ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4.
РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ В СРЕДЕ MATLAB

Цель работы: изучить основные принципы формирования алгоритмов управления, освоить средства моделирования систем управления в среде MATLAB.

Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, представленный в виде LTI-системы с математической моделью в пространстве состояний

$$\dot{x} = Ax + Bu + Hd,$$
$$y = Cx,$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния, $u \in R^m$ – вектор управления, $d \in R^l$ – вектор внешних воздействий, $y \in R^k$ – вектор контролируемых координат, A,B,C – матрицы с постоянными коэффициентами соответствующей размерности.

Наряду с уравнениями объекта введём в рассмотрение уравнение линейной обратной связи (регулятора) в виде LTI-системы с математической моделью в частотной области

$$u = W(s)y\,,$$

где $\mathbf{W}(s)$ – передаточная матрица регулятора.

На движениях замкнутой системы зададим некоторый функционал $J = J(\mathbf{W})$, значения которого при прочих равных условиях однозначно определяются выбором матрицы $\mathbf{W}(s)$.

Тогда задача оптимального синтеза состоит в том, чтобы найти такую матрицу $\mathbf{W}(s)$, чтобы этот функционал достигал своего наименьшего значения по отношению ко всем другим передаточным матрицам регуляторов, обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы. В формализованном виде это может быть записано следующим образом:

$$J = J(\mathbf{W}) \to \min_{\mathbf{W}\in\Omega},$$

где Ω – множество передаточных матриц $\mathbf{W}(s)$ таких, что корни характеристического полинома $\Delta(s)$ замкнутой системы расположены в открытой левой комплексной полуплоскости.

Зададим для замкнутой системы начальные условия и внешние воздействия, определив тем самым конкретный процесс управления. Введём в рассмотрение вектор $h \in R^p$ настраиваемых параметров регулятора, а также функцию $x(t,h) = \|y(t,h)\| = \sqrt{y^T(t,h)Ry(t,h)}$, характеризующую процесс управления. В простейшем варианте, вместо указанной функции может быть принята любая компонента вектора $y(t)$.

Для того чтобы качество рассматриваемого процесса соответствовало желаниям проектировщика, зададим две функции времени $x_1(t)$ и $x_2(t)$ такие, что $x_2(t) < x_1(t) \quad \forall t \in [0,T]$. Поставим перед собой цель так выбрать вектор настраиваемых параметров $h \in R^p$, чтобы выполнились неравенства

$$x_2(t) \le x(t,h) \le x_1(t) \quad \forall t \in [0,T].$$

Иными словами, настройка параметров должна обеспечить нахождение кривой $x(t,h)$ в пределах заданного динамического «коридора».

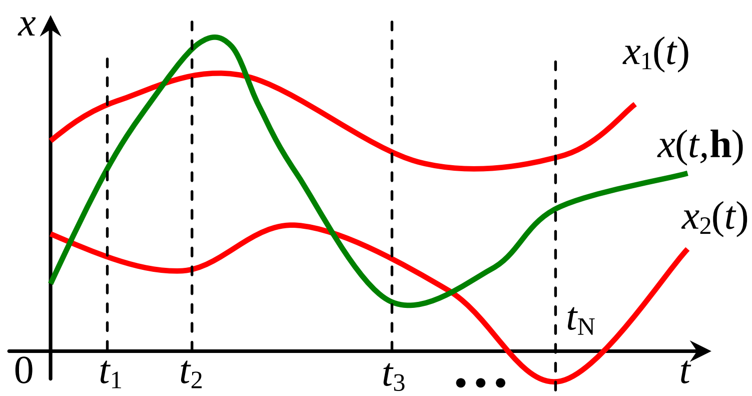

Рисунок 2 - Динамический «коридор» для характеристики процесса.

Существует эффективный способ достижения поставленной цели путём постановки и решения следующей задачи конечномерной оптимизации

$$\alpha(h) \to \min_{h \in R^p},$$

где $\alpha(h)$ – некоторая величина, определяющая степень выхода за границы заданного «коридора».

