)$$

является гурвицевым.

Определение. Задачей параметрического синтеза будем называть задачу нелинейного программирования, состоящую в поиске всех компонентов матриц K, M, M_i ($i=1 \dots \mu$) при заданных фиксированных μ и ν (или варьируемых параметрах, от которых эти компоненты зависят) регулятора вида (5.11), обеспечивающих минимум функционала (5.15)

$$J_H = J_H(W(p, \mathbf{h})) = J_H^* \rightarrow \inf_{\mathbf{h} \in \Omega_H}.$$

Здесь $\mathbf{h} \in R^r$ – вектор варьируемых параметров, подлежащих поиску; $\Omega_H = \{\mathbf{h} \in R^r : W(p, \mathbf{h}) \in \Omega_1\}$ – область гурвицевости характеристического полинома $\Delta(s)$ замкнутой системы (5.17).

Нетрудно убедиться в том, что проведенное обсуждение основных положений, которые лежат в основе проектирования алгоритмов автоматического управления, в равной мере распространяется и на тот случай, когда наряду с математической моделью ДС рассматривается уравнение инерционности исполнительных органов

$$\dot{\delta} = F_\delta(\mathbf{u}).$$

Отличие состоит лишь в том, что при этом роль управления играет управляющий сигнал \mathbf{u} .

28. Понятие асимптотического наблюдателя. Основные теоремы о применении асимптотических наблюдателей.

Другим базовым принципом, на котором основывается разработка алгоритмов автоматического управления, является использование асимптотических наблюдающих устройств. Особую роль наблюдатели играют при формировании штатных законов управления, что обусловлено необходимостью достижения следующих целей:

– получение асимптотических оценок тех компонент вектора состояния, которые недоступны для непосредственного измерения, однако используются в законах управления;

– получение асимптотических оценок производных компонент вектора состояния, используемых в законах управления;

– придание процессам в замкнутой системе определенных свойств, в частности – астатизма по регулируемым координатам;

– обеспечение возможности грубой (инерционной) и точной (среднеквадратичной настраиваемой) фильтрации волновых помех.

Рассмотрим некоторые свойства асимптотических наблюдателей, которые непосредственно используются в системах управления движением подвижных объектов. Пусть задана линейная математическая модель, описывающая динамику ДС в виде

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)x(t) + B(t)\delta(t) + C(t)f(t).$$

Определение. Динамическую систему вида:

$$\dot{z} = Az + B\delta + F(x - z)$$

Будем называть асимптотическим наблюдателем по отношению к модели, описанной выше ($\dot{\hat{x}}(t)$), если матрица F при невязках выбрана таким образом, что ХП $\Delta_H(s) = \det(Is - A + F)$ этой системы имеет корни только в открытой левой полуплоскости (является Гурвицевым).

Определение. Вектор состояния z асимптотического наблюдателя будем именовать вектором оценок (или просто оценками) по отношению к вектору состояния x в $\dot{\hat{x}}(t) = A(t)x(t) + B(t)\delta(t) + C(t)f(t)$ при $f(t)=0$ в том смысле, что имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - z(t)) = 0.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение вектор невязок $\varepsilon(t) = x(t) - z(t)$ и, вычитая из $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\delta(t) + C(t)f(t)$ при $f(t)=0$ уравнение $\dot{z} = Az + B\delta + F(x - z)$ получим

$$\dot{x} - \dot{z} = A(x - z) - F(x - z),$$

$$\dot{\varepsilon} = (A - F)\varepsilon$$

Поскольку при условии гурвицевости полинома $\Delta_H(s) = \det(Is - A + F)$ нулевое положение равновесия системы $\dot{\varepsilon} = (A - F)\varepsilon$ асимптотически устойчиво по Ляпунову, выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - z(t)) = 0,$$

что и требовалось показать.

Как и ранее, с целью упрощения выкладок будем считать, что управлением для системы непосредственно является вектор δ , характеризующий отклонения исполнительных органов.

Введем управление для объекта $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\delta(t) + C(t)f(t)$, формируемое в виде обратной связи по закону:

$$\delta = K(x - x^*(t)), \quad (5.20)$$

Где $x^*(t)$ — вектор задающих командных сигналов. Будем считать, что управление $\delta = K(x - x^*(t))$ является стабилизирующим по отношению к отклонению от заданного движения. Это значит, что матрица K в (5.20) выбрана из условия гурвицевости характеристического полинома

$$\Delta_0(s) = \det(Is - A - BK) \text{ замкнутой системы}$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\delta(t) + C(t)f(t), \quad \delta = K(x - x^*(t)).$$

Базовым утверждением, на котором основывается применение асимптотических наблюдателей в системах управления движением ДС, является следующая теорема.

Теорема. Пусть начальные условия для объекта (5.5) и наблюдателя (5.18) совпадают, выполняется равенство $x(0) = z(0)$. Тогда движение замкнутой системы (5.5), (5.18) при $f = 0$ тождественно совпадает (для любых $t \in [0, \infty]$) с движением устойчивой замкнутой системы вида

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\delta; \\ \dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} + B\delta + F(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \\ \delta &= K(\mathbf{z} - \mathbf{x}^*(t)),\end{aligned}\tag{5.21}$$

в которой управление формируется, в отличие от (5.20), по выходу асимптотического наблюдателя.

Приведенное утверждение, которое достаточно широко известно в теории асимптотических наблюдателей, допускает ряд весьма существенных обобщений, на которых непосредственно и основывается общая структура штатных алгоритмов автоматического управления. Указанные обобщения сформулируем в виде двух следующих теорем.

