Практика 11 – Пространства и нормы

1. Основные понятия

Любое пространство представляет собой непустое множество, над элементами которого определены операции, такие, что результат их, выполнения является элементом того же множества:

$\mathbb{R}$ – множество всех действительных (вещественных) чисел с двумя возможными операциями над ними (сложением и умножением);

$\mathbb{C}$ – множество всех комплексных чисел;

$\mathbb{R}$(s) – множество всех дробно-рациональных функций комплексного аргумента s.

Пространство с операцией перевода элементов из одного множества в другое называется нормированным, а результат такого перевода – нормой.

2. Пространство Лебега и норма

Пространство Лебега L – класс комплекснозначных функций $f(t)$ вещественного аргумента t. Значения функций $f(t)$ принадлежат пространству непрерывных функций C^1 с p-интегрируемыми функциями. Различают пространства Лебега L:

- Векторные функции $L^p_{m(-\infty,\infty)}$
- Матричные функции $L^p_{m\times k(-\infty,\infty)}$

В данном случае норма порождается скалярным произведением. Таким образом, вместе с понятием «длины» здесь имеет смысл и понятие «угла», а следовательно, и смежные понятия, такие как ортогональность, проекция.

Скалярное произведение на пространстве L^2 вводится следующим образом:

$$\langle f, g\rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}\mu(dx)$$

в случае, если рассматриваемые функции комплекснозначные, или:

$$\langle f, g\rangle = \int_X f(x)g(x)\mu(dx)$$

если они вещественные. Тогда, очевидно:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

то есть норма порождается скалярным произведением. В виду полноты любого L^p следует, что L^2 - гильбертово.

Пространство Лебега **L** – класс комплекснозначных функций $F(s)$ комплекснозначного аргумента s с p-интегрируемым модулем. Различают пространства Лебега **L**:

- Векторные функции $\mathrm{L}^{p}_{m(-\infty,\infty)}$
- Матричные функции $\mathrm{L}^{p}_{m\times k(-\infty,\infty)}$

Задача 1. Найти норму $\|f\|_{L^{\infty}_{m\times k}}$ для матричной функции комплексного аргумента вида:

$$f=\begin{bmatrix} a & jb \\ b & c \end{bmatrix}$$

Для определения нормы необходимо найти:

$$\|f\|_{L^{\infty}_{m\times k}}=\sup\sqrt{\lambda_{\max}\left[\overline{f}(t)f(t)\right]}=\sup\sqrt{\lambda_{\max}\left[\overline{f}f\right]}$$

1. Определим $\overline{f}f$. Эрмитово сопряжение заданной матрицы f:

$$\overline{f}=\begin{bmatrix} a & b \\ -jb & c \end{bmatrix}$$

Тогда:

$$\overline{f}f=\begin{bmatrix} a & b \\ -jb & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & jb \\ b & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+b^2 & jab+bc \\ -jab+bc & b^2+c^2 \end{bmatrix}=f^{\bullet}$$

2. Найдем матрицу $L=\lambda I-f^{\bullet}$:

$$L=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a^2+b^2 & jab+bc \\ -jab+bc & b^2+c^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda-a^2-b^2 & -jab-bc \\ jab-bc & \lambda-b^2-c^2 \end{bmatrix}$$

и определитель матрицы L:

$$\det\begin{bmatrix} \lambda-a^2-b^2 & -jab-bc \\ jab-bc & \lambda-b^2-c^2 \end{bmatrix}=\left(\lambda-a^2-b^2\right)\left(\lambda-b^2-c^2\right)-\left(-jab-bc\right)\left(jab-bc\right)=$$

$$=\lambda^2-\left(a^2+2b^2+c^2\right)\lambda+a^2c^2+b^4=\delta(\lambda)$$

3. Найдем $\lambda_{\max}$ из решения уравнения $\delta(\lambda)=0$:

$$\lambda^2-\left(a^2+2b^2+c^2\right)\lambda+a^2c^2+b^4=0$$

$$\lambda_{1/2}=\frac{a^2+2b^2+c^2\pm\sqrt{\left(a^2+2b^2+c^2\right)^2-4\left(a^2c^2+b^4\right)}}{2}$$

