Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)»

«Нелинейное и адаптивное управление в технических системах» (НАУТС)

Тема 12

Лектор
Виктор Владимирович Путов,
д.т.н., профессор

Тема 12

- Адаптивное управление с неявной эталонной моделью. Метод шунтирования.

Источники

- **2.**[2.Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами / СПб: Наука, 2000. - 549 с.]

\- ***Глава 6, п. 6.6 (адаптивное управление с неявной эталонной моделью. Метод шунтирования), страницы 447-457.***

Тема 12.1

- **Синтез адаптивных систем по выходу для строго минимально фазового одноканального и многоканального объектов (п.п. 6.6.1, 6.6.2, с.с. 447-452)**

6.6. Адаптивное управление с неявной эталонной моделью. Метод шунтирования

Ниже излагаются теоретические основы метода синтеза адаптивных регуляторов, основанного на использовании неявно введенной эталонной модели и включенного параллельно с объектом корректирующего звена – шунта. Такой подход позволяет существенно снизить как число настраиваемых параметров, так и число вспомогательных фильтров, т. е. понизить общий динамический порядок адаптивного регулятора. Преимущества подхода особенно заметны при управлении многомерными и многоканальными минимально-фазовыми системами.

В описываемых ниже системах эталонная модель представлена набором параметров адаптивного регулятора: коэффициентов некоторого "эталонного" дифференциального уравнения, решения которого обладают желаемым качеством переходных процессов. При этом мера расхождения реального и эталонного процессов вводится как невязка правых частей соответствующих уравнений, т. е. без вычисления их решений. В этом случае говорят об *адаптивных системах с неявной эталонной моделью* (АСНЭМ).

Как и в п. 6.3, сначала рассматривается случай строго минимально-фазового объекта (с единичной относительной степенью $r = 1$) но в отличие от п. 6.3 выход объекта считается вектором. Затем рассматривается случай $r > 1$ и описывается способ сведения задачи к случаю $r = 1$ шунтированием объекта.

6.6.1. Синтез адаптивной системы для строго минимально-фазового объекта

Рассмотрим объект, описываемый уравнениями состояния

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = C^T x, \tag{6.391}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта, $u \in \mathbb{R}^1$ – скалярное управление, $y \in \mathbb{R}^l$ – вектор измеряемых выходов, $A = A(\xi)$, $B = B(\xi)$, $C = C(\xi)$ – матрицы соответствующих размерностей, зависящие от вектора неизвестных параметров $\xi \in \Xi$. Задан линейный регулятор с настраиваемыми коэффициентами

$$u = \widehat{\theta}(t)^T y(t), \tag{6.392}$$

где $\widehat{\theta} \in \mathbb{R}^l$. Поставим задачу: найти алгоритм адаптации

$$\dot{\widehat{\theta}} = \Theta(y(t)) \tag{6.393}$$

такой, что для любого $\xi \in \Xi$ в системе (6.391), (6.393) достигалась цель управления

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0, \tag{6.394}$$

а траектории системы $\{x(t), \widehat{\theta}(t)\}$ были ограничены. Таким образом, рассматривается задача синтеза системы, адаптивной в классе Ξ по отношению к цели (6.394) при заданной структуре (6.392) основного контура.

Поставленную задачу будем решать методом скоростного градиента (см. гл. 3). Для этого зададим цель управления (6.394) соотношением $Q(x(t)) \to 0$ при $t \to \infty$, где $Q(x) = 0.5\, x^T H x$ – оценочная функция, $H = H^T > 0$ – положительно определенная $n \times n$-матрица. Найдем функцию $\omega(x, \widehat{\theta}, \xi)$ – производную $Q(x)$ в силу (6.391), а затем $\nabla_{\widehat{\theta}} \omega(x, \widehat{\theta}, \xi)$. Имеем:

$$\omega(x, \widehat{\theta}, \xi) = x^T H(Ax + B\widehat{\theta}^T y), \tag{6.395}$$

$$\nabla_{\widehat{\theta}} \omega(x, \widehat{\theta}, \xi) = x^T H B y. \tag{6.396}$$