Теорема 1. Пусть начальные условия для объекта (5.5) и наблюдателя (5.18) совпадают, т. е. выполняется равенство $\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}(0)$. Тогда движение замкнутой системы (5.5), (5.20) (при $\mathbf{f} \equiv 0$) тождественно совпадает (для любых $t \in [0, \infty]$) с движением устойчивой замкнутой системы вида

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\delta; \\ \dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} + B\delta + F(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \\ \delta &= K(\mathbf{z} - \mathbf{x}^*(t)) + G(p)(\mathbf{x} - \mathbf{z}),\end{aligned}\tag{5.22}$$

где $G(p) = M(p)/\Phi(p)$ – произвольная матрица с дробно-рациональными компонентами от оператора дифференцирования $p = d/dt$, имеющими гурвицев общий знаменатель $\Phi(p)$.

В дальнейшем вектор $L\xi = G(p)(\mathbf{x} - \mathbf{z})$ будем называть выходом дополнительного фильтра, а вектор ξ – вектором его состояния.

И, наконец, рассмотрим последнее обобщающее утверждение, сформулировав его в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Если начальные условия для объекта (5.5) и наблюдателя (5.18) совпадают, т. е. выполняется равенство $\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}(0)$, и если передаточная функция $F(s) = M_1(s)/\Phi_1(s)$ такова, что характеристический полином $\Delta_\Phi(s)$ системы

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + B\delta + F(p)(\mathbf{x} - \mathbf{z})\tag{5.23}$$

является гурвицевым, то движение замкнутой системы (5.5), (5.20) (при $\mathbf{f} \equiv 0$) тождественно совпадает (для любых $t \in [0, \infty]$) с движением устойчивой замкнутой системы

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\delta; \\ \dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} + B\delta + F(p)(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \\ \delta &= K(\mathbf{z} - \mathbf{x}^*(t)) + G(p)(\mathbf{x} - \mathbf{z}).\end{aligned}\tag{5.24}$$

Основной смысл всех приведенных утверждений состоит в том, что любые процессы маневрирования и стабилизации при отсутствии внешних возмущений могут быть реализованы с тождественным качеством не через реальные координаты, которые нельзя измерять в полном составе, а через их оценки, получаемые с помощью асимптотических наблюдателей.

Введение в состав наблюдателя и уравнения управления нетрадиционной дополнительной динамики, определяемой передаточными матрицами $G(s)$ и $F(s)$, призвано обеспечивать борьбу с внешними возмущениями (их «фильтрацию» – подавление), отклоняющими оценки \mathbf{z} от оцениваемого вектора \mathbf{x} . В качестве возмущений обычно выступают волновые помехи и (возможно) шумы датчиков измерений.

29. Общая структура алгоритмов управления.

Линейная математическая модель замкнутой системы управления движением со штатными алгоритмами управления, включающими асимптотические наблюдатели, в векторно-матричной форме представляется следующими уравнениями:

а) линейная модель динамической системы вида:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\delta(t) + C(t)f(t)$$

б) линейная модель инерционности исполнительных органов:

$$\dot{\delta} = u$$

в) уравнение асимптотического наблюдателя

$$\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + B\delta + R\mathbf{y} + Q(\mathbf{x} - \mathbf{z})$$

г) уравнение инерционного фильтра:

$$\dot{\mathbf{y}} = \Gamma\mathbf{y} + P(\mathbf{x} - \mathbf{z})$$

д) уравнения дополнительного фильтра:

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = A_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{\zeta} + B_{\boldsymbol{\zeta}}\mathbf{y}, \quad \boldsymbol{\xi} = C_{\boldsymbol{\zeta}}\boldsymbol{\zeta}$$

е) уравнение основного управляющего сигнала:

е1) позиционный вариант:

$$u = K(\mathbf{z} - \mathbf{x}^*) - \delta + K_{\Delta}\mathbf{y} + \boldsymbol{\xi}.$$

е2) скоростной вариант:

$$u = L\dot{z} + N(z - x^*) + \xi.$$

В приведенных соотношениях а и б представляют собой модель объекта управления, а в, г, д, е1 либо в, г, д, е2 описывают математическую модель алгоритмов управления, которая в равной мере используется как для управления линейной, так и нелинейной моделью объекта.

В приведенных уравнениях использованы следующие обозначения:

x – вектор состояния объекта;

u – вектор управляющих воздействий;

z – вектор состояния наблюдателя;

y – вектор состояния грубого фильтра (оценок возмущений);

ζ – вектор состояния точного фильтра;

ξ – вектор выхода точного фильтра;

x^* – вектор командных сигналов.

Все матрицы в приведенных уравнениях имеют постоянные компоненты при фиксированной скорости хода.

В дальнейшем уравнения в и г, рассматриваемые совместно, будем называть уравнениями обобщённого наблюдателя фильтра (ОНФ)

$$\dot{z} = Az + B\delta + Ry + Q(x - z)$$

$$\dot{y} = \Gamma y + P(x - z)$$

Которые после исключения вектора y могут быть записаны в свернутой форме вида:

$$\dot{z} = Az + B\delta + F(p)(x - z)$$

Уравнения дополнительного фильтра д также могут быть свернуть: к форме «вход-выход»:

$$\xi = G(p)(x - z)$$

С учетом этих корректировок, математическая модель алгоритмов автоматического управления (в позиционном варианте) представляется следующими формулами:

$$\dot{z} = Az + B\delta + F(p)(x - z),$$

$$u = K(z - x^*) - \delta + [G(p) + K_{\Delta}F(p)](x - z),$$

При выбранной структуре обратной связи, выбору в процессе проектирования системы подлежат ее следующие элементы:

- матрица K базового закона управления $u = K(z - x^*) - \delta$;
- передаточная матрица $F(s)$ при невязках в обобщенном наблюдателе фильтре (или $\dim u$ и матрицы R, Q, Γ, P в системе $\dot{y} = \Gamma y + P(x - z)$);
- Передаточная матрица $G(s)$ дополнительного фильтра (или $\dim \zeta$ и матрицы $A_\zeta, B_\zeta, C_\zeta$ в уравнении системы д);
- Постоянная матрица K_Δ в уравнении е1 для позиционного варианта алгоритмов управления;
- Законы формирования командных сигналов x^* , как функции времени, либо состояния объекта управления.

