

т.е. включалась в математическую модель системы. Таким образом, мы приходим к понятиям переменные состояния и моделей состояния, играющих важную роль в естествознании и технике.

Системы, допускающие описание в пространстве состояний, называются системами с памятью, или динамическими системами.

В заключение параграфа, отметим, что иногда при исследовании системы, не удастся однозначно определить, какие из переменных, связывающих систему с внешним миром, являются входными: а какие – выходными. Например, если участок цепи рассматривается как часть сложной электрической или электронной схемы, то исследователь не может произвольно, по своему усмотрению, менять напряжение на участке. Эксперимент со схемой может состоять лишь в подаче и измерении сигналов на некоторых узлах схемы (так называемые «порты» или «терминалы»), причем входные и выходные порты могут меняться от эксперимента к эксперименту. Эти и другие соображения мотивировали появление более общего, так называемого бихевиористского подхода в теории систем, особенно удобного для изучения взаимосвязанных систем. Бихевиористская модель системы имеет вид  $m$ -арного отношения

$$S \subset W_1 \times W_2 \times \dots \times W_m, \quad (1.3)$$

между явными (внешними) переменными сигналами  $w_1, w_2, \dots, w_m$ , среди которых могут быть как входные, так и выходные сигналы. Разумеется, в системе могут быть и патентные (скрытые) переменные.

Бихевиористские модели являются более общими, чем модели состояния.

### 1.3. Математическое моделирование и системный анализ

Системный анализ в широком смысле - это методология (совокупность методических приемов) постановки и решения задач построения и исследования систем, тесно связанная с математическим моделированием. В более узком смысле системный анализ – методология формализации сложных (трудно формализуемых, плохо структурированных) задач.

Системный анализ возник как обобщение приемов, накопленных в задачах исследования операций и управления в технике, экономике, в военном деле. Соответствующие модели и методы заимствовались из математической статистики, математического программирования, теории игр: теории массового обслуживания, теории автоматического управления. Фундаментом перечисленных дисциплин является теория систем.

Остановимся на различии в употреблении терминов «системный анализ» и «системный подход». Системный анализ – это целенаправленная творческая деятельность человека, на основе которой составляется представление исследуемого объекта в виде системы. Системный анализ характеризуется упорядоченным составом методических приемов исследования. Что касается термина «системный подход», то традиция его применения связана с исследованиями, проводимыми многоаспектно, комплексно, при изучении с разных сторон предмета или явления. Этот подход предполагает, что все частные задачи, решаемые на уровне подсистем, должны быть увязаны между собой и решаться с позиции целого (принцип системности). Системный анализ – более конструктивное направление, содержащее методику разделения процессов на этапы и подэтапы, систем на подсистемы, целей на подцели и т.д.

В обширной литературе по системному анализу содержится большое число рекомендаций и методических приемов построения математических моделей и принятия решений на их основе. Выделяя общие части различных приемов и рассматривая их во взаимодействии, можно сформулировать последовательность действий (этапов) при постановке и решении задач, которую будем называть методикой математического моделирования. В упрощенном виде один из возможных вариантов такой методики представлен на схеме рис. 1.2. Эта методика помогает более осмысленно и грамотно ставить и решать прикладные задачи. Опыт показал, что она полезна и в преподавании предмета, легко воспринимается обучающимися с различной степенью подготовки. Если на каком-то этапе возникают затруднения, то

нужно вернуться на один из предыдущих этапов и изменить (модифицировать) его. Если и это не помогает, то, значит, задача оказалась слишком сложной и ее нужно разбить на несколько более простых подзадач, т.е. провести декомпозицию (см. п. 1.4}. Каждую из полученных подзадач решают по той же методике. Для иллюстрации применения методики ,математического моделирования приведем пример.

Пример 1.3.1. Рассмотрим автомобиль, находящийся перед гаражом на некотором расстоянии от него (рис. 1.3, а). Требуется поставить автомобиль в гараж и сделать это по возможности наилучшим образом. При решении попытаемся руководствоваться алгоритмом системного анализа (см. рис 1.2).

Этап 1. Система – автомобиль и гараж (автомобиль, приближающийся к гаражу).

Этап 2. Вход – сила тяги двигателя. Выход – пройденный путь.

Этап 3. Цель – автомобиль должен проехать заданный путь и затормозить.

