Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

**«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)**

Кафедра систем автоматического управления

**Отчет по практической работе № 2**

по дисциплине

**«Нелинейное адаптивное управление в технических системах»**

Студент группы 9492 Викторов А.Д.

Преподаватель Соколов П.В.

Санкт-Петербург

2024

# Содержание

**1 Задание 1** **3**

**2 Задание 2** **5**

**3 Задание 3** **10**

# 1 Задание 1

## Исходные данные

Уравнения объекта управления:

$$\dot{x}_1 = x_2 + 2u_1,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2 + u_2 + r,$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Целевая функция:

$$Q = \frac{1}{2}[\mathbf{y} - \mathbf{r}^*]^\top P[\mathbf{y} - \mathbf{r}^*],$$

где

$$\mathbf{r}^* = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \end{bmatrix}, \quad P = P^\top > 0.$$

Градиент целевой функции:

$$\nabla_u Q = \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{u}},$$

где

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{y}} = P(\mathbf{y} - \mathbf{r}^*), \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\nabla_u Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P(\mathbf{y} - \mathbf{r}^*).$$

Закон управления:

$$\dot{\mathbf{u}} = -\gamma \nabla_u Q,$$

где $\gamma > 0$ — скорость адаптации.

Сигнальный закон управления:

$$\mathbf{u} = -\gamma \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P(\mathbf{y} - \mathbf{r}^*).$$

При $P > 0$ и $\gamma > 0$ управление минимизирует $Q$, что обеспечивает сходимость $\mathbf{y} \to \mathbf{r}^*$ при $t \to \infty$.

Целевая функция $Q$ является кандидатом на функцию Ляпунова:

$$Q = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{r}^*)^\top P(\mathbf{y} - \mathbf{r}^*),$$

где $P = P^\top > 0$. Она положительно определена:

$$Q > 0, \quad \text{если } \mathbf{y} \neq \mathbf{r}^*, \quad Q = 0, \quad \text{если } \mathbf{y} = \mathbf{r}^*.$$

Дифференцируем $Q$ по времени:

$$\dot{Q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{r}^*)^\top P(\mathbf{y} - \mathbf{r}^*)\right).$$

Раскрываем производную:

$$\dot{Q} = (\mathbf{y} - \mathbf{r}^*)^\top P\dot{\mathbf{y}}.$$

Динамика системы:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Управление:

$$\mathbf{u} = -\gamma \mathbf{G} P(\mathbf{y} - \mathbf{r}^*), \quad \mathbf{G} = \mathrm{diag}(2, 1).$$

Подставляем $\dot{\mathbf{y}}$ в $\dot{Q}$:

$$\dot{Q} = (\mathbf{y} - \mathbf{r}^*)^\top P\left(\mathbf{A}\mathbf{y} - \gamma \mathbf{B}\mathbf{G}P(\mathbf{y} - \mathbf{r}^*)\right).$$

Разделим на слагаемые:

$$\dot{Q} = (\mathbf{y} - \mathbf{r}^*)^\top P\mathbf{A}\mathbf{y} - \gamma(\mathbf{y} - \mathbf{r}^*)^\top P\mathbf{B}\mathbf{G}P(\mathbf{y} - \mathbf{r}^*).$$

- Первое слагаемое: Так как матрица $\mathbf{A}$ Гурвицева, то $(\mathbf{y} - \mathbf{r}^*)^\top P\mathbf{A}\mathbf{y} < 0$.
- Второе слагаемое: С учётом $P > 0$ и $\mathbf{G} > 0$, $-\gamma(\mathbf{y} - \mathbf{r}^*)^\top P\mathbf{B}\mathbf{G}P(\mathbf{y} - \mathbf{r}^*) < 0$.

Система устойчива в смысле Ляпунова.

## Моделирование в Simulink

На рисунке 1 представлен график переходных процессов системы с сигнальной адаптацией.

