Лекция 3. Численные методы решения систем линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши для линейной динамической системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x \in R^n, u \in R^l,$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad y \in R^m, x(t_0) = x_0$$

с заданным для каждого момента времени вектором входа $u(t)$. Если найден, то определить выход $y(t)$ по второму уравнению не представляет труда, поэтому ограничимся рассмотрением только уравнения состояния

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0$$

представляющего собой систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

Для построения решения неоднородной системы предварительно изучим свойства решений линейной однородной системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Для этого рассмотрим n-линейно независимых векторов

$$x_0^{(i)} = \begin{pmatrix} x_{10}^{(i)} \\ x_{20}^{(i)} \\ \vdots \\ x_{n0}^{(i)} \end{pmatrix}, i = 1, \ldots, n.$$

которые примем в качестве начальных условий линейной однородной системы

$$x^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}.$$

По этим n начальным условиям получим n решений однородной системы дифференциальных уравнений

$$x^{(i)}(t), \quad t \in [t_0, T], i = 1, \ldots n,$$

каждое из которых удовлетворяет соотношению

$$\dot{x}^{(i)}(t) = Ax^{(i)}(t), \quad x^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}.$$

Матрица $X(t)$, составленная из этих решений как из столбцов, называется фундаментальной матрицей линейной системы:

$$X(t) = \left(x^{(1)}(t) \,|\, x^{(2)}(t) \,|\, \ldots \,|\, x^{(n)}(t)\right).$$

Любой столбец фундаментальной матрицы удовлетворяет линейной системе, поэтому

$$\left(\dot{x}^{(1)}(t) \,|\, \dot{x}^{(2)}(t) \,|\, \ldots \,|\, \dot{x}^{(n)}(t)\right) = A\left(x^{(1)}(t) \,|\, x^{(2)}(t) \,|\, \ldots \,|\, x^{(n)}(t)\right),$$

то есть фундаментальная матрица удовлетворяет матричному линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad X(t_0) = \left(x_0^{(1)} \,|\, x_0^{(2)} \,|\, \ldots \,|\, x_0^{(n)}\right).$$

Основное свойство фундаментальной матрицы дает следующая теорема.

Теорема: если существует $t_* \in [t_0, T]$ такая, что $\det(X(t_*)) \neq 0$ то для любой $t \in [t_0, T]$ $\det(X(t)) \neq 0$.

В связи с тем, что векторы начальных условий линейно независимы, то $X(t_0)$ состоит из линейно-независимых столбцов, а следовательно, $\det(X(t_0)) \neq 0$. По теореме следует, что для всех $t \in [t_0, T]$ $X(t)$ – невырожденная матрица.

Система линейных дифференциальных уравнений имеет бесконечное число фундаментальных матриц в зависимости от принятого набора линейно независимых векторов начальных условий. Так как $X(t_0)$ – невырожденная матрица, то можно определить матрицу

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0), \quad t \in [t_0, T],$$

называемую переходной матрицей. Переходная матрица обладает следующими свойствами:

1. $\Phi(t_0, t_0) = X(t_0)X^{-1}(t_0) = I.$

2. Переходная матрица невырожденная для любых t_0, t, т.е.

$$\det(\Phi(t, t_0)) = \det\left(X(t)X^{-1}(t_0)\right) = \det(X(t))\det\left(X^{-1}(t_0)\right) \neq 0.$$

3. Переходная матрица удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A\Phi(t, t_0).$$

Действительно:

$$\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(X(t)X^{-1}(t_0)\right)=\frac{dX(t)}{dt}X^{-1}(t_0)=AX(t)X^{-1}(t_0)=A\Phi(t,t_0).$$

Из свойств 3 и 1 следует, что $\Phi(t,t_0)$ – фундаментальная матрица, для которой $X(t_0)=I$.

4. $\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t)$.

Действительно

$$\Phi^{-1}(t,t_0)=\left(X(t)X^{-1}(t_0)\right)^{-1}=X(t_0)X^{-1}(t)=\Phi(t_0,t).$$

Переходную матрицу используют для построения решения систем линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений.