Перечисленные искомые элементы несут следующую функциональную основную нагрузку в замкнутой системе (как линейной, так и нелинейной).

1. Числовая матрица K полностью определяет динамику собственного движения системы управления, т.е. качество стабилизации отклонений регулируемых координат от движения, определяемого задающими командными сигналами.

2. Передаточная матрица $F(s)$ обеспечивает желаемую динамику движения замкнутой системы, вызванного низкочастотными внешними воздействиями типа $f(t) = f_0 1(t)$ и, возможно, грубую (инерционную) фильтрацию волновых помех.

3. Постоянная матрица K_Δ , обеспечивает астатизм замкнутой системы по регулируемым координатам.

4. Передаточная матрица $G(s)$ обеспечивает точную (настраиваемую) фильтрацию волновых возмущений в канале управления.

5. Задающие командные сигналы, являющиеся компонентами вектора x^* , определяют качество процессов маневрирования по регулируемым координатам.

30. Синтез базовых алгоритмов автоматической стабилизации динамических систем.

Базовые алгоритмы стабилизации являются ключевым элементом штатных законов автоматического управления. Они однозначно характеризуются заданием матрицы K в уравнении $u = K(z - x^*) - \delta + K_\Delta u + \xi$, которая, как было отмечено выше, полностью определяет динамику собственного движения системы управления, т. е. качество стабилизации

отклонений регулируемых координат от желаемого движения, определяемого задающими командными сигналами.

В связи с отмеченным обстоятельством, целью рассматриваемой задачи синтеза является поиск такой матрицы K , которая удовлетворяет совокупности требований, предъявляемых к качеству собственного движения (при отсутствии возмущений).

В соответствии с приведенными выше теоремами, для формализованной постановки подобной задачи не обязательно рассматривать уравнения полной замкнутой системы со штатными автоматами управления. Здесь вполне достаточно ограничиться рассмотрением линейной замкнутой системы, в которой обратная связь формируется по вектору состояния. Это связано с тем, что рассматриваемые динамические процессы для такой системы не отличаются от процессов для штатных алгоритмов управления.

Математическая модель указанной системы имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B\delta, \quad x(0) = 0, \\ \dot{\delta} &= K(x - x^*) - \delta,\end{aligned}$$

где через x^* обозначен вектор задающего командного сигнала, имеющий постоянные компоненты. Состав указанных компонент зависит от выбранной плоскости стабилизации и от конкретного режима движения объекта.

На движениях замкнутой системы зададим функционал, определяющий качество динамического процесса, значениями которого являются величины перерегулирования по соответствующей координате или обобщенное перерегулирование вида:

$$J_1 = J_1(x(t, K), \delta(t, K)) = J_1(K) = \sup_{t \in (0, \infty)} \frac{\|x(t, K) - x^*\|}{\|x^*\|}$$

Введем в рассмотрение допустимое множество Ω_K матриц K , определяя его следующим образом

$$\Omega_K = \{K : \Delta_i \in C_\Delta, \Delta_0(\Delta_i) = 0, i = 1 \dots n, T_p(k) \leq T_0\} \quad (7.36)$$

В формуле (7.36) через $T_p(k)$ обозначена длительность переходного процесса, а через T_0 допустимое значение этой длительности. Через $\Delta_0(s)$ обозначен характеристический полином системы (7.35), т.е.,

$$\Delta_0(s) = \det \begin{pmatrix} I_n s - A & -B \\ -K & (s+1)I_m \end{pmatrix},$$

а через Δ_i – его корни, И наконец, через символ C_Δ обозначена область на комплексной плоскости, которой должны принадлежать указанные корни. Эта область, условно изображенная на рисунке 7.1, может быть формально представлена следующим образом

$$C_\Delta = \left\{ \Delta_i \in C^1 : \operatorname{Re} \Delta_i \leq -\alpha, \arctg \left| \frac{\operatorname{Im} \Delta_i}{\operatorname{Re} \Delta_i} \right| \leq \beta \right\},$$

где величина α определяет заданную степень устойчивости, а величина β – заданную степень колебательности замкнутой системы (7.35).

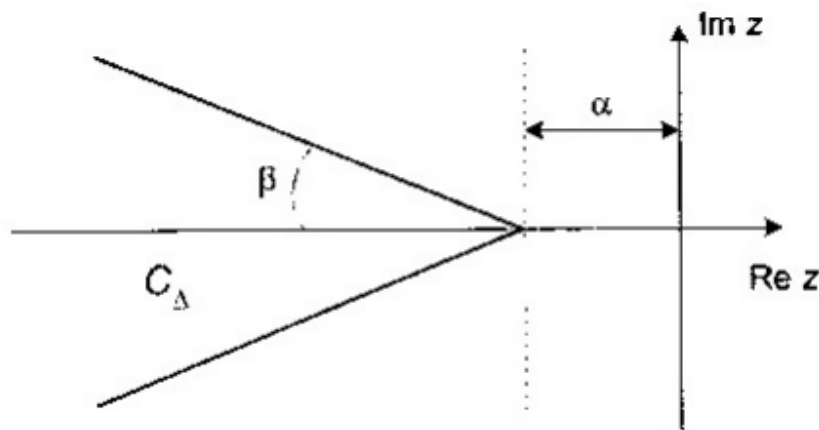


Рисунок 7.1 – Степень устойчивости динамической системы

С учетом введенных обозначений, сформулируем задачу о поиске матрицы K для базовых алгоритмов стабилизации вида $u = Kx - \delta$, которая имеет вид

$$J_1(K) = \min_{K \in \Omega_K} \quad (7.37)$$

Поставленная задача (7.37) является типичным примером задачи оптимального параметрического синтеза. Она представляет собой исключительно сложный вариант проблемы нелинейного программирования, отягощенный сложным заданием целевой функции и допустимого множества, определяемого наложенными ограничениями.