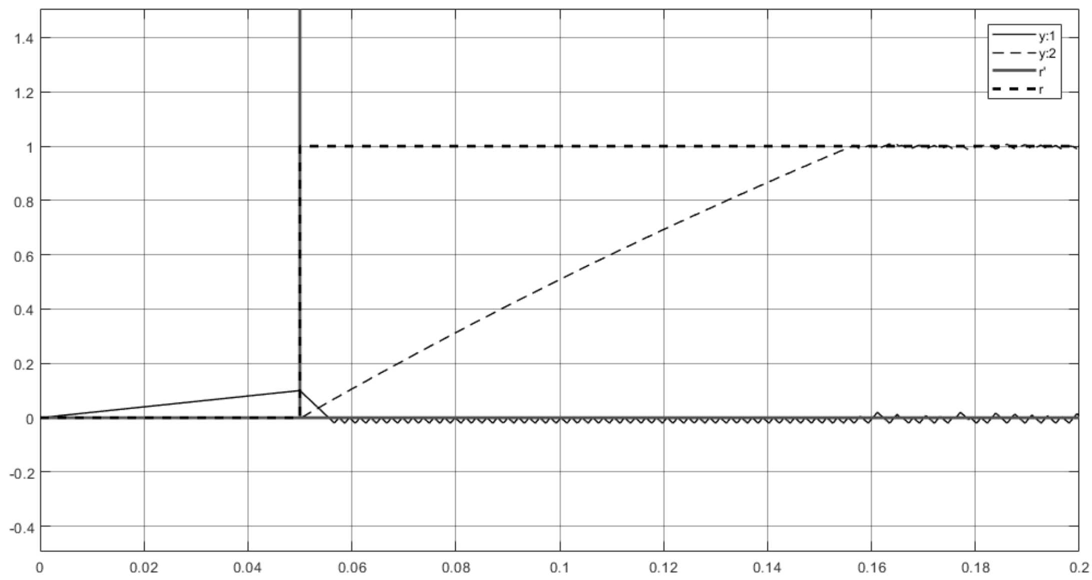


Рис. 1: График переходных процессов системы с сигнальной адаптацией

# 2 Задание 2

Объект управления описывается уравнением

$$0.25\ddot{y} + 0.4\dot{y} + y = 2u(t)$$

Уравнение эталонной модели имеет вид:

$$0.09\ddot{y_M} + 0.5\dot{y_M} + y_M = 3r(t)$$

Закон управления задан в виде

$$u = K_a x(t) + k_b r(t)$$

Преобразуем уравнения:

$$\ddot{y} = -1.6\dot{y} - 4y + 8u(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1.6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

$$\ddot{y_M} = -\frac{50}{9}\dot{y_M} - \frac{100}{9}y_M + \frac{300}{9}r(t)$$

$$\mathbf{A_M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{100}{9} & -\frac{50}{9} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B_M} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{300}{9} \end{bmatrix}.$$

## Целевая функция

$$Q = \frac{1}{2}[y - y_M]^\top P[y - y_M],$$

$$\dot{Q} = [y - y_M]^\top P(Ay + Bu - A_M y_M - B_M r),$$

$$P = P^\top > 0$$

$$PA_M + A_M^\top P = -Q, Q = Q^\top > 0$$

Пусть

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & p_0 \\ p_0 & p_2 \end{bmatrix} +$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_0 \\ p_0 & p_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{100}{9} & -\frac{50}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{100}{9} \\ 1 & -\frac{50}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 & p_0 \\ p_0 & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =>$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{100\,p_0}{9} & -\frac{100\,p_2}{9} \\ p_1 - \frac{50\,p_0}{9} & p_0 - \frac{50\,p_2}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{100\,p_2}{9} \\ p_1 & -\frac{50\,p_2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =>$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{200\,p_0}{9} & p_1 - \frac{50\,p_0}{9} - \frac{100\,p_2}{9} \\ p_1 - \frac{50\,p_0}{9} - \frac{100\,p_2}{9} & 2\,p_0 - \frac{100\,p_2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

Отсюда

$$P = \begin{bmatrix} 1.34 & 0.045 \\ 0.045 & 0.0981 \end{bmatrix}$$

Определитель P $= 0.129 > 0$. Закон адаптивного управления:

$$u = K_a x(t) + K_b r(t)$$

$$\dot{K}_a(t) = -\gamma B^\top P e(t) x^\top(t)$$

$$\dot{K}_b(t) = -\gamma B^\top P e(t) r(t)$$

Проведем моделирование в матлаб.

