## *Лингвистическая переменная*

*Лингвистическая переменная* задается на количественной шкале *базовой переменной u* ($u \in U$) и принимает значения в виде слов и словосочетаний естественного языка.

Значение лингвистической переменной (*терм*) задается в виде функции принадлежности.

***Лингвистическая переменная*** определяется как тройка (*x, T, U*), где *x* – наименование лингвистической переменной; *T* – множество ее значений (терм-множество); *U* – универсальное множество.

***Нечеткая переменная*** – тройка (*X, U, A*), где *X* – наименование нечеткой переменной; *U* – универсальное множество; *A*= $\mu_A(u)$ – НМ, описывающее ограничения на возможные значения нечеткой переменной $X$ .

*Пример 16*. Слова "молодой" (М), "очень молодой" (ОМ), "пожилой" (П), "средний" (С) (рис. 11) – *лингвистические значения* лингвистической переменной "*возраст*".

*Числовая* переменная – "возраст", например, числа 0, 17, 24, 35, 85,…– *базовая* переменная.

***Лингвистическая переменная*** – "возраст" (возраст, *T*, [0, 120]), *x* = возраст, терм-множество – *T* = {"очень молодой", "молодой", "средний", "пожилой"}, *U* = [0, 120].

***Нечеткая переменная*** – "молодой" (молодой, [17, 35], *A*). Здесь наименование, *X*= молодой, универсальное множество, *U*=[17, 35], нечеткое множество, задающее нечеткую переменную "молодой" , обозначено буквой М , *A* = М.

График функций принадлежности лингвистической переменной «возраст»

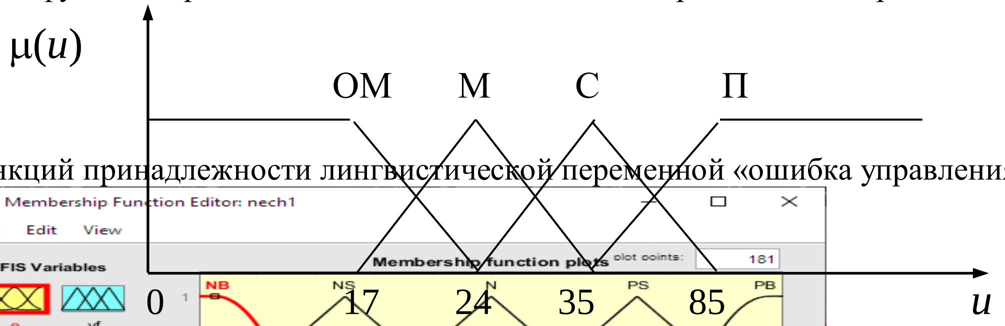
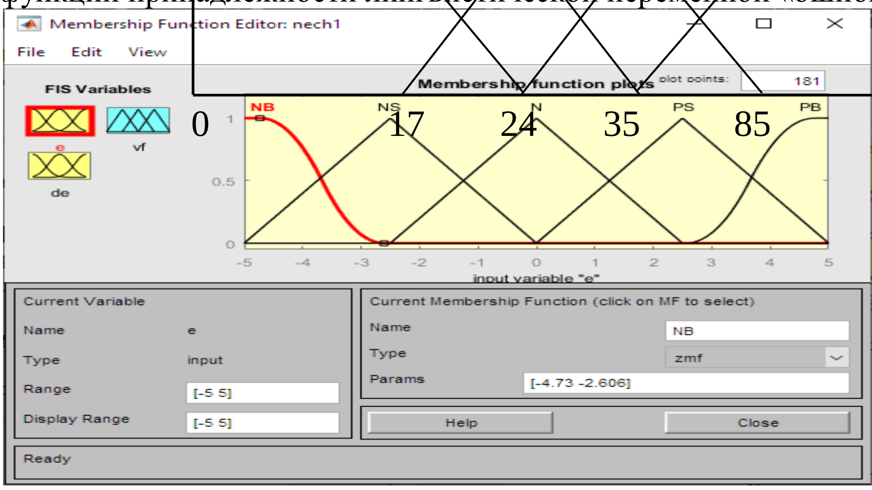



График функций принадлежности лингвистической переменной «ошибка управления»