Поскольку алгоритм адаптации должен использовать только измеряемые величины, в (6.396) скаляр $x^T H B$ должен быть функцией вектора выходов $y(t)$. Так как $x^T H B$ и $y = C^T x$ линейны по x, то $x^T H B$ должен быть линейной комбинацией выходов, т. е. $B^T H x = g^T C^T x$ для некоторого $g \in \mathbb{R}^l$ и любого $x \in \mathbb{R}^n$. Последнее означает, что $HB = Cg$. Таким образом, мы пришли к алгоритму адаптации

$$\dot{\widehat{\theta}} = -g^T y(t) \Gamma y(t), \tag{6.397}$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$ – $l \times l$-матрица. Чтобы получить условия достижения цели управления в системе (6.391), (6.392), (6.397), воспользуемся теоремой 3.1. Условие A1, очевидно, выполнено, так как правые части системы и функция $Q(x)$ суть гладкие функции, не зависящие от t. Условие выпуклости A3 справедливо в силу линейности по $\widehat{\theta}$ правой части (6.395). Проверим условие достижимости A4. Оно будет выполнено, если существует вектор $\theta \in \mathbb{R}^l$ такой, что $x^T H(A + B\theta^T C^T)x < 0$ при $x \neq 0$. При этом нет нужды находить H, θ, поскольку алгоритм (6.397) от них не зависит. Достаточно лишь знать, что такие матрица и вектор существуют. Таким образом, возникает следующая алгебраическая задача.

Даны $n \times n$-матрица A, $n \times l$-матрица C, векторы $B \in \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbb{R}^l$. Требуется найти условия существования $n \times n$-матрицы $H = H^T > 0$ и вектора $\theta \in \mathbb{R}^l$ таких, что

$$HA_* + A_*^T H < 0, \quad HB = Cg, \quad A_* = A + B\theta^T C^T.$$

Задача аналогична задаче о пассификации системы. Ее решение дается теоремой П3.1 [116], помещенной в Приложении 3 и позволяющей сформулировать основной результат данного параграфа. Напомним, что передаточная функция $\chi(s)$ линейной системы $\dot{x} = Px + qu$, $y = r^T x$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}^1$ называется строго минимально-фазовой, если ее числитель $\beta(s) = \alpha(s)\chi(s)$, где $\alpha(s) = \det(sI - P)$ является гурвицевым (устойчивым) многочленом степени $n-1$ и гипер-минимально-фазовой, если, кроме того, коэффициенты многочлена $\beta(s)$ положительны.

Теорема 6.21. *Система (6.391), (6.392), (6.397) адаптивна в классе Ξ по отношению к цели управления (6.394) и все ее траектории ограничены, если для любого $\xi \in \Xi$ функция $g^T W(s)$ строго минимально-фазовая, где $W(s) = C^T(sI_n - A)^{-1}B$ - передаточная $l \times 1$-матрица объекта (6.391).*

Замечание 6.11. Многочлен-числитель функции $g^T W(s)$ можно представить в виде $G(s) = g^T h(s)$, где $h(s) = \alpha(s)W(s)$, $\alpha(s) = \det(sI_n - A)$. Таким образом, условия работоспособности адаптивной системы выражаются через передаточную матрицу-столбец $W(s)$ (от входа u к выходу y) и через характеристический многочлен объекта $\alpha(s)$. Эти условия не зависят от способа приведения уравнений объекта к виду (6.391). Более того, для проверки условий теоремы вообще не нужно приводить уравнения объекта к виду (6.391), достаточно лишь знать, что это можно сделать. □

В соответствии с результатами, приведенными в гл. 3, условия теоремы 6.21 достаточны для существования у системы (6.391)–(6.393) функции вида

$$V(x, \hat{\theta}) = x^T H x + (\hat{\theta} - \theta)^T H_1 (\hat{\theta} - \theta), \qquad (6.398)$$

где $H = H^T > 0$ - $n \times n$-матрица, $H_1 = H_1^T > 0$ - $l \times l$-матрица, $\theta \in \mathbb{R}^l$, обладающей свойством

$$\dot{V}(x, \hat{\theta}) < 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0. \qquad (6.399)$$

Нетрудно видеть, что приведенные рассуждения обратимы и эти условия являются и необходимыми.