## Моделирование в Simulink

На рисунке 2 представлено сравнение графиков переходных процессов объекта управления (ОУ) и эталонной модели.

На рисунке 3 представлены график переходных процессов системы с параметрической адаптацией при разных значениях

$$\gamma = (1, 10, 100)$$

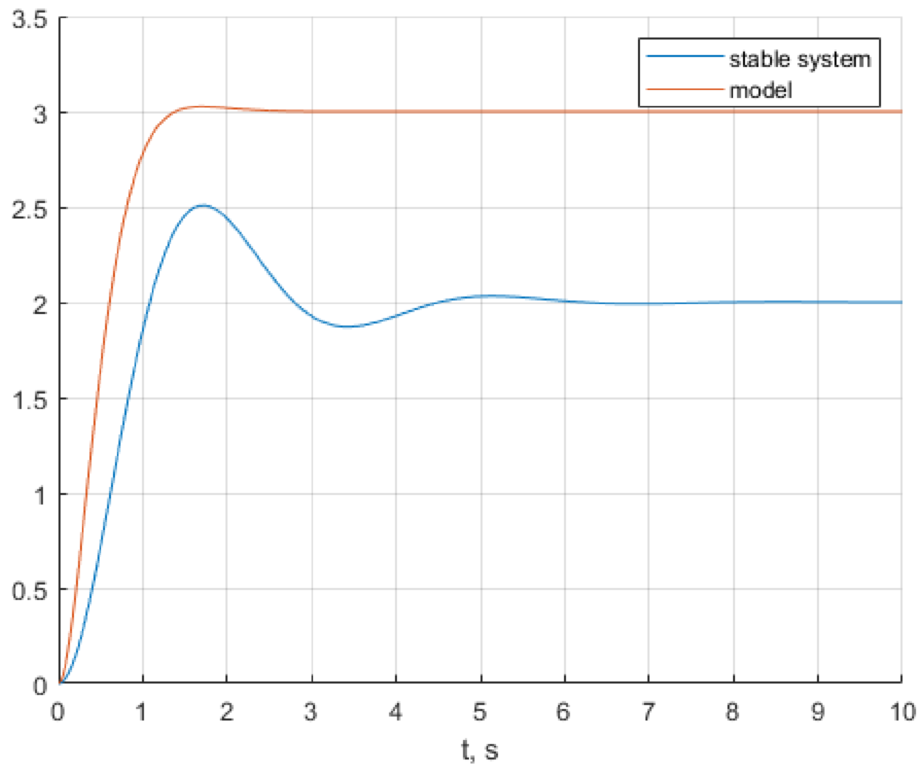


Рис. 2: Графики переходных процессов эталонной модели и ОУ

. Из рисунка 3 Видно, что при значении скорости адаптации 100 график переходного процесса эталонной модели перекрывает график переходного процесса ОУ. Целесообразно будет выбрать это значение в качестве оптимального по скорости адаптации.

На рисунке 4 представлен процесс адаптации на серии меандров. Видно что процесс почти завершается уже ко второму периоду.