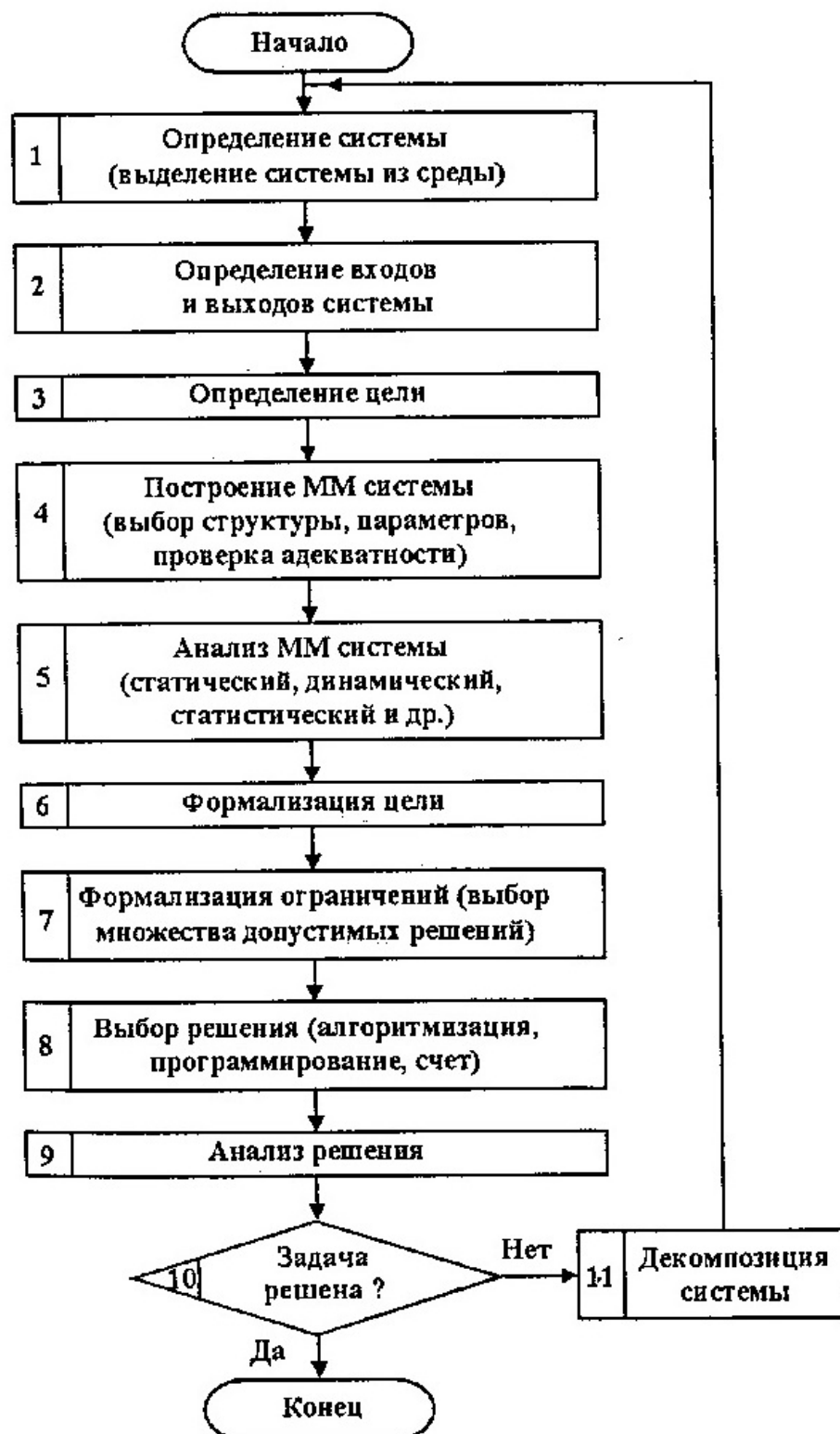


Рисунок 1.2 – Алгоритм математического моделирования

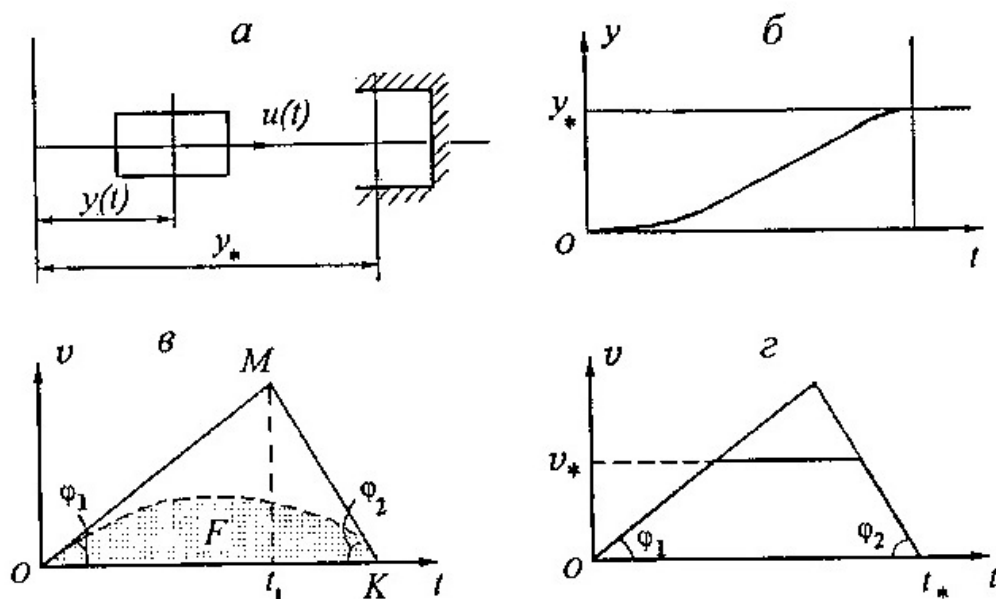


Рисунок 1.3 – Графическое решение задачи торможения автомобиля

Этап 4. Построение ММ начинается с обозначения всех величин (переменных и постоянных), существенных для задачи. Введем следующие обозначения:

- $u(t)$  – сила тяги в момент времени  $t$  (входная переменная);
- $y(t)$  – путь, пройденный к моменту  $t$  (выходная переменная);
- $y_*$  – расстояние от автомобиля до гаража (параметр).

Затем выписываются все уравнения и соотношения, существующие между введенными величинами, как в школьных задачках на составление уравнений. Если возможных уравнений несколько, выбирают простейшее. В нашей задаче - это уравнение динамики (второй закон Ньютона)

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = u(t), \quad (1.4)$$

где  $m$  – масса автомобиля, а также начальные условия

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0. \quad (1.5)$$

Здесь и далее через  $\dot{y}(t)$  будем обозначать производную по времени от функции  $y(t)$ . Будем также использовать обозначение  $\dot{y}(t) = v(t)$ .

