

## Лекция 6. Хаотические системы (продолжение), нелинейный анализ.

### 6.1 Определение хаотической системы.

Терминология в области хаотических моделей еще не устоялась, и существует несколько различных определений хаотических систем. Приведем одно из простейших.

Рассмотрим динамическую систему в непрерывном времени

$$\dot{x} = F(x), \quad (6.1)$$

где  $x = x(t) \in R^n$  – вектор состояния системы,  $0 \leq t < \infty$ .

Определение 1. Замкнутое множество  $\Omega \subset R^n$  называется аттрактором системы (3.64), если: а) существует такое открытое множество  $\Omega_0 \subset \Omega$ , что все траектории  $x(t)$  системы (6.1), начинающиеся в  $\Omega_0$ , определены при всех  $t \geq 0$  и стремятся к  $\Omega$  при  $t \rightarrow \infty$ ; б) никакое собственное подмножество  $\Omega$  этим свойством не обладает.

Определение 2. Аттрактор называется странным, если он ограничен и любая траектория, начинающаяся на нем, неустойчива по Ляпунову.

Определение 3. Система называется хаотической, если у нее существует хотя бы один странный аттрактор.

Аналогичные определения даются для систем, дискретных по времени:

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.2)$$

Неустойчивость по Ляпунову характеризует основное свойство хаотических колебаний, называемое «сверхчувствительностью», или «чувствительной зависимостью» от начальных условий: любые две сколь угодно близкие траектории обязательно удаляются друг от друга на конечное расстояние.

Для некоторых общепризнанных хаотических систем (например, для системы Лоренца) доказательства хаотичности весьма громоздки, хотя численных и экспериментальных подтверждений накоплено предостаточно. Поэтому основным методом изучения хаотических систем остается

численное исследование – имитационное моделирование и оценка различных характеристик. Приведем несколько примеров хаотических систем.

Пример 6.1. Система (цепь) Чуа. Около 15 лет назад специалисты по электронным целям Л. Чуа и Т. Мацумото предложили простую электронную цепь с одним нелинейным элементом, способную генерировать весьма разнообразные, в том числе хаотические, колебания.

Электрическая схема цепи Чуа представлена на рис. 6.1. а. Эта цепь содержит нелинейный резистор  $R_c$  (диод Чуа), вольт-амперная характеристика которого отражена на рис. 6.1, б. Нетрудно убедиться, что уравнения Кирхгофа для этой цепи имеют вид

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \frac{1}{C_1} \left( \frac{u_2 - u_1}{R} - i_R(u_1) \right), \\ \frac{du_2}{dt} = \frac{1}{C_2} \left( \frac{u_1 - u_2}{R} + i_3 \right), \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{1}{L} (u_2 + R_0 i_3). \end{cases}$$

Пренебрегая активным сопротивлением катушки индуктивности и переходя к безразмерным величинам, получим математическую модель цепи Чуа в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = p(y - f(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -qy, \end{cases} \quad (6.3)$$

где  $x, y, z$  – безразмерные переменные, пропорциональные напряжениям на емкостях и току через индуктивность;  $f(x) = 0.5(M_1 - M_0)(|x + 1| - |x - 1|) + M_1 x$ . При  $p = 9$ ,  $q = 14.3$ ,  $M_1 = 6/7$ ,  $M_0 = 5/7$  траектории системы (6.3) демонстрируют хаотическое поведение (рис. 6.2., 6.3).

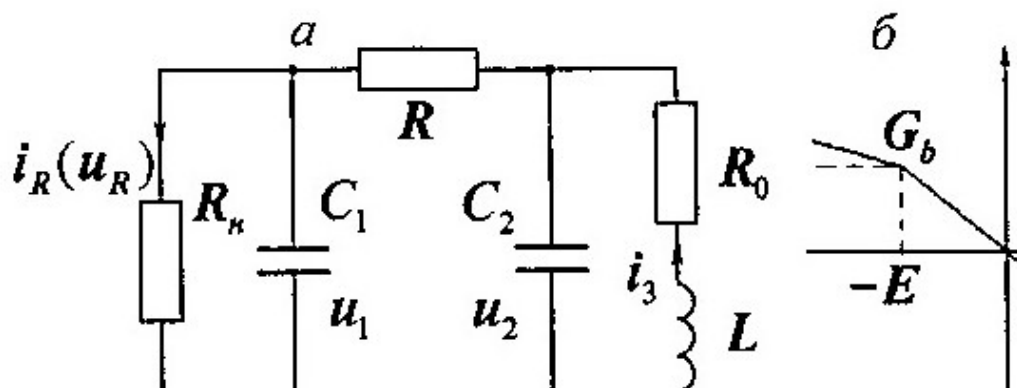


Рисунок 6.1 – Электрическая схема Чуа и вольт-амперная характеристика нелинейного резистора