Пусть:

$$\alpha=a^2+2b^2+c^2$$
$$\beta=2ac$$
$$\gamma=2b^2$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\lambda_{1/2} &= \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}}{2} \\ \lambda_{\max} &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}}{2}\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \|f\|_{L^{\infty}_{m\times k}} = \sup\sqrt{\lambda_{\max}\left[\bar{f} f\right]} = \sqrt{\lambda_{\max}} = \sqrt{\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}}{2}}$$

4. Пространство Харди

Элементами нормированных пространств могут быть не только числа: в частности, в H∞ -теории широко используются пространства Харди H.

Пространство Харди ***H*** - особый вид функциональных пространств в комплексном анализе, аналог L^p-пространства из функционального анализа. Пространство Харди ***H*** – класс аналитических комплекснозначных функций $F(s)$ в открытой плоскости C (за исключением мнимой оси) с p-интегрируемыми функциями. $F(s)$ – аналитическая функция, которая сходится к точке s_0 в некоторой окрестности по всем направлениям.

1) ℝH∞ –пространство строго правильных дробно-рациональных функций F(s)∈ℝ(s), не содержащих особенностей в правой полуплоскости и на мнимой оси;

2) ℝH∞ – пространство правильных дробно-рациональных функций F(s)∈ℝ(s), не содержащих особенностей в правой полуплоскости и на мнимой оси.

Таким образом, получаем, что ℝH∞ есть подпространство пространства ℝH∞ :

$$\mathbb{R}\,H2 \subset \mathbb{R}H\infty\,.$$

Проведенный в рамках пространства ℝH∞ синтез регулятора гарантирует его устойчивость.

В общем виде нормой H_∞ матричной передаточной функции $G(p)$ называют:

$$\|G(p)\|_\infty = ess\sup\bar{\sigma}\left(G\left(j\omega\right)\right)$$

где $\bar{\sigma}(a)$ - максимальное сингулярное собственное значение матрицы a. В скалярном случае H_∞ норма есть максимальное значение модуля частотной передаточной функции $|G(j\omega)|$.

Физический смысл нормы в пространстве Харди

Сравним H2 - и H∞ - нормы сигналов, результаты для большей наглядности сведём в таблицу:

Сравнение норм сигнала в различных пространствах

H_2 **-норма сигнала**	H_∞ **-норма сигнала**
$\left\|u(t)\right\|_{H_2} = \left\|u\right\|_2 \overset{\Delta}{=} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left\|u(t)\right\|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$ т.е. $\left\|u\right\|_2^2$ – энергия сигнала $u(t)$	$\left\|u(t)\right\|_{H_\infty} = \left\|u\right\|_\infty \overset{\Delta}{=} \sup_t \left\|u(t)\right\|$, т.е. точная верхняя грань абсолютной величины сигнала $u(t)$

Таким образом, введение H∞ - нормы позволит эффективно решить задачу оптимизации даже при наличии минимальной информации о действующих на исследуемую систему возмущениях. При этом внешние воздействия могут носить как параметрический, так и структурный характер, а также являться возмущающим сигналом в обычной его трактовке – шумом.

Передаточные функции, принадлежащие пространству $\mathbb{R}H\infty$, отличаются следующим:

1) являются правильными дробно-рациональными выражениями ⇒ построенный регулятор будет удовлетворять принципу физической реализуемости;
2) не содержат особенностей в правой полуплоскости и на мнимой оси ⇒ построенный регулятор будет обладать устойчивостью.

