4 вопрос

Условия, которым должна удовлетворять ФП [11]:

- ФП крайних нечетких множеств (термов) должны быть Z, S-типов (см. прил. 4), но не колоколообразные, и при $\min u = u_1$, $\max u = u_m$ значения ФП $\mu_{A_1}(u_1) = 1$, $\mu_{Am}(u_m) = 1$. Это условие связано с расположением термов в упорядоченном множестве и необходимо для построения регулятора на основе нечеткого алгоритма Мамдани.

В пакете MATLAB в блоке фаззификации используются следующие функции принадлежности [19]: 1) Trapmf (trapezoidal membership function) – трапецеобразная функция принадлежности; 2) Gbellmf (generalized bell curve membership function) – колоколообразная функция принадлежности; 3) Trimf (triangular membership function) – треугольная функция принадлежности; 4) Gaussmf (gaussian curve membership function) – функция принадлежности в виде кривой Гаусса; 5) Gauss2mf(two-sided gaussian curve membership function) – двусторонняя гауссова функция принадлежности; 6) Smf (S-shaped curve membership function) – s-образная функция принадлежности; 7) Zmf (Z-shaped curve membership function) – z-образная функция принадлежности; 8) Psigmf (product of two sigmoid membership function) – произведение двух сигмоидных функции принадлежности; 9) Dsigmf (difference of two sigmoid membership function) – разность двух сигмоидных функций принадлежности; 10) Pimf (pi-shaped curve membership function) – pi-образная функция принадлежности; 11) Sigmf (sigmoid curve membership function) – функция принадлежности сигмоидной формы.

- Каждое нечеткое множество должно иметь единственный максимум.
- ФП должны иметь гладкие затухающие до нуля фронты.
- Нечеткость обрабатываемой информации состоит в возможности одновременной принадлежности значения входной переменной двум нечетким множествам, причем наилучшее расположение двух соседних нечетких множеств (термов), когда $\mu_{A_i}(u) + \mu_{A_{i+1}}(u) = 1$ (рис. 1.8).
- Нечеткие множества должны быть нормальными (1.3).

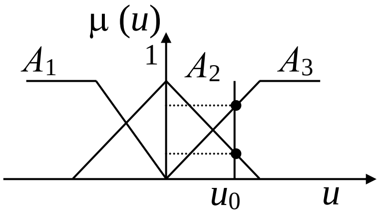


Рис. 1.8

5 вопрос

Нечетким отношением R на множестве $U \times V$ называется нечеткое подмножество декартова произведения (см. прил. 2), которое характеризуется функцией принадлежности $\mu_R(u,v)$: $U \times V \to [0,1]$. Значение $\mu_R(u,v)$ этой функции понимается как некоторая субъективная мера выполнения отношения $u\,R\,v$ [1], [6]–[9].5

Замечание. Четкое отношение можно рассматривать как частный случай нечеткого отношения, функция принадлежности которого принимает значения 0 или 1.

Пример 2.1. Сравним четкое и нечеткое отношения. В качестве четкого отношения возьмем R (≥) ("больше или равно"), а в качестве нечеткого R (>>) ("много больше") (рис. 2.1).

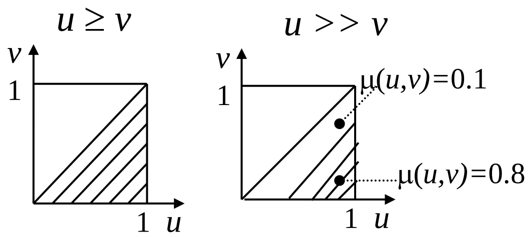


Рис. 2.1

Существуют следующие *способы задания нечетких отношений:*

- теоретико-множественные:

$$R = \{((u_1, v_1), \mu_R(u_1, v_1)), ((u_2, v_1), \mu_R(u_2, v_1)), \ldots ((u_n, v_n), \mu_R(u_n, v_n))\};$$

- графические − с помощью ориентированного графа с множеством вершин $U \bigcup V$, каждой дуге которого приписано значение функции принадлежности $\mu_R(u_i, v_j)$;

- в матричном виде – с помощью матрицы инциденций, строки которой помечены элементами $u_i \in U,\ i = \overline{1,n},$ столбцы – элементами $v_j \in V,\ j = \overline{1,m},$

а на пересечении u_i строки и v_j столбца ставится элемент ФП $\mu_R(u_i, v_j)$.

2.2. Операции над нечеткими отношениями

Пусть *R* и *L* – два нечетких отношения такие, что $\forall\,(u,v) \in U \times V:\quad \mu_R(u,v) \le \mu_L(u,v),$ тогда говорят, что *R содержится в L*.

Пример 2.2. Для случая, когда *R* содержится в *L*, имеем

R	v_1	v_2
u_1	0.3	0.4
u_2	0.5	0.1

L	v_1	v_2
u_1	0.4	0.6
u_2	0.5	0.3

Объединение двух отношений *R* и *L* обозначается $R \bigcup L$ и определяется выражением
$$\forall\,(u,v) \in U \times V:\ \mu_{R \cup L}(u,v) = \mu_R(u,v)\ \vee\ \mu_L(u,v) = \max\left[\mu_R(u,v),\ \mu_L(u,v)\right].$$

Пересечение двух отношений *R* и *L* обозначается $R \bigcap L$ и определяется выражением
$$\forall\,(u,v) \in U \times V:\ \mu_{R \cap L}(u,v) = \mu_R(u,v)\ \wedge\ \mu_L(u,v) = \min\left[\mu_R(u,v),\ \mu_L(u,v)\right].$$

Пример 2.3. *R* и *L* взяты из примера 2.2. Тогда

$R \bigcap L$	v_1	v_2
u_1	0.3	0.4
u_2	0.5	0.1

$R \bigcup L$	v_1	v_2
u_1	0.4	0.6
u_2	0.5	0.3

Дополнение нечеткого отношения обозначается $\overline{R}$ и определяется в виде $\forall\,(u,v) \in U \times V:\quad \mu_{\overline{R}}(u,v) = 1 - \mu_R(u,v).$ Дополнение имеет смысл отрицания исходного отношения. Например, для нечеткого отношения *R* = (лучше), его дополнение $\overline{R}$ = (не лучше).

Обратное к *R* нечеткое отношение R^{-1} определяется следующим образом: $\forall\,(u,v) \in U \times V : u R v \Leftrightarrow v R^{-1} u,$ или с помощью функции принадлежности $\forall\,(u,v) \in U \times V:\quad \mu_R(u,\ v) = \mu_{R^{-1}}(v,\ u)$. Матрица R^{-1} является транспонированной к матрице *R*.

Пример 2.4. *R* взято из примера 2.2. Тогда

$\overline{R}$	v_1	v_2
u_1	0.7	0.6
u_2	0.5	0.9

R^{-1}	u_1	u_2
v_1	0.3	0.5
v_2	0.4	0.1

Вопрос 6

Композиция нечетких отношений

Максиминная композиция $R \circ L$ двух нечетких отношений $R \subset U \times V$ и $L \subset V \times W$ определяется в виде [2], [6]–[11]

$R \circ L(u,w) = \bigvee_{v} (R(u,v) \wedge L(v,w)),\ \ \forall u \in U,\ \ \forall v \in V,\ \ \ \forall w \in W.$ Таким образом, пара $(u,w) \in U \times W$ принадлежит нечеткому отношению $R \circ L$ со степенью принадлежности наибольшей из меньших степеней принадлежности различных компонируемых пар $(u,v) \in U \times V$ и $(v,w) \in V \times W$ нечетких отношений R и L, где в качестве v могут выступать несколько компонируемых элементов. Максиминная композиция характеризуется ФП

$$\mu_{R \circ L}(u,w) = \bigvee_{v} (\mu_R(u,v) \wedge \mu_L(v,w)) = \max_{v} \{\min [\mu_R(u,v),\ \mu_L(v,w)]\}. \qquad (2.1)$$

Пример 2.5. Дано:

R

	v_1	v_2
u_1	0.2	0.6
u_2	0.5	0.8

L

	w_1	w_2
v_1	0.5	0.7
v_2	0.3	1

Определить $R \circ L$.

Пусть $(u,w) = (u_1, w_1)$, тогда

$\min(\mu_R(u_1, v_1), \mu_L(v_1, w_1)) = \min(0.2, 0.5) = 0.2,$

$\min(\mu_R(u_1, v_2), \mu_L(v_2, w_1)) = \min(0.6, 0.3) = 0.3,$

$\max_{v_i} \min(\mu_R(u_1, v_i), \mu_L(v_i, w_1)) = \max(0.2, 0.3) = 0.3.$

В результате $\mu_{R \circ L}(u_1,\ w_1) = 0.3$. Выполнив аналогичные операции, получим остальные значения матрицы нечеткого отношения $R \circ L$.