Решение задачи Коши систем линейных однородных дифференциальных уравнений через фундаментальную матрицу

Рассмотрим следующую задачу Коцш:

$$\dot{x}(t)=Ax(t),$$

$$x(t_0)=x_0,\quad x\in R^n,\ t\in[t_0,T]$$

Докажем, что решение этой задачи имеет вид

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x_0,.$$

Доказательство. Продифференцируем по t левую и правую часть решения:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)x_0=A\Phi(t,t_0)x_0=Ax(t).$$

Второе равенство следует из свойства 3 переходной матрицы, третье равенство – из определения решения через переходную матрицу. Таким образом, предложенное решение удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений. Осталось показать, что предложенное решение удовлетворяет начальному условию, для чего вычислим

$$x(t_0)=\Phi(t_0,t_0)x_0=Ix_0=x_0$$

Следовательно, переходная матрица позволяет вычислить решение ЛОУ для любого момента времени t через решение в другой момент времени t_0.

Вычисление переходной матрицы

Переходная матрица удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt} = A\Phi(t,t_0).$$

с начальным условием $\Phi(t_0,t_0) = I.$.

Требуется найти аналитическое решение этого матричного уравнения. Используем следующий прием: проинтегрируем обе части уравнения в пределах $[t_0,t]$ по переменной t:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\Phi(\tau,t_0)}{d\tau}\cdot d\tau = \int_{t_0}^{t} A\Phi(\tau,t_0)d\tau \qquad (4.7).$$

Учитывая, что в левой части содержится полный дифференциал, а матрица A не зависит от τ, получим

$$\Phi(t,t_0) - \Phi(t_0,t_0) = \int_{t_0}^{t} A\Phi(\tau,t_0)d\tau,$$

или

$$\Phi(t,t_0) = I + A\int_{t_0}^{t} \Phi(\tau,t_0)d\tau,$$

Подынтегральное выражение можно представить по этой же формуле, то есть

$$\Phi(t,t_0) = I + A\int_{t_0}^{t}\left(I + A\int_{t_0}^{\tau}\Phi(\tau_1,t_0)d\tau_1\right)d\tau = I + A(t-t_0) + A^2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}\Phi(\tau_1,t_0)d\tau_1 d\tau,$$

Подставив (4.7) в подынтегральное выражение, получим:

$$\Phi(t,t_0)=I+A(t-t_0)+A^2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}\left(I+A\int_{t_0}^{\tau_1}\Phi(\tau_2,t_0)d\tau_2\right)d\tau_1 d\tau=$$

$$=I+A(t-t_0)+A^2\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)d\tau+A^3\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}\int_{t_0}^{\tau_1}\Phi(\tau_2,t_0)d\tau_2 d\tau_1 d\tau=$$

$$=I+A(t-t_0)+A^2\frac{(t-t_0)^2}{2!}+A^3\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}\int_{t_0}^{\tau_1}\Phi(\tau_2,t_0)d\tau_2 d\tau_1 d\tau.$$

продолжая итерационно этот процесс, получим выражение для переходной матрицы в виде сходящегося матричного ряда

$$\Phi(t,t_0)=I+A(t-t_0)+A^2\frac{(t-t_0)^2}{2!}+\ldots+A^n\frac{(t-t_0)^n}{n!}+\ldots.$$

Рассмотрим скалярную функцию $y(t)=e^{at}$. Разложим ее в ряд Тейлора в окрестности точки t_0.

$$y(t)=y(t_0)+\frac{y'(t_0)}{1!}(t-t_0)+\frac{y''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n+\ldots.$$

Производные от экспоненты вычисляют по формуле

$y^{(k)}(t_0)=a^k e^{at_0}$,

В результате получим для экспоненты

$$e^{at}=e^{at_0}+e^{at_0}a(t-t_0)+e^{at_0}\frac{a^2(t-t_0)^2}{2!}+\ldots+e^{at_0}\frac{a^n(t-t_0)^n}{n!}+\ldots.$$

откуда

$$e^{a(t-t_0)}=1+a(t-t_0)+\frac{a^2(t-t_0)^2}{2!}+\ldots+\frac{a^n(t-t_0)^n}{n!}+\ldots.$$