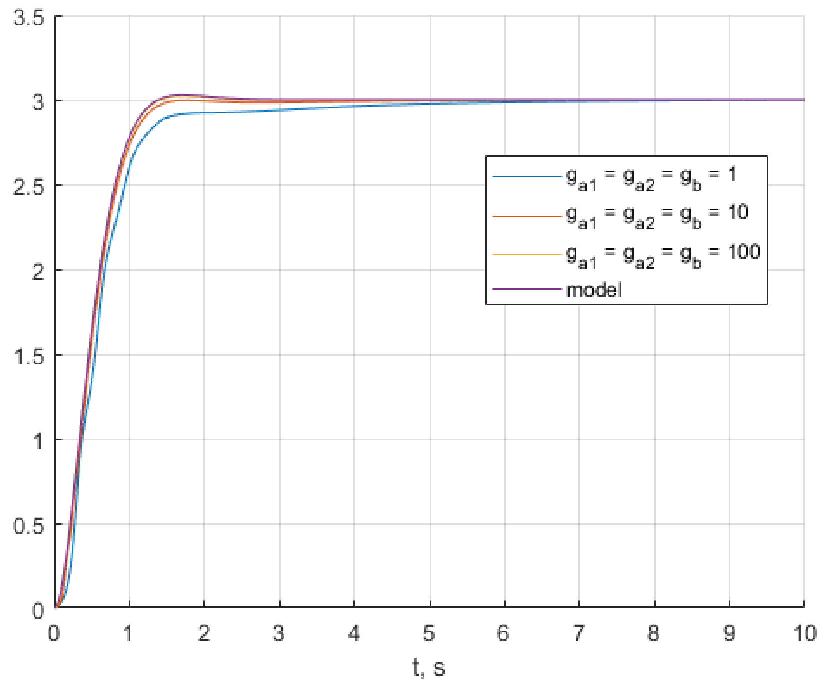


Рис. 3: График переходных процессов системы с параметрической адаптацией

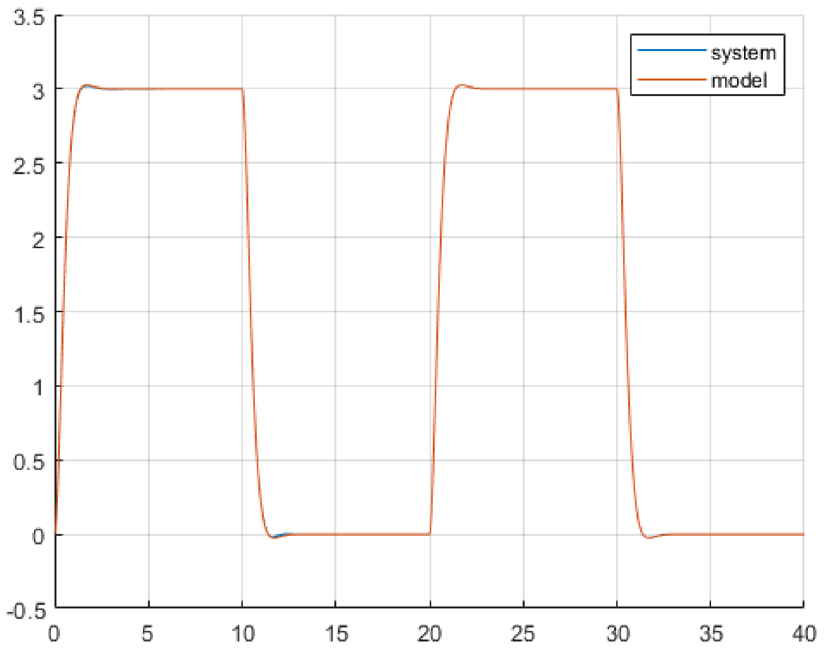


Рис. 4: График процесса адаптации

На рисунке 5 показана структурная схема системы с параметрической адаптацией.