$R \circ L$

	w_1	w_2
u_1	0.3	0.6
u_2	0.5	0.8

Минимаксная композиция $R \bullet L$ двух нечетких отношений $R \subset U \times V$ и $L \subset V \times W$ определяется ФП в виде

$$\mu_{R \bullet L}(u,w) = \bigwedge_{v} (\mu_R(u,v) \vee \mu_L(v,w)) = \min_{v} \{\max [\mu_R(u,v),\ \mu_L(v,w)]\}.$$

Максимультипликативная композиция $R * L$ двух нечетких отношений $R \subset U \times V$ и $L \subset V \times W$ определяется ФП в виде

$$\mu_{R * L}(u,w) = \vee_{v} (\mu_R(u,v)\, \mu_L(v,w)) = \max_{v} (\mu_R(u,v)\, \mu_L(v,w)).$$

Пример 2.6. Пусть R и L, как в примере 2.5, тогда

$R \bullet L$

	w_1	w_2
u_1	0.5	0.7
u_2	0.5	0.7

$R * L$

	w_1	w_2
u_1	0.18	0.6
u_2	0.25	0.8

Вопрос 7

Элементы нечеткой логики

Определения основных понятий четкой логики приведены в прил. 3. В зависимости от системы аксиом (от способов введения операций конъюнкции и дизъюнкции) можно построить бесконечное число нечетких логик. Важно отметить различие между логическими операциями и операциями над множествами. В операции над множествами полностью взаимодействуют два множества со всеми элементами и ее результат – множество. В логических операциях участвуют элементы и их результат

– элемент с рассматриваемыми свойствами. Пусть *A, B* – высказывания, $\gamma(A), \gamma(B)$ – значения истинности *A, B,* $\gamma(A), \gamma(B) \in [0,\ 1]$.

Нечеткая логика с максиминными операциями [1], [8]. Включает операции:

- отрицания: $\gamma(\overline{A}) = (1 - \gamma(A))$;
- триангулярной нормы (t - нормы) – нечеткого расширения логической операции конъюнкции ("и"):

$$\gamma(A \wedge B) = \min(\gamma(A), \gamma(B)); \qquad (3.1)$$

- s-нормы (t-конормы) – нечеткого расширения логической операции дизъюнкции ("или"):

$$\gamma(A \vee B) = \max(\gamma(A), \gamma(B)); \qquad (3.2)$$

- импликации ("если…, то"):

$$\gamma(A \to B) = \gamma(\overline{A} \vee B); \qquad (3.3)$$

- эквивалентности: $\gamma(A \leftrightarrow B) = \gamma[(A \to B) \wedge (B \to A)]$.

Операции t-нормы и s-нормы – идемпотентные, коммутативные, ассоциативные, дистрибутивные. Для них выполняются свойство абсорбции, законы двойного отрицания и де Моргана, не выполняется свойство комплементарности (закон исключения третьего), т. е. $\gamma(A \vee \overline{A}) \neq 1$, $\gamma(A \wedge \overline{A}) \neq 0$. Таким образом, нечеткая логика с максиминными операциями – структура типа дистрибутивной решетки с псевдодополнениями.

Нечеткая логика с ограниченными операциями (Лукасевича) [1], [8]. Включает операции:

- конъюнкции (t-нормы): $\gamma(A \underset{\rightarrow}{\wedge} B) = \max(0,\ \gamma(A) + \gamma(B) - 1)$;
- дизъюнкции (s-нормы): $\gamma(A \overset{\rightarrow}{\vee} B) = \min(1,\ \gamma(A) + \gamma(B))$;
- импликации:

$$\gamma(A \to B) = \min(1,\ 1 - \gamma(A) + \gamma(B)). \qquad (3.4)$$

Операции t-нормы и s-нормы – коммутативные, ассоциативные, неидемпотентные, недистрибутивные. Для них выполняются свойство комплементарности, законы двойного отрицания и де Моргана. Таким образом, нечеткая логика с ограниченными операциями не представляет собой решетку.

Вероятностная нечеткая логика [1], [8]. Включает операции:

- дизъюнкции (s-нормы): $\gamma(A + B) = \gamma(A) + \gamma(B) - \gamma(A)\,\gamma(B)$;
- конъюнкции (t-нормы):

$$\gamma(AB) = \gamma(A)\,\gamma(B). \qquad (3.5)$$

Операции t-нормы и s-нормы – коммутативные, ассоциативные. Для них не выполняются свойства идемпотентности, дистрибутивности и комплементарности, выполняются законы двойного отрицания и де Моргана. Таким образом, вероятностная нечеткая логика не представляет собой решетку.

Нечеткие предикаты. Нечеткие логические формулы, которые определены на универсальном множестве *U* и принимают значения из замкнутого интервала [0, 1], называют *нечеткими предикатами*. Функция принадлежности нечеткого множества *A* – нечеткий предикат, фактически задающий множество *A* [6], [10].

Пример 3.1: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset U$. Нечеткий предикат "быть небольшим числом": $\mu_A(1) = 1$, $\mu_A(2) = 0.9$, $\mu_A(3) = 0.7$, $\mu_A(4) = 0.3$, $\mu_A(5) = 0.1$, $\mu_A(6) = 0$;
A={(1,1), (2, 0.9), (3, 0.7), (4, 0.3), (5, 0.1), (6, 0)}.

Замечание. Таким образом [6], если $A \subset U$ – нечеткое подмножество универсального множества *U*, $u \in U$, то следующие два утверждения эквивалентны:

1) степень принадлежности элемента *u* нечеткому множеству *A* есть $\mu_A(u)$;
значение истинности нечеткого предиката *A* есть $\gamma(A) = \mu_A(u)$.

Основные понятия четкой логики

Под *высказыванием* понимают предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно. "Истина" – и(1), "ложь" – л(0), значения истинности: $\gamma(A) = 1$, $\gamma(A) = 0$.

Отдельные высказывания – буквы *A, B, C, …*– *высказывательные переменные* (логические переменные, пропозициональные буквы).

Символы: $\bar{\ }, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ – *пропозициональные связки*.

Логические операции. Отрицание высказывания: $\bar{A}$ ("не *A*").

Значения истинности *A* и $\bar{A}$ приведены в таблице истинности (табл. П1).

Таблица П1

A	и (1)	л(0)
$\bar{A}$	л(0)	и (1)

Конъюнкция высказываний: $A \wedge B$ ("и"). Высказывание $A \wedge B$ истинно тогда и только тогда, когда истинны высказывания *A* и *B,* называемые *конъюнктивными членами* конъюнкции *A* и *B*.

Дизъюнкция высказываний: $A \vee B$ ("или"). Высказывание $A \vee B$ имеет значение "ложь" тогда и только тогда, когда ложны высказывания *A* и *B*.

Импликация высказываний *A* и *B*: $A \to B\,(A \supset B)$ ("если *A…,* то *B*"). Высказывание $A \to B$ ложно тогда и только тогда, когда *A,* называемое *посылкой* (условием, допущением) импликации $A \to B$, истинно, а *B*, называемое *заключением* (выводом, следствием) импликации, ложно.

Замечание. В отличие от используемого в обычной жизни понятия следования, *A* и *B* не обязательно должны быть содержательно связанными, и поэтому в логике высказывание "Если земля стоит на трех китах, то Петербург основан Петром I" считается истинным.

Эквивалентность высказываний *A* и *B*: $A \leftrightarrow B$ ("*A* тогда и только тогда, когда *B*") имеет значение "истина" только при совпадающих значениях истинности *A* и *B*.

Логические формулы (пропозициональные формы): а) высказывательные переменные – логические формулы; б) если *A* и *B* – логические формулы, то $(\bar{A})$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ – логические формулы.

Операции импликации соответствует логическая формула $((\bar{A}) \vee B)$,
т. е. $(A \to B) \leftrightarrow ((\bar{A}) \vee B)$. Значения истинности для вводимых операций приведены в таблице истинности (табл. П2).

Таблица П2

A	B	$\bar{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$((\bar{A}) \vee B)$	$(A \to B) \leftrightarrow ((\bar{A}) \vee B)$	$A \wedge (A \to B)$
0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1

Правило логического вывода "*modus ponens*" (правило отделения):
если $(A \to B)$ истинно и *A* истинно, то *B* – истинно. Одно суждение (*B*) является необходимым следствием двух других $(A \to B, A)$.

Записывают: $A \to B$

A или $B = A \wedge (A \to B)$.

B

Вопрос 8

Логико-лингвистическое описание систем управления

Для качественного описания систем управления в терминах значений лингвистических переменных в основном используются три вида нечетких условных высказываний (лингвистических правил, нечетких правил, знаний) [2], [6], [8]:

если x есть A, то y есть B; (3.6)

если x есть A, то y есть B, иначе y есть C; (3.7)

если x_1 есть A_1 и x_2 есть A_2 и….. x_n есть A_n, то y есть B. (3.8)

Здесь x, x_1, x_2 ,…, x_n – лингвистические переменные входа; y – лингвистическая переменная выхода.

