$$Ax_i = e_i, \quad i = 1,\dots,n.$$

Таким образом, для вычисления обратной матрицы необходимо решить n СЛАУ и составить из полученных решений матрицу. Учитывая, что все n СЛАУ имеют одинаковую матрицу A, целесообразно произвести ее LU-факторизацию и свести задачу вычисления обратной матрицы к решению $2n$ СЛАУ с треугольными матрицами

$$Ly_i = e_i,$$
$$Ux_i = y_i, \quad i = 1,\dots,n.$$

Обусловленность СЛАУ. Анализ ошибок решения СЛАУ

Определение: СЛАУ плохо обусловлена, если малые изменения элементов матрицы A или вектора b приводят к большим изменениям в решении.

Рассмотрим пример плохо обусловленной СЛАУ:

$$0{,}8x_1 + 0{,}4x_2 = 1,$$
$$0{,}79x_1 + 0{,}41x_2 = \varepsilon.$$

Решения этой системы x_0 для $\varepsilon = 0$ и x_ε для малого значения ε будут сильно отличаться. Это связано с тем, что на плоскости x_1x_2 уравнения системы задают “почти” параллельные прямые 1 и 2 (рис. 2.1). Следовательно, уравнения являются “почти” линейнозависимыми, и при их малом изменении относительно друг друга точка пересечения прямых будет значительно меняться.

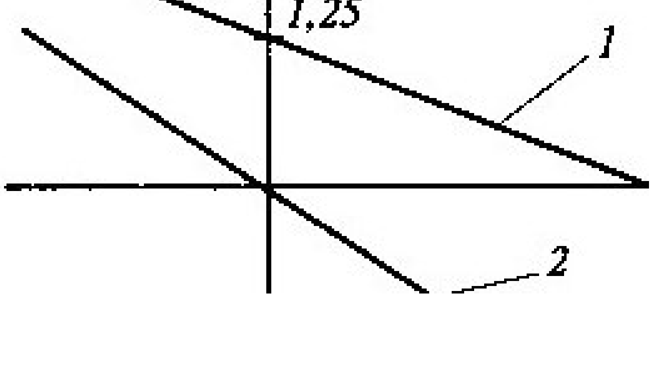

Рисунок 2.1

Получим количественную характеристику обусловленности СЛАУ. Рассмотрим исходную систему

.

Изменим вектор правой части таким образом, что $b = b_0 + \Delta b$, при этом изменится решение СЛАУ $x = x_0 + \Delta x$. Найдем зависимость Δx от Δb:

$$A(x_0 + \Delta x) = b_0 + \Delta b,$$
$$Ax_0 + A\Delta x = b_0 + \Delta b.$$

Учитывая, что $Ax_0 = b_0$ имеем

$$A\Delta x = \Delta b,$$

$$\Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

Вычислим зависимость норм векторов $\|\Delta x\|$ и $\|\Delta b\|$. По правилу треугольников имеем

$$\|\Delta x\| = \left\|A^{-1}\Delta b\right\| \le \left\|A^{-1}\right\|\|\Delta b\|,$$

поэтому, если $\left\|A^{-1}\right\|$ мала, то большие изменения $\|\Delta b\|$ приведут к малым изменениям $\|\Delta x\|$. Удобно иметь дело с относительными величинами

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x_0\|} \text{ и } \frac{\|\Delta b\|}{\|b_0\|}.$$

Учитывая, что $\|b_0\| = \|Ax_0\|$, умножая полученное неравенство на $\|b_0\|$, получим:

$$\|\Delta x\| \cdot \|b_0\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \|b_0\| = \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \|Ax_0\| \le \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \|A\| \cdot \|x_0\|$$

Разделим обе части неравенства на $\|x_0\| \cdot \|b_0\|$:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x_0\|} \le \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b_0\|}.$$

Величина

$$\|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| = \mathrm{cond}(A)$$

называется числом обусловленности матрицы. Как следует из полученного неравенства, это число характеризует относительное изменение нормы решения СЛАУ в зависимости от относительного изменения нормы правой части системы.

Для вычисления числа обусловленности матрицы воспользуемся определением нормы матрицы

$$\|A\|^2 = \rho\left(A^T A\right) = \max_{1\le i\le n}\left|\lambda_i\left(A^T A\right)\right|,$$

где $\lambda_i\left(A^T A\right)$ – собственное число матрицы $A^T A$. Вычислим

$$\left\|A^{-1}\right\| = \rho\left(\left(A^{-1}\right)^T A^{-1}\right)$$

Учитывая симметричность $\left(A^{-1}\right)^T A^{-1}$ и коммутативность операций транспонирования и обращения, получим:

$$\left(A^{-1}\right)^T A^{-1} = \left(A^T A\right)^{-1}.$$

Поэтому

$$\left\|A^{-1}\right\|^2 = \rho\left(\left(A^{-1}\right)^T A^{-1}\right) = \max_{1\le i\le n}\frac{1}{\lambda_i\left(A^T A\right)} = \frac{1}{\min\limits_{1\le i\le n}\lambda_i\left(A^T A\right)}.$$

Из определения числа обусловленности

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\|\cdot\left\|A^{-1}\right\| = \left[\frac{\max\limits_{1\le i\le n}\lambda_i\left(A^T A\right)}{\min\limits_{1\le i\le n}\lambda_i\left(A^T A\right)}\right]^{1/2} \ge 1.$$

Вычисление собственных значений матрицы

Рассмотрим наиболее простой алгоритм вычисления собственных значений матрицы, основанный на вычислении корней характеристического полинома матрицы – алгоритм А. Н. Крылова. Алгоритм является следствием теоремы Гамильтона-Кэли.

Теорема: квадратная матрица A является корнем своего характеристического полинома