Кроме того, применение H∞ - нормы в критерии оптимизации позволяет говорить о робастности полученной системы с регулятором, поскольку никакие условия на конкретный вид сигнала не накладываются, т.е. такой подход оперирует с неким классом неопределенности. Следует отметить, что данный класс является достаточно широким: ограничению подвергается лишь уровень шума (при рассмотрении сигналов, не имеющих точек разрыва второго рода), а не его спектр.

Задача 2. Найти норму $\|F\|_{\mathbf{H}^\infty}$ для функции комплексного аргумента вида:

$$F(s)=\frac{s-\alpha}{s+\beta}$$

Для определения нормы необходимо найти:

$$\|F\|_{\mathbf{H}^\infty}=\sup_{\omega}|F(j\omega)|$$

1. Определим $|F(j\omega)|$:

$$|F(j\omega)|=F(-j\omega)F(j\omega)=\frac{-j\omega-\alpha}{-j\omega+\beta}\frac{j\omega-\alpha}{j\omega+\beta}=\frac{\omega^2+\alpha^2}{\omega^2+\beta^2}$$

2. Определим супремум:

$$\sup_{\omega}|F(j\omega)|=\frac{\omega^2+\alpha^2}{\omega^2+\beta^2}=\begin{cases}1, & \omega=\infty\\ \dfrac{\alpha^2}{\beta^2}, & \omega=0\end{cases}$$

Если $\frac{\alpha^2}{\beta^2}>1$, то $\sup\limits_{\omega}|F(j\omega)|=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$.

Если $\frac{\alpha^2}{\beta^2}<1$, то $\sup\limits_{\omega}|F(j\omega)|=1$.

Задача 3. Найти норму $\|F\|_{\mathbf{H}^\infty}$ для матричной функции комплексного аргумента вида:

$$F(s)=\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix}s & -s\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Для определения нормы необходимо найти:

$$\|F\|_{\mathbf{H}^\infty}=\sqrt{\max\lambda}$$

1. Определим $\overline{F}F$:

$$F^T(-j\omega)F(j\omega)=\frac{1}{1+\omega^2}\begin{bmatrix}-j\omega & 0\\ j\omega & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j\omega & -j\omega\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{1+\omega^2}\begin{bmatrix}-(j\omega)^2 & (j\omega)^2\\ (j\omega)^2 & -(j\omega)^2+1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{1+\omega^2}\begin{bmatrix}(\omega)^2 & -(\omega)^2\\ -(\omega)^2 & (\omega)^2+1\end{bmatrix}$$

Временно опускаем сомножитель: $\frac{1}{1+\omega^2}$

$$F^\circ(j\omega)=\begin{bmatrix}(\omega)^2 & -(\omega)^2\\ -(\omega)^2 & (\omega)^2+1\end{bmatrix}$$

2. Найдем определитель матрицы $\det(\lambda I-F^\circ(j\omega))$:

$$\det(\lambda I - F^{\circ}(j\omega)) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\omega)^2 & -(\omega)^2 \\ -(\omega)^2 & (\omega)^2+1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-(\omega)^2 & (\omega)^2 \\ (\omega)^2 & \lambda-(\omega)^2-1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \left(\lambda-(\omega)^2\right)\left(\lambda-(\omega)^2-1\right)-\omega^4 = \lambda^2-\lambda\left(1+2\omega^2\right)+\omega^2 = \delta(\lambda)$$

3. Найдем $\lambda_{\max}$ из решения уравнения $\delta(\lambda)=0$:

$$\lambda^2-\lambda\left(1+2\omega^2\right)+\omega^2=0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{\left(1+2\omega^2\right)\pm\sqrt{\left(1+2\omega^2\right)^2-4\omega^2}}{2} = \omega^2+\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{\left(1+2\omega^2\right)^2}{4}-\omega^2} =$$

$$= \omega^2+\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1+4\omega^2+4\omega^4}{4}-\frac{4\omega^2}{4}} = \omega^2+\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1+4\omega^4}{4}} = \omega^2+\frac{1}{2}\pm\sqrt{\omega^4+\frac{1}{4}}$$