1) A, A_1, A_2,…, A_n – лингвистические значения лингвистических переменных x, x_1, x_2 ,…, x_n (термы, нечеткие подмножества универсальных множеств U, U_1, U_2,..., U_n); B, C – лингвистические значения лингвистической переменной y (термы, нечеткие подмножества универсального множества V); U, V – универсальные множества *посылок* и *следствий* соответственно;

2) если интерпретировать A, A_1, A_2,…, A_n, B, C как нечеткие предикаты, то высказыванию "x есть A" соответствует значение истинности $\gamma(A) = \mu_A(u)$, высказыванию "x_1 есть A_1" соответствует $\gamma(A_1) = \mu_{A_1}(u_1)$ и т. д.

Высказывание (3.6) – бинарное нечеткое отношение $R \subset U \times V$. Если интерпретировать A, B как нечеткие предикаты, то $R = A \rightarrow B$ – нечеткая логическая операция импликации ("если…, то"), где A – посылка, B – заключение импликации (см. прил. 3).

Существуют различные способы задания нечеткой операции импликации.

Определение нечеткой импликации типа $\gamma(A \rightarrow B) = \gamma(\overline{A} \vee B)$ (3.3) по аналогии с четкой логикой (см. прил. 3) $\mu_R(u,v) = \max\,[1 - \mu_A(u), \mu_B(v)]$ дает неудовлетворительные результаты.

Положительные результаты получены при использовании импликации, предложенной Л. Заде [8], [12]:

$$\mu_R(u,v) = \max\,[\min\,(\mu_A(u), \mu_B(v)), (1 - \mu_A(u))] \quad (3.9)$$

и при использовании импликации Лукасевича (3.4):

$$\mu_R(u,v) = \min[1, (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v))]. \quad (3.10)$$

На практике наиболее часто применяют в качестве нечеткой импликации операцию взятия минимума (импликация Мамдани) [8], [12]:

$$\mu_R(u,v) = \min\,(\mu_A(u), \mu_B(v)) \quad (3.11)$$

или операцию произведения (импликация Ларсена) [8], [12]:

$$\mu_R(u,v) = \mu_A(u)\,\mu_B(v). \quad (3.12)$$

Выбор правила импликации зависит от области приложения.

Пример 3.2. Даны нечеткие множества

$$A = \{(u_1, 0.6),\ (u_2, 0.4),\ (u_3, 0.2)\},\quad B = \{(v_1, 0.2),\ (v_2, 0.4),\ (v_3, 0.6)\}.$$

Нечеткие отношения R_1, R_2 получены с использованием (3.11), (3.12):

R_1	v_1	v_2	v_3
u_1	0.2	0.4	0.6
u_2	0.2	0.4	0.4
u_3	0.2	0.2	0.2

R_2	v_1	v_2	v_3
u_1	0.12	0.24	0.36
u_2	0.08	0.16	0.24
u_3	0.04	0.08	0.12

На основе нечетких условных высказываний (3.6) – (3.8) составляют схему нечетких рассуждений, которая содержит n нечетких правил (нечетких знаний, лингвистических правил, нечетких высказываний). Количество правил зависит от сложности задачи и возможностей реализации (как правило, n = 4…49).

Вопрос 9

Схема и композиционное правило нечеткого условного вывода

Концептуальной основной формализации правил нечеткого условного логического вывода является правило *modus ponens* (см. прил. 3).

Схема нечеткого логического вывода для условного высказывания (3.6):

посылка 1: если x есть A, то y есть B;
посылка 2: x есть A';
-- (3.14)
следствие: y есть B'.

Здесь все обозначения аналогичны (3.6) – (3.8), $A' \subset U$, $B' \subset V$.

Посылка 1 – нечеткая импликация $R = A \to B$, которая отражает нечеткое причинное отношение посылки и заключения $(R \subset U \times V)$, соответствует знаниям эксперта. Посылка 2 – исходные данные, для которых получают нечеткий вывод. B' – результат нечеткого условного вывода. При $A' = A$, $B' = B$ вывод сводится к modus ponens.

Пример 3.3:

посылка 1 (нечеткое правило): если расстояние между автомобилями мало, то уменьшите скорость;
посылка 2 (конкретная ситуация): расстояние между автомобилями очень мало;

следствие: резко уменьшите скорость.

Процесс получения результата нечеткого вывода в (3.14) с использованием данных наблюдения A' и знания $A \to B$ можно представить в виде композиционного правила нечеткого вывода [1], [6]:

$$B' = A' \circ R = A' \circ (A \to B), \qquad (3.15)$$

где знак "$\circ$" обозначает операцию композиции. Применяя в (3.15) максиминную композицию (2.1), определим функцию принадлежности в виде

$$\mu_{B'}(v) = \sup_{u \in U} [\min(\mu_{A'}(u), \mu_R(u, v))] \,. \qquad (3.16)$$

Таким образом, для получения результата нечеткого вывода необходимо:

- определить нечеткое отношение R (3.9) – (3.12);
- выполнить композиционное правило вида (3.15).

Пример 3.4. Нечеткий вывод:

посылка 1: если x есть "мало", то y есть "среднее";
посылка 2: x есть "мало";

следствие: y есть "среднее".

Пусть нечеткая операция импликации задается импликацией Мамдани (3.11), $\{2, 3, 4\} \subset U$, $\{2, 3, 4\} \subset V$. Нечеткие множества A = [мало] = 0.6|2+ +0.4|3+0.2|4, B = [среднее] = 0.2|2+0.4|3+ +0.6|4. Нечеткое отношение R равно отношению R_1 из примера 3.2. Следуя (3.16), получим

$$\mu_{B'}(v_j) = \sup_{u \in U} [\min(\mu_{A'}(u_i), \mu_R(u_i, v_j))], \;\; i = \overline{1,3}, \;\; j = \overline{1,3}. \qquad (3.17)$$

Вычислим $\mu_{B'}(v_2)$. Тогда

$\min(\mu_{A'}(u_1), \mu_R(u_1, v_2)) = \min(0.6, 0.4) = 0.4,$

$\min(\mu_{A'}(u_2), \mu_R(u_2, v_2)) = \min(0.4, 0.4) = 0.4,$

$\min(\mu_{A'}(u_3), \mu_R(u_3, v_2)) = \min(0.2, 0.2) = 0.2,$

Откуда $\mu_{B'}(v_2) = \sup(0.4, 0.4, 0.2) = 0.4$. В результате аналогичных расчетов можно получить $\mu_{B'}(v_1) = 0.2,\ \mu_{B'}(v_3) = 0.6.$

Пример 3.5:
посылка 1: если x есть "мало", то y есть "среднее";
посылка 2: x есть "очень мало";

следствие: y есть "очень среднее".
Здесь "очень мало" – A^2.

В соответствии с операцией концентрирования (1.7) $\mu_{A^2}(u) = \mu_A^2(u)$, поэтому A^2 = 0.36|2+0.16|3+0.04|4. Применяя (3.17), получим B' = 0.2|2+0.36|3+0.36|4.

Замечания: 1. Если в уравнении (3.16) в качестве нечеткой импликации используется импликация Мамдани (3.11), то функцию принадлежности нечеткого вывода можно представить в виде

$$\mu_{B'}(v) = \min\{ \sup_{u\in U} [\min(\mu_{A'}(u), \mu_A(u))],\ \mu_B(v)\} = \min(\alpha,\ \mu_B(v)), \qquad (3.18)$$

где $\alpha = \sup \mu_{A'\cap A}(u)$. Пересечение $A' \cap A$ – результат приближенного сопоставления посылки импликации A и данных наблюдения A'.

2. Если в выражении (3.16) в качестве нечеткой импликации используется импликация Ларсена (3.12), то функцию принадлежности нечеткого вывода можно представить в виде

$$\mu_{B'}(v) = \sup_{u\in U} [\min(\mu_{A'}(u), \mu_A(u))]\, \mu_B(v) = \alpha\, \mu_B(v). \qquad (3.19)$$

Вопрос 10

3.4. Правило нечеткого логического вывода для систем с двумя входами и одним выходом

Нечеткие правила составляются на основе условного высказывания вида (3.8), которое задает нечеткое отношение между входными и выходными множествами. Обозначим n правил как n отношений R.

Схема нечеткого логического вывода:
посылка 1: R_1: если x_1 есть A_{11} и x_2 есть A_{21}, то y есть B_1,
R_2: если x_1 есть A_{12} и x_2 есть A_{22}, то y есть B_2,
……………………………………………………………………..
R_n: если x_1 есть A_{1n} и x_2 есть A_{2n}, то y есть B_n;
посылка 2: x_1 есть A_1' и x_2 есть A_2';
-- (3.20)
следствие: y есть B'.

Здесь все обозначения аналогичны обозначениям в (3.8). A_{1i} и A_{2i} – нечеткое подмножество $A_{1i} \times A_{2i}$ декартова произведения $U_1 \times U_2$ (см. прил. 2). $R_i = (A_{1i}$ и $A_{2i}) \rightarrow B_i$ – нечеткое отношение в $U_1 \times U_2 \times V$. Нечеткие правила включают нечеткую логическую операцию "и" (t-норму) между лингвистическими значениями A_{1i}, A_{2i}, которая задается как операция взятия минимума (1.10), (3.1) или как произведение функций принадлежности (1.10), (3.5), и операцию импликации "если…, то" (3.11), (3.12).