## *Фаззификация*

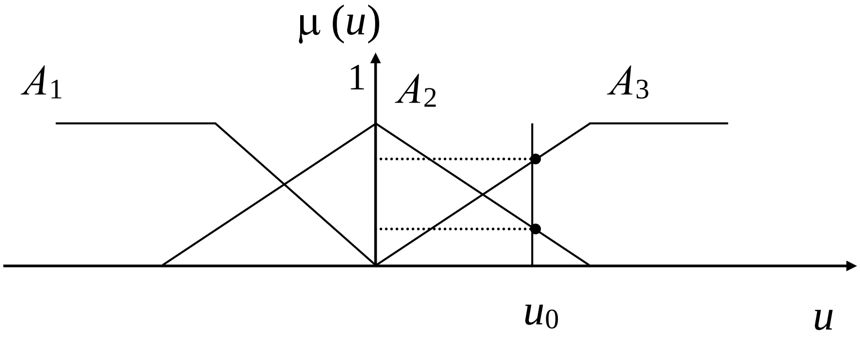
***Фаззификация*** – определение степени принадлежности $\mu_A(u_0)$ элемента $u_0$ НМ *A* (определение соответствия между числовыми и лингвистическими значениями переменой).

*Способы построения ФП:*

- на основе экспертных оценок.
- путем обработки статистических данных;
- по результатам моделирования, например, настройкой с помощью адаптивной сети.

*Условия, которым должна удовлетворять ФП*:

- ФП крайних нечетких множеств (термов) должны быть Z, S-типов, но не колоколообразные, и при $\min u = u_1,\ \max u = u_m$ значения ФП $\mu_{A_1}(u_1) = 1,\ \mu_{Am}(u_m) = 1.$ (Для регулятора на основе алгоритма Мамдани).
- Каждое нечеткое множество должно иметь единственный максимум.
- ФП должны иметь гладкие затухающие до нуля фронты.
- Нечеткие множества должны быть нормальными.
- Нечеткость обрабатываемой информации состоит в возможности одновременной принадлежности значения четкой входной переменной двум нечетким множествам



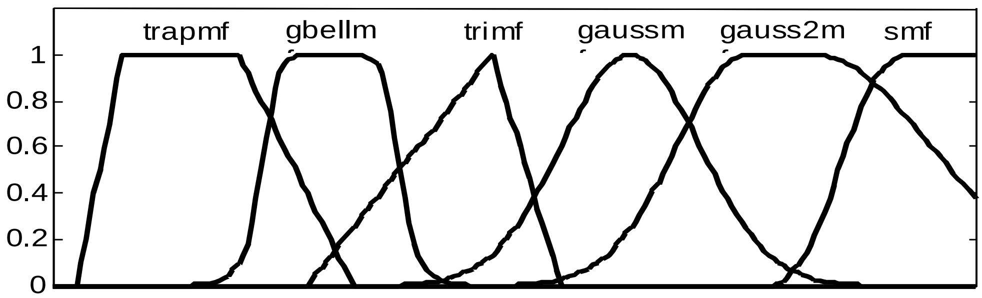

Лучшее расположение – $\mu_{A_i}(u) + \mu_{A_{i+1}}(u) = 1$ .