Теорема 6.22. *Пусть $W(s) \not\equiv 0$. Для существования у системы (6.391)–(6.393) функции Ляпунова вида (6.398) со свойством (6.399) необходимо и достаточно, чтобы алгоритм адаптации имел вид (6.397), а многочлен $G(s)$ был гурвицевым степени $n-1$ с положительными коэффициентами.*

Теорема 6.22 показывает, что алгоритмами вида (6.397) исчерпываются все алгоритмы, которые могут быть получены с помощью функции Ляпунова вида (6.398), и синтезировать еще какие-либо алгоритмы, используя функцию (6.398) со свойством (6.399), невозможно.

К алгоритму (6.397) можно также прийти, выбирая в схеме скоростного градиента оценочную функцию в виде $Q(x) = (g^T y)^2 = (g^T C^T x)^2$. Эта оценочная функция вырожденная: она не удовлетворяет условию роста A1. Тем не менее можно показать, что при выполнении условия строгой минимально-фазовости из ограниченности выхода $y(t)$ следует ограниченность всего вектора состояния $x(t)$, т. е. работоспособность системы (6.391), (6.392), (6.397) можно обосновать с помощью вырожденной функции Ляпунова. Такой подход оказывается более удобным для введения в систему зоны нечувствительности с целью обеспечения ее работоспособности в условиях помех.

6.6.2. Синтез адаптивной системы для строго минимально-фазового многоканального объекта

Распространим результаты 6.6.1 на многосвязные системы, т. е. на объекты с несколькими управляющими воздействиями. Для описания объекта и регулятора сохраним уравнения (6.391), (6.392), в которых будем считать, что $u \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $\widehat{\theta}$ – $l \times m$-матрица, B – $n \times m$-матрица. Передаточная матрица $W(s) = C^T(sI - A)^{-1}B$ теперь будет иметь порядок $l \times m$. В случае $m > 1$ вместо алгоритма (6.397) будем рассматривать алгоритм

$$\dot{\widehat{\theta}}_j = -\left(g_j^T y\right)\Gamma_j y, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{6.400}$$

где $\widehat{\theta}_j$ – столбцы матрицы настраиваемых параметров $\widehat{\theta}$, $g_j \in \mathbb{R}^l$, $j = 1, \ldots, m$, $\Gamma_j = \Gamma_j^T > 0$ – $l \times l$-матрицы. В алгоритме (6.400) для настройки каждого столбца матрицы $\widehat{\theta}$ по существу используется алгоритм вида (6.397), параметры которого (вектор g_j и матрица Γ_j) свои для каждого столбца.

Приведем формулировки утверждений, обобщающих теоремы 6.22, 6.23 на случай $m > 1$. Напомним, что $m \times m$-матрица из правильных дробно-рациональных функций $P(s)$ называется минимально-фазовой (см. п. 2.6), если многочлен $\varphi(s)$ гурвицев, где

$$\gamma(s) = \det(sI_n - R), \quad \varphi(s) = \delta(s) \det P(s), \quad \Gamma = \lim_{|s| \to \infty} sP(s);$$

матрица $P(s)$ называется гипер-минимально-фазовой, если многочлен $\varphi(s)$ гурвицев, а матрица Γ симметрична и положительно определена.

Обозначим через G $l \times m$-матрицу со столбцами $g_1, \ldots, g_m$.