Тем не менее, в настоящее время разработаны различные численные методы приближенного решения, позволяющие найти искомую матрицу K .

31. Обобщенный наблюдатель-фильтр. Обеспечение фильтрующих свойств ОНФ.

Обобщенный наблюдатель-фильтр (ОНФ) является центральным звеном штатных алгоритмов автоматического управления ДС, выходной вектор $\{z, y\}$ которого по существу замещает реально измеряемые физические координаты объекта, а также те координаты и их производные, которые недоступны непосредственному измерению при формировании управляющих сигналов. В соответствии с общей структурой штатных алгоритмов управления уравнения ОНФ имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + B\delta + Ry + Q(x - z); \\ \dot{y} &= \Gamma y + P(x - z). \end{aligned}$$

Здесь матрицы A и B соответствуют линейной модели движения ДС. Остальные матрицы R, Q, P, Γ в уравнениях ОНФ априорно являются неизвестными и подлежат поиску в процессе синтеза ОНФ. Как было отмечено ранее, эти постоянные (при фиксированной скорости хода) матрицы или однозначно определяемая ими передаточная матрица $F(s) = R(I_2 s - \Gamma)^{-1} P + Q$ обеспечивают желаемую динамику движения замкнутой системы, вызванного низкочастотными скачкообразными внешними воздействиями типа $f(t) = f_0 l(t)$, а также грубую (инерционную) фильтрацию волновых помех.

В соответствии с теоремой, характеристический полином замкнутой системы с обратной связью, формируемой по выходу ОНФ, представляется формулой $\Delta(s) = \Delta_0(s)\Delta_\Phi(s)\Phi(s)$, откуда следует, что его корнями одновременно являются и корни характеристического полинома $\Delta_\Phi(s)$.

В связи с отмеченным обстоятельством, для выполнения требований по динамике замкнутой системы на низких частотах выбор искоемых матриц R, Q, P, Γ следует осуществлять, обеспечивая размещение корней полинома

$$\Delta_{\Phi}(s) = \det \begin{pmatrix} I_4 s - A + Q & -R \\ P & I_2 s - \Gamma \end{pmatrix}$$

в пределах заданной области C_{Δ} на комплексной плоскости. Как и в 5.3, определим эту область соотношением

$$C_{\Delta} = \left\{ \Delta_i \in C^1 : \operatorname{Re} \Delta_i \leq -\alpha, \operatorname{arctg} \left| \frac{\operatorname{Im} \Delta_i}{\operatorname{Re} \Delta_i} \right| \leq \beta \right\},$$

где величина α определяет заданную степень устойчивости, а величина β заданную степень колебательности ОНФ (5.31). Напомним, что схематичное изображение области C_{Δ} приведено на рис. 5.1.

Проблема грубой фильтрации волновой помехи с помощью ОНФ решается следующим образом. Будем трактовать ОНФ как динамическую систему с входным векторным сигналом $\{\mathbf{x}, \delta\}$ и выходным сигналом $\{\mathbf{z}, \mathbf{y}\}$.

При этом уравнения (5.31) могут быть записаны в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях в виде

$$\begin{pmatrix} s\mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - Q & R \\ -P & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q & B \\ P & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \delta \end{pmatrix},$$

что эквивалентно

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = W_{\Phi}(s) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \delta \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

где через

$$W_{\Phi}(s) = \left(I_s - \begin{pmatrix} A - Q & R \\ -P & \Gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Q & B \\ P & O \end{pmatrix} \right)$$

обозначена передаточная матрица ОНФ от входа к выходу.

Заметим, что входной сигнал $\{\mathbf{x}, \delta\}$ для ОНФ является источником волновых помех, поступающих в канал управления через измерения. Очевидно, что степень подавления этих помех с помощью ОНФ определяется выбором матриц R, Q, P, Γ и будет тем большей, чем «меньше» матричный коэффициент усиления W_{Φ} в уравнении (5.38) в рамках допустимого расположения корней полинома Δ_{Φ} в пределах области C_{Δ} .

Введем количественную характеристику «малости» передаточной матрицы $W_{\Phi}(s)$, в качестве которой примем ее матричную норму для гильбертового пространства Харди H_2 . Эта характеристика является функционалом, имеющим вид

$$J_2 = J(R, Q, P, \Gamma) = \|W_{\Phi}(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [W_{\Phi}^T(-j\omega) W_{\Phi}(j\omega)] d\omega}. \quad (5.39)$$

С учетом (5.39) представляется целесообразной следующая постановка формализованной задачи об инерционной фильтрации волновых помех с помощью ОНФ:

$$J_2(R, Q, P, \Gamma) = \|W_{\Phi}(s)\|_2 \rightarrow \min_{\{R, Q, P, \Gamma\} \in \Omega_{\Delta}}, \quad (5.40)$$

где допустимое множество искомых матриц определяется формулой

$$\Omega_{\Delta} = [R, Q, P, \Gamma : \Delta_i \in C_{\Delta}, \Delta_{\Phi}(\Delta_i) = 0, i = 1 \dots n_j, n_j = \deg \Delta_{\Phi}].$$

Заметим, что решение поставленной задачи (5.40) существенно определяется заданием величины α допустимой степени устойчивости ОНФ.