Из сравнения полученного ряда с выражением для переходной матрицы следует, что переходная матрица представляет собой ряд для матричной экспоненты

$$\Phi(t,t_0)=e^{A(t-t_0)}=I+A(t-t_0)+\frac{A^2}{2!}(t-t_0)^2+\ldots+\frac{A^n}{n!}(t-t_0)^n+\ldots.$$

Матричная экспонента обладает всеми свойствами, присущими скалярной экспоненциальной функции, в частности

$$\Phi(t,t_0)=e^{A(t-t_0)}=e^{At}e^{-At_0}.$$

Численное решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

Решение СЛОДУ определяется с помощью переходной матрицы $\Phi(t,t_0)=e^{A(t-t_0)}$ для вектора начальных условий $x(t_0)=x_0$ следующим выражением:

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0.$$

Пусть требуется получить решение СЛОДУ в узлах равномерной сетки

$$t_i=t_0+ih,\quad i=0,\ldots,N$$

с известным шагом h. Для этого рассмотрим решения в двух последовательных узлах сетки, например:

$$x(t_1)=x(t_0+h)=e^{A(t_0+h-t_0)}x(t_0)=e^{Ah}x_0,$$

$$x(t_2)=x(t_0+2h)=e^{A(t_0+2h-t_0)}x(t_0)=e^{2Ah}x_0=e^{Ah}e^{Ah}x_0=e^{Ah}x_1.$$

Продолжая вычисления указанным способом, получим общее выражение для решения СЛОДУ на узлах равномерной сетки:

$$x(t_{i+1})=e^{Ah}x(t_i).$$

Таким образом, решение СЛОДУ задается рекуррентным разностным уравнением с постоянной (для фиксированного шага сетки) матрицей системы

$$\Phi=e^{Ah}.$$

Для вычисления матрицы Φ можно воспользоваться тем, что матричный ряд

$$e^{Ah}=I+Ah+\frac{A^2h^2}{2!}+\ldots+\frac{A^nh^n}{n!}+\ldots$$

сходится абсолютно для любого h, в связи с чем величину $\Phi=e^{Ah}$ можно вычислять путем непосредственного суммирования ряда из N членов

$$\Phi=I+\sum_{i=1}^{N}\frac{A_1^i}{i!},$$

где $A_1 = Ah$.

Решение системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений

Как было выведено ранее, математическая модель линейной динамической системы представляет собой задачу Коши для СЛНДУ:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x \in R^n, u \in R^l.$$

где вектор-функция $u(t)$ известна для любого момента времени. Найдем решение СЛНДУ. Для этого произведем замену переменных

$$z(t) = \Phi(t_0, t)x(t),$$

где $x(t)$ – решение СЛНДУ, $\Phi(t_0,t) = e^{A(t_0 - t)} = \Phi(t,t_0)^{-1}$, $\Phi(t,t_0)$ – переходная матрица для СЛОДУ

$$\dot{x}(t) = Ax(t).$$

Продифференцировав величину

$$z(t) = e^{At_0} e^{-At} x(t)$$

по переменной t с учетом того, что $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ в силу СЛНДУ, получим:

$$\frac{dz}{dt} = e^{At_0}\left(-Ae^{-At}x(t) + e^{-At}(Ax(t) + Bu(t))\right) =$$
$$= e^{At_0}\left(-Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t)\right) = e^{At_0}e^{-At}Bu(t).$$

При переходе к последнему равенству воспользовались равенством

$$Ae^{-At} = e^{-At}A,$$

которое следует из представления e^{-At} в виде ряда.

Интегрируя выражение

$$\frac{dz}{dt} = e^{At_0}e^{-At}Bu(t)$$

на интервале $[t_0, t]$ получим:

$$z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t_0 - \tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Подставив в него $z(t)=e^{At_0}e^{-At}x(t)$ и $z(t_0)=x(t_0)$ получим

$$e^{A(t_0-t)}x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t_0-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Окончательно решение СЛНДУ будет иметь вид:

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Формула для решения СЛНДУ носит название формулы Коши.

