Лабораторная работа 3.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СРЕДСТВАМИ MATLAB

Цель работы: изучить методы оценки устойчивости линейных динамических систем, освоить машинные средства оценки устойчивости, провести исследование динамических объектов на устойчивость.

Общие положения

Рассмотрим линейную стационарную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in R^n,$$

где A – матрица размером $n \times n$ с постоянными коэффициентами.

Известно, что необходимым и достаточным условием устойчивости нулевого положения равновесия такой системы (или, что то же самое, всей системы в целом) является нахождение всех собственных чисел матрицы A в открытой левой полуплоскости (ЛПП).

Для того, чтобы проверить, находятся ли все собственные значений матрицы A в ЛПП, используют два глобальных пути:

1) прямой поиск собственных значений матрицы.

2) косвенные признаки (критерии).

Первый путь в пакете MATLAB реализуется с использованием функции **eig(A)**, аргументом которой служит квадратная матрица или LTI-объект.

Второй путь непосредственно реализуется в пакете MATLAB только на базе частотных методов в варианте критерия Найквиста.

Существует ряд современных косвенных признаков расположения собственных значений матриц в ЛПП, которые удобно реализовывать на базе стандартных средств пакета MATLAB. Далее приводятся алгоритмы анализа устойчивости линейных систем на базе этих признаков.

I. Алгоритм проверки устойчивости на базе второго метода Ляпунова.

1. Решить уравнение Ляпунова $A^{\mathrm{T}}P + PA = -E$ относительно неизвестной матрицы P. Здесь E – единичная матрица размером $n \times n$.

2. Вычислить ведущие миноры найденной матрицы P $D_k = \det\{p_{ij}\}$, $i, j = \overline{1,k}$. Если $D_k > 0$, $k = 1, 2, ..., n$, то система является асимптотически устойчивой. В противном случае хотя бы одно собственное значение матрицы A находится в замкнутой правой полуплоскости.

Для решения уравнения Ляпунова можно воспользоваться функцией **lyap**, входящей в состав пакета MATLAB. Вызов функции для решения уравнения Ляпунова осуществляется следующим образом: **P=lyap(A,E)**.

II. Алгоритм проверки устойчивости на базе метода В. И. Зубова.

1. Построить вспомогательную матрицу B по формуле:

$$B = E + 2(A - E)^{-1},$$

где E – единичная матрица размера $n \times n$.

2. Построить конечную последовательность матриц:

$$B, B^2, ..., B^K,$$

где K – достаточно большое число.

3. Построить числовую последовательность $\{\mu_j\}$ ($j = \overline{1, K}$), где $\mu_j = \|B_j\| = Trace(B_j)$. Если очевидно равенство $\lim\limits_{j \to \infty} \{\mu_j\} = 0$, то сделать вывод об устойчивости системы.

Основной задачей регулирования собственно неустойчивых объектов управления является как раз обеспечение устойчивости. В том случае, когда известен вид регулятора (регулятор состояния, передаточная функция известной структуры), устойчивость будет зависеть от некоторых коэффициентов обратной связи, характеризующих регулятор. Тогда возникает задача определения множества тех значений коэффициентов, при которых система будет устойчива. Эту область значений можно представить в виде графика, который показывает, как от коэффициентов будут зависеть собственные частоты замкнутой системы либо косвенные показатели устойчивости – ведущие миноры матрицы Ляпунова или следы матрицы Зубова.

Библиотека Control System Toolbox включает ряд функций для анализа устойчивости (см. подраздел Linear Analysis -> Stability Analysis).

Задания на лабораторную работу

Вариант 1. Исходная математическая модель – см. лаб. раб. 2, вариант 1.

Содержание работы:

1. Сформировать ss-объект, соответствующий LTI-модели самолета со входом $\mathbf{u} = (\delta_e \quad \delta_n \quad F)^{\mathrm{T}}$ и выходом, равным вектору состояния.

2. Замкнуть этот объект регулятором

$$\begin{pmatrix} \delta_e \\ \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.947 & -3.59 & -1.421 & -1.672 & -7.29 & -0.859 \\ 1.263 & 6.42 & k_3 & 1.424 & 6.08 & 0.487 \end{pmatrix} y .$$

3. При значении $k_3 = 0.799$ проверить устойчивость с использованием второго метода Ляпунова. Построить диаграмму расположения полюсов на комплексной плоскости.

4. Найти область устойчивости по параметру k_3.

Вариант 2. Исходная математическая модель – см. лаб. раб. 2, вариант 2.