Лемма 1. Коммутативность оператора максиминной композиции [12]. Нечеткий условный вывод m правил с учетом уравнения (3.15) можно записать в виде

$$B' = (A_1^{'}, A_2^{'}) \circ \bigcup_{i=1}^{m} R_i = \bigcup_{i=1}^{m} (A_1^{'}, A_2^{'}) \circ R_i = \bigcup_{i=1}^{m} B_i^{'}, \qquad (3.21)$$

где $R_i = A_{1i}$ и $A_{2i} \to B_i$, $B_i^{'} = (A_1^{'},\ A_2^{'}) \circ (A_{1i}$ и $A_{2i} \to B_i)$. Объединение m правил нечеткого условного вывода называется *агрегированием*. На основании (1.5), (3.2) $\mu_{B'}(v) = \max_i \mu_{B_i^{'}}(v)$.

Лемма 2. Вместо максиминной композиции двух множеств $A_1^{'},\ A_2^{'}$ и отношения R_i можно рассматривать пересечение композиций каждого множества и соответствующего отношения [12]. Для импликаций Мамдани (3.11) и Ларсена (3.12), если декартово произведение нечетких множеств $A_{1i},\ A_{2i}$ определяется как (1.10): $\mu_{A_{1i} \times A_{2i}}(u_1,\ u_2) = \min(\mu_{A_{1i}}(u_1), \mu_{A_{2i}}(u_2))$, результат нечеткого вывода i-го правила с учетом (3.21) определяется выражением

$$B_i^{'} = (A_1^{'},\ A_2^{'}) \circ (A_{1i} \text{ и } A_{2i} \to B_i) = [A_1^{'} \circ (A_{1i} \to B_i)] \bigcap [A_2^{'} \circ A_{2i} \to B_i] \ .$$

Для импликации Мамдани (3.11) с учетом (3.18) функция принадлежности

$$\mu_{B_i^{'}} = \min \{[\mu_{A_1^{'}}(u_1) \circ (\mu_{A_{1\,i}}(u_1) \to \mu_{B\,i}(v))], [\mu_{A_2^{'}}(u_2) \circ (\mu_{A_{2\,i}}(u_2) \to \mu_{B\,i}(v))]\} =$$
$$= \min\{\min[\sup \mu_{A_1^{'} \bigcap A_{1i}}(u_1), \sup \mu_{A_2^{'} \bigcap A_{2i}}(u_2)], \mu_{B_i}(v)\} = \min(\alpha_i, \mu_{B_i}(v)), \qquad (3.22)$$

где $\alpha_{1i} = \sup \mu_{A_1^{'} \bigcap A_{1i}}(u_1),\ \alpha_{2i} = \sup \mu_{A_2^{'} \bigcap A_{2i}}(u_2),\ \alpha_i = \min(\alpha_{1i},\ \alpha_{2i})$.

Для импликации Ларсена (3.12) с учетом (3.19) функция принадлежности

$$\mu_{B_i^{'}} = \min[\sup \mu_{A_1^{'} \bigcap A_{1i}}(u_1),\ \sup \mu_{A_2^{'} \bigcap A_{2i}}(u_2)]\ \mu_{B_i}(v)\} = \alpha_i\ \mu_{B_i}(v). \qquad (3.23)$$

Графическая интерпретация лемм 1 и 2 для импликации (3.11) представлена на рис. 3.1, для импликации (3.12) – на рис. 3.2.

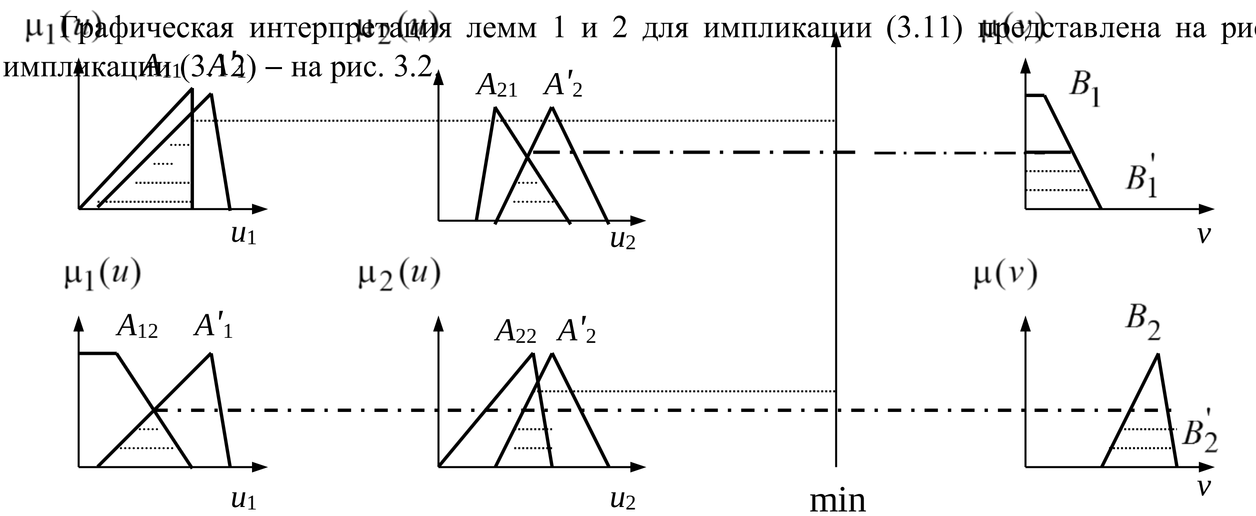


Рис. 3.1

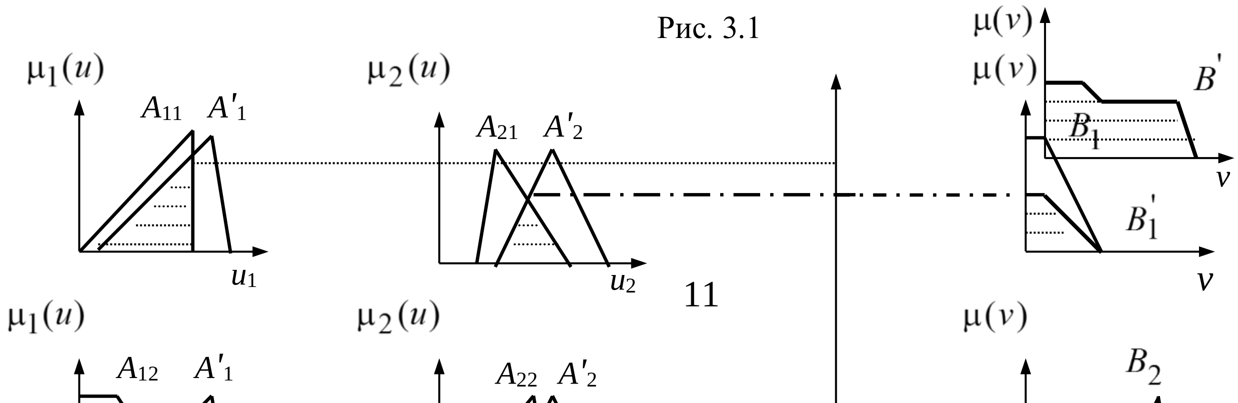


Рис. 3.2

Лемма 3. Пусть входные множества – синглтоны, т. е. $A_1^{'} = u_{10}$, $A_2^{'} = u_{20}$,

$$\mu_{A_i^{'}}(u_{i0}) = 1,\ \mu_{A_i^{'}}(u_i \neq u_{i0}) = 0,\ i = 1, 2.$$

Тогда $\mu_{A_1^{'} \cap A_{1i}}(u_1) = \min(\mu_{A_1^{'}}(u_{10}), \mu_{A_{1i}}(u_{10})) = \mu_{A_{1i}}(u_{10}) = \alpha_{1i}$,

$\mu_{A_2^{'} \cap A_{2i}}(u_2) = \min(\mu_{A_2^{'}}(u_{20}), \mu_{A_{2i}}(u_{20})) = \mu_{A_{2i}}(u_{20}) = \alpha_{2i}$, $\min(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}) = \alpha_i$.