3.5 Численное решение СЛНДУ

Воспользуемся формулой Коши для построения алгоритма численного решения СЛНДУ, то есть решений $x(t_i)$, вычисленных в узлах равномерной сетки

$$t_i=t_0+hi, \quad i=0,1,\dots,N.$$

Вычислим !!!!!!!!! $x(t_1)=x(t_0+h)$ в соответствии с формулой Коши:

$$x(t_0+h)=e^{A(t_0+h-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t_0+h}e^{A(t_0+h-\tau)}Bu(\tau)d\tau\,.$$

Считая величину h малой, можно пренебречь изменением входного сигнала на интервале $[t_0,t_0+h]$, то есть считать

$$u(\tau)=u(t_i)=const, \quad \tau\in[t_i,t_i+h],$$

тогда

$$x(t_1)=e^{Ah}x(t_0)+\int_{t_0}^{t_0+h}e^{A(t_0+h-\tau)}Bu(t_0)d\tau$$

Интеграл вычислим путем замены переменных

$$s=t_0+h-\tau,$$

откуда

$$ds=-d\tau,$$

$$\tau=t_0\rightarrow s=h,$$
$$\tau=t_0+h\rightarrow s=0,$$

тогда

$$x(t_1)=e^{Ah}x(t_0)+\int_0^h e^{As}dsBu(t_0).$$

Обозначив величины

$$A_d = e^{Ah}, B_d = \int_0^h e^{As} ds \cdot B ,$$

получим выражение для решения в первом узле сетки:

$$x(t_1) = A_d x(t_0) + B_d u(t_0)..$$

Вычислив $x(t_2) = x(t_1 + h)$ по указанной методике, получим

$$x(t_2) = A_d x(t_1) + B_d u(t_1).$$

Аналогично для *i*-го узла сетки решение определяется следующей дискретной системой:

$$x(t_{i+1}) = A_d x(t_i) + B_d u(t_i), \quad i = 0,1,\ldots,N.$$

Матрицы A_d и B_d вычисляют разложением e^{Ah} в матричный ряд, тогда

$$\Psi = \int_0^h e^{As} ds = \int_0^h \left(I + \frac{As}{1!} + \frac{(As)^2}{2!} + \ldots + \frac{(As)^n}{n!} + \ldots \right) ds = I$$

$$= h + \frac{Ah^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n h^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots .$$

Отсюда

$$B_d = \Psi B,$$
$$A_d = I + \Psi A.$$

В MATLAB реализована команда вычисления матриц дискретной системы A_d и B_d по матрицам *A*, *B* исходной системы:

[sysd]=c2d(sysc,h);

где sysc – исходная непрерывная система, h – величина шага по времени, sysd –дискретная система.

Преобразование линейных моделей

Переход От СЛДУ к ЛДУ *n*-го порядка

Описание линейной динамической системы в виде СЛДУ -

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad x \in R^n, u \in R^l, y \in R^m.$$

называют описанием в форме пространства состояний, т. к. . x – вектор состояния или фазовый вектор.

Описание в форме пространства состояний связано с описанием в форме “вход—выход”, т.е. с математическим описанием, непосредственно связывающим выход $y(t)$ и его производные со входом $u(t)$ и его производными:

$$y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_1 y^{(1)}(t) + \alpha_0 y(t) =$$
$$= \beta_n u^{(n)}(t) + \beta_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \ldots + \beta_1 u^{(1)}(t) + \beta_0 u(t),$$

где $\alpha_i, i = 0, \ldots, n-1$, – квадратные матрицы строения $m \times m$, а $\beta_i, i = 0, \ldots, n-1$ – матрицы строения $m \times l$.

Если ввести оператор дифференцирования $p = d/dt$, уравнение преобразуется к виду

$$p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \ldots + \alpha_1 p + \alpha_0 = \beta_n p^n + \beta_{n-1} p^{n-1} + \ldots + \beta_1 p + \beta_0,$$

т.е. может быть записано в операторной форме

$$\alpha(p) y(t) = \beta(p) u(t)$$

где $\alpha(p), \beta(p)$- матричные полиномы от оператора p (коэффициенты этих полиномов — матрицы).