Этап 5. Модель (1.4), (1.5) достаточно хорошо изучена и в детальном анализе не нуждаются. Укажем лишь, что она адекватна, если можно

пренебречь размерами автомобиля, ограничением на его мощность, силами трения и сопротивления и другими более второстепенными факторами.

Этап б. Простейший вариант формализации цели

$$y(t_*) = y_*, \quad (1.6)$$

где  $t_*$  – момент остановки, который оказывается неудовлетворительным, поскольку в (1.6) не формализовано само требование остановки  $\dot{y}(t_*) = 0$ , и, значит, не ясно, как система будет вести себя при  $t \geq t_*$ . Правильнее задать цель соотношением

$$y(t_*) = y_*, \text{ при } t \geq t_*, \quad (1.7)$$

из которого следует, в частности, что  $\dot{y}(t) = 0$  при  $t > t_*$ . На первый взгляд, задача поставлена и можно, пропуская этап 7 (см. рис. 1.2), переходить к ее решению, т.е. к этапу 8. Но, оказывается, однозначного решения так поставленная задача не имеет: здравый смысл подсказывает, что существует бесконечно много способов достичь цели (1.7). Значит, нужно дополнить цель правилом отбора способов, позволяющим ответить на вопрос, какой способ лучше. Зададимся следующим разумным правилом: тот способ считается лучшим, который позволяет быстрее достичь цели. Формально новую цель можно записать так:

$$\min \{t_* : y(t) = y_*, t \geq t_*\} \quad (1.8)$$

Но теперь физические соображения показывают, что решение поставленной задачи тривиально: искомый минимум в (1.3) равен нулю! Действительно, выбрав достаточно большую силу тяги, можно придать автомобилю как математическому объекту, описываемому ММ (1.4), (1.5), сколь угодно большое ускорение и сколь угодно быстро переместить его на любое заданное расстояние. Видимо, требуется ввести какие-то ограничения, исключающие бессмысленные решения. Можно было бы усложнить ММ системы: учесть ограниченную мощность двигателя, его инерционность, силы трения и т.д. Однако разумнее попытаться остаться в рамках ММ (1.4), (1.5), (1.8), введя дополнительно лишь ограничения на силу тяги:

$$-a \leq u(t) \leq b. \quad (1.9)$$

Таким образом, чтобы придать задаче смысл, нам пришлось возвратиться на этап 7.

Этап 8. Для решения задачи можно было бы применить мощный и хорошо разработанный аппарат теории оптимального управления (вариационное исчисление, принцип максимума Понтрягина и др. Однако сначала надо попытаться решить задачу элементарными средствами. Для этого часто бывает полезно перейти к геометрической интерпретации задачи, чтобы привлечь нашу геометрическую интуицию. Естественная интерпретация, в координатах «время — пройденный путь» (рис. 1.3, б), не дает ключа к решению, так как не позволяет в удобной форме представить ограничения на допустимые траектории движения автомобиля. Дело меняется коренным образом, если перейти к другой ММ. Введем новую переменную  $v(t) = \dot{y}(t)$  (скорость). Тогда вместо (1.4),(1.5) возникает уравнение

$$m\dot{v} = u, \quad v(0) = 0, \quad (1.10)$$

цель (1.8) запишется в виде

$$\min \left\{ t_* : \int_0^t v(s) ds = y_*, t \geq t_* \right\} \quad (1.11)$$

а ограничения (1.9) превратятся в ограничения на скорость изменения новой переменной:

$$-a/m \leq \dot{v}(t) \leq b/m. \quad (1.12)$$

Итак, мы изменили выход системы, из-за чего пришлось заново пройти этапы 2 – 6.

Геометрическая интерпретация движения системы (1.10) – (1.12) в плоскости  $\{v, t\}$  изображена на рис. 1.3, в. Из него видно, что для решения задачи нужно найти кривую  $v(t)$  ( $t \geq 0$ ) с заданной площадью фигуры  $F$  под ней и наименьшей возможной координатой правого конца  $t_*$ , лежащую в треугольнике ОМК с заданными углами наклона  $\varphi_1, \varphi_2$  боковых сторон (в соответствии с (1.12)  $\operatorname{tg} \varphi_1 = b/m$  при  $\operatorname{tg} \varphi_2 = a/m$ ).

Геометрическое решение очевидно: фигура  $F$  должна заполнять весь треугольник ОМК. Это значит, что автомобиль должен двигаться с максимальным ускорением до некоторого момента  $t_1$ , затем включить максимальное торможение и в момент  $t_*$  выключить двигатель. Формулы для определения момента переключения  $t_1$  выводятся из элементарного расчета треугольника ОМК по заданной площади и углам. Они имеют вид

$$t_1 = \sqrt{\frac{2may_*}{b(a+b)}}, \quad t_* = \sqrt{\frac{2m(a+b)y_*}{ab}} \quad (1.13)$$

Рассмотренная геометрическая модель позволяет решать и более сложные задачи. Например, если по соображениям безопасности нужно учесть ограничение на максимальную скорость:  $|\dot{y}(t)| \leq v^*$ , то легко усмотреть решение из рис. 1.3: график оптимальной траектории представляет собой трапецию.

Еще более сложные задачи (например, при введении ограничений на расход топлива в виде  $\int_0^\infty |u(t)| dt \leq A$ ) не имеют простого аналитического решения, подобного (1.13), и практически решаются лишь численно, с привлечением математического аппарата приближенной минимизации функционалов. Однако и для них решение упрощенной задачи не теряет важности, поскольку оно позволяет получить начальное приближение к решению сложной задачи, установить качественные свойства решения сложной задачи, выявить факторы, наиболее сильно влияющие на решение сложной задачи, и, главное, соотнести результаты математического исследования со здравым смыслом.

Резюмируя сказанное, можно дать совет изучающему математическое моделирование: «Не решай сложную задачу, не решив сначала, более простую».