В дальнейшем будем вместо этой величины задавать параметр T , связанный с α прямой пропорциональной зависимостью $\alpha = k_{\alpha} T$, где k_{α} – фиксированный множитель. Нетрудно показать, что чем меньше значение T , тем меньшей является величина минимума функционала $J_2(R, Q, P, \Gamma)$, т. е. тем лучше качество подавления волновой помехи. В связи с этим в дальнейшем параметр T будем называть степенью инерционной фильтрации (или просто степенью фильтрации) волновой помехи.

Следует обратить особое внимание на тот факт, что уменьшение величины T , улучшающее качество фильтрации, входит в противоречие с качеством динамики при скачкообразных возмущениях, поскольку влечет за собой приближение корней полинома $\Delta_{\Phi}(s)$ к мнимой оси. В связи с этим степень фильтрации T в процессе движения объекта может изменяться по мере необходимости путем задания с пульта. При отсутствии высокочастотного возмущения величина этого параметра должна принимать максимальное значение. При наличии высокочастотного возмущения (волнения) в зависимости от его интенсивности величина параметра T уменьшается.

Сформулированная оптимизационная задача (5.40) синтеза ОНФ по существу является сложной задачей нелинейного программирования, приближенно решаемой с помощью специально разработанных численных методов.

32. Астатизм по регулируемым переменным. Понятие, способы достижения.

Требование астатизма замкнутой системы по регулируемым координатам является обязательным условием функционирования штатных алгоритмов управления динамической системы.

В соответствии с общей структурной схемой штатных алгоритмов управления, запишем линейные уравнения динамики замкнутой системы в соответствующей плоскости стабилизации в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\delta + C_f \mathbf{f}(t); \\ \dot{\delta} &= \mathbf{u}; \\ \dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} + B\delta + R\mathbf{y} + Q(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \\ \dot{\mathbf{y}} &= \Gamma\mathbf{y} + P(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \\ \mathbf{u} &= W_{uz}(p)\mathbf{z} + W_{ux}(p)\mathbf{x} + W_{u\delta}(p)\delta.\end{aligned}\quad (5.41)$$

С формальной точки зрения, условие астатизма по регулируемой координате x_i для системы (5.41) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\text{для любого } f_0 \in R^2 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0, \quad f(t) = f_0 1(t).\end{aligned}\quad (5.42)$$

Эти условия могут быть представлены в следующей эквивалентной форме:

$$F_{fx_i}(0) = 0, \quad (5.43)$$

где $F_{fx_i}(s)$ – передаточная матрица замкнутой системы (5.42) от возмущения к регулируемой координате x_i соответственно. Эта матрица в соответствии с (5.41) может быть определена следующим образом:

$$F_{fx}(s) = \Delta^{-1}(s) \det \begin{pmatrix} C_f & -B & 0 & 0 \\ 0 & I_2 s - W_{u\delta}(s) & -W_{uz}(s) & 0 \\ 0 & -B & I_4 s - A + Q & -R \\ 0 & 0 & P & I_2 s - \Gamma \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

где $\Delta(s)$ – характеристический полином системы (5.41).

Таким образом, проблема обеспечения астатизма замкнутой системы по регулируемой координате сводится к такому выбору матриц $W_{uz}(s)$, $W_{ux}(s)$, $W_{u\delta}(s)$ в уравнении для основного управляющего сигнала, чтобы выполнялось условие (5.43). Регулируемых координат может быть несколько, тогда, соответственно, в (5.43) увеличится количество условий.

Заметим, что при непосредственном использовании базовых статических алгоритмов стабилизации

$$\mathbf{u} = K\mathbf{x} - \delta$$

с последующим формированием управляющих сигналов по выходу ОНФ в виде

$$\mathbf{u} = K\mathbf{z} - \delta \quad (5.45)$$

имеем $W_{uz}(s) = K$, $W_{ux}(s) = 0$, $W_{u\delta}(s) = -I_2$. Непосредственная подстановка указанных матриц в формулы (5.44) позволяет убедиться в том, что условия (5.43) не выполняются, т. е. закон управления (5.45) не обеспечивает астатизм и нуждается в коррекции.

Заметим, что при проектировании систем управления могут быть применены два подхода к обеспечению астатизма (или, что то же самое, к обеспечению выполнения условия (5.43)), именуемые соответственно позиционной и скоростной астатической коррекцией.

Астатические позиционные алгоритмы стабилизации. Эти алгоритмы формируются на базе (5.45) путем введения дополнительного адаптивного корректирующего (балансировочного) сигнала:

$$u = Kz - \delta + K_{\Delta}y. \quad (5.46)$$

С учетом соотношения $y = F(p)(x - z)$, уравнение (5.46) принимает вид

$$u = Kz - \delta + K_{\Delta}F(p)(x - z),$$

откуда следует, что в данном случае имеем

$$W_{uz}(s) = K - K_{\Delta}F(s), W_{ux}(s) = K_{\Delta}F(s), W_{u\delta}(s) = -I_2. \quad (5.47)$$

Подставляя соотношения (5.47) в формулы (5.44), а затем в условие (5.43), получим систему из четырех неоднородных линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными – компонентами матрицы коррекции.