Если ввести $\alpha^{-1}(p)$ – обратную матрицу, то формально можно записать

$$y(t) = \alpha^{-1}(p) \beta(p) u(t) = W(p) u(t),$$

где $W(p)$ – передаточная функция динамической системы. При этом $y(t) = W(p) u(t),$ – условная запись, под которой понимают, строго говоря, выражение

$$\alpha(p) y(t) = \beta(p) u(t),$$

т.е. дифференциальное уравнение !!!!!!-го порядка.

Если $y(t)$ и $u(t)$ – скалярные выход и вход, то $\alpha(p), \beta(p)$ – скалярные полиномs, поэтому

$$y(t) = \frac{\beta(p)}{\alpha(p)} u(t) = W(p) u(t),$$

где

$$W(p)=\frac{\beta_n p^n+\beta_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\beta_1 p+\beta_0}{\alpha_n p^n+\alpha_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\alpha_1 p+\alpha_0},$$

и является дробно-рациональной функцией.

Найдем выражение для матричных полиномов $\alpha(p),\beta(p)$ через матрицы системы *A*, *B*, *C*, *D*.

Уравнение состояния имеет вид

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t).$$

Уравнение выходов имеет вид

$$y(t)=Cx(t)+Du(t).$$

Найдем выражение для *r*-й производной выхода $y^{(r)}(t)$, где *r* – произвольное число. Делать это будем путем последовательного дифференцирования уравнений выхода.

$$\dot{y}(t)=C\dot{x}(t)+D\dot{u}(t)=C(Ax+Bu)+D\dot{u}=CAx+CBu+D\dot{u},$$

$$\ddot{y}=(\dot{y})'=CA\dot{x}+CB\dot{u}+D\ddot{u}=CA(Ax+Bu)+CB\dot{u}+D\ddot{u}=$$

$$=CA^2x+CABu+CB\dot{u}+D\ddot{u}$$

$$\ldots$$

$$y^{(r)}=CA^r x+\sum_{k=0}^{r-1}CA^{r-1-k}Bu^{(k)}+Du^{(r)}.$$

Для $r=n$ имеем:

$$y^{(n)}=CA^n x+\sum_{k=0}^{n-1}CA^{n-1-k}Bu^{(k)}+Du^{(n)}.$$

Матрицу A^n можно выразить через $A^{n-1},\ldots,A$. По теореме Гамильтона-Кэли матрица *A* является корнем своего характеристического полинома. Если

$\det(Is-A)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\ldots+\alpha_1 s+\alpha_0$ – характеристический полином матрицы *A*, то при $s=A$.

$$A^n+\alpha_{n-1}A^{n-1}+\ldots+\alpha_1 A+\alpha_0 I=0$$

где *I* –- единичная матрица, 0 – нулевая матрица строения $n\times n$.

Следовательно, первое слагаемое в выражении для можно записать как

$$CA^n x = -C\left(\alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I\right)x,$$

и выражение для $y^{(n)}$ примет вид:

$$y^{(n)} + \sum_{r=0}^{n-1}\alpha_r CA^r x = \sum_{k=0}^{n-1} CA^{n-1-k}Bu^{(k)} + Du^{(n)}.$$

Из выражения для $y^{(r)}$ получаем:

$$CA^r x = y^{(r)} - \left(\sum_{k=0}^{r-1} CA^{r-1-k}Bu^{(k)} + Du^{(r)}\right),$$

Подставим его в предыдущее выражение. Получим запись следующего вида:

$$y^{(n)} + \sum_{r=0}^{n-1}\alpha_r y^{(r)} = \sum_{r=0}^{n-1}\alpha_r\left(\sum_{k=0}^{r-1} CA^{r-1-k}Bu^{(k)} + Du^{(r)}\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} CA^{n-1-k}Bu^{(k)} + Du^{(n)}.$$

Ее преобразуем к виду

$$\sum_{r=0}^{n}\alpha_r y^{(r)} = \sum_{r=0}^{n-1}\alpha_r \sum_{k=0}^{r-1} CA^{r-1-k}Bu^{(k)} + \sum_{k=0}^{r-1}\alpha_r Du^{(r)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} CA^{n-1-k}Bu^{(k)} + Du^{(n)}, \quad \alpha_n = 1,$$

