Лекция 3. Численные методы решения систем линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши для линейной динамической системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x \in R^n, u \in R^l,$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad y \in R^m, x(t_0) = x_0$$

с заданным для каждого момента времени вектором входа $u(t)$. Если найден, то определить выход $y(t)$ по второму уравнению не представляет труда, поэтому ограничимся рассмотрением только уравнения состояния

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0$$

представляющего собой систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

Для построения решения неоднородной системы предварительно изучим свойства решений линейной однородной системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Для этого рассмотрим n-линейно независимых векторов

$$x_0^{(i)} = \begin{pmatrix} x_{10}^{(i)} \\ x_{20}^{(i)} \\ \vdots \\ x_{n0}^{(i)} \end{pmatrix}, i = 1, \ldots, n.$$

которые примем в качестве начальных условий линейной однородной системы

$$x^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}.$$

По этим n начальным условиям получим n решений однородной системы дифференциальных уравнений

$$x^{(i)}(t), \quad t \in [t_0, T], i = 1, \ldots n,$$

каждое из которых удовлетворяет соотношению

$$\dot{x}^{(i)}(t) = Ax^{(i)}(t), \quad x^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}.$$

Матрица $X(t)$, составленная из этих решений как из столбцов, называется фундаментальной матрицей линейной системы:

$$X(t)=\left(x^{(1)}(t)\,|\,x^{(2)}(t)\,|\ldots|\,x^{(n)}(t)\right).$$

Любой столбец фундаментальной матрицы удовлетворяет линейной системе, поэтому

$$\left(\dot{x}^{(1)}(t)\,|\,\dot{x}^{(2)}(t)\,|\ldots|\,\dot{x}^{(n)}(t)\right)=A\left(x^{(1)}(t)\,|\,x^{(2)}(t)\,|\ldots|\,x^{(n)}(t)\right),$$

то есть фундаментальная матрица удовлетворяет матричному линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{X}(t)=AX(t),\quad X(t_0)=\left(x_0^{(1)}\,|\,x_0^{(2)}\,|\ldots|\,x_0^{(n)}\right).$$

Основное свойство фундаментальной матрицы дает следующая теорема.

Теорема: если существует $t_*\in[t_0,T]$ такая, что $\det(X(t_*))\neq 0$ то для любой $t\in[t_0,T]$ $\det(X(t))\neq 0$.

В связи с тем, что векторы начальных условий линейно независимы, то $X(t_0)$ состоит из линейно-независимых столбцов, а следовательно, $\det(X(t_0))\neq 0$. По теореме следует, что для всех $t\in[t_0,T]$ $X(t)$ – невырожденная матрица.

Система линейных дифференциальных уравнений имеет бесконечное число фундаментальных матриц в зависимости от принятого набора линейно независимых векторов начальных условий. Так как $X(t_0)$ – невырожденная матрица, то можно определить матрицу

$$\Phi(t,t_0)=X(t)X^{-1}(t_0),\quad t\in[t_0,T],$$

называемую переходной матрицей. Переходная матрица обладает следующими свойствами:

1. $\Phi(t_0,t_0)=X(t_0)X^{-1}(t_0)=I.$

2. Переходная матрица невырожденная для любых t_0,t, т.е.

$$\det(\Phi(t,t_0))=\det\left(X(t)X^{-1}(t_0)\right)=\det(X(t))\det\left(X^{-1}(t_0)\right)\neq 0.$$

3. Переходная матрица удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt}=A\Phi(t,t_0).$$

Действительно:

$$\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(X(t)X^{-1}(t_0)\right)=\frac{dX(t)}{dt}X^{-1}(t_0)=AX(t)X^{-1}(t_0)=A\Phi(t,t_0).$$

Из свойств 3 и 1 следует, что $\Phi(t,t_0)$ – фундаментальная матрица, для которой $X(t_0)=I$.

4. $\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t)$.

Действительно

$$\Phi^{-1}(t,t_0)=\left(X(t)X^{-1}(t_0)\right)^{-1}=X(t_0)X^{-1}(t)=\Phi(t_0,t).$$

Переходную матрицу используют для построения решения систем линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений.

Решение задачи Коши систем линейных однородных дифференциальных уравнений через фундаментальную матрицу

Рассмотрим следующую задачу Коцш:

$$\dot{x}(t)=Ax(t),$$

$$x(t_0)=x_0, \quad x\in R^n,\ t\in[t_0,T]$$

Докажем, что решение этой задачи имеет вид

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x_0,.$$

Доказательство. Продифференцируем по t левую и правую часть решения:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)x_0=A\Phi(t,t_0)x_0=Ax(t).$$

Второе равенство следует из свойства 3 переходной матрицы, третье равенство – из определения решения через переходную матрицу. Таким образом, предложенное решение удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений. Осталось показать, что предложенное решение удовлетворяет начальному условию, для чего вычислим

$$x(t_0)=\Phi(t_0,t_0)x_0=Ix_0=x_0$$