Замечание. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для более общего способа введения позиционной астатической коррекции в виде

$$\mathbf{u} = K\mathbf{z} - \delta + K_{\Delta}(p)y.$$

Астатические скоростные алгоритмы стабилизации. При данном способе обеспечения астатизма алгоритмы также формируются на базе (5.45). Однако здесь вместо введения дополнительного аддитивного корректирующего сигнала используется эквивалентное линейное выражение векторного слагаемого $K\mathbf{x} - \delta$ через производные $\dot{\mathbf{x}}$ и регулируемые координаты в силу уравнений объекта при $\mathbf{f} \equiv 0$. Этот подход приводит к переходу от (5.45) к эквивалентному (в определенном смысле) регулятору

$$\mathbf{u} = L\dot{\mathbf{x}} + N\mathbf{x}. \quad (5.48)$$

33. Синтез дополнительных фильтров. Матричные нормы.

Дополнительные фильтры (ДФ) являются вспомогательным элементом штатных алгоритмов управления, который не функционирует постоянно и включается лишь по мере необходимости. ДФ рационально использовать в тех режимах движения, при которых ДС подвергается существенному воздействию высокочастотного возмущения (волнения). Характерной особенностью этих режимов, как правило, является малая скорость хода. Это обстоятельство определяет недостаточную эффективность исполнительных органов в плане повышения точности стабилизации заданного движения при наличии волнения. В связи с отмеченным обстоятельством, введение ДФ должно обеспечить максимальное подавление бесполезного сигнала (волно-

вой помехи), порождаемого волнением и поступающего в канал управления через измерительный комплекс.

В отличие от грубой инерционной фильтрации, обеспечиваемой ОНФ, дополнительные фильтры являются адаптивно настраиваемым элементом, который в ходе функционирования приспособливается к частотным свойствам волнения.

Считая матрицы $A, B, C_f, R, Q, P, \Gamma, K$ и K_Δ , заданными, как в предыдущем подпункте, рассмотрим линейные уравнения системы, замкнутой астатическим позиционным регулятором

$$\mathbf{u} = K\mathbf{z} - \delta + K_\Delta(p)\mathbf{y}. \quad (5.49)$$

В соответствии с общей структурой штатных алгоритмов управления введем в состав математической модели замкнутой системы уравнение дополнительного фильтра в нормальной форме

$$\dot{\zeta} = A_\zeta \zeta + B_\zeta \mathbf{y}, \quad \xi = C_\zeta \zeta$$

или в операторной форме

$$\xi = E_d(p)\mathbf{y}.$$

Выходной сигнал ξ дополнительного фильтра аддитивно включим в алгоритм управления, переходя от (5.49) к уравнению

$$\mathbf{u} = K\mathbf{z} - \delta + K_\Delta(p)\mathbf{y} + \xi = K\mathbf{z} - \delta + K_\Delta(p)\mathbf{y} + E_d(p)\mathbf{y}$$

или

$$\mathbf{u} = K\mathbf{z} - \delta + E(p)\mathbf{y}, \quad (5.50)$$

где

$$E(p) = K_\Delta(p) + E_d(p). \quad (5.51)$$

Теперь рассмотрим линейные уравнения замкнутой дополненной системы, которые представим в матричной форме, предварительно исключив из состава переменных вектор управляющих сигналов \mathbf{u} :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\delta + C_f \mathbf{f}(t); \\ \dot{\delta} &= K\mathbf{z} - \delta + E(p)\mathbf{y}; \\ \dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} + B\delta + R\mathbf{y} + Q(\mathbf{x} - \mathbf{z}); \\ \dot{\mathbf{y}} &= \Gamma\mathbf{y} + P(\mathbf{x} - \mathbf{z}).\end{aligned}\tag{5.52}$$

Переходя к изображениям по Лапласу при нулевых начальных условиях, систему (5.52) можно представить в матричной форме

$$\begin{pmatrix} I_4s - A & -B & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)I_2 & -K & -E(s) \\ -Q & -B & I_4s - A + Q & -R \\ -P & 0 & P & I_2s - \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \delta \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{f}(s).\tag{5.53}$$

В соответствии с уравнениями (5.53) запишем передаточную матрицу $W_{f\delta}$ замкнутой дополненной системы от возмущения \mathbf{f} к управляющим воздействиям δ :

$$W_{f\delta} = W_{f\delta}(s, E) = \det \begin{pmatrix} I_4s - A & C_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K & -E(s) \\ -Q & 0 & I_4s - A + Q & -R \\ -P & 0 & P & I_2s - \Gamma \end{pmatrix}.\tag{5.54}$$

Введем в рассмотрение функционал $J(E)$, зависящий от задания матрицы $E(s)$ и определяемый некоторой матричной нормой передаточной матрицы $\|W_{f\delta}\|$, представленной формулой (5.54).

Выбор конкретной нормы указанной передаточной матрицы порождает различные классы задач оптимального синтеза стабилизирующих управлений, среди которых в настоящее время наиболее популярными являются следующие:

- задачи о минимизации нормы $\|H\|_2$ (типичный представитель – задача LQG-оптимального синтеза);

- задачи о минимизации нормы $\|H\|_\infty$ (задача H_∞ – оптимального синтеза);

- задачи о минимизации указанных выше норм для «взвешенных» передаточных матриц HS_1 , где $S_1(s)$ – заданная весовая матричная функция (например, задачи средне-квадратичного оптимального синтеза и синтеза гарантирующих регуляторов соответственно).