а затем

$$\sum_{r=0}^{n}\alpha_r y^{(r)} = \sum_{r=0}^{n}\alpha_r \sum_{k=0}^{r-1} CA^{r-1-k}Bu^{(k)} + \sum_{k=0}^{n}\alpha_r Du^{(r)}.$$

В последнем выражении подразумевается $\alpha_n = 1$ (в характеристическом полиноме это коэффициент при A^n. В правой части этого выражения присутствуют следующие слагаемые:

$$\left(\alpha_0 D + \sum_{r=1}^{n}\alpha_r CA^{r-1}B\right)u^{(0)},$$

$$\left(\alpha_1 D + \sum_{r=2}^{n}\alpha_r CA^{r-2}B\right)u^{(1)},$$

$$\left(\alpha_2 D + \sum_{r=3}^{n}\alpha_r CA^{r-3}B\right)u^{(2)},$$

$$\vdots$$

$$\left(\alpha_{n-1} D + \sum_{r=n}^{n}\alpha_r CA^{r-n}B\right)u^{(n-1)},$$

$$\alpha_n D u^{(n)},$$

т.е. правая часть имеет вид

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\alpha_k D + \sum_{r=k+1}^{n}\alpha_r CA^{r-k-1}B\right)u^{(k)} = \sum_{k=0}^{n}\beta_k u^{(k)},$$

где

$$\beta_k = \alpha_k D + \sum_{r=k+1}^{n}\alpha_r CA^{r-k-1}B, \quad k = 0,1,\ldots n.$$

Таким образом $\sum_{r=0}^{n}\alpha_r y^{(r)} = \sum_{k=0}^{n}\beta_k u^{(k)}$. Учитывая, что !!!!!!! $y^{(r)} = p^r y$, $u^{(k)} = p^k u$, получаем

$$\left(\sum_{r=0}^{n}\alpha_r p^r\right)y(t) = \left(\sum_{k=0}^{n}\beta_k p^k\right)u(t),$$

что эквивалентно записи

$$\left(p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \ldots + \alpha_1 p + \alpha_0\right)y(t) = \left(\beta_n p^n + \beta_{n-1}p^{n-1} + \ldots + \beta_1 p + \beta_0\right)u(t),$$

где $\alpha(p) = p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \ldots + \alpha_1 p + \alpha_0$ – характеристический полином. Последняя запись эквивалентна передаточной функции (ПФ) $W(p)$, рассмотренной выше.

В общем случае, когда вход u и выход у являются не скалярными, а векторными, мы имеем дело с матричной ПФ от u к y. В этом случае вместо полинома $\beta(p)$ получается матрица

$$\beta(p) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(p) & \ldots & \beta_{1l}(p) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \beta_{m1} & \ldots & \beta_{ml}(p) \end{pmatrix},$$

где $\beta_{ij}(p)$ - полином. При этом

$$\alpha_{ij}(p)y_j(t) = \beta_{ij}(p)u_i(t).$$

Связь между $u(t)$ и $y(t)$ определяет соотношение

$$y(t) = \frac{1}{\alpha(p)}\beta(p)u(t) = W(p)u(t),$$

где $W(p) = \begin{pmatrix} w_{11}(p) & \dots & w_{1l}(p) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ w_{m1}(p) & \dots & w_{ml}(p) \end{pmatrix}.$

Ее элементы - это $w_{ij}(p) = \dfrac{\beta_{ij}(p)}{\alpha(p)}$, представляющие собой ПФ от i-го входа к j-му выходу. Таким образом, знаменатель всех ПФ один и тот же и равен $\alpha(p)$ – характеристическому полиному матрицы A. Матричную ПФ можно получить и при помощи преобразования Лапласа для системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0,$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

Применив преобразование Лапласа L к вектор-функциям $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$:

$$L\{x(t)\} = x(s), \quad L\{u(t)\} = u(s), \quad L\{y(t)\} = y(s),$$

получим

$$L\{\dot{x}(t)\} = L\{Ax(t) + Bu(t)\},$$

или

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s),$$

или

$$(Is - A)x(s) = Bu(s)$$

а также

$$L\{y(t)\} = L\{Cx(t) + Du(t)\}, \to y(s) = Cx(s) + Du(s).$$

Отсюда

$$x(s) = (Is - A)^{-1}Bu(s),$$
$$y(s) = \left(C(Is - A)^{-1}B + D\right)u(s) = W(s)u(s),$$