#### 1.4. Сложные системы и декомпозиция

Известно, что системный анализ родился как метод исследования и проектирования сложных систем. Что же такое «сложная» система? Понятие



это неформальное, и обычно, говоря о сложных системах, перечисляют их основные особенности:

- наличие большого числа разнородных элементов (подсистем);
- сложный характер, неоднородность связей между подсистемами;
- сложность функций, выполняемых системой;
- наличие неопределенности в описании системы;
- сложность определения (организации) требуемого управляющего воздействия на систему и т.д.

Однако понятно, что каждая из этих особенностей может оказаться существенной или несущественной: все зависит от конкретной ситуации и целей исследования. Поэтому более универсальный способ выделения класса сложных систем связан со сложностью самого процесса исследования системы. Если методика математического моделирования (см. рис. 1.2) приводит к успеху сразу же, «за один проход», то нет оснований называть систему «сложной». Введение этого термина оправдано, если решить задачу в исходном виде не удастся. В этом случае она разбивается на несколько вспомогательных подзадач, решаемых по отдельности. Такой прием называется декомпозицией и является основным методом исследования сложных систем.

При декомпозиции исходная система делится на подсистемы, а цель – на подцели. Далее для решения каждой подзадачи пользуются той же методикой, что и для всей системы. Если в ходе решения (а возможно, и до того) какие-то из подзадач окажутся слишком сложными, то снова проводится декомпозиция: возникают подзадачи следующего уровня и т.д. Результатом этого процесса является структуризация. Исходная система приобретает иерархическую (многоуровневую) структуру. Соответствующая структура возникает и в множестве подцелей; она называется деревом целей (рис.1.4), поскольку представляет собой граф типа, дерева (без циклов).

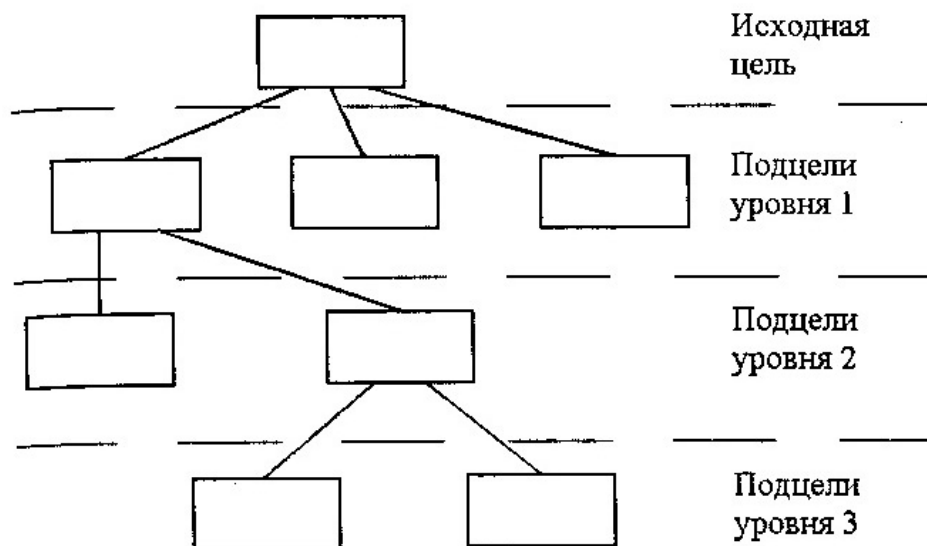


Рисунок 1.4 – Декомпозиция сложных систем

Приведенное понятие декомпозиции вполне соответствует идее структурного программирования. Создание сложных программных систем - одна из важнейших областей применения системного анализа. Отметим лишь, что раздробление системы на подсистемы обычно проводится по принципу «слабых» связей, т.е. так, чтобы связи между подсистемами были слабее, чем связи между элементами каждой подсистемы.

В сложных системах часто приходится проводить несколько вариантов декомпозиции и соответственно строить несколько деревьев целей. Это обычно связано с наличием нескольких критериев функционирования системы. Возникающие при этом задачи многокритериального выбора изучаются в теории принятия решений. Успех декомпозиции часто определяется интуицией и опытом исследователя. Человек, по данным психологов, может мысленным взором охватить структуру декомпозированной системы, если на каждом уровне возникает не более чем  $5 \pm 2$  подзадач.