Приведенные нормы вводятся следующими соотношениями:

а) норма $\|H\|_2$:

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}[H^T(-j\omega)H(j\omega)]d\omega},$$

в частности, для SISO-задачи (со скалярными входом (d) и выходом (e)) получим

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega};$$

б) норма $\|H\|_\infty$:

$$\|H\|_\infty = \max_{\omega \in (0, \infty)} \overline{\sigma}(\omega);$$

где $\overline{\sigma}(\omega)$ – максимальное сингулярное число матрицы $H(j\omega)$ (корень квадратный из максимального собственного значения эрмитовой матрицы $H^T(-j\omega)H(j\omega)$), в частности для SISO-задачи имеем

$$\|H\|_\infty = \max_{\omega \in (0, \infty)} |H(j\omega)|;$$

в) взвешенная норма $\|HS_1\|_2$:

$$\begin{aligned}\|HS_1\|_2 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [S_1^T(-j\omega) H^T(-j\omega) H(j\omega) S_1(j\omega)] d\omega} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [H(j\omega) S_v(\omega) H^T(-j\omega)] d\omega},\end{aligned}$$

где $S_v(\omega) = S_1(j\omega) S_1^T(-j\omega)$; в частности, для SISO-задачи –

$$\|HS_1\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_v(\omega) d\omega},$$

где $S_v(\omega) = |S_1(j\omega)|^2$;

г) взвешенная норма $\|HS_1\|_{\infty}$:

$$\|HS_1\|_{\infty} = \max_{\omega \in (0, \infty)} \bar{\sigma}_v(\omega),$$

где $\bar{\sigma}_v(\omega)$ – максимальное сингулярное число матрицы $H(j\omega) S_1(j\omega)$.

Для целей фильтрации чаще всего используется взвешенная матричная норма $\|HS_1\|_2$ передаточной матрицы $W_{f\delta}$. Здесь в качестве весовой матрицы S_1 принимается результат факторизации матрицы $S_f(\omega)$ спектральных плотностей возмущения, определяемого высокочастотным возмущением $S_f(\omega) = S_1(j\omega) S_1^T(-j\omega)$.

В соответствии с выбором нормы $\|HS_1\|_2$, функционал, определяемый этой нормой и задающий качество фильтрации, можно представить в следующем виде:

$$J(E) = \|W_{f\delta} S_1\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [W_{f\delta}(j\omega) S_v(\omega) W_{f\delta}^T(-j\omega)] d\omega}. \quad (5.55)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что введенный функционал (2.79) характеризует интенсивность функционирования исполнительных органов в условиях высокочастотного возмущения. В связи с этим представляется целесообразным поставить задачу об обеспечении минимума этого функционала за счет выбора матрицы $E(s)$ в уравнении (5.54) для основного управляющего сигнала:

$$J(E) = \|W_{f\delta} S_1\|_2 \rightarrow \min_{E \in \Omega_E}. \quad (5.56)$$

Сформулированная оптимизационная задача по существу является задачей о поиске оптимальной передаточной функции дополнительного фильтра. Действительно, если найдена оптимальная матрица – решение задачи (5.56):

$$E_0(s) = \arg \min_{E \in \Omega_E} J(E) = \arg \min_{E \in \Omega_E} \|W_{f\delta} S_1\|_2,$$

то оптимальная передаточная матрица $E_{d0}(s)$ ДФ в соответствии с (5.51) может быть найдена по формуле

$$E_{d0}(s) = E_0(s) - K_{\Delta}(s).$$

Допустимое множество Ω_E в задаче (5.56) определяется требованиями, предъявляемыми к динамическим свойствам замкнутой системы, аналогично 5.3 и 5.4. В наиболее простом варианте его можно принять в виде

$$\Omega_E = \{E : \Delta_i \in C_{\Delta}, \Phi_d(\Delta_i) = 0, i = 1 \dots n_d\},$$

где $\Phi_d(\Delta_i)$ – характеристический полином ДФ; n_d – степень этого полинома; C_{Δ} – область на комплексной плоскости, описанная выше и представленная на рис. 5.1.

Необходимо отметить, что сформулированная оптимизационная задача (5.56) на допустимом множестве Ω_E является исключительно сложной в аналитическом плане. В настоящее время разработана теория и численные методы решения подобных задач, относящихся к области многоцелевой стабилизации динамических объектов.

Пример. Для движения подвижного объекта в горизонтальной или вертикальной плоскости, описываемого моделью (5.5) с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{11}v & a_{13} - a_{11}v^2 & (a_{21} - 1)v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{21}v & a_{21}v^2 - a_{23} & -a_{22}v \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a_{15}v^2 & -a_{14}v^2 \\ 0 & 0 \\ a_{25}v^2 & -a_{24}v^2 \end{bmatrix},$$

где v – скорость хода; a_{ij} – коэффициенты математической модели, структура оптимального дополнительного фильтра имеет вид

$$E_{d0}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{11}^1 s^2 + \alpha_{01}^1 s}{s^3 + \beta_2^1 s^2 + \beta_1^1 s + \beta_0^1} & \frac{\alpha_{12}^1 s^2 + \alpha_{02}^1 s}{s^3 + \beta_2^1 s^2 + \beta_1^1 s + \beta_0^1} \\ \frac{\alpha_{21}^2 s^2 + \alpha_{01}^2 s}{s^3 + \beta_2^2 s^2 + \beta_1^2 s + \beta_0^2} & \frac{\alpha_{12}^2 s^2 + \alpha_{02}^2 s}{s^3 + \beta_2^2 s^2 + \beta_1^2 s + \beta_0^2} \end{bmatrix}.$$

Параметры α_{ij}^k, β_i^k вычисляются по коэффициентам a_{ij} при заданной скорости хода v , степени инерционной фильтрации T , средней частоте волнения ω_0 . Для вычисления используются достаточно простые формулы, позволяющие реализовать их с помощью бортового программного обеспечения.