где $W(s)$ – это матричная ПФ вида

$$W(s)=\frac{1}{\alpha(s)}\begin{pmatrix}\beta_{11}(s) & \dots & \beta_{1l}(s)\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \beta_{m1}(s) & \dots & \beta_{ml}(s)\end{pmatrix}$$

Здесь $\beta_{ij}(s)$ – полиномы относительно s, они совпадают с полиномами $\beta_{ij}(p)$.

Поэтому в области изображений

$$\alpha(s)y(s)=\beta(s)u(s)$$

Полиномы $\alpha(s),\beta(s)$ можно вычислять приведенным ранее способом.

Переход от описания динамической системы в форме "вход—выход" к описанию в пространстве состояний

Ограничимся объектом с одним входом и одним выходом $u(t)\in R^1, y(t)\in R^1$. Пусть динамическую систему описывает линейное дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)}(t)+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+\alpha_1 y^{(1)}(t)+\alpha_0 y(t)=$$
$$=\beta_n u^{(n)}(t)+\beta_{n-1}u^{(n-1)}(t)+\ldots+\beta_1 u^{(1)}(t)+\beta_0 u(t),$$

Введем обозначения:

$$y^{(n-1)}=y_{n-1},\ldots y^{(1)}=y_1, y=y_0.$$

Дифференциальному уравнению системы соответствуют скалярные полиномы от оператора дифференцирования p:

$$\alpha(p)=p^n+\alpha_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\alpha_1 p+\alpha_0$$

и

$$\beta(p)=p^n+\beta_{n-1}p^{n-1}+\ldots+\beta_1 p+\beta_0$$

Для описания системы в пространстве состояний требуется найти матрицы A, B, C, D и вектор начальных условий $x(t_0)=x_0$ – такие, чтобы системе

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad x(t_0)\in R^n,$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t).$$

и исходному дифференциальному уравнению соответствовали тождественные выходы $y(t)$ для одного и того же $u(t), t \in [t_0, T]$.

Из исходной записи

$$p^n y + \alpha_{n-1} p^{n-1} y + \ldots + \alpha_1 p y + \alpha_0 y = \beta_n p^n u + \ldots + \beta_1 p u + \beta_0 u,$$

следует, что

$$(y - \beta_n u) = \frac{1}{p}(-\alpha_{n-1} y + \beta_{n-1} u) + \frac{1}{p^2}(-\alpha_{n-2} y + \beta_{n-2} u) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{p^n}(-\alpha_0 y + \beta_0 u),$$

или

$$(y - \beta_n u) = \frac{1}{p}\left(-\alpha_{n-1} y + \beta_{n-1} u + \frac{1}{p}\left(-\alpha_{n-2} y + \beta_{n-2} u + \frac{1}{p}(\ldots(-\alpha_0 y + \beta_0 u)\ldots)\right)\right).$$

Введем переменную

$$x_n = y - \beta_n u,$$

отсюда

$$y = x_n + \beta_n u.$$

Очевидно, что

$$x_n = \frac{1}{p}\left(-\alpha_{n-1} y + \beta_{n-1} u + \frac{1}{p}\left(-\alpha_{n-2} y + \beta_{n-2} u + \frac{1}{p}(\ldots(-\alpha_0 y + \beta_0 u)\ldots)\right)\right),$$

откуда, продифференцировав x_n, получим

$$\dot{x}_n + \alpha_{n-1} y - \beta_{n-1} u = \frac{1}{p}\left(-\alpha_{n-2} y + \beta_{n-2} u + \frac{1}{p}(\ldots(-\alpha_0 y + \beta_0 u)\ldots)\right)$$

Выражение справа от знака равенства обозначим через x_{n-1}.