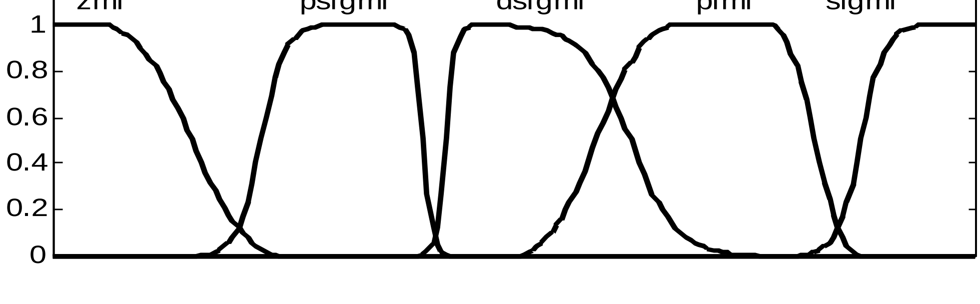
Рис. 12

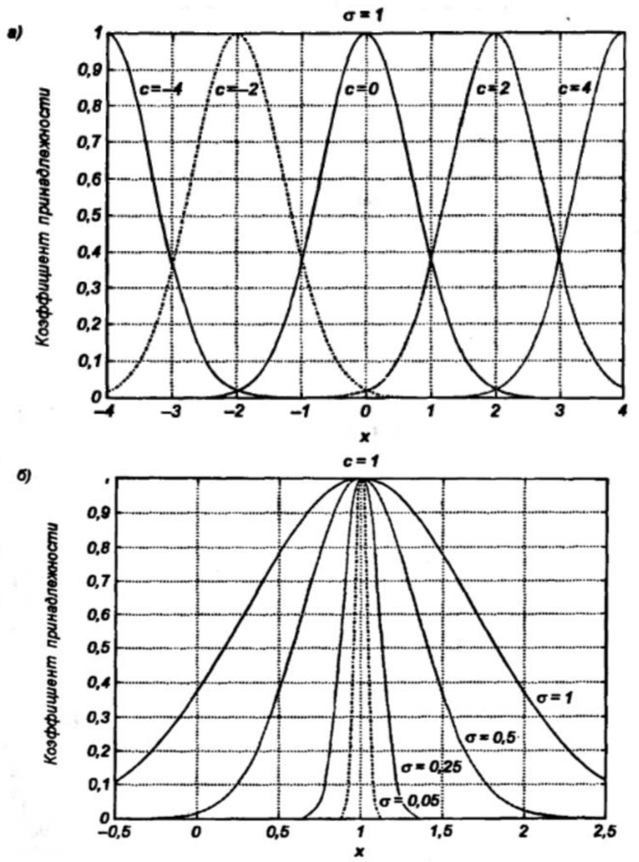
Иллюстрация влияния параметров гауссовской функции принадлежности на ее форму

$$\mu(x) = \mu(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|) = \exp\left(-\frac{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

а) влияние изменения центра $c$ при $\sigma = 1$; б) влияние изменения $\sigma$ при $c = 1$






Функция Гаусса $\mu(x) = \mu(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|) = \exp(-\frac{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|^2}{2\sigma^2})$, $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}\|$ – блок вычисления эвклидова расстояния вектора входа *x* от центра ***c*** функции Гаусса, параметр $\sigma^2$ – значение дисперсии.

## 2. НЕЧЕТКИЕ ОТНОШЕНИЯ

### 2.1. Основные определения

Нечеткое отношение (НО) $R$ на множестве $U \times V$ – нечеткое подмножество декартова произведения, которое характеризуется функцией принадлежности $\mu_R(u,v): \ U \times V \to [0,1]$.

$\mu_R(u,v)$ – субъективная мера выполнения отношения $u R v$.

*Пример 1.*

Четкое отношение – $R$ (≥) ("больше или равно"), нечеткое – $R$ (>>) ("много больше") (рис. 1).

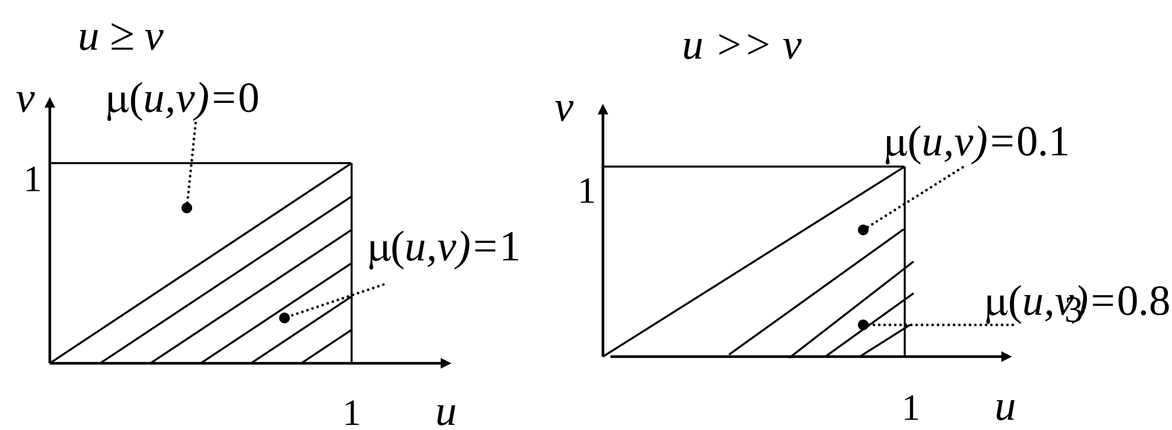


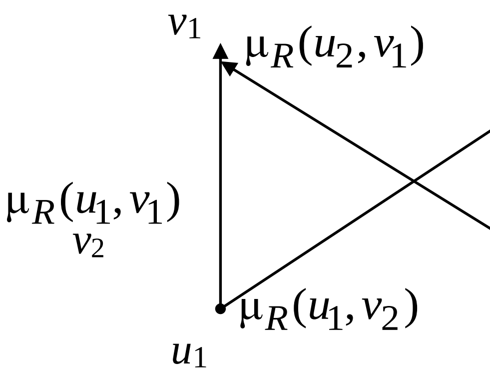

Рисунок 1 – Четкое и нечеткое отношения

***Способы задания нечетких отношений***:

- теоретико-множественные:

$$R = \{((u_1, v_1),\ \mu_R(u_1, v_1)), ((u_2, v_1),\ \mu_R(u_2, v_1)), \dots ((u_n, v_n),\ \mu_R(u_n, v_n))\};$$