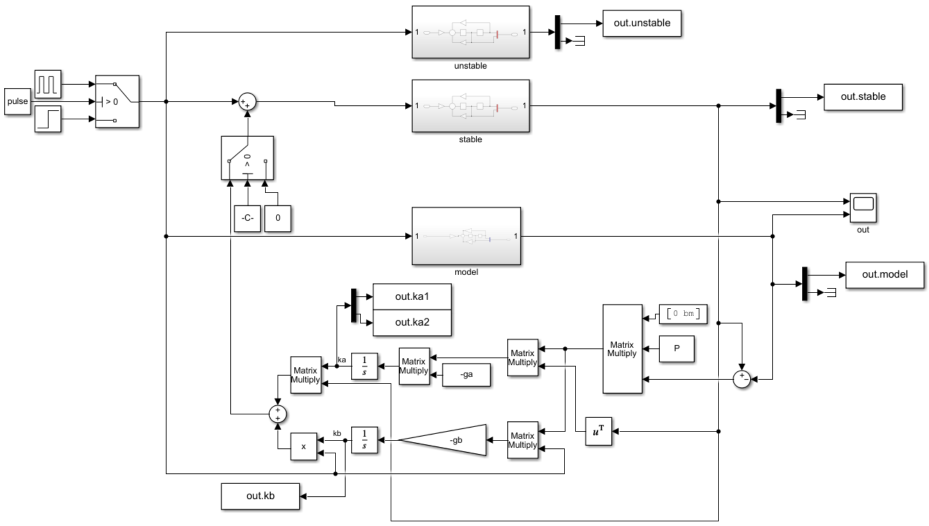


Рис. 5: Структурная схема системы

# 3 Задание 3

$$\begin{cases} \dot{x} = -f_1(x) - f_2(y), \\ \dot{y} = f_3(x) - f_4(y), \end{cases}$$

$$sign f_i(z) = sign(z), i = 1, 2, 3, 4$$

Рассмотрим функцию Ляпунова следующего вида:

$$V(x, y) = \int_0^x f_3(x)\, dx + \int_0^y f_2(y)\, dy.$$

## Проверка положительной определенности

Функция $V(x, y)$ будет положительно определённой, если $f_3(x)$ и $f_2(y)$ имеют те же знаки, что и $x$ и $y$ соответственно. Так как интегралы этих функций увеличиваются с ростом $|x|$ и $|y|$, выполнены следующие условия:

$$V(x, y) > 0 \quad \text{при } (x, y) \neq (0, 0), \quad V(0, 0) = 0.$$

Таким образом, $V(x, y)$ является положительно определённой функцией и подходит в качестве функции Ляпунова.

## Вычисление производной функции Ляпунова

Вычислим производную по времени $V(x, y)$:

$$\dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}.$$

Так как

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f_3(x), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = f_2(y),$$

то

$$\dot{V}(x, y) = f_3(x)\dot{x} + f_2(y)\dot{y}.$$

Подставим выражения для $\dot{x}$ и $\dot{y}$ из системы уравнений:

$$\dot{x} = -f_1(x) - f_2(y), \quad \dot{y} = f_3(x) - f_4(y).$$

Получаем:

$$\dot{V}(x, y) = f_3(x)\big(-f_1(x) - f_2(y)\big) + f_2(y)\big(f_3(x) - f_4(y)\big).$$

Раскроем скобки:

$$\dot{V}(x,y) = -f_3(x)f_1(x) - f_3(x)f_2(y) + f_2(y)f_3(x) - f_2(y)f_4(y).$$

Упростим выражение:

$$\dot{V}(x,y) = -f_3(x)f_1(x) - f_2(y)f_4(y).$$

# Анализ знака производной

$-f_3(x)f_1(x)$ будет неположительным, так как $\operatorname{sign} f_i(x) = \operatorname{sign} x$. Следовательно, $f_3(x)f_1(x) > 0$. Аналогично, $-f_2(y)f_4(y) \leq 0$, так как $f_i(y) = \operatorname{sign} y$.

Таким образом:

$$\dot{V}(x,y) \leq 0,$$

$$\dot{V}(x,y) < 0 \quad \text{при } (x,y) \neq (0,0).$$

Согласно теореме Ляпунова, если: - $V(x,y)$ положительно определена, - $\dot{V}(x,y)$ отрицательно определена,

то нулевое решение системы является асимптотически устойчивым.

$$V(x,y) = \int_0^x f_3(x)\,dx + \int_0^y f_2(y)\,dy$$

показывает, что нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -f_1(x) - f_2(y), \\ \dot{y} = f_3(x) - f_4(y), \end{cases}$$

асимптотически устойчиво.