Тогда

$$\dot{x}_n = x_{n-1} - \alpha_{n-1} y + \beta_{n-1} u.$$

Продифференцируем x_{n-1} и получим

$$\dot{x}_{n-1} = -\alpha_{n-2} y + \beta_{n-2} u + \frac{1}{p}(\ldots(-\alpha_0 y + \beta_0 u)\ldots)$$

или

$$\dot{x}_{n-1} + \alpha_{n-2} y - \beta_{n-2} u = \frac{1}{p}\left(\ldots\left(-\alpha_0 y + \beta_0 u\right)\ldots\right) = x_{n-2}.$$

Последнее выражение можно записать как

$$\dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - \alpha_{n-2} y + \beta_{n-2} u.$$

что аналогично выражению для $\dot{x}_n$. Продолжая этот процесс, получим цепочку равенств, последним из которых будет

$$\dot{x}_1 = -\alpha_{01} y + \beta_0 u.$$

Полученная система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_0 y + \beta_0 u, \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - \alpha_{n-2} y + \beta_{n-2} u, \\ \dot{x}_n = x_{n-1} - \alpha_{n-1} y + \beta_{n-1} u \end{cases}$$

может быть записана как

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_0 \left(x_n + \beta_n u\right) + \beta_0 u, \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - \alpha_{n-2} \left(x_n + \beta_n u\right) + \beta_{n-2} u, \\ \dot{x}_n = x_{n-1} - \alpha_{n-1} \left(x_n + \beta_n u\right) + \beta_{n-1} u \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_0 x_n + \left(\beta_0 + \alpha_0 \beta_n\right) u, \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = -\alpha_{n-2} x_n + x_{n-2} - \left(\beta_{n-2} + \alpha_{n-2} \beta_n\right) u, \\ \dot{x}_n = -\alpha_{n-1} x_n + x_{n-1} - \left(\beta_{n-1} + \alpha_{n-1} \beta_n\right) u. \end{cases}$$

В левой части этой системы стоит вектор производных от компонент вектора $x = \left(x_1 \ldots x_n\right)^T$.

Полученная система уравнений есть система неоднородных дифференциальных уравнений с вектором состояния x. Запишем эту систему уравнений в матричной форме:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \beta_0 - \alpha_0\beta_n \\ \beta_1 - \alpha_0\beta_n \\ \vdots \\ \beta_{n-2} - \alpha_0\beta_n \\ \beta_{n-1} - \alpha_0\beta_n \end{pmatrix} u,$$

и добавим уравнение для y:

$$y = [0\dots01]x + \beta_n u.$$

В итоге получена стандартная запись линейной системы в пространстве состояний. Матрицы A, B, C, D имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_0 - \alpha_0\beta_n \\ \beta_1 - \alpha_0\beta_n \\ \vdots \\ \beta_{n-2} - \alpha_0\beta_n \\ \beta_{n-1} - \alpha_0\beta_n \end{pmatrix},$$

$$C = [0\dots01], \quad D = \beta_n.$$

Это так называемая каноническая наблюдаемая форма.

Существует бесконечное число других представлений ПФ в форме пространства состояний. Наиболее распространенная из них – форма Фробениуса или каноническая управляемая форма:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u,$$

$$y = x_1' + \beta_n u,$$

или

$$y = (10\dots0)x_1' + \beta_n u.$$

Здесь вектор состояния обозначен как x' (не путать с символом производной!)

Для фробениусовой формы записи матрицы имеют вид:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$C' = (10\dots0), \quad D' = \beta_n u.$$

Здесь коэффициенты матрицы B' вычисляются из следующей системы ЛАУ:

$$b_1 = \beta_{n-1} - \alpha_{n-1}\beta_n,$$
$$\alpha_{n-1}b_1 + b_2 = \beta_{n-2} - \alpha_{n-2}\beta_n,$$
$$\dots$$
$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + b_n = \beta_0 - \alpha_0\beta_n.$$

Переход от одного описания в форме пространства состояний к другому (такой переход называют переходом к другому базису) осуществляется неособенной матрицей T, которую называют матрицей преобразования.

Допустим, существуют уравнения:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

Пусть $x' = Tx$, $x = T^{-1}x'$. Тогда исходную систему можно преобразовать к следующему виду:

$$T^{-1}\dot{x}'(t) = AT^{-1}x'(t) + Bu(t),$$
$$y(t) = CT^{-1}x'(t) + Du(t).$$