Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
Кафедра систем автоматического управления

Реферат

по дисциплине

«Нелинейное адаптивное управление в технических системах»

Студент группы 9492 Викторов А.Д.

Преподаватель Путов В.В.

Санкт-Петербург

2024

Содержание

1 Введение

Метод скоростного градиента (СГ), разработанный А.Л. Фрадковым, является одним из ключевых инструментов в теории нелинейного и адаптивного управления. Этот метод позволяет синтезировать алгоритмы управления для широкого класса нелинейных систем, обеспечивая достижение различных целей управления, таких как стабилизация, слежение и оптимизация.

В данном реферате мы рассмотрим основные аспекты метода скоростного градиента, включая построение алгоритмов и условия достижения цели управления. Особое внимание будет уделено теоретическим основам метода, включая ключевые теоремы, обосновывающие его применимость и эффективность.

2 Построение алгоритмов скоростного градиента

2.1 Основные понятия и определения

Рассмотрим нелинейную систему вида:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m \tag{1}$$

где x - вектор состояния системы, u - вектор управления, f - нелинейная вектор-функция.

Целевой функционал управления определяется как:

$$Q(x) \geq 0 \tag{2}$$

Задача управления состоит в минимизации $Q(x)$ путем выбора подходящего закона управления u.

2.2 Алгоритм скоростного градиента для локального целевого функционала

Алгоритм скоростного градиента в дифференциальной форме для локального целевого функционала имеет вид:

$$\dot{u} = -\Gamma \nabla_u \dot{Q}(x, u) \tag{3}$$

где Γ - положительно определенная матрица коэффициентов усиления, а $\nabla_u \dot{Q}(x, u)$ - градиент скорости изменения целевого функционала по управлению.

Для вычисления $\nabla_u \dot{Q}(x, u)$ используется следующая формула:

$$\nabla_u \dot{Q}(x, u) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \nabla_x Q(x) \tag{4}$$

2.3 Алгоритм скоростного градиента для интегрального целевого функционала

Для интегрального целевого функционала вида:

$$J = \int_0^T Q(x(t))dt \tag{5}$$

алгоритм скоростного градиента принимает форму:

$$\dot{u} = -\Gamma \nabla_u Q(x) \tag{6}$$

2.4 Алгоритм скоростного градиента в конечной форме

АСГ в конечной форме получается интегрированием дифференциальной формы:

$$u(t) = u(0) - \int_0^t \Gamma \nabla_u \dot{Q}(x(\tau), u(\tau))d\tau \tag{7}$$

или в дискретном времени:

$$u(k+1) = u(k) - \Gamma \nabla_u \dot{Q}(x(k), u(k)) \tag{8}$$

2.5 Комбинированные алгоритмы скоростного градиента

Комбинированные АСГ объединяют дифференциальную и конечную формы:

$$\dot{u} = -\Gamma_1 \nabla_u \dot{Q}(x, u) - \Gamma_2 \nabla_u Q(x) \tag{9}$$

где Γ_1 и Γ_2 - положительно определенные матрицы коэффициентов усиления.

3 Условия достижения цели управления

3.1 Теорема 3.1 (Условие достижения цели для дифференциальной формы АСГ)

Теорема 3.1. Пусть для системы (1) и целевого функционала (2) выполнены следующие условия:

1. Функция $Q(x)$ ограничена снизу;

2. Существует функция $V(x,u) \geq 0$ такая, что $\dot{V} \leq -\beta(\dot{Q})$ для некоторой функции $\beta(z)$, удовлетворяющей условию $\beta(z) > 0$ при $z \neq 0$;

3. Траектории замкнутой системы ограничены.

Тогда:

1. $\lim_{t\to\infty} \dot{Q}(x(t)) = 0$;

2. Если дополнительно $\dot{Q}(x) = 0 \Rightarrow Q(x) = 0$, то $\lim_{t\to\infty} Q(x(t)) = 0$.

Доказательство: Рассмотрим функцию Ляпунова $V(x,u)$. Из условия 2 следует, что $V(x,u)$ не возрастает вдоль траекторий системы. Учитывая ограниченность $V(x,u)$ снизу, получаем:

$$\lim_{t\to\infty} V(x(t),u(t)) = V^* < \infty \tag{10}$$

Интегрируя неравенство $\dot{V} \leq -\beta(\dot{Q})$, получаем:

$$\int_0^\infty \beta(\dot{Q}(x(\tau)))d\tau \leq V(x(0),u(0)) - V^* < \infty \tag{11}$$

Отсюда следует, что $\lim_{t\to\infty} \beta(\dot{Q}(x(t))) = 0$. Учитывая свойства функции $\beta(z)$, получаем утверждение 1 теоремы.