Теорема 6.23. *Система (6.391), (6.392), (6.400) адаптивна в классе Ξ по отношению к цели (6.394), если класс Ξ определяется условием: для любого $\xi \in \Xi$ матрица $\tau G^T W(s)$ – гипер-минимально-фазовая при некоторой $\tau = \mathrm{diag}\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$, $\tau_j > 0$.*

Теорема 6.24. *Пусть передаточная матрица объекта не равна нулю тождественно, а ранг матрицы B равен m. Для существования у системы (6.391)–(6.393) функции Ляпунова вида*

$$V(x,\widehat{\theta}) = x^T H x + \sum_{j=1}^{m} (\widehat{\theta}_j - \theta_j)^T H_j (\widehat{\theta}_j - \theta_j), \tag{6.401}$$

где $H = H^T > 0$ – $n \times m$-матрица, $H_j = H_j^T > 0$, $j = 1, \ldots, m$ – $l \times l$-матрицы, $\widehat{\theta}_j$, θ_j – столбцы матриц $\widehat{\theta}$, θ соответственно, причем $\dot{V}(x,\widehat{\theta}) < 0$ при $x \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы алгоритм адаптации имел вид (6.400), а матрица $\tau G^T W(s)$ была гипер-минимально-фазовой при некоторой $\tau = \mathrm{diag}\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$, $\tau_j > 0$.

Теоремы 6.23, 6.24 доказываются аналогично теоремам 6.21, 6.22 с использованием теоремы П3.1 [116].

Приведенные результаты распространены на нелинейные многосвязные системы [114].

Тема 12.2

- **Общий случай. Метод шунтирования (п. 6.6.3, с.с. 452-456)**

6.6.3. Общий случай. Метод шунтирования

Перейдем к рассмотрению случая произвольного значения относительной степени объекта. Мы покажем, следуя [120], что для любого минимально-фазового объекта со скалярной относительной степенью $r > 1$ существует параллельный компенсатор порядка $r-1$, включение которого эквивалентно превращению объекта в гипер-минимально-фазовый ($r = 1$). Это позволяет применить алгоритм адаптивной стабилизации с неявной эталонной моделью, описанный выше.

Вновь рассмотрим линейный стационарный объект (6.391), где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^l$, $u \in \mathbb{R}^m$, с матричной передаточной функцией $W(s) = C^T(sI - A)^{-1}B$. Пусть $l = m$. Положим $\delta(s) = \gamma(sI - A)$, $\varphi(s) = \gamma(s) \det W(s)$ Напомним, что система (6.391) имеет скалярную относительную степень r, если $CA^iB = 0$ для $i = 0, 1, \ldots, r-2$, $\det CA^{r-1}B \neq 0$ (см. п. 2.4).

Очевидно, строго минимально-фазовая и гипер-минимально-фазовая системы имеют скалярную относительную степень $r = 1$. Как известно, при $r = 1$ многочлен $\varphi(s)$ имеет степень $n - m$ и старший коэффициент $\det CB$.

Обоснование корректности введения шунта содержится в следующем утверждении.

Теорема 6.25. *Пусть для некоторой $l \times m$-матрицы G объект с передаточной функцией $G^TW(s)$ минимально-фазовый и имеет скалярную относительную степень $r > 1$, причем матрица*

$-G^{\mathsf T} C A^{r-1} B$ *гурвицева. Пусть* $P(s)$, $Q(s)$ *– гурвицевы многочлены степеней* $r-2$, $r-1$ *соответственно, причем знаки коэффициентов* $P(s)$, $Q(s)$ *и* $\varphi(s) = \gamma(s) \det G^{\mathsf T} W(s)$ *совпадают. Пусть, наконец,*

$$W_{\kappa\epsilon}(s) = G^{\mathsf T} W(s) + \kappa\epsilon P(\epsilon s)/Q(s) I_m. \qquad (6.402)$$

Тогда существует число $\kappa_0 > 0$ *и функция* $\epsilon_0(\kappa) > 0$ *такие, что матрица* $W_{\kappa\epsilon}(s)$ *строго минимально-фазовая при* $\kappa > \kappa_0$, $0 < \epsilon < < \epsilon_0(\kappa)$.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме, близкой к лемме 3 работы [116]).

