

Лабораторная работа 1.

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Цель работы: освоить аналитические и машинные способы линеаризации динамических систем, проанализировать и оценить свойства динамических систем по линеаризованным моделям.

Общие положения

В этой работе исследуется математическая модель, линеаризованная в окрестности статического режима.

В качестве исходных данных рассматривают систему нелинейных дифференциальных уравнений (СНДУ), записанную в форме Коши:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)); \\ \mathbf{y}(t) &= g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)).\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ – вектор состояния; $\mathbf{u} \in R^m$ – вектор управления; $\mathbf{y} \in R^k$ – вектор выходных переменных; $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ и $g(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ – в общем случае нелинейные функции.

Выбирают статический режим $(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)})$, в окрестности которого производится линеаризация.

Далее определяют матрицы частных производных:
матрица состояния

$$A = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{u}=\mathbf{u}^{(0)}} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{u}=\mathbf{u}^{(0)}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{u}=\mathbf{u}^{(0)}} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_n} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{u}=\mathbf{u}^{(0)}} \end{bmatrix};$$

Аналогичным образом:

$$\text{матрица входов } B = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}};$$

$$\text{матрица выходов } C = \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}};$$

$$\text{матрица обхода } D = \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}}.$$

Матрицы A, B, C, D имеют постоянные коэффициенты, зависящие от статического режима, т. е. от $\mathbf{u}^{(0)}$ и $\mathbf{x}^{(0)}$. Для СНДУ рассматриваемого типа коэффициенты матриц могут быть определены аналитически, поскольку для каждой частной производной аналитическое выражение записать достаточно просто. Если аналитическое выражение для какого-либо коэффициента записать невозможно или сложно, то этот коэффициент можно определить численно, например:

$$\left. \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_3} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{u}=\mathbf{u}^{(0)}} \approx \frac{1}{\delta} \left[f_2(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)} + \delta, u_4^{(0)}, \dots, u_l^{(0)}) - f_2(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u_1^{(0)}, \dots, u_l^{(0)}) \right],$$

где значение δ должно быть малым. Система линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ) вида:

$$\begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = A \Delta \mathbf{x}(t) + B \Delta \mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = C \Delta \mathbf{x}(t) + D \Delta \mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (1.2)$$

записанная относительно векторов, обозначаемых через $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^{(0)}$, $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^{(0)}$, $\Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^{(0)}$, называется системой, полученной путем линеаризации в окрестности статического режима $(\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{x}^{(0)})$.

Эта система обладает следующим замечательным качеством. Если рассмотреть решение системы (1.1) при некоторых начальных условиях $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^*$ и при некотором изменении вектора входов $\mathbf{u}(t)$ на интервале $t \in [t_0, t_1]$, то полученное решение $\mathbf{x}(t)$ обладает свойством:

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}^* + \Delta \mathbf{x}(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1.3)$$

где $\Delta \mathbf{x}(t)$ – решение системы (1.2) при начальных условиях $\Delta \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(0)}$ и при входном векторе $\Delta \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^{(0)}$, $t \in [t_0, t_1]$. Другими словами, соответствие математических моделей (1.1) и (1.2) выражено соотношениями:

$$\begin{aligned} x_i(t) &\approx x_i^{(0)} + \Delta x_i(t), \quad i = 1, \dots, n; \\ u_i(t) &\approx u_i^{(0)} + \Delta u_i(t), \quad i = 1, \dots, l; \\ y_i(t) &\approx y_i^{(0)} + \Delta y_i(t), \quad i = 1, \dots, m; \end{aligned} \quad (1.4)$$

Переменные $\Delta x_i(t)$, $\Delta u_i(t)$ называются приращениями (или отклонениями) переменных x_i , u_i относительно значений $x_i^{(0)}$, $u_i^{(0)}$.

Таким образом, в окрестности статического режима динамику исходного объекта (1.1) с большой точностью описывает динамика объекта (1.2). Знак приближенного равенства в (1.3) означает, что при значительном отклонении значений вектора $\mathbf{u}(t)$ от значения $\mathbf{u}^{(0)}$, т. е. при больших значениях компоненты вектора $\Delta u_i(t)$, схожесть будет меньше. В результате процесс исследования динамики нелинейного объекта (1.1) в окрестности его статического режима может быть осуществлен по схеме, показанной на рис. 1.1.