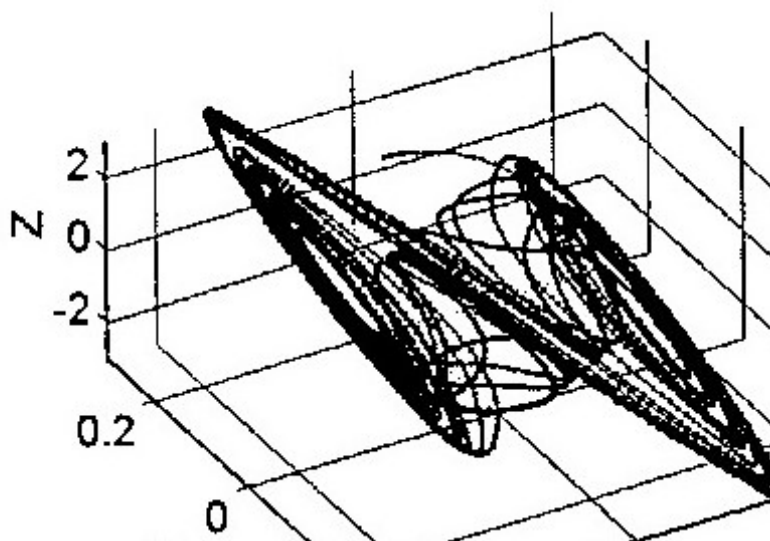


Рисунок 6.2 – Аттрактор системы Чуа

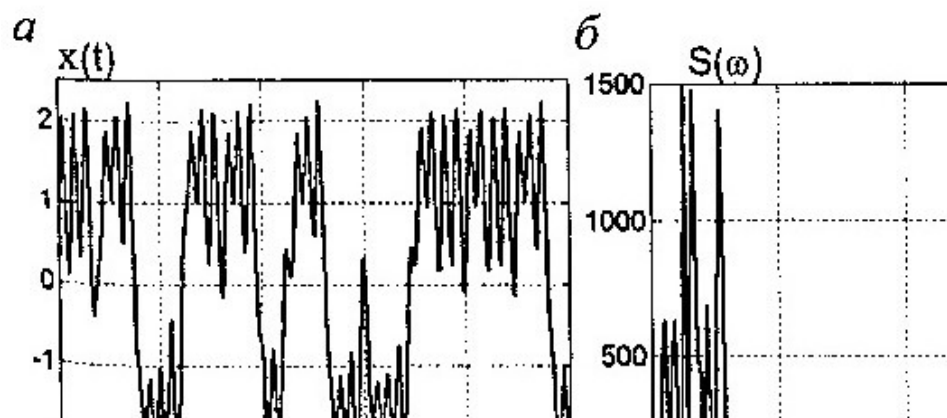


Рисунок 6.3 – Хаотический процесс в системе Чуа и его спектр

Пример 6.2. Дискретная система с квадратичной правой частью

$$x_{k+1} = \lambda x_k (1 - x_k), \quad x_k \in R^1, \quad (6.4)$$

гостроенная с помощью так называемого логистического отображения  $F(x) = \lambda x(1-x)$ , является хаотической при  $3.57 < \lambda < 4$ . Ее аттрактором является отрезок  $[0, 1]$ .

## 6.2 Критерии хаотичности

Как уже было сказано, основным критерием хаотичности является локальная неустойчивость, т.е. разбегание близких вначале траекторий. Соответственно основной характеристикой хаотичности является скорость разбегания, определяемая так называемым старшим показателем Ляпунова. Показатели Ляпунова определяются для заданной «опорной» траектории  $\bar{x}(t)$  системы (3.64) с начальным условием  $\bar{x}(0) = x_0$ . Для этого составляется уравнение в вариациях (система, линеаризованная вблизи  $\bar{x}(t)$ ):

$$\frac{d}{dt} \delta x = W(t) \delta x, \quad (6.5)$$

где  $\delta x = x - \bar{x}(t)$ ;  $W(t) = \frac{\partial F(x(t))}{\partial x}$  – матрица Якоби системы (6.1) (матрица частных производных от правых частей), вычисленная вдоль решения  $\bar{x}(t)$ . Задав начальное отклонение  $z = \delta x(0)$ , можно вычислить величину

$$\alpha(x_0, z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(t)\|}{\|z\|}, \quad (6.6)$$

характеризующую скорость экспоненциального роста решений (6.5) в направлении  $z$  и называемую характеристическим показателем (ляпуновской экспонентой) в направлении  $z$ .