Функция принадлежности нечеткого вывода для импликации (3.11) для i-го правила будет аналогична уравнению (3.22) [12]:

$$\mu_{B_i^{'}}(v) = \min(\alpha_i,\ \mu_{B_i}(v)) = \alpha_i \wedge \mu_{B_i}(v), \tag{3.24}$$

для импликации (3.12) будет аналогична уравнению (3.23):

$$\mu_{B_i^{'}}(v) = \alpha_i\ \mu_{B_i}(v). \tag{3.25}$$

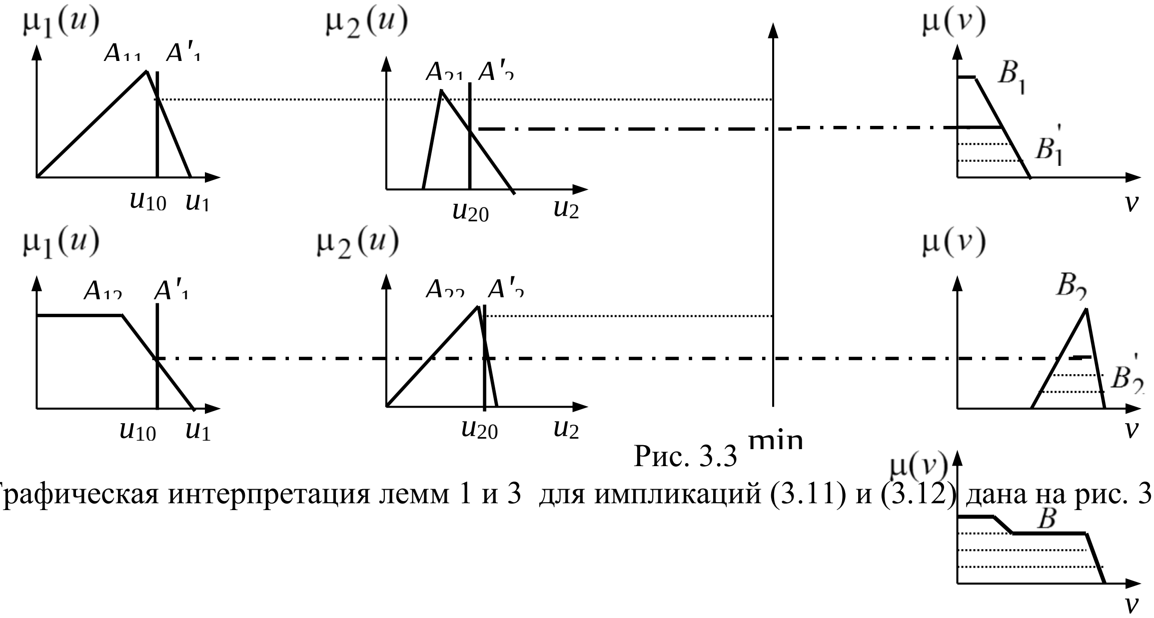


Рис. 3.3

Графическая интерпретация лемм 1 и 3 для импликаций (3.11) и (3.12) дана на рис. 3.3 и 3.

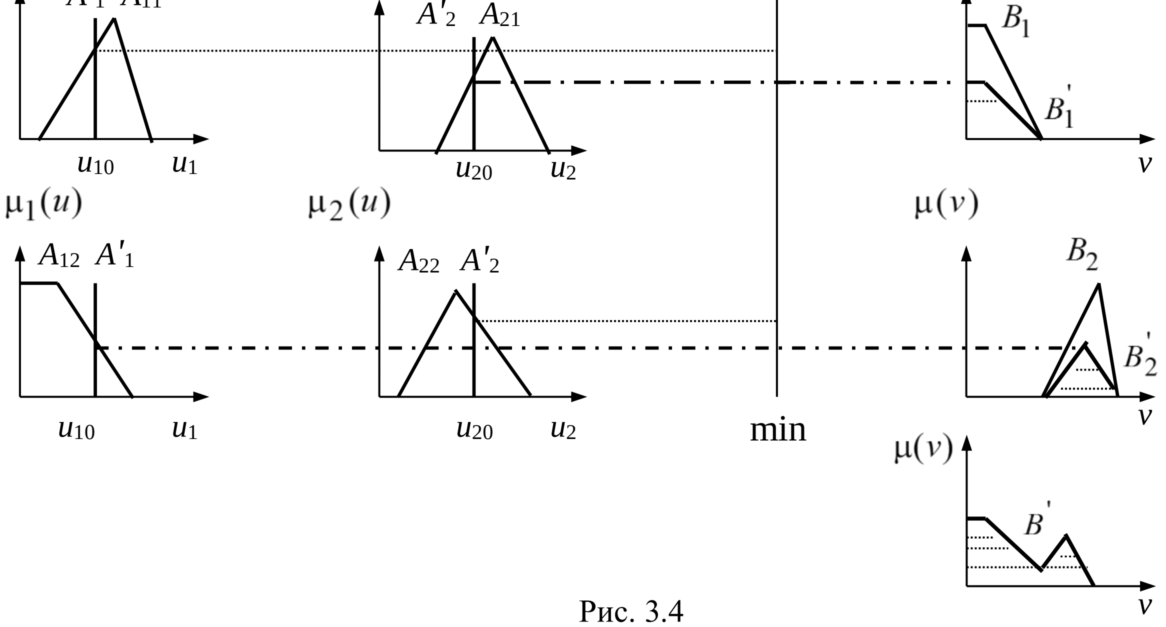


Рис. 3.4

Замечание. Если выходные множества – синглтоны, т. е. $\mu_{B_i}(v_{i0}) = 1$, то из (3.24), (3.25) результат нечеткого вывода в i-м нечетком правиле $\mu_{B'_i}(v) = \alpha_i$. Здесь v_{i0} назначается экспертом.

Вопрос 11

Правило нечеткого логического вывода Такаги – Сугено

Нечеткие правила составляются на основе условных высказываний вида [13]: если u_1 есть A_1 и u_2 есть A_2 и….. u_n есть A_n, то $v = f(u_1, u_2, ..., u_n)$,
где все обозначения такие же, как в (3.8) и в (3.13). В качестве заключений нечетких правил (заключений операции импликации v) обычно используют уравнения первого и нулевого порядков.

Схема нечеткого логического вывода первого порядка:

посылка 1: R_1: если u_1 есть A_{11} и u_2 есть A_{21}, то $v_1 = b_{01} + b_{11}u_1 + b_{21}u_2$,

R_2: если u_1 есть A_{12} и u_2 есть A_{22}, то $v_2 = b_{02} + b_{12}u_1 + b_{22}u_2$,

……………………………………………………………………………………..

R_n: если u_1 есть A_{1n} и u_2 есть A_{2n}, то $v_n = b_{0n} + b_{1n}u_1 + b_{2n}u_2$;

посылка 2: u_1 есть u_{10} и u_2 есть u_{20};

-- (3.26)

следствие: v есть v'.

Нечеткие правила, как и в (3.20), включают нечеткую логическую операцию "и" между лингвистическими значениями A_{1i}, A_{2i} и операцию импликации "если…, то". Поскольку входные и выходные множества – синглтоны, т. е. $A'_1 = u_{10}$, $A'_2 = u_{20}$, $B_i = v_i$, $\mu_{A'_i}(u_{i0}) = 1$, $\mu_{A'_i}(u_i \neq u_{i0}) = 0$, $i = 1, 2$, и если операция "и" определена как операция взятия минимума (1.10), (3.1), то на основе (3.16) результат нечеткого вывода в i-м нечетком правиле [13]

$\mu(v_i) = \min(\alpha_i, R_i)$, где по аналогии с (3.24) $\mu_{A_{1i}}(u_{10}) = \alpha_{1i}$, $\mu_{A_{2i}}(u_{20}) = \alpha_{2i}$,
$\min(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}) = \alpha_i$. Обычно [13], $R_i = 1$, поэтому

$$\mu(v_i) = \alpha_i. \qquad (3.27)$$

Нечеткие правила для алгоритма Такаги – Сугено нулевого порядка задаются на основе условных высказываний вида

если u_1 есть A_1 и u_2 есть A_2 и….. u_n есть A_n, то $v = b_0$. (3.28)