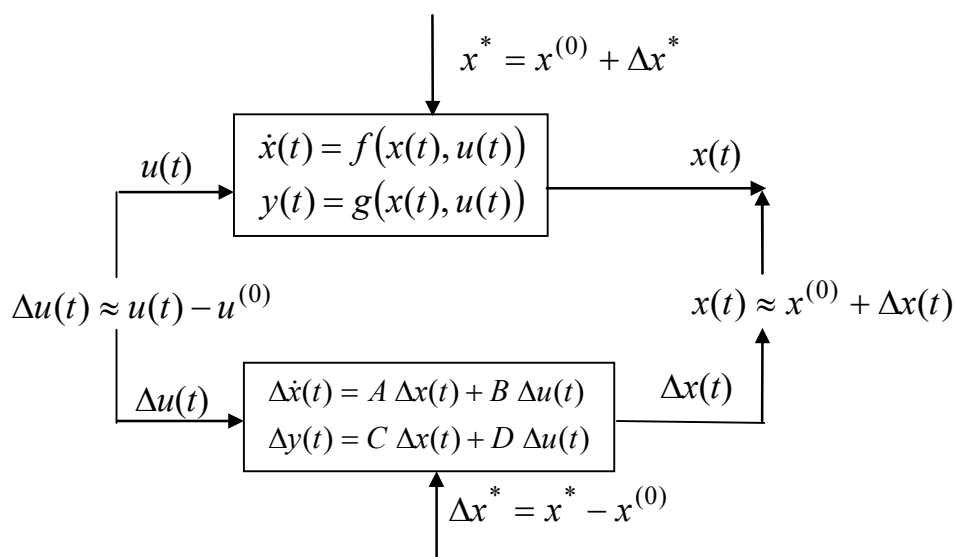


Рис. 1.1

Описание в виде (1.2) является общепринятым. Практически все стандартные методы и программные средства для работы с линейными системами используют такое представление. В частности, пакет MATLAB ориентирован именно на такое представление, когда объект исследования описан в пространстве состояний.

Использование линеаризованной модели дает следующие преимущества при исследовании динамической системы.

1. Решение СЛДУ всегда проще найти, в ряде случаев оно может быть найдено аналитически.

2. Для линейных систем определены такие понятия, как передаточные функции и частотные характеристики. Для оценки устойчивости движения в окрестности положения равновесия достаточно рассчитать собственные числа матрицы A . Кроме того, для линейных систем справедлив принцип суперпозиции, что позволяет, например, использовать методы частотного анализа.

3. Для линейных систем методы теории автоматического управления разработаны наиболее полно. Это позволяет строить законы управления для линеаризованных объектов и с учетом преобразования (1.3) переносить их на исходные нелинейные объекты.

В настоящее время возможности среды MATLAB позволяют находить линеаризованные модели без ручного вычисления матриц частных производных. Среда SIMULINK содержит не только средства графического представления и интегрирования динамических систем, но и специальные функции их обработки, в том числе и линеаризации.

Для анализа SIMULINK-объектов используются следующие функции:

[ST, IN, OUT] = TRIM('SYS', X0, U0) – определение статического режима SIMULINK-модели. Параметры функции: **SYS** – имя модели, **X0, U0** – начальные значения векторов состояния и управления, **ST, IN, OUT** – установившиеся значения соответственно векторов состояния, входа и выхода.

[A,B,C,D] = LINMOD('SYS',X,U) – получение матриц линеаризованной модели.

Определение точки равновесия, соответствующей заданному входу.

Применение функции TRIM вышеописанным способом не гарантирует определение точки равновесия для желаемого значения входной переменной. Однако в функцию можно ввести дополнительные аргументы, уточняющие условия поиска, точнее, требования к результату:

[ST, IN, OUT] = TRIM('SYS', X0, U0, Y0, IX, IU, IU). При таком вызове к начальным значениям векторов состояния, входа и выхода **X0, U0, Y0** добавляются столбцы **IX, IU, IU**, содержащие номера (индексы) переменных, начальные значения которых должны быть зафиксированы. Точка равновесия будет обеспечивать минимальное отклонение начальных фиксированных и искоемых переменных.

Примечание: функции MATLAB могут принимать пустые матрицы в качестве аргументов.

Также, многообразие точек равновесия, соответствующих заданному входу, может быть найдено из системы алгебраических уравнений, получаемых из системы (1.1) в равновесном режиме. Для решения системы нелинейных алгебраических уравнений, соответствующих статическому режиму движения, рекомендуется использовать аналитическую функцию символьной алгебры **SOLVE** (численные методы, как правило, ориентированы на поиск одного решения системы).

Методика проведения работы

1. Построить модель динамической системы в среде SIMULINK в соответствии с исходными данными (табл. 1.1).
2. Подобрать коэффициенты модели таким образом, чтобы система оказалась устойчивой (путем моделирования).
3. Создать модель, аналогичную найденной, используя в качестве входных и выходных сигналов порты входа-выхода.
4. Определить точку равновесия, используя функцию TRIM с тремя аргументами.
5. Проверить корректность работы функции TRIM моделированием.
6. Найти линеаризованную модель системы аналитическим и машинным способом. Проверить модели на соответствие.
7. Определить точку равновесия, соответствующую заданным в п. 4 входным воздействиям. Найти линеаризованную модель для новой точки равновесия.
8. Сравнить собственные числа моделей, найденных в п. 6 и п. 7.
9. Найти все точки равновесия для заданного значения воздействия.

Таблица 1.1

Номер варианта	СНДУ
1	$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2^2 x_2 + b_{11}u; \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u$
2	$\dot{x}_1 = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2 + b_{11}u; \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u$
3	$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u; \dot{x}_2 = a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2 + b_{21}u$
4	$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 x_2 + b_{11}u; \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u$
5	$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2^2 + b_{11}u; \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2^2 + b_{21}u$
6	$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2^2 x_2 + b_{11}u; \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2^2 + b_{21}u$
7	$\dot{x}_1 = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + b_{11}u; \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}u$
8	$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u; \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_1x_2^2 + b_{21}u$

Содержание отчета

1. Постановка задачи и исходные уравнения.
2. Модель СНДУ в SIMULINK.
3. Значения коэффициентов модели.
4. Скрипт на языке MATLAB, с расчетом и проверкой точек равновесия, матриц линеаризованной модели, собственных чисел,
5. Аналитически найденные матрицы линеаризованной модели.
6. Выводы.