- графические: граф $U \bigcup V$, дуга – $\mu_R(u_i, v_j)$;




- в матричном виде: с помощью матрицы инциденций:

$$\begin{array}{c|cc} R & v_1 & v_2 \\ \hline u_1 & \mu_R(u_1, v_1) & \mu_R(u_1, v_2) \\ u_2 & \mu_R(u_2, v_1) & \mu_R(u_2, v_2) \end{array}$$

Нечеткое отношение " ***x*** приблизительно равно ***y*** " на дискретных и непрерывных множествах изображено на рис. 2.

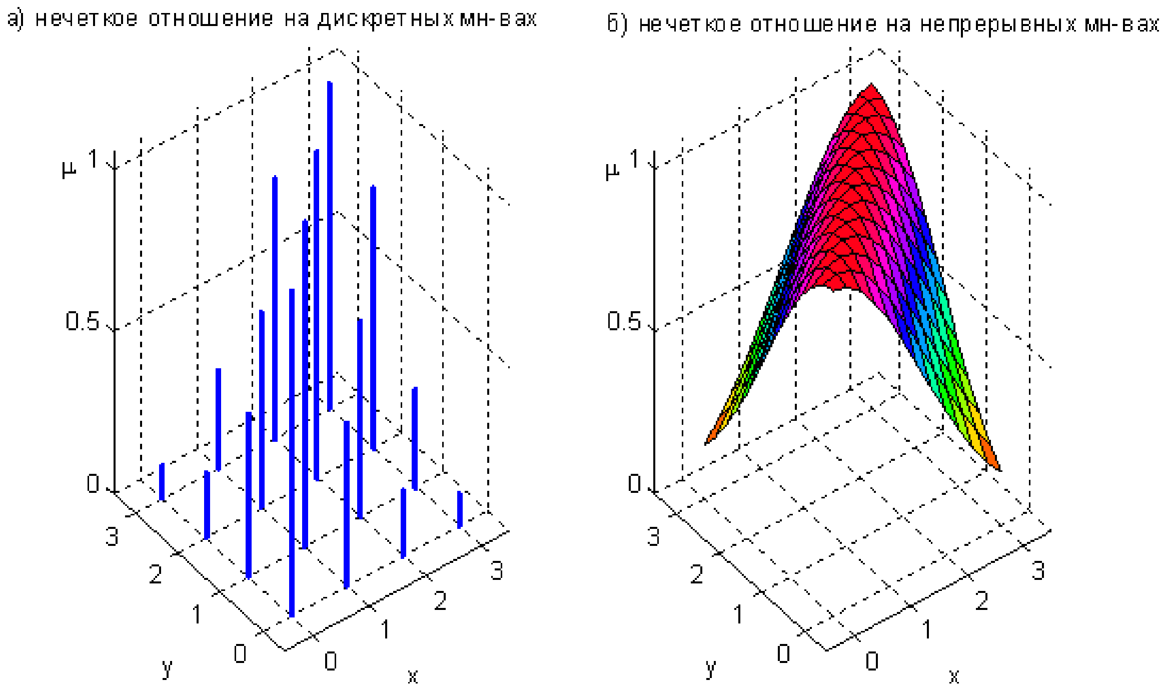



Рисунок 2 – Нечеткое отношение " *x* приблизительно равно *y* "

Нечеткие отношения " *x* намного меньше, чем *y* " на дискретных и непрерывных множествах изображены на рис. 3.