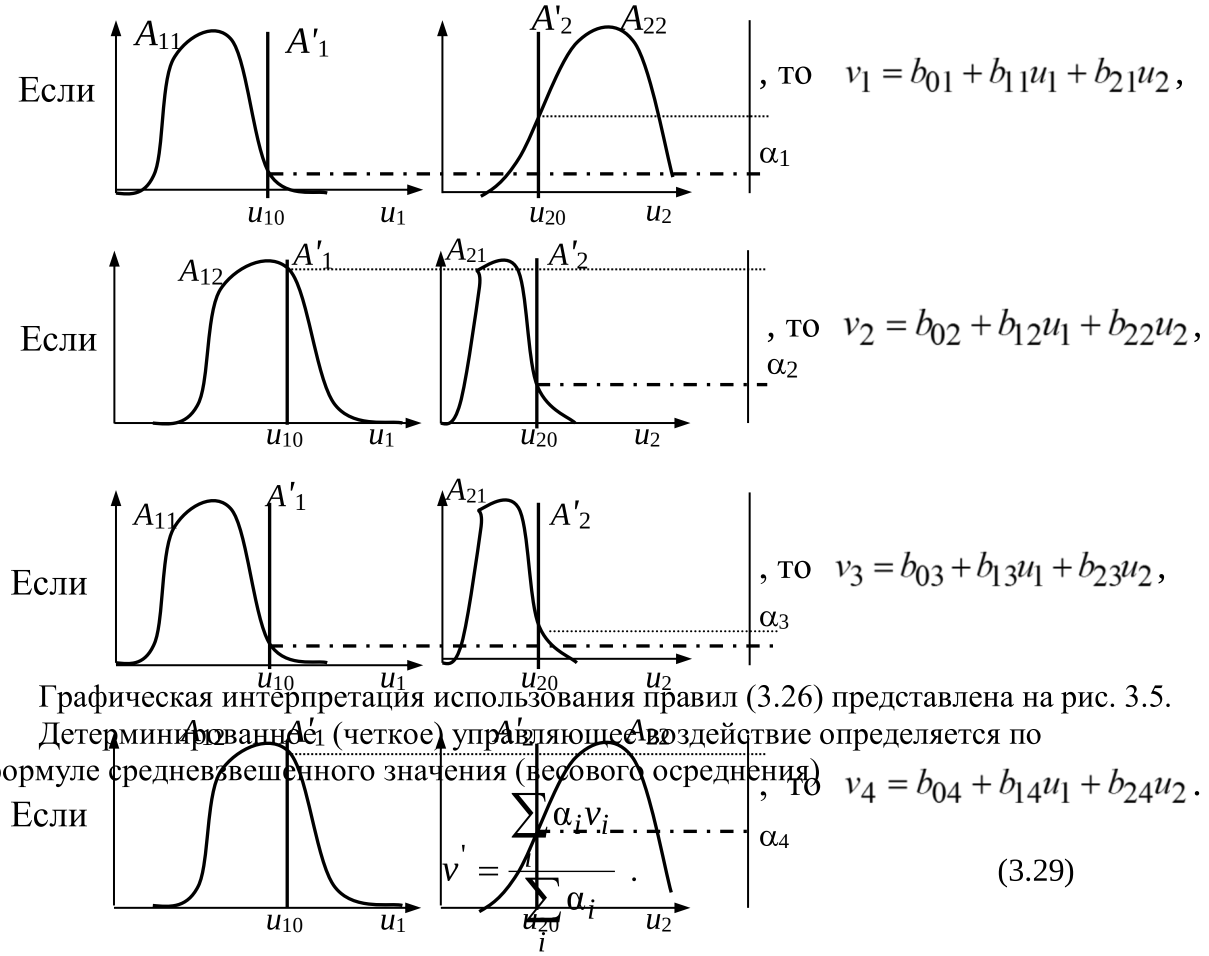


Рис. 3.5

Графическая интерпретация использования правил (3.26) представлена на рис. 3.5.

Детерминированное (четкое) управляющее воздействие определяется по формуле средневзвешенного значения (весового осреднения)

$$v' = \frac{\sum_i \alpha_i v_i}{\sum_i \alpha_i}. \qquad (3.29)$$

Вопрос 12

Правило нечеткого логического вывода Цукамото

Нечеткие правила составляются на основе условных высказываний вида если u_1 есть A_1 и u_2 есть A_2 и….. u_n есть A_n, то v есть *B*.

Схема нечеткого логического вывода:

посылка 1: R_i: если u_1 есть A_{1i} и u_2 есть A_{2i}, то v_i есть B_i;

посылка 2: u_1 есть u_{10} и u_2 есть u_{20};

-- (3.30)

следствие: v есть v'.

Входные множества – синглтоны, $A'_1 = u_{10},\ A'_2 = u_{20},\ \mu_{A'_i}(u_{i0}) = 1,$

$\mu_{A'_i}(u_i \neq u_{i0}) = 0,\ i = 1, 2$. Если операция "и" определена как операция взятия минимума (1.10), (3.1), результат нечеткого вывода в i-м нечетком правиле

$$\mu_{B'_i}(v) = \alpha_i, \quad v_i = \mu^{-1}_{B'_i}[0,\ \alpha_i], \qquad (3.31)$$

где, по аналогии с (3.26), $\mu_{A_{1i}}(u_{10}) = \alpha_{1i}$, $\mu_{A_{2i}}(u_{20}) = \alpha_{2i}$, $\min(\alpha_{1i}, \alpha_{2i}) = \alpha_i$.

Реальное (четкое) управляющее воздействие определяется по формуле средневзвешенного значения (весового осреднения):

$$v' = \frac{\sum_i \alpha_i v_i}{\sum_i \alpha_i} . \tag{3.32}$$

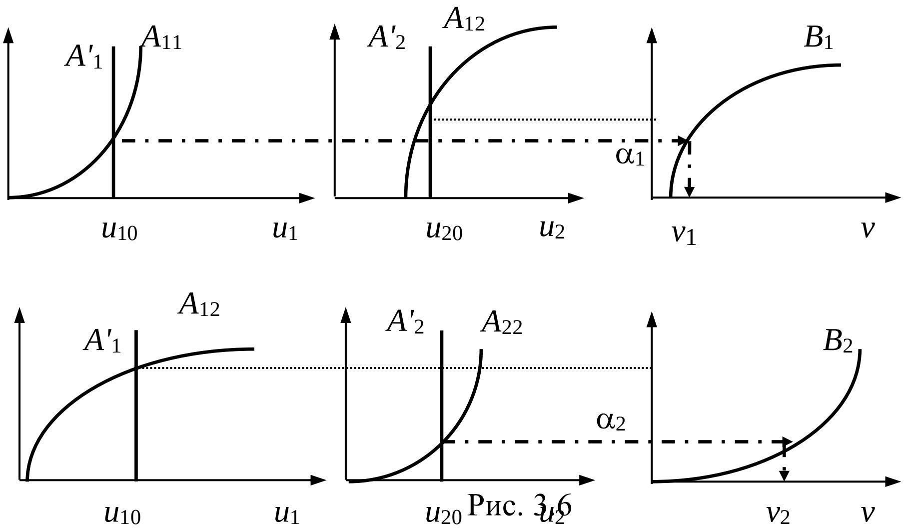


Рис. 3.6

Реальное (четкое) управляющее воздействие определяется по формуле средневзвешенного значения (весового осреднения):

$$v' = \frac{\sum_i \alpha_i v_i}{\sum_i \alpha_i} . \tag{3.32}$$

Вопрос 13

Табличное представление набора правил

Пусть четким входным переменным u_1 и u_2 и выходной переменной v соответствуют лингвистические переменные: x_1 – ошибка, x_2 – производная ошибки, y – управляющее воздействие. Лингвистические значения переменных x_1, x_2, y, соответственно, X_{1i}, X_{2j}, Y_n, П, О, Н – положительное, отрицательное, нулевое (рис. 3.7),

$X_{11} = \text{О}$, $X_{21} = \text{О}$, $X_{12} = \text{Н}$, $X_{22} = \text{Н}$,

$X_{13} = \text{П}$, $X_{23} = \text{П}$.

Число нечетких правил зависит от количества лингвистических значений x_1 и x_2. В примере $i = \overline{1, 3}$, $j = \overline{1, 3}$, число нечетких правил $n = ij = 9$. Нечеткость информации состоит в принадлежности четких входных переменных двум нечетким множествам: $\mu(u_{10}) \in \text{О}$, $\mu(u_{10}) \in \text{Н}$, $\mu(u_{20}) \in \text{Н}$, $\mu(u_{20}) \in \text{П}$.

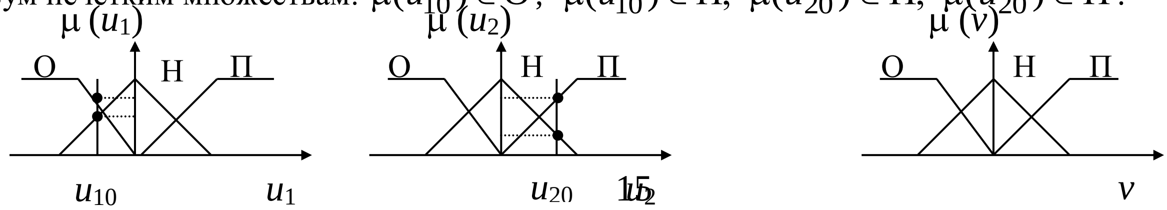


Рис. 3.7

Для каждой переменной число значений функций принадлежности $m = 2$, число входных переменных $k = 2$. Учитывая (1.2), в каждый момент времени нужно рассматривать card $R(U) = m^k = 4$ правила. Правила при $u_1 = u_{10}$ и $u_2 = u_{20}$: R_1: если u_1 есть О и u_2 есть Н, то v есть О;

R_2: если u_1 есть О и u_2 есть П, то v есть Н;

R_3: если u_1 есть Н и u_2 есть Н, то v есть Н;

R_4: если u_1 есть Н и u_2 есть П, то v есть П.

При построении регулятора на основе нечетких правил (нечеткого регулятора) часто правила записывают в виде таблицы.

u_2 \ u_1	О	Н	П
П	Н	П	П
Н	О	Н	П
О	О	О	Н

Вопрос 14

Дефаззификация

При дефаззификации осуществляется переход от лингвистического значения сигнала управления (нечеткого управляющего воздействия) к реальному. Приведем основные методы дефаззификации.