Еще А.М. Ляпунов показал, что при небольших дополнительных предположениях предел в (6.6) существует, конечен для любого  $z \in R^n$  и не зависит от начального выбора точки  $x_0$  на траектории  $x(t)$ . Более того, число различных характеристических показателей конечно, их можно пронумеровать в порядке убывания  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$  и существует базис  $z_i \in R^n$ ,  $i = 1, \dots, n$ , для которого  $\alpha(x_0, z_i) = \alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Наиболее важен старший ляпуновский показатель  $\alpha_1$ . Если  $\alpha_1 > 0$  вдоль ограниченного решения  $\bar{x}(t)$ , плотного в аттракторе  $\Omega$ , то это решение неустойчиво по Ляпунову, а аттрактор является странным. При этом величина  $\alpha_1$  характеризует степень неустойчивости, или, другими словами, показатель экспоненциальной чувствительности к начальным данным. Для линейной системы с постоянной матрицей  $\dot{x} = Ax$  и нулевого опорного решения  $\bar{x}(t) = 0$ , очевидно,  $\alpha_1 = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A)$ , т.е.  $|\alpha_1|$  совпадает с обычной степенью устойчивости (или неустойчивости) системы.

Показатели Ляпунова характеризуют прогнозируемость траекторий системы. Действительно, траектория  $\bar{x}(t)$  аппроксимируется через время  $T$  другой траекторией с погрешностью  $\Delta$ , если

$$T \leq \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{\Delta}{\varepsilon}, \quad (6.7)$$

где  $\varepsilon$  – начальная погрешность. Следовательно, хаотическую траекторию можно спрогнозировать с заданной точностью на некоторое время вперед. Это принципиально отличает хаотические системы как модели неопределенности от стохастических систем в которых ошибка прогноза может, вообще говоря, принимать сколь угодно большие значения, даже при сколь угодно малом горизонте (время прогноза).

Другой важной характеристикой хаотической системы является фрактальная размерность аттрактора, характеризующая его «густоту» или «пористость». Для ее подсчета аттрактор  $\Omega$  покрывается кубиками размера  $\varepsilon$ . Пусть  $N(\varepsilon)$  – количество кубиков в покрытии. Вычислим величину

$$\mu(d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \varepsilon^d. \quad (6.8)$$

Можно показать, что существует число  $d_f > 0$ , такое что  $\mu(d) = +\infty$  при  $d < d_f$ ,  $\mu(d) = 0$  при  $d > d_f$ . Это число называется фрактальной размерностью, или емкостью множества  $\Omega$ . Емкость можно определить из соотношения

$$d_f = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log \varepsilon}. \quad (6.9)$$

Можно показать, что если множество  $\Omega$  есть точка, гладкая кривая или двумерная поверхность, то  $d_f$  будет равна 0, 1 или 2 соответственно. Однако есть множества, у которых  $d_f$  – дробная величина. Такие множества были названы Б. Мандельбротом фрактальными, или фракталами. Примерами фракталов являются странные аттракторы: для системы Лоренца  $d_f \approx 2.07$ , а для цепи Чуа  $d_f \approx 2.81$ . Доказано, что поведение траекторий на аттракторе, имеющем фрактальную размерность  $d_f$  может быть описано моделью в пространстве состояний с размерностью, не превышающей  $2d_f + 1$ .

### 6.3. Зачем нужны хаотические модели?

Из предыдущего ясно, что хаотические модели следует использовать для описания непериодических колебательных процессов с непостоянными, меняющимися характеристиками (например, частотой и фазой). Существующие методы позволяют оценивать эти характеристики по результатам измерений. При этом такая величина как частота колебаний становится «нечеткой» и уступает место спектру, который является непрерывным. Вводятся новые важные величины: старший ляпуновский показатель (степень неустойчивости), характеризующий скорость разбегания траектории и, следовательно, время прогнозируемости процесса; фронтальная размерность, характеризующая «пористость» клубка траекторий. Важно, что известные хаотические модели имеют небольшое число параметров, а процессы в них обладают малой (несколько единиц) фрактальной размерностью. Это повышает надежность и прогнозирующую силу моделей. Перечислим некоторые из уже известных применений хаотических моделей.

Описание нерегулярного поведения реальных систем. На сегодняшний день известен целый ряд реальных физических устройств и процессов,