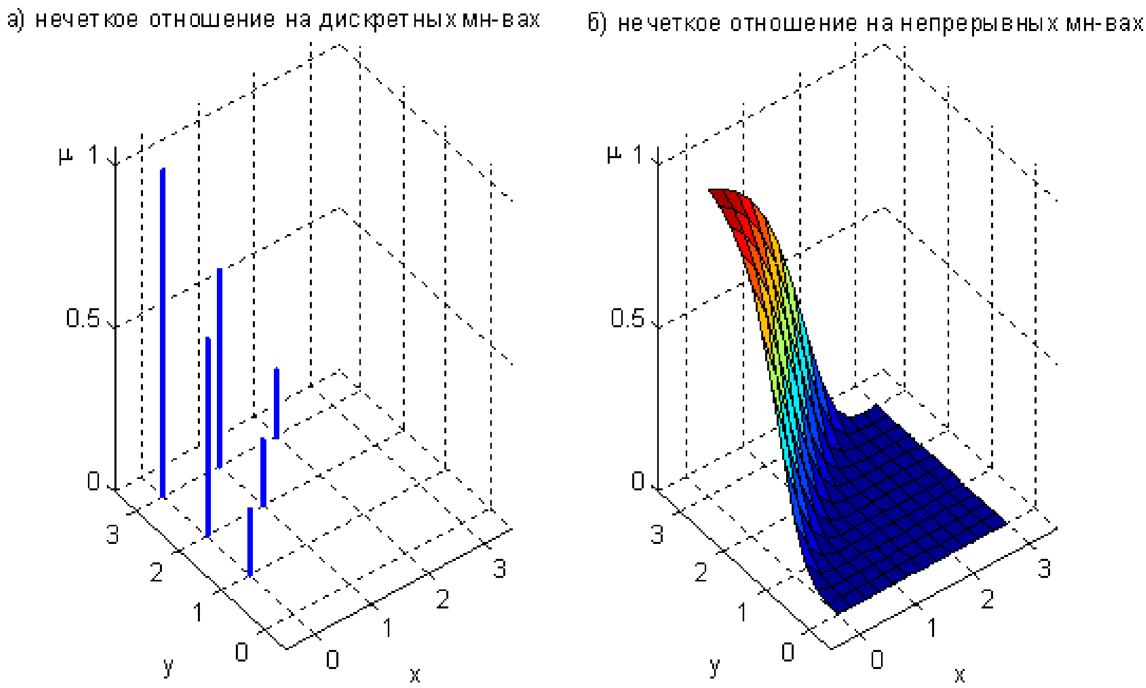



Рисунок 3 – Нечеткое отношение " $x$ намного меньше, чем $y$ "

*Замечание*

Бинарное отношение $R \subseteq U \times V$ можно рассматривать как ***отображение*** $\varphi: U \to V$. ***Отображение*** $\varphi : U \to V$ – соответствие между элементами множества оригиналов $U$ и элементами множества образов $V$ в отношении $R$ . Если упорядоченная пара $(u, v) \in R$, то ее можно рассматривать как отображение оригинала $u$ в образ $v$: $\varphi(u) = v$. Графически при отображении $\varphi: U \to V$ исток – оригинал $u$, а сток – образ $v$.

### 2.2. Операции над нечеткими отношениями

1. $R$ и $L$ – нечеткие отношения, ***R содержится в*** $L$, $R \subseteq L$ , если $\forall\,(u, v) \in U \times V$:

$$\mu_R(u,v) \le \mu_L(u,v).$$

2. ***Объединение*** двух отношений $R$ и $L$ – $R \bigcup L$:

$$\forall\,(u, v) \in U \times V:\ \mu_{R \cup L}(u,v) = \mu_R(u,v) \vee \mu_L(u,v) = \max[\mu_R(u,v),\ \mu_L(u,v)].$$

3. ***Пересечение*** двух отношений $R$ и $L$ – $R \bigcap L$:

$$\forall\,(u, v) \in U \times V:\ \mu_{R \cap L}(u,v) = \mu_R(u,v) \wedge \mu_L(u,v) = \min[\mu_R(u,v),\ \mu_L(u,v)].$$

*Пример 2.* $R \subseteq L$

| $R$ | $v_1$ | $v_2$ |
|---|---|---|
| $u_1$ | 0.3 | 0.4 |
| $u_2$ | 0.5 | 0.1 |

| $L$ | $v_1$ | $v_2$ |
|---|---|---|
| $u_1$ | 0.4 | 0.6 |
| $u_2$ | 0.5 | 0.3 |

*Пример 3.* $R \bigcap L,\ R \bigcup L$

| $R$ | $v_1$ | $v_2$ |
|---|---|---|
| $u_1$ | 0.2 | 0.6 |
| $u_2$ | 0.7 | 0.9 |

| $L$ | $v_1$ | $v_2$ |
|---|---|---|
| $u_1$ | 0.1 | 0.3 |
| $u_2$ | 0.8 | 0.4 |

| $R \bigcap L$ | $v_1$ | $v_2$ |
|---|---|---|
| $u_1$ | 0.1 | 0.3 |
| $u_2$ | 0.7 | 0.4 |

| $R \bigcup L$ | $v_1$ | $v_2$ |
|---|---|---|
| $u_1$ | 0.2 | 0.6 |
| $u_2$ | 0.8 | 0.9 |

*Пример 4.* $R$ = " х приблизительно равно у ", $L$ = " х намного меньше, чем у ". $R \bigcap L,\ R \bigcup L$ – ?