Метод усредненного максимума. Выбор такого значения управления, для которого функция принадлежности имеет наибольшее значение. При наличии нескольких точек с максимальным значением функции принадлежности выбирается усредненное значение для этих точек $v' = \frac{\sum_{i=1}^{l} v_i}{l}$, где $\mu(v_i)$ – максимальное значение функции принадлежности; l – число точек.

Метод центра тяжести. Значение управляющего воздействия находят как абсциссу "центра тяжести" площади, расположенной под графиком функции принадлежности $\mu_B'(v)$ по формуле средневзвешенного значения

$$v' = \frac{\int_{B'} v \mu_{B'}(v) dv}{\int_{B'} \mu_{B'}(v) dv}. \qquad (3.36)$$

Здесь все обозначения такие же как и в (3.26).

Метод центра тяжести для синглтонов. Реализует механизм дефаззификации при использовании регуляторов Такаги–Сугено (3.29) и Цукамото (3.32) и представляет собой специальный случай метода центра тяжести, когда в качестве выходных функций принадлежности используются синглтоны:

$$v' = \frac{\sum_i v_i \mu_{B'_i}(v_i)}{\sum_i \mu_{B'_i}(v_i)}, \qquad (3.37)$$

и который наиболее часто используется на практике.

Вопрос 15

НЕЧЕТКИЕ РЕГУЛЯТОРЫ. Принципы построения и основные отличия нечетких регуляторов

Нечеткими называют регуляторы, ориентированные на обработку знаний (нечетких правил) с целью поиска решения задачи управления. *Нечеткий регулятор* включает: фаззификатор, блок правил (базу знаний) и дефаззификатор (рис. 4.1).

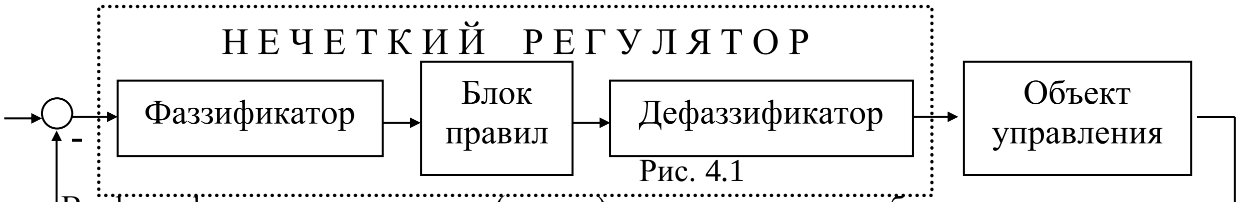


Рис. 4.1

В фаззификаторе реальные (четкие) переменные преобразуются в лингвистические ("положительная", "отрицательная" и т. д.).

В блоке правил определяется нечеткое управляющее воздействия по заранее сформулированным правилам (3.20), (3.26), (3.28), (3.30), (3.33) посредством композиционных правила вывода (3.22) – (3.25), (3.27), (3.31).

В дефаззификаторе вычисляется детерминированное (четкое) управляющее воздействие по формулам (3.29), (3.32), (3.36), (3.37).

Особенности нечеткого управления следующие**.**

1. Правила нечеткого управления (знания), будучи условными высказываниями типа "если…, то", являются логическими.
2. Управление безынерционное.
3. Управление нелинейное.
4. "Управление параллельное". При нечетком управлении используется большое число частных правил в зависимости от различных условий – времени, режима работы и т. д.
5. Управление можно организовать в виде диалога с оператором.
6. Нечеткий регулятор – универсальный аппроксиматор, позволяющий с заданной точностью воспроизвести произвольную непрерывную функцию.

Способы составления правил нечеткого управления [1]:

- на основе опыта и знаний эксперта (аналогично созданию экспертной системы);
- созданием модели действия оператора;
- обучением (моделирование и, по возможности, эксперимент на реальном оборудовании).

Способы определения параметров регулятора включают:

- настройку на основе желаемого переходного процесса. Первоначально настраивают регулятор приближенно, затем, меняя границы нечетких множеств и параметры блока правил, добиваются совпадения заданного и желаемого переходных процессов [1];
- настройку на основе эталонных фазовых траекторий. Желаемое качество процесса управления задается в виде области допустимых фазовых траекторий. При нарушении границ области меняют параметры регулятора [1];
- настройку параметров нечетких регуляторов с помощью генетических алгоритмов;
- настройку с использованием адаптивной сети на основе нейронечеткого подхода [15] (см. прил. 5).

Нечеткий регулятор – универсальный аппроксиматор

Пусть Φ – множество нечетких регуляторов. Множество Φ – универсальные аппроксиматоры [18], если для любого заданного оператора $G(u)$ (G: $R^n \to R$) и для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует нечеткий регулятор $F_f(u)$ (F_f: $R^n \to R$) такой, что $\max\{\,|G(u) - F_f(u)|,\ u \in R^n\} \le \varepsilon$.

В системе управления, изображенной на рис. 4.6, выход объекта управления (ОУ) – $u = u(t) \in R^n$; выход регулятора F – $v = v(t)$; выход регулятора F_f – $\xi = \xi(t)$.

Известно [18], что множество Φ нечетких регуляторов обладает свойством устойчивости: для устойчивой системы (ОУ, F) найдется регулятор $F_f \in \Phi$ такой, что система (ОУ, F_f) также устойчива.

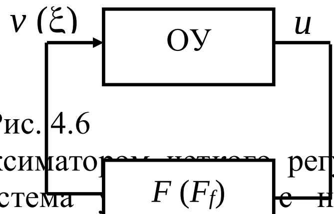


Рис. 4.6

Таким образом, если нечеткий регулятор является аппроксиматором четкого регулятора, гарантирующего устойчивость системы управления, то система с нечетким регулятором будет также устойчива, т. е. выполняется условие $\max\{\,|F(u) - F_f(u)|,\ u \in R^n\} \le \varepsilon$.

Вопрос 16

Типовые структуры нечетких систем управления

Приведем основные структуры нечетких систем управления.

1. Включение нечеткого регулятора в структуру системы управления вместо четкого регулятора [1], [2], [16] (рис. 4.2).

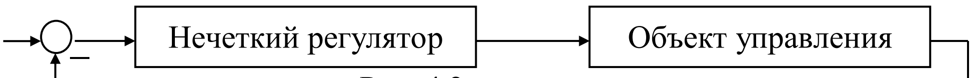


Рис. 4.2

2. Система управления с параметрической адаптацией (рис. 4.3) представляет собой двухуровневую систему управления: на нижнем (исполнительном) уровне находится четкий регулятор (например, ПИД-регулятор [17]), на верхнем – нечеткий регулятор. В системе управления посредством нечеткого регулятора осуществляется настройка параметров четкого регулятора. Возможно использование на нижнем уровне также нечеткого регулятора с перестраиваемыми параметрами [1].

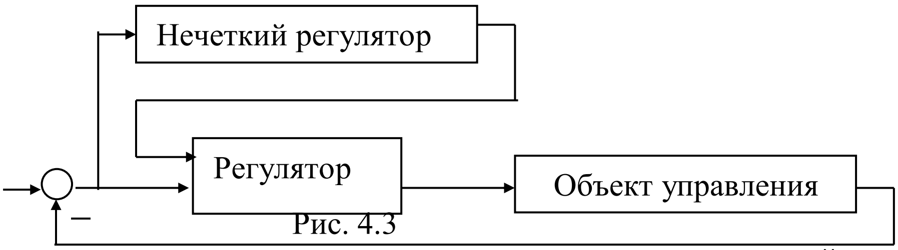


Рис. 4.3

3. Нечеткая система управления для решения многокритериальной задачи [16] (рис. 4.4). С помощью нечеткого регулятора обеспечивается выбор компромисса между различными критериями управления.

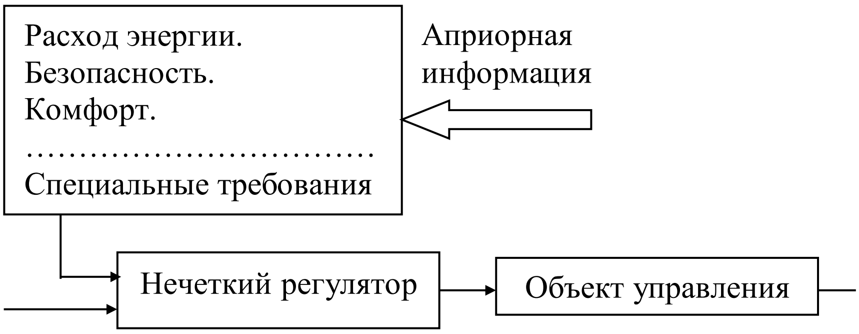


Рис. 4.4

4. Нечеткая система управления с эталонной моделью (рис. 4.5).