Содержание работы:

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели.

2. Замкнуть автоматом стабилизации с передаточной функцией

$$F_a(s) = \frac{k}{s+10} .$$

3. Построить LTI-объект, соответствующий замкнутой системе. Преобразовать его к ss-форме.

4. При значении параметра $k = 5$ проанализировать устойчивость замкнутой системы прямым поиском собственных значений. Построить диаграмму расположения нулей и полюсов на комплексной плоскости.

5. Построить область устойчивости по параметру k с помощью функции rlocus.

Вариант 3. Исходная математическая модель – см. лаб. раб. 2, вариант 3.

Содержание работы:

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели.

2. Замкнуть автоматом стабилизации с передаточной функцией

$$F_a(s) = \frac{k}{s+1} .$$

3. Построить LTI-объект, соответствующий замкнутой системе. Преобразовать его к ss-форме.

4. При $k = 10$ проанализировать устойчивость методом В. И. Зубова.

5. Найти область устойчивости по параметру k.

Вариант 4. Исходная математическая модель – см. лаб. раб. 2, вариант 4.

Содержание работы:

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели. Входом считать отклонение рулей направления δ_v, выходом – вектор $\mathbf{y} = \mathbf{x}$.

2. С помощью критерия Найквиста проверить устойчивость данного объекта, замкнутого регулятором:

$$\delta_v = 0.5963\beta + 2.5863\omega_y - 0.0187\varphi + 1.3617\omega_x - 0.94040\theta.$$

3. Годограф Найквиста строить в диапазоне частот $\omega \in [0.1, 1000]$.

4. Построить область устойчивости по коэффициенту при φ в законе управления.

Вариант 5. Исходная математическая модель – см. лаб. раб. 2, вариант 5.

Содержание работы:

1. Сформировать LTI-объект управления.

2. Сформировать регулятор в виде $u = k_1\beta + k_2\omega + k_3\varphi + k_4\delta$,

где $k_1 = 10$, $k_2 = 20$, $k_3 = 5$, $k_4 = -1$.

3. Провести анализ зависимости степени устойчивости замкнутой системы от величины коэффициента k_2. Сделать то же самое для запаса устойчивости по амплитуде и по фазе.

Вариант 6. Исходная математическая модель – см. лаб. раб. 2, вариант 6.

Содержание работы:

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели. Входом считать переменную δ, а выходом – вектор y с компонентами θ и x.

2. Замкнуть систему регулятором $\delta = k_1\dot{\theta} + k_2\theta + k_3 x$.

3. С помощью любого метода анализа устойчивости подобрать коэффициенты k_1, k_2, k_3 так, чтобы замкнутая система была устойчивой. Привести диграмму расположения полюсов замкнутой системы.

Вариант 7. Исходная математическая модель – см. лаб. раб. 2, вариант 7.

Содержание работы:

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели.

2. Замкнуть объект последовательным корректирующим устройством с передаточной функцией вида

$$F_a(s)=\frac{k_1}{s+k_2} \text{ или } F_a(s)=\frac{s+k_1}{s^2+k_2 s+k_3}$$

на выбор студента.

3. С помощью любого метода анализа устойчивости подобрать коэффициенты последовательного корректирующего устройства таким образом, чтобы система оказалась устойчивой. Построить результаты моделирования собственного движения замкнутой системы при произвольно выбранных начальных условиях.

4. При необходимости – выбрать другой вид передаточной функции последовательного корректирующего устройства.

Вариант 8. Исходная математическая модель – см. лаб. раб. 2, вариант 8.

Содержание работы:

1. Сформировать LTI-объект, соответствующий данной модели, считая выходом объекта вектор состояния.

2. Произвести замыкание объект регулятором вида:

$$\delta_{dir}=0.0929 Z_f+5.8727\beta+k_3\,\omega_x+1.8203\,\omega_y+0.0482\,\gamma;$$

$$\delta_{el}=0.037 Z_f+1.6773\beta+0.0859\,\omega_x+0.2407\,\omega_y+0.1017\,\gamma$$

3. При значении $k_{13}=0.1157$ проверить устойчивость с использованием метода Зубова. Построить диаграмму расположения полюсов на комплексной плоскости.

4. Найти область устойчивости по параметру k_{13}.

Содержание отчета

1. Исходные данные и постановка задачи.
2. Тексты скриптов на языке MATLAB.
3. Полученные LTI-модели объектов управления и замкнутой системы.
4. Результаты анализа устойчивости, графики.
5. Выводы.