4. ***Дополнение*** нечеткого отношения $\overline{R}$:
$\forall\ (u,v) \in U \times V:\quad \mu_{\overline{R}}(u,v) = 1 - \mu_R(u,v).$

Дополнение – отрицание исходного отношения. Для $R$ = (лучше), дополнение $\overline{R}$ = (не лучше).

*Пример 5.*

| $\overline{R}$ | $v_1$ | $v_2$ |
|---|---|---|
| $u_1$ | 0.7 | 0.6 |
| $u_2$ | 0.5 | 0.9 |

5. ***Обратное*** к ***R*** НО $R^{-1}$:
$\forall\,(u,v) \in U \times V : uRv \Leftrightarrow vR^{-1}u$, или $\forall\ (u,v) \in U \times V:\quad \mu_R(u,\ v) = \mu_{R^{-1}}(v,\ u)$.

Матрица $R^{-1}$ является транспонированной к матрице $R$.

*Пример 6.* $R^{-1}$

| $R$ | $v_1$ | $v_2$ |
|---|---|---|
| $u_1$ | 0.2 | 0.6 |
| $u_2$ | 0.7 | 0.9 |

| $R^{-1}$ | $u_1$ | $u_2$ |
|---|---|---|
| $v_1$ | 0.2 | 0.7 |
| $v_2$ | 0.6 | 0.9 |

## 2.3. Композиция нечетких отношений

1. ***Максиминная композиция*** $R \circ L$ двух нечетких отношений $R \subset U \times V$ и $L \subset V \times W$

$$R \circ L(u,w) = \underset{v}{\vee}(R(u,v) \wedge L(v,w)),\ \forall u \in U,\ \forall v \in V,\quad \forall w \in W.$$

Пара $(u,w) \in U \times W$ принадлежит нечеткому отношению $R \circ L$ со степенью принадлежности наибольшей из меньших степеней принадлежности различных компонируемых пар $(u,v) \in U \times V$ и $(v,w) \in V \times W$ нечетких отношений $R$ и $L$, в качестве $v$ выступают несколько компонируемых элементов.

Функция принадлежности максиминной композиции

$$\mu_{R\circ L}(u,w)=\underset{v}{\vee}(\mu_R(u,v)\wedge\mu_L(v,w))=\max_{v}\{\min[\mu_R(u,v),\ \mu_L(v,w)]\}. \quad (2.1)$$

*Пример 7.*

$R$

| $u$ \ $v$ | $v_1$ | $v_2$ |
|---|---|---|
| $u_1$ | 0.2 | 0.7 |
| $u_2$ | 0.4 | 0.8 |

$L$

| $v$ \ $w$ | $w_1$ | $w_2$ |
|---|---|---|
| $v_1$ | 0.5 | 0.6 |
| $v_2$ | 0.3 | 0.9 |

Определить $R\circ L.$

Пусть $(u,w)=(u_1,w_1)$, тогда $\mu_{R\circ L}(u_1,\ w_1)=\max_{v_i}\min(\mu_R(u_1,v_i),\mu_L(v_i,w_1))$

$\min(\mu_R(u_1,v_1),\mu_L(v_1,w_1))=\min(0.2,0.5)=0.2,$

$\min(\mu_R(u_1,v_2),\mu_L(v_2,w_1))=\min(0.7,0.3)=0.3,$

$\max_{v_i}\min(\mu_R(u_1,v_i),\mu_L(v_i,w_1))=\max(0.2,0.3)=0.3.$

В результате: $\mu_{R\circ L}(u_1,\ w_1)=0.3.$

Пусть $(u,w)=(u_1,w_2)$, тогда $\mu_{R\circ L}(u_1,\ w_2)=\max_{v_i}\min(\mu_R(u_1,v_i),\mu_L(v_i,w_2))$