Лемма 6.9. *Пусть* $D(s,\epsilon)$, $E(s,\epsilon)$ *–* $m \times m$*-матричные многочлены с коэффициентами, непрерывными по* ϵ *при* $\epsilon = 0$:

$$\begin{aligned} D(s,\epsilon) &= D_r(\epsilon) s^r + \ldots + D_0(\epsilon), \\ E(s,\epsilon) &= E_{n-1}(\epsilon) s^{n-1} + \ldots + E_0(\epsilon). \end{aligned}$$

Пусть многочлены $\det E(s,0)$, $\det(sD(s,0) + E_{n-1}(0))$ *гурвицевы.*

Тогда многочлен $\pi(s,\epsilon) = \det[\epsilon s^n D(\epsilon s,\epsilon) + E(s,\epsilon)]$ *будет гурвицевым при всех достаточно малых* $\epsilon > 0$.

Доказательство леммы 6.9. Пусть $\epsilon \to 0$. Тогда $\pi(s,\epsilon) \to \pi(s,0) = \det E(s,0)$. Следовательно, $m(n-1)$ корней многочлена $\pi(s,\epsilon)$ стремятся к корням многочлена $\det E(s,0)$, а остальные $m(r+n) - m(n-1) = m(r+1)$ корней стремятся к ∞. Проанализируем их поведение, сделав замену $\epsilon s = \mu$ и положив $\nu(\mu,\epsilon) = \epsilon^{m(n-1)}\pi(\mu/\epsilon,\epsilon)$. Получим

$$\lim_{\epsilon\to 0}\nu(\mu,\epsilon) = \mu^{m(n-1)}\det(\mu D(\mu,0) + E_{n-1}(0)).$$

Следовательно, $m(r+1)$ корней $\nu(\mu,\epsilon)$ стремятся к μ_i, $i = 1,\ldots,m(r+1)$ – корням $\det(sD(s,0) + E_{n-1}(0))$, а остальные $m(n-1)$ корней стремятся к нулю. Таким образом, $m(r+1)$ корней исходного многочлена $\pi(s,\epsilon)$ имеют вид $\mu_i/\epsilon + 0(1/\epsilon)$ и в условиях леммы лежат в левой полуплоскости при малых $\epsilon > 0$. Лемма доказана. ■

Следствие 6.3. *Пусть многочлены* $\det E(s,0)$, $\det D(s,0)$ *и* $\det D(sD(0,0)+E_{n-1}(0))$ *гурвицевы. Тогда существуют число* $\kappa_0 > 0$ *и функция* $\epsilon_0(\kappa) > 0$ *такие, что многочлен* $\pi(s,\epsilon) = \det[\epsilon s^n D(\epsilon s,\epsilon) + E(s,\epsilon)]$ *гурвицев при* $\kappa > \kappa_0$, $0 < \epsilon < \epsilon_0(\kappa)$.

Доказательство теоремы 6.25. Представим $\det W_{\kappa\epsilon}(s)$ в виде

$$\det W_{\kappa\epsilon}(s) = \{\gamma(s)Q(s)\}^{-m}\det\{R(s)Q(s) + \kappa\epsilon\gamma(s)P(\epsilon s)I_m\},$$

где $R(s) = G^{\mathrm{T}}W(s)\gamma(s)$. В условиях теоремы матрицу $R(s)$ можно представить в виде (см., например, [103]): $R(s) = R_{n-r}s^{n-r} + \ldots + R_0$, где $R_{n-r} = G^{\mathrm{T}}CA^{n-r}B$. При этом многочлен $\det R(s)$