Если выполнено дополнительное условие $\dot{Q}(x) = 0 \Rightarrow Q(x) = 0$, то из утверждения 1 следует утверждение 2.

3.2 Теорема 3.2 (Условие достижения цели для конечной формы АСГ)

Теорема 3.2. Пусть для системы (1) и целевого функционала (2) выполнены следующие условия:

1. Функция $Q(x)$ ограничена снизу;
2. $\|\nabla_u \dot{Q}(x,u)\| \leq L(1+\|u\|)$ для некоторого $L > 0$;
3. Траектории замкнутой системы ограничены.

Тогда:

1. $\lim_{t\to\infty} \|\nabla_u \dot{Q}(x(t),u(t))\| = 0$;
2. Если дополнительно $\nabla_u \dot{Q}(x,u) = 0 \Rightarrow \dot{Q}(x) = 0$, то $\lim_{t\to\infty} \dot{Q}(x(t)) = 0$;
3. Если дополнительно $\dot{Q}(x) = 0 \Rightarrow Q(x) = 0$, то $\lim_{t\to\infty} Q(x(t)) = 0$.

Доказательство: Рассмотрим функцию Ляпунова $V(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$. Вычисляя производную $V(u)$ вдоль траекторий системы, получаем:

$$\dot{V} = u^T \dot{u} = -u^T \Gamma \nabla_u \dot{Q}(x,u) \leq -\lambda_{\min}(\Gamma)\|\nabla_u \dot{Q}(x,u)\|^2 \qquad (12)$$

где $\lambda_{\min}(\Gamma)$ - минимальное собственное значение матрицы Γ.

Интегрируя это неравенство, получаем:

$$\int_0^\infty \|\nabla_u \dot{Q}(x(\tau),u(\tau))\|^2 d\tau \leq \frac{1}{2\lambda_{\min}(\Gamma)}\|u(0)\|^2 < \infty \qquad (13)$$

Отсюда следует утверждение 1 теоремы. Утверждения 2 и 3 следуют из дополнительных условий.

3.3 Теорема 3.3 (Условие достижения цели для комбинированного АСГ)

Теорема 3.3. Пусть для системы (1) и целевого функционала (2) выполнены условия теорем 3.1 и 3.2. Тогда для комбинированного АСГ справедливы все утверждения теорем 3.1 и 3.2.

Доказательство: Доказательство этой теоремы основывается на комбинации доказательств теорем 3.1 и 3.2. Рассматривается функция Ляпунова вида $V(x,u) = V_1(x) + \frac{1}{2}\|u\|^2$, где $V_1(x)$ - функция Ляпунова из теоремы 3.1. Анализ производной $\dot{V}$ позволяет получить все утверждения теоремы.

3.4 Теорема 3.4 (Условие достижения цели для АСГ с интегральным целевым функционалом)

Теорема 3.4. Пусть для системы (1) и интегрального целевого функционала (5) выполнены следующие условия:

1. Функция $Q(x)$ неотрицательна и непрерывна;
2. $\|\nabla_u Q(x)\| \leq L(1 + \|u\|)$ для некоторого $L > 0$;
3. Траектории замкнутой системы ограничены.

Тогда:

1. $\lim_{t\to\infty} \|\nabla_u Q(x(t))\| = 0$;
2. Если дополнительно $\nabla_u Q(x) = 0 \Rightarrow Q(x) = 0$, то $\lim_{t\to\infty} Q(x(t)) = 0$.

Доказательство: Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.2, с использованием функции Ляпунова $V(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$ и анализом её производной вдоль траекторий системы.

4 Заключение

В данном реферате были рассмотрены основные аспекты метода скоростного градиента, включая построение алгоритмов СГ для различных форм целевых функционалов и условия достижения цели управления. Были представлены и доказаны ключевые теоремы, обосновывающие эффективность метода СГ для широкого класса нелинейных систем.

Метод скоростного градиента представляет собой мощный инструмент синтеза алгоритмов управления, обладающий рядом преимуществ:

- Универсальность применения к различным классам нелинейных систем;
- Возможность работы с различными типами целевых функционалов;
- Гарантированное достижение цели управления при выполнении определенных условий;
- Простота реализации и интерпретации алгоритмов управления.

Дальнейшие исследования в области метода скоростного градиента могут быть направлены на расширение класса систем, к которым применим метод, улучшение сходимости алгоритмов и разработку новых модификаций метода для решения специфических задач управления.