$\min(\mu_R(u_1,v_1),\mu_L(v_1,w_2))=\min(0.2,0.6)=0.2,$

$\min(\mu_R(u_1,v_2),\mu_L(v_2,w_2))=\min(0.7,0.9)=0.7,$

$\max_{v_i}\min(\mu_R(u_1,v_i),\mu_L(v_i,w_2))=\max(0.2,0.7)=0.7.$

Пусть $(u,w)=(u_2,w_1)$, тогда $\mu_{R\circ L}(u_2,\ w_1)=\max_{v_i}\min(\mu_R(u_2,v_i),\mu_L(v_i,w_1))$

$\min(\mu_R(u_2,v_1),\mu_L(v_1,w_1))=\min(0.4,0.5)=0.4,$

$\min(\mu_R(u_2,v_2),\mu_L(v_2,w_1))=\min(0.8,0.3)=0.3,$

$\max_{v_i}\min(\mu_R(u_2,v_i),\mu_L(v_i,w_1))=\max(0.4,0.3)=0.4.$

Пусть $(u,w)=(u_2,w_2)$, тогда $\mu_{R\circ L}(u_2,\ w_2)=\max_{v_i}\min(\mu_R(u_2,v_i),\mu_L(v_i,w_2))$

$\min(\mu_R(u_2,v_1),\mu_L(v_1,w_2))=\min(0.4,0.6)=0.4,$

$\min(\mu_R(u_2,v_2),\mu_L(v_2,w_2))=\min(0.8,0.9)=0.8,$

$\max_{v_i}\min(\mu_R(u_2,v_i),\mu_L(v_i,w_2))=\max(0.4,0.8)=0.8.$

В результате значения матрицы нечеткого отношения $R\circ L.$

$R\circ L$

| $u$ \ $w$ | $w_1$ | $w_2$ |
|---|---|---|
| $u_1$ | 0.3 | 0.7 |
| $u_2$ | 0.4 | 0.8 |

2. ***Минимаксная композиция*** $R\bullet L$ двух нечетких отношений $R\subset U\times V$ и $L\subset V\times W$ определяется ФП в виде

$$\mu_{R\bullet L}(u,w)=\bigwedge_{v}(\mu_R(u,v)\vee\mu_L(v,w))=\min_{v}\{\max[\mu_R(u,v),\ \mu_L(v,w)]\}.$$

(2.2)

3. ***Максимультипликативная композиция*** $R*L$ двух нечетких отношений $R\subset U\times V$ и $L\subset V\times W$ определяется ФП в виде

$$\mu_{R*L}(u,w)=\bigvee_{v}(\mu_R(u,v)\,\mu_L(v,w))=\max_{v}(\mu_R(u,v)\,\mu_L(v,w)).$$

(2.3)

*Пример 8.*

$R$

| | $v_1$ | $v_2$ |
|---|---|---|
| $u_1$ | 0.2 | 0.7 |
| $u_2$ | 0.4 | 0.8 |

$L$

| | $w_1$ | $w_2$ |
|---|---|---|
| $v_1$ | 0.5 | 0.6 |
| $v_2$ | 0.3 | 0.9 |

$R\bullet L$

| | $w_1$ | $w_2$ |
|---|---|---|
| $u_1$ | 0.5 | 0.6 |
| $u_2$ | 0.5 | 0.6 |

Пусть $(u,w)=(u_1,w_1)$,тогда $\mu_{R\bullet L}(u_1,\ w_1)=\min_{v_i}\max(\mu_R(u_1,v_i),\mu_L(v_i,w_1))$

$\max(\mu_R(u_1,v_1),\mu_L(v_1,w_1))=\max(0.2,0.5)=0.5,$

$\max(\mu_R(u_1,v_2),\mu_L(v_2,w_1))=\max(0.7,0.3)=0.7,$

$\min_{v_i}\max(\mu_R(u_1,v_i),\mu_L(v_i,w_1))=\min(0.5,0.7)=0.5.$

Пусть $(u,w)=(u_1,w_1)$, тогда $\mu_{R*L}(u_1,\ w_1)=\max_{v_i}(\mu_R(u_1,v_i),\mu_L(v_i,w_1))$

$(\mu_R(u_1,v_1)\cdot\mu_L(v_1,w_1))=(0.2\cdot0.5)=0.1,$ $(\mu_R(u_1,v_2)\cdot\mu_L(v_2,w_1))=(0.7\cdot0.3)=0.21,$