Этот способ оптимизации систем управления реализован в математической среде MATLAB в виде модуля Simulink Design Optimization и специального блока оптимизации Check Step Response Characteristics.

Для использования этого пакета выполняют следующую последовательность действий:

1. Формируют Simulink-модель замкнутой системы, причём компоненты вектора h настраиваемых параметров должны быть заданы своими именами в рабочем пространстве среды.

2. Из раздела Simulink Design Optimization выбирают блок Check Step Response Characteristics и размещают в модели, подключая к его входу контролируемый сигнал $x(t,h)$.

3. Настраивают блок Check Step Response Characteristics, задавая имена настраиваемых параметров для множества Design Variables Set и ограничения сверху и снизу для функции $x(t,h)$.

4. Запускают процесс оптимизации и контролируют процесс автоматического вхождения кривой $x(t,h)$ в заданный «коридор». Если система не достигает поставленной цели, то корректируют наложенные ограничения (в сторону их ослабления) и повторяют процесс.

К простейшему классу задач теории модального управления относится ситуация, когда выбором коэффициентов регулятора по состоянию можно обеспечить произвольное распределение корней характеристического полинома замкнутой системы.

Вместо системы введем в рассмотрение замкнутую систему, добавляя к уравнению объекта уравнение регулятора по состоянию

$$\dot{x} = Ax + Bu + Hd,$$

$$u = Kx,$$

где $\mathbf{K}$ — постоянная матрица размера $m \times n$.

Получим модель замкнутой системы в виде

$$\dot{x} = (A + BK)x .$$

В рассматриваемой задаче матрицу K необходимо выбрать таким образом, чтобы матрица $A + BK$ замкнутой системы имела заранее заданные собственные значения.

В среде MATLAB данная задача решается с помощью функции place, входящей в состав Control System Toolbox. Вызов этой функции в простейшем варианте осуществляется следующим образом: K=-place(A,B,P). Здесь K – выходной параметр – искомая матрица коэффициентов регулятора, A,B – матрицы уравнений объекта, P – вектор с комплексными компонентами – желаемыми корнями характеристического полинома замкнутой системы. Аналогично работает функция acker.

Замечание: необходимым условием для работы функций является управляемость объекта по Калману.

На движениях замкнутой системы (4) при условиях $d(t) \equiv 0$, $x(0) = x_0$ зададим интегральный квадратичный функционал

$$J = J(K) = \int_0^\infty (x^T Qx + u^T Ru)dt$$

где Q – знакоположительная матрица, R – положительно определенная матрица. Постоянные компоненты указанных матриц являются весовыми множителями, определяющими значимость вклада в величину функционала отдельных составляющих векторов состояния и управления.

Задача LQR-оптимального синтеза состоит в том, чтобы найти такую матрицу K, чтобы функционал достигал своего наименьшего значения по отношению ко всем другим матрицам коэффициентов усиления, обеспечивающим асимптотическую устойчивость замкнутой системы. В формализованном виде это может быть записано следующим образом:

$$J = J(K) \to \min_{K \in \Omega},$$

где Ω – множество постоянных матриц K таких, что корни характеристического полинома $\Delta(s) = \det(Es - A - BK)$ замкнутой системы расположены в открытой левой комплексной полуплоскости.

В среде MATLAB задача LQR-оптимизации решается с помощью функции lqr, входящей в состав Control System Toolbox. Вызов этой функции в простейшем варианте осуществляется следующим образом: K=-lqr(A,B,R,Q). Здесь K – выходной параметр – искомая матрица коэффициентов регулятора, A,B – матрицы уравнений объекта, R,Q – матрицы интегрального квадратичного функционала.

Обобщением рассмотренного оптимизационного подхода является задача LQG-оптимизации (Linear Quadratic Gaussian).