имеет вид $\det R(s) = \gamma(s)^{m-1}\varphi(s)$, где $\varphi(s)$ – гурвицев многочлен. По лемме 6.9 многочлен $\gamma(s)^{-m+1}Q(s)^{-m}\det W_{\kappa\epsilon}(s)$ будет гурвицев при достаточно малых $\epsilon > 0$, если будет гурвицевым многочлен $\det\{\kappa s P(s) I_m + R_{n-r}Q_{r-1}\}$, что в свою очередь будет выполнено при достаточно больших κ, если $-R_{n-r}$ – гурвицева матрица. Для доказательства теоремы осталось убедиться в том, что матрица $\lim_{s\to 0} sW_{\kappa\epsilon}(s)$ симметрична и положительно определена. Но это так, поскольку $\lim_{s\to 0} sW_{\kappa\epsilon}(s) = \kappa\epsilon P_{r-2}I_m$. ■

Теперь можно описать структуру предлагаемого адаптивного регулятора и условия его применимости.

Теорема 6.26. *Пусть передаточная функция $G^T W(s)$ минимально-фазовая для некоторой $l\times m$-матрицы G и имеет скалярную относительную степень $r \geq 1$, причем матрица $-G^T CA^{r-1}B$ гурвицева. Пусть $P(s)$, $Q(s)$ – гурвицевы многочлены степеней $r-2$, $r-1$ соответственно и знаки коэффициентов $P(s)$, $Q(s)$ и $\varphi(s) = \gamma(s)\det G^T W(s)$ совпадают. Пусть алгоритм управления имеет вид*

$$u_i = \widehat{\theta}_{i1}^T y + \widehat{\theta}_{2i} v_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6.403}$$

$$\frac{d\overline{\theta}_1}{dt} = -\Gamma_1 \begin{bmatrix} (g_1^T y + v_1)y \\ \vdots \\ (g_m^T y + v_m)y \end{bmatrix}, \tag{6.404}$$

$$\frac{d\overline{\theta}_2}{dt} = -\Gamma_2 \begin{bmatrix} (g_1^T y + v_1)v_1 \\ \vdots \\ (g_m^T y + v_m)v_m \end{bmatrix}, \tag{6.405}$$

где $\tilde{\theta}_1 = \mathrm{col}\,(\theta_{1i}) \in \mathbb{R}^{lm}$ *– вектор-столбец, составленный из столбцов* $\widehat{\theta}_{1i}$, $\bar{\theta}_2 = \mathrm{col}(\widehat{\theta}_{2i}) \in \mathbb{R}^m$ *– вектор-столбец, составленный из чисел* $\widehat{\theta}_{2i}$, $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0$ *–* $(lm) \times (lm)$*-матрица,* $\Gamma_2 = \Gamma_2^T > 0$ *–* $m \times m$*-матрица,* $G = [g_1, \ldots, g_m]$, g_i, $i = 1, \ldots, m$ *–* l*-мерные векторы,* v_i, $i = 1, \ldots, m$ *– выходы вспомогательных систем (фильтров):*

$$Q(p)v_i = \kappa\epsilon P(\epsilon p)u_i, \quad p = d/dt. \tag{6.406}$$

Тогда в системе (6.391), (6.404), (6.405) для всех $\kappa > \kappa_0$, $0 < \epsilon < \epsilon_0(\kappa)$ *достигается цель (6.394), а также цели*

$$\lim_{t\to\infty} v_i(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \widehat{\theta}_i(t) = \mathrm{const}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{6.407}$$

Доказательство теоремы 6.26. Введем расширенный объект

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \quad \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} \tag{6.408}$$

ющих работах. Предложенный подход был распространен на нелинейные объекты в работах [149, 157]. Подробнее о применении метода шунтирования см. в [5].

Благодарю за внимание

Заслуженный профессор СПбГЭТУ «ЛЭТИ»,
д.т.н., профессор В.В. Путов
Кафедра систем автоматического управления
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
Санкт-Петербург, Россия
vvputov@mail.ru