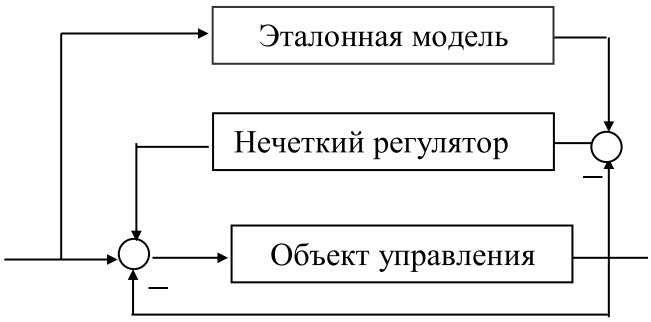


Рис. 4.5

Система управления обеспечивает заданное качество управления, которое задается с помощью эталонной модели. Регулятор включен в контур управления по ошибке между выходными сигналами эталонной модели и объекта управления. Выполняет функции нечеткого алгоритма сигнальной адаптации.

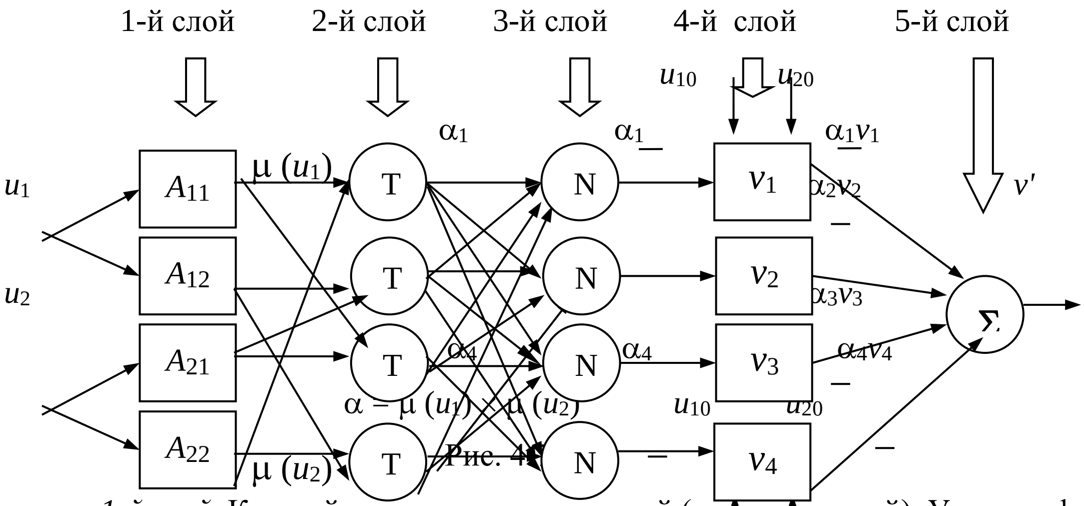
Вопрос 17

Нейронечеткий подход к построению регуляторов

Архитектура адаптивных сетей. Элементарный преобразующий элемент сети – *узел* (node). Структура адаптивной сети задается набором узлов [15], [19]. Каждый узел характеризуется *узловой функцией*. Если узловая функция зависит от параметров узла (настраиваемый узел), то узел называется *адаптивным* и, как правило, обозначается в виде квадрата. Если функция узла фиксирована, то узел называется *фиксированным* и, как правило, обозначается в виде круга. Сети бывают статические (с прямыми связями) и динамические (с обратными связями). В отличие от искусственных нейронных сетей, каждая связь адаптивной сети используется только для определения направления распространения выходного сигнала узла. В ней отсутствуют весовые коэффициенты связей. Кроме того, в отличие от искусственных нейронных сетей, в сетях с прямыми связями выход i-го узла l-го слоя может подаваться на входы l+2-го, l+3-го слоев и т. д.

С помощью адаптивной сети с прямыми связями (прямого распространения) можно настроить параметры нечеткого регулятора Такаги – Сугено [13], [19]. При этом узловые функции должны быть дифференцируемы.

Рассмотрим структуру адаптивной нечеткой сети (рис. 4.7) настройки регулятора в соответствии с нечеткими правилами (рис. 3. 5).



1-й слой. Каждый узел слоя – адаптивный (настраиваемый). Узловые функции – функции принадлежности нечетких множеств $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$. Выходы узлов равны $\mu_{A_{ij}}(u_i),\ i, j = 1,\ 2,$ где i – индекс лингвистической переменной, j – индекс значения лингвистической переменной. Параметры узлов слоя – параметры функций принадлежности, называемые "*параметры посылок*".

2-й слой. Каждый узел слоя – фиксированный (ненастраиваемый). Обозначение узлов T – триангулярная норма (3.1). Выполнение нечетких операций "и":

$$\alpha_1 = \min(\mu_{A_{11}}(u_1), \mu_{A_{22}}(u_2)); \; \alpha_2 = \min(\mu_{A_{12}}(u_1), \mu_{A_{21}}(u_2)) = \alpha_2;$$

$$\alpha_3 = \min(\mu_{A_{11}}(u_1), \mu_{A_{21}}(u_2)); \; \alpha_4 = \min(\mu_{A_{12}}(u_1), \mu_{A_{22}}(u_2)) = \alpha_4.$$

Нечеткая операция "и", согласно (3.5), может быть определена так же, как операция произведения.

3-й слой. Каждый узел – фиксированный. В каждом i-м узле определяется отношение значения функции принадлежности α_i, полученного во 2-м слое, к сумме всех полученных значений функций принадлежности

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}.$$

Выходы узлов – нормированные значения функции принадлежности. Узлы обозначаются буквой N (нормирование).

4-й слой. Каждый узел – адаптивный. Параметрами i-го узла являются "*параметры заключения*" i-го правила посылки 1 схемы нечеткого вывода. Дополнительно вводятся сигналы u_{10}, u_{20} – исходные данные, для которых определяется величина управления.

5-й слой. Единственный фиксированный узел слоя, осуществляющий процедуру дефаззификации методом весового осреднения (3.37):

$$v' = \sum_i \bar{\alpha}_i v_i = \frac{\sum_i \alpha_i v_i}{\sum_i \alpha_i}, \; i = 1,\ldots,4.$$

Обучение сети осуществляется на основе гибридного алгоритма обучения – с использованием метода обратного распространения ошибки и метода наименьших квадратов. Во время прямого прохода на основе метода наименьших квадратов настраиваются параметры 4-го слоя – параметры заключения нечетких правил. Во время обратного прохода настраиваются параметры 1-го слоя – параметры функций принадлежности на основе метода обратного распространения ошибки.

Вопрос 18

3.8. Диагностика с нечеткими правилами

Задача определения исходных данных (условий, причин, фактов) на основе полученных результатов (следствий, симптомов, признаков).

Концептуальной основой формализации правил нечеткого условного логического вывода является правило *modus tollens*.

Схема нечеткого логического вывода:

посылка 1: R_i: если u есть A_i, то v есть B_i;

посылка 2: v есть B'; (3.36)

(вывод)

условие: u есть A' ?

Здесь все обозначения аналогичны (3.5). U – множество, состоящее из n условий, V – множество m следствий. При $A' = \bar{A}$, $B' = \bar{B}$ вывод сводится к *modus tollens*.

Композиционное правило нечеткого вывода:

$$A' = R \circ B' = (A \to B) \circ B'.$$

Функция принадлежности результата нечеткого вывода

$$\mu_{A'}(u) = \sup_{v \in V}[\min(\mu_R(u,v), \mu_{B'}(v))]. \qquad (3.37)$$

Пример. Упрощенная модель диагностики неисправности автомобиля. Число причин n=2: u_1 – неисправность аккумулятора; u_2 – повышенный расход моторного масла. Число признаков m=3: v_1 – затруднение при запуске; v_2 – ухудшение цвета выхлопных газов; v_3 – недостаток мощности.

Нечеткое отношение R задается экспертом:

R	v_1	v_2	v_3
u_1	0.9	0.1	0.1
u_2	0.4	0.8	0.5

Наблюдаются признаки: $B' = 0.9|v_1 + 0.1|v_2 + +0.2|v_3$; т.е. значительные затруднения при запуске, цвет выхлопных газов почти не изменен, небольшой недостаток мощности. На основе (3.37) для дискретных U и V, получим

$\mu_{A'}(u_i) = \max_{v \in V}[\min(\mu_R(u_i, v_j), \mu_{B'}(v_j))]$, $i = 1,2$, $j = \overline{1,3}$. Вычислим $\mu_{A'}(u_2)$.

$\min(\mu_R(u_2, v_1), \mu_{B'}(v_1)) = \min(0.4, 0.9) = 0.4,$

$\min(\mu_R(u_2, v_2), \mu_{B'}(v_2)) = \min(0.8, 0.1) = 0.1,$

$\min(\mu_R(u_2, v_3), \mu_{B'}(v_3)) = \min(0.5, 0.2) = 0.2$

Откуда $\mu_{A'}(u_2) = \max(0.4, 0.1, 0.2) = 0.4$. В результате аналогичных расчетов можно получить $\mu_{A'}(u_1) = 0.9$, получим $A' = 0.9|u_1 + 0.4|u_2$. Вывод: неисправность аккумулятора.