Весьма важно, что введение дополнительных фильтрующих сигналов сохраняет устойчивость и не нарушает свойство астатизма замкнутой системы по регулируемым координатам.

34. Алгоритмы автоматического маневрирования.

Под маневрированием подвижного объекта в плоскостях стабилизации понимают изменение на заданные величины соответствующих угловых и линейных координат объекта управления. Перед началом маневра и после его завершения все угловые и линейные скорости (исключая скорость хода), а также отклонения исполнительных органов при отсутствии внешних возмущений должны быть нулевыми. Главными требованиями, которые предъявляются к качеству маневра, являются предельное быстродействие и минимальное перерегулирование по управляемой координате.

Для математической формализации проблемы автоматического маневрирования в принципе могут быть применены следующие подходы:

– теория оптимального программного быстрогодействия с реализацией управления в виде программы отклонения исполнительных органов в функции времени;

– теория оптимального быстрогодействия с реализацией управления в виде нелинейной обратной связи;

– теория линейных регуляторов с их параметрической оптимизацией по коэффициентам закона управления.

Необходимо отметить, что, к сожалению, при построении штатных законов управления не удастся ограничиться каким-либо одним из указанных подходов в силу целого ряда присущих им недостатков.

В первую очередь, укажем недостатки подхода, базирующегося на теории оптимального быстрогодействия.

1. Большие пределы изменения координат объекта в ходе маневров не позволяют пользоваться при синтезе оптимальных программ линейными моделями объекта, что с учетом большой размерности исключает построение оптимальных программ на борту в ходе движения.

2. Реализация оптимальных программ (даже при их наличии) невозможна без использования обратных связей, поскольку любое программное движение в вертикальной плоскости не является асимптотически устойчивым по Ляпунову и, кроме того, поскольку на ДС постоянно воздействуют внешние неопределенные факторы, требующие непрерывного функционирования системы стабилизации.

3. Формирование нелинейного оптимального по быстроддействию регулятора в силу сложности нелинейных уравнений динамики практически невозможно. Отметим, что всякие приближения к нему нежелательны, поскольку движения оптимальных нелинейных систем имеют ряд динамических особенностей вблизи поверхностей переключения, которые отрицательно сказываются на приводе исполнительных органов.

4. Непосредственное использование нелинейных регуляторов, существенно отличающихся по своей структуре от штатных линейных алгоритмов управления, требует выполнения соответствующих переключений перед началом маневра, что крайне нежелательно с позиций качества управления и его надежности.

Альтернативным подходом по отношению к теории оптимального быстродействия является обеспечение автоматического маневрирования с помощью линейных алгоритмов обратной связи вида

$$\mathbf{u} = \tilde{K}\tilde{\mathbf{x}} + k_p(x_p - x_{pz}) - \delta, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ x_p \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

с позиционным базовым законом управления или

$$\mathbf{u} = L\dot{\mathbf{x}} + v_p(x_p - x_{pz}) \quad (5.58)$$

со скоростным базовым алгоритмом стабилизации. Здесь через x_p обозначена регулируемая координата объекта, а через x_{pz} – ее желаемое (заданное) значение в конце маневра. Заметим, что при каждом фиксированном значении скорости хода и заданной величине x_{pz} , коэффициенты законов (5.57) и (5.58) могут быть выбраны так, чтобы обеспечить оптимальный по быстродействию маневр. Однако изменение коэффициентов автоматического закона управления в столь широких пределах крайне нежелательно. С другой стороны, фиксация коэффициентов по отношению к x_{pz} на некотором уровне приводит к существенному недоиспользованию возможностей органов управления либо к большим перерегулированиям.

В связи с отмеченными обстоятельствами обеспечение автоматического маневрирования подвижного объекта осуществляется на базе специального подхода, объединяющего достоинства оптимального быстродействия и линейного регулирования. Предлагаемый подход состоит в следующем.

1. По известной скорости хода для существенно упрощенной линейной модели движения объекта тем или иным способом (построением оптимальной программы либо синтезом оптимальной обратной связи) формируются квазиоптимальные по отношению к соответствующей базовой модели законы

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p^*(t), \quad \dot{\mathbf{x}}_p = \dot{\mathbf{x}}_p^*(t), \quad \delta = \delta^*(t), \quad (5.59)$$

изменения регулируемой координаты, ее производной и положения исполнительных органов при маневре.

2. С целью определенной компенсации неучтенных свойств объекта управления и условий его функционирования, тем или иным способом осуществляется коррекция функций (5.59).

3. В соответствии с (5.57) или (5.58) формируются базовые алгоритмы автоматического маневрирования вида

$$\mathbf{u} = K\mathbf{x} + k_p^P \left(\dot{\mathbf{x}}_p - \dot{\mathbf{x}}_p^*(t) \right) + k_p \left(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_p^*(t) \right) - \left(\dot{\boldsymbol{\delta}} - \dot{\boldsymbol{\delta}}^*(t) \right) \quad (5.60)$$

или

$$\mathbf{u} = L\tilde{\mathbf{x}} + \mu_p^P \left(\dot{\mathbf{x}}_p - \dot{\mathbf{x}}_p^*(t) \right) + \nu_p \left(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_p^*(t) \right) + \dot{\boldsymbol{\delta}}^*(t)$$

для позиционного или скоростного варианта соответственно.

4. Осуществляется переход от базовых алгоритмов (5.60) к законам управления по выходу ОНФ.

При переходе к законам управления по выходу фильтра автоматически учитывается зависимость коэффициентов закона от скорости подвижного объекта, а также от степени инерционной фильтрации.