Вместо исходной модели объекта рассматриваются уравнения

$$\dot{x} = Ax + Bu + G\varphi(t),$$
$$y = Cx + \psi(t),$$

где $\varphi(t) \in R^l$ – вектор внешних возмущающих сил, $\psi(t) \in R^k$ – вектор шумов (ошибок) в измерениях. Эти функции рассматривают как случайные векторные стационарные гауссовские процессы типа «белый шум» с заданными постоянными матрицами спектральных плотностей S_φ и S_ψ соответственно, причем $\det S_\psi \neq 0$.

Задача LQG-оптимального синтеза состоит в построении обратной связи (регулятора) (2), решающего задачу

$$J_g = J_g(\mathbf{W}) \to \min_{\mathbf{W}\in\Omega}$$

для замкнутой системы с функционалом

$$J_g(W) = \left\langle y^T R y \right\rangle + \left\langle u^T Q u \right\rangle,$$

где $R \geq 0$, $Q > 0$ – такие же параметры, как в функционале (5).

Алгоритм решения этой задачи основывается на принципе (или теореме) разделения. Согласно этому утверждению оптимальный регулятор имеет следующий вид:

$$\dot{z} = Az + Bu + H(y - Cz),$$

$$u = Kz.$$

Здесь K – оптимальное решение задачи для функционала с такими же матрицами, H – матрица, оптимальная в смысле фильтрации Калмана.

В среде MATLAB построение фильтра Калмана выполняется с помощью функции kalman из пакета Control System Toolbox. Вызов этой функции осуществляется следующим образом:

```
[Sest,H,P]=kalman(ss(A,[B,G],C,zeros(k,m+l)),Sh,Sp).
```

Здесь H – основной выходной параметр – искомая матрица фильтра Калмана, A,B,G,C – матрицы уравнений (7) объекта, $Sh = S_\varphi, Sp = S_\psi$ – матрицы спектральных плотностей возмущения и шума.

MATLAB содержит значительное количество функций, модулей и даже отдельных приложений для решения разнообразных задач управления. В документации можно изучить следующие разделы:

Control System Toolbox -> Control System Design and Tuning -> State-Space Control Design and Estimation: синтез регуляторов и наблюдателей в пространстве состояния;

Simulink® Control Design –> Control System Design and Tuning – средства синтеза и настройки регуляторов с использованием моделей и объектов SIMULINK;

Simulink® Design Optimization –> Optimization-Based Control Design: средства оптимального синтеза для моделей и объектов SIMULINK;

Приложение Control System Designer: приложение для синтеза систем управления для систем с одним входом и выходом (SISO-систем).

Задание на лабораторную работу.

Вариант 1. Исходная математическая модель – см. лабораторную работу 3, вариант 1.

Содержание работы.

1. Синтезировать для этого объекта регулятор

$$\begin{pmatrix} \delta_e \\ \delta_n \end{pmatrix} = K\, y,$$

обеспечивающий следующий спектр собственных значений: $s_1 = -0.15$, $s_2 = -0.3$, $s_{3,4} = -0.5 \pm 0.2j$, $s_{5,6} = -0.4 \pm 0.6j$.

2. Замкнуть полученным регулятором объект и проверить корни характеристического полинома.

3. Изменить регулятор таким образом, чтобы время переходного процесса в замкнутой системе уменьшилось и сравнить коэффициенты нового и прежнего регулятора.

Вариант 2. Исходная математическая модель – см. лабораторную работу 2, вариант 2.

Содержание работы.

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели в ss-форме.

2. Изменить уравнения объекта, полагая, что все компоненты вектора состояния доступны измерению.

3. Синтезировать LQR-оптимальный регулятор для интегрального квадратичного функционала с матрицами

$$\mathrm{Q} = I, \ \mathbf{R} = 1.$$

4. Замкнуть систему синтезированным регулятором и проверить корни характеристического полинома.

