Лекция 2. Системы линейных алгебраических уравнений

2.1 Решение систем линейных алгебраических уравнений

2.1.1 Определения и основные свойства матриц

Для начала напомним некоторые сведения из линейной алгебры.

Рассмотрим систему из *n* линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с *n* неизвестными $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Запишем СЛАУ в матричной форме, для этого введем векторы

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ и матрицу } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда СЛАУ примет вид

$$Ax = b.$$

Определение: A^{-1} – обратная матрица для квадратной матрицы *A*, если $AA^{-1} = I$, где I – единичная матрица.

Определение: *A* — невырожденная, если для *A* существует A^{-1}.

Теорема: следующие утверждения эквивалентны:

1. *A* — невырождена;

2. $\det(A) \neq 0$;

3. линейная однородная система $Ax = 0$ имеет единственное решение $x = 0$;

4. для любого *b* система $Ax = b$ имеет единственное решение;

5. столбцы (строки) матрицы *A* линейно независимы, то есть для любой комбинации чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, не все из которых равны нулю, линейная комбинация

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Определение: ранг матрицы – $\mathrm{rank}(A)$ – число линейно независимых столбцов (строк).

Следствие: A — невырожденная, если и только если A — полного ранга ($\mathrm{rank}(A)=n$).

Определение: комплексное или вещественное число λ и вектор $x \neq 0$, $x \in R^n$ называются собственным значением и собственным вектором матрицы A, если они удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$Ax = \lambda x$$

Собственный вектор — это такой вектор, который, будучи умножен на матрицу A, изменяет лишь свою длину.

Из определения собственного значения следует:

$$Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow (A - I\lambda)x = 0 .$$

Так как x — собственный вектор и по определению $x \neq 0$, то в соответствии с теоремой $A - I\lambda$ — вырожденная матрица, а $\det(A - I\lambda) = 0$. Левая часть последнего выражения — полином степени n относительно комплексной переменной λ, называемый характеристическим полиномом матрицы, следовательно собственные значения матрицы есть корни характеристического полинома матрицы A, их ровно n с учетом кратности.

Определение: совокупность всех собственных значений $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ матрицы A называется спектром матрицы A, а величина

$$\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$$

называется спектральным радиусом.

Определение: нормой матрицы A называется

$$\|A\| = \sup_{x \in R^n} \frac{|Ax|}{|x|} = \rho\left(A^T A\right)^{1/2}.$$

Решение СЛАУ методом исключения

Одной из наиболее распространенных задач является задача решения СЛАУ

$$Ax = b,$$

для заданных квадратной матрицы A и вектора b.

Если A — невырожденная матрица, то для нее существует обратная A^{-1}. Умножая СЛАУ на A^{-1} слева, получим решение:

$$x = A^{-1}b.$$

Полученный метод решения СЛАУ неэффективен в силу большого времени вычислений.

Рассмотрим более эффективный алгоритм решения СЛАУ – метод исключения Гаусса. Этот алгоритм с некоторыми модификациями используют для решения СЛАУ до двухсотого порядка.

Вначале продемонстрируем работу алгоритма на примере следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \end{cases}$$

которую запишем в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Введем расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

На первом шаге алгоритма исключим x_1 из второго и третьего уравнений системы. Для исключения x_1 во втором уравнении, из второго