Подставим сомножитель $\frac{1}{1+\omega^2}$ и определим $\lambda_{\max}$:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{1+\omega^2}\left(\omega^2+\frac{1}{2}+\sqrt{\omega^4+\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{1+\omega^2}\left(\omega^2+1+\sqrt{\omega^4+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\omega^2+1+\sqrt{\omega^4+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)}{1+\omega^2} =$$

$$= \frac{\left(\left(\omega^2+1\right)-\frac{1}{2}+\sqrt{\omega^4+\frac{1}{4}}\right)}{1+\omega^2} = 1+\frac{\sqrt{\omega^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}{1+\omega^2}$$

Здесь $\lambda_{\max}$ определяется как:

$$\max\left(\frac{\sqrt{\omega^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}{1+\omega^2}\right)$$

из условия:

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\sqrt{\omega^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}{1+\omega^2}\right) = \frac{2\omega^2(1+\omega^2)-\left(\sqrt{\omega^4+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)}{(1+\omega^2)^2\sqrt{\omega^4+\frac{1}{4}}} = 0 \quad\rightarrow\quad \omega=2$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_{\max}\big|_{\omega=2} = 1+\frac{\sqrt{\omega^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}{1+\omega^2} = \frac{4}{3}$$

4. Норма вычисляется следующим образом:

$$\|F\|_{\mathbf{H}^\infty} = \sqrt{\max\lambda} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

4 Гильбертово пространство

Гильбертово пространство – комплексное векторное пространство со скалярным произведением, т.е. для каждой пары элементов $x,y \in \Gamma$ определено скалярное произведение (x, y) – комплексное число, удовлетворяющее свойствам:

- $(y,x)=\overline{(x,y)}$;
- $(\lambda x_1+\mu x_2,y)=(\lambda x_1,y)+\mu(x_2,y)$
- $(x,x)\geq 0$; $(x,x)=0$ – нулевой элемент Γ

Для случая p=2 пространства Лебега и Харди являются гильбертовыми пространства. Для случая p=∞ пространства Лебега и Харди – Банаховы, т.е. линейные полные нормированные. Норма для гильбертова пространства:

$$\|x\|=\sqrt{x^T x}$$

Задача 4. Найти норму $\|\Gamma_F\|$ для функции комплексного аргумента вида:

$$F(s)=\frac{s}{(s-1)(s+1)}$$

Представим $F(s)$ в виде:

$$F(s)=\frac{0.5s+0.5+0.5s-0.5}{(s-1)(s+1)}=\frac{0.5(s+1)+0.5(s-1)}{(s-1)(s+1)}=\frac{0.5}{(s-1)}+\frac{0.5}{(s+1)}$$

Обозначим:

$$F_-(s)=\frac{0.5}{(s-1)} \quad F_+(s)=\frac{0.5}{(s+1)}$$

Найдем минимальную реализацию [A,B,C,D] для $F_+(s)$:

$$A=1 \quad B=0.5 \quad C=1$$

Запишем матричные уравнения Ляпунова:

$$\begin{cases} AP+PA^T=-BB^T \\ A^T Q+QA=-C^T C \end{cases}$$

где P, Q – матрицы управляемости и наблюдаемости.

Тогда $\|\Gamma_F\|_\infty=\sqrt{\lambda_{\max}(P,Q)}$

Подставим значения A, B, C в уравнения Ляпунова:

$$\begin{cases} 1\cdot P+P\cdot 1=-\dfrac{1}{4} \\ 1\cdot Q+Q\cdot 1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} P=-\dfrac{1}{8} \\ Q=-\dfrac{1}{2} \end{matrix}$$

Вычислим $\lambda_{\max}$:

$$\lambda_{\max}(P,Q)=-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \|\Gamma_F\|_\infty=\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$$