5. Задать новое значение для матрицы **R** = 10, синтезировать регулятор повторно, вывести полюса обеих замкнутых систем на комплексную плоскость.

Вариант 3. Исходная математическая модель – см. лабораторную работу 2, вариант 3.

Содержание работы.

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели в ss-форме.

2. Изменить уравнения объекта, полагая, что все компоненты вектора состояния доступны измерению.

3. Выполнить параметрический модальный синтез, обеспечивая распределение корней характеристического полинома близкое к биномиальному $\Delta(s) = (s+\gamma)^5$.

4. Замкнуть систему синтезированным регулятором и проверить корни характеристического полинома.

5. Построить графики зависимости коэффициентов *k1, k5* от величины γ.

Вариант 4. Исходная математическая модель – см. лабораторную работу 2, вариант 4.

Содержание работы.

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели. Входом считать отклонение рулей δ_v, δ_x , выходами – отклонение от заданного курса φ, угол крена θ.

2. Синтезировать LQG-оптимальный регулятор для следующих матриц

$\mathrm{Q} = \mathrm{I}$, $\mathrm{R} = \mathrm{I}$, $\mathrm{S}_\varphi = \mathrm{I}$, $\mathrm{S}_\psi = \mathrm{I}$.

3. Замкнуть систему синтезированным регулятором и проверить корни характеристического полинома.

Вариант 5. Исходная математическая модель – см. лабораторную работу 2, вариант 5.

Содержание работы.

1. Сформировать LTI-объект управления.
2. Сформировать регулятор в виде
$$u = k_1\beta + k_2\omega + k_3\varphi + k_4\delta,$$
3. Определить коэффициенты регулятора, обеспечивающие собственные частоты замкнутой системы $s_1 = -0.1$, $s_2 = -0.05$, $s_{3,4} = -0.25 \pm 0.08j$
4. Замкнуть систему синтезированным регулятором и проверить корни характеристического полинома.
5. Увеличить s_2 в 10 раз, получить новый регулятор и сравнить с предыдущим.

Вариант 6. Исходная математическая модель – см. лабораторную работу 2, вариант 6.

Содержание работы.

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели в ss-форме.

2. Изменить уравнения объекта, полагая, что все компоненты вектора состояния доступны измерению.

3. Синтезировать LQR-оптимальный регулятор для интегрального квадратичного функционала

$$J = \int_0^\infty x^2 + 10\theta^2 + \alpha\delta^2)dt, \ \alpha = 1.$$

4. Замкнуть систему синтезированным регулятором и проверить корни характеристического полинома.

5. Построить зависимость максимальной вещественной части полюсов замкнутой системы от α. Диапазон изменения α: [0.01 … 100].

Вариант 7. Исходная математическая модель – см. лабораторную работу 2, вариант 7.

Содержание работы.

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели в ss-форме.

2. Изменить уравнения объекта, полагая, что все компоненты вектора состояния доступны измерению.

3. Выполнить параметрический модальный синтез, обеспечивая распределение корней характеристического полинома, близкое к виду $\Delta(s) = \left(s + \omega_1\right)^2 \left(s + \omega_2\right)$ для базовых значений $\omega_1 = \omega_2 = 1.2$.

4. Замкнуть систему синтезированным регулятором и проверить корни характеристического полинома.

5. Построить графики зависимости коэффициентов регулятора от величины ω_2.

Вариант 8. Исходная математическая модель – см. лабораторную работу 2, вариант 8.

Содержание работы.

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели, считая выходами переменные Z_f, β, γ.

2. Синтезировать LQG-оптимальный регулятор для следующих матриц

$$\mathrm{Q = I}\ ,\ \mathrm{R = I},\ \mathrm{S}_\varphi = \mathrm{I},\ \mathrm{S}_\psi = \mathrm{I}.$$

3. Замкнуть систему синтезированным регулятором и проверить корни характеристического полинома.