$\max_{v_i}(\mu_R(u_1,v_i)\cdot\mu_L(v_i,w_1))=\max(0.1\cdot0.21)=0.21.$

В случае бесконечно не более, чем счетных множеств *U*, *V*, *W*:

*максиминная композиция*

$$\mu_{R\circ L}(u,w)=\bigvee_{v}(\mu_R(u,v)\wedge\mu_L(v,w))=\sup_{v}\{\min[\mu_R(u,v),\ \mu_L(v,w)]\};\qquad(2.4)$$

*минимаксная композиция*

$$\mu_{R\bullet L}(u,w)=\bigwedge_{v}(\mu_R(u,v)\vee\mu_L(v,w))=\inf_{v}\{\max[\mu_R(u,v),\ \mu_L(v,w)]\};\qquad(2.5)$$

*максимультипликативная композиция*

$$\mu_{R*L}(u,w)=\bigvee_{v}(\mu_R(u,v)\,\mu_L(v,w))=\sup_{v}(\mu_R(u,v)\,\mu_L(v,w)).\qquad(2.6)$$

# 3. НЕЧЕТКАЯ ЛОГИКА И ПРИБЛИЖЕННЫЕ РАССУЖДЕНИЯ

## 3.1. Основные понятия четкой логики

***Высказывание А*** – предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно. "Истина" – 1, "ложь" – 0, значения истинности: $\gamma(A)=1,\ \gamma(A)=0.$

Отдельные высказывания – буквы *A, B, C, …*– ***логические переменные*** (пропозициональные, высказывательные)

Символы: $\bar{\ }$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ – ***логические связки***.

***Логические операции***

*Отрицание* высказывания: $\bar{A}$ ("не $A$").

*Конъюнкция* высказываний: $A \wedge B$ ("и").

*Дизъюнкция* высказываний: $A \vee B$ ("или").

*Импликация* высказываний $A$ и $B$: $A \rightarrow B\,(A \supset B)$ ("если $A$..., то $B$").

Высказывание $A \rightarrow B$ ложно тогда и только тогда, когда $A$, называемое ***условием*** (посылкой, антецедентом, допущением) импликации $A \rightarrow B$, истинно, а $B$, называемое следствием (заключением, выводом, консеквентом) импликации, ложно.

*Эквивалентность* высказываний $A$ и $B$: $A \leftrightarrow B$ ("$A$ тогда и только тогда, когда $B$") .

***Логические формулы***:

а) логические переменные – логические формулы;

б) если $A$ и $B$ – логические формулы, то $(\bar{A})$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ – логические формулы.

Импликации соответствует логическая формула $((\bar{A}) \vee B)$, т. е. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\bar{A}) \vee B)$.

Таблица истинности

| $A$ | $B$ | $\bar{A}$ | $\bar{B}$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \rightarrow B$ | $((\bar{A}) \vee B)$ | $(A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\bar{A}) \vee B)$ | $A \wedge ($ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

Высказывание с переменными – ***предикат*** (*высказывательная форма*).

*Пример1.* $P(x)$ – «Быть простым числом» (предикат); $x = 5$; 8.

5 – простое число – истинное высказывание; 8 – простое число – ложное высказывание.

$x$=5, $P(x)$ – истинно; $x$=8, $P(x)$ – ложно.

Правила, по которым в логике из *логических формул* образуются новые логические формулы, называются ***правилами вывода***.

**Правило прямого логического вывода "*modus ponens*":** если $(A \rightarrow B)$ истинно и $A$ истинно, то $B$ – истинно. Одно суждение ($B$) является необходимым следствием двух других ($A \rightarrow B$, $A$).

Записывают: $A \rightarrow B$

$A$ или $B = A \wedge (A \rightarrow B)$.

-------------

$B$

Выражения, стоящие над чертой – *посылки* правила, $A \to B$ – импликация, $A$ – условие; выражение, стоящее под чертой – логический *вывод* правила.

*Пример 2.*

Если птица, то летает
Это животное – птица
----------------------------------------
Это животное летает.

**Правило обратного логического вывода "*modus tollens*":**

Записывают: $A \to B$

$\overline{B}$

-------------

$\overline{A}$

*Пример 3.*

Если птица, то летает
Это животное – не летает
----------------------------------------
Это животное не птица.

**Прямым выводам** (прямой цепочке рассуждений) соответствует движение от посылок к следствиям.

**Обратным выводам** (обратной цепочке рассуждений) соответствует движение от цели (факта, результата, следствия) к посылкам.