

«Нелинейное и адаптивное управление в технических системах» (НАУТС)

Тема 10

Лектор
Виктор Владимирович Путов,
д.т.н., профессор

ТЕМА 10

- ПРАКТИКУМ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ НЕПОСРЕДСТВЕННОЙ КОМПЕНСАЦИИ, РАСШИРЕННОЙ ОШИБКИ, ВЫСОКОГО ПОРЯДКА И ИТЕРАТИВНОГО СИНТЕЗА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ ПРИ ОТСУТСТВИИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Источники

- 2.[2.Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами / Учебное пособие. - СПб: Наука, 2000. - 549 с.]
- *Глава 6, п. 6.4 (адаптивное управление по выходу линейными объектами при идеальных условиях), страницы 386-432 – основной.*

ТЕМА 10.1

- ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ.
**ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МОДЕЛИ
ОБЪЕКТА. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ
НЕПОСРЕДСТВЕННОЙ
КОМПЕНСАЦИИ И РАСШИРЕННОЙ
ОШИБКИ (п.п. 6.4.1., 6.4.2.,
6.4.3. (с.с. 386-401)**

6.4. Адаптивное управление по выходу линейными объектами при идеальных условиях

Основная цель параграфов 6.4 и 6.5 – проиллюстрировать практическое применение методов синтеза систем адаптивного и робастного управления, представленных выше. Для этого рассмотрим задачу управления с эталонной моделью линейным параметрически неопределенным объектом без измерения производных регулируемой переменной. Данная задача имеет большое прикладное и теоретическое значение, а поиски путей ее решения являются областью активных исследований на протяжении последних двадцати лет (подробнее см. обзор [92]). Для ее решения было предложено несколько принципиально различных подходов, что позволяет рассмотреть и сравнить практически все основные методы синтеза систем адаптивного и робастного управления, приведенные в п.п. 6.2 и 6.3.

В п. 6.4 будут представлены схемы адаптивного управления, синтезированные при идеальных условиях (т. е. при отсутствии внешнего возмущения), а их робастные аналоги будут приведены в п. 6.5.

6.4.1. Постановка задачи

Рассматриваемая задача состоит в управлении линейным стационарным объектом, связь между регулируемой переменной y и сигналом управления u которого описывается уравнением вида

$$y = b_m \frac{\beta(p)}{\alpha(p)} u, \quad (6.200)$$

где $p = d/dt$ – оператор дифференцирования, а $\alpha(p)$ и $\beta(p)$ – нормированные полиномы переменной p с неизвестными постоянными коэффициентами a_i и b_j такие, что

$$b_m \beta(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0,$$

$$\alpha(p) = p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0.$$

Примем следующее допущение, являющееся стандартным в большинстве задач адаптивного управления по выходу.

Допущение 6.6. Модель (6.200) удовлетворяет следующим требованиям

а) известен знак коэффициента b_m (для определенности будем полагать, что $b_m > 0$);

- б) полином $\beta(p)$ является гурвицевым;
 в) известны степени полиномов $\alpha(p)$ и $\beta(p)$ - n и m соответственно и $\rho = n - m \geq 1$.

Пусть желаемое поведение регулируемой переменной y задается эталонной моделью вида

$$y^* = \frac{k^*}{\alpha^*(p)} r, \quad (6.201)$$

где y^* – эталонный выход, r – сигнал задания (ограниченная, кусочно-непрерывная функция времени), $\alpha^*(p)$ – нормированный гурвицев полином степени ρ , а $k^* > 0$ – постоянный коэффициент.

Полагается, что у объекта управления доступной для измерений является только выходная переменная y , но не ее производные. Требуется найти такой закон управления, чтобы при любых начальных условиях все сигналы в замкнутой системе были ограниченными функциями времени и дополнительно выполнялось целевое условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_1(t) = 0, \quad (6.202)$$

где $\varepsilon_1 = y - y^*$ – ошибка слежения.

Представленная постановка задачи адаптивного управления с эталонной моделью с учетом сделанных допущений была сформулирована в работах [146, 214, 224]. Альтернативные постановки рассматриваемой задачи и пути ее решения для некоторых частных или специальных случаев (частичная известность параметров объекта, неизмеримость сигнала задания r , неизвестность параметров эталонной модели, текущая оптимизация параметров эталонной модели и т. д.) представлены в работах [9, 21, 22, 105, 222]. Необходимо также отметить идентичную близость к рассматриваемой задаче проблемы адаптивной стабилизации линейного стационарного объекта без измерения производных выходного сигнала [23, 24, 128].

6.4.2. Параметризованная модель объекта управления

В качестве первого шага решения сформулированной задачи адаптивного управления необходимо получить удобную параметризацию математической модели объекта (6.200). А именно – желательно представить параметрические неопределенности модели в виде аддитивных возмущений, линейных по неизвестным параметрам. Это позволит использовать методы синтеза адаптивного управления, рассмотренные в предыдущих разделах.

Ниже представлены две схемы вспомогательных фильтров, использующихся для получения требуемых параметризаций объекта. Данные схемы приводят к моделям с существенно различными структурами и в итоге – к различным свойствам замкнутых систем адаптивного управления.

Следующая лемма переформулирует результаты, известные из [146].

Лемма 6.5. Вместе с моделью объекта управления (6.200) рассмотрим вспомогательные фильтры вида

$$\dot{v}_1 = \Lambda v_1 + e_{n-1} u, \quad (6.203)$$

$$\dot{v}_2 = \Lambda v_2 + e_{n-1} y, \quad (6.204)$$

где $v_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $v_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $e_{n-1} = \text{col}(0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n-1, 1}$ а Λ – сопровождающая матрица полинома

$$\gamma(p) = p^{n-1} + \gamma_{n-2} p^{n-2} + \dots + \gamma_1 p + \gamma_0,$$

m. e.

$$\Lambda = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\gamma_0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & \dots & \gamma_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Тогда для любых нормированных гурвицевых полиномов $\gamma(p)$ и $\delta(p)$ степени $n-1$ и $n-m$, соответственно, существует единственный постоянный вектор $\theta_* \in \mathbb{R}^{2n-1}$ такой, что модель (6.200) может быть представлена в виде



$$y = \frac{b_m}{\delta(p)} [\theta_*^T \omega_* + u] + \epsilon_y, \quad (6.205)$$

где $\omega_*^T = [v_1^T, v_2^T, y]$, а $\epsilon_y(t)$ – экспоненциально затухающая функция времени, определенная ненулевыми начальными условиями.

Доказательство леммы 6.5. Введем в рассмотрение нормированный полином $S(p)$ степени $n-m-1$ и полином $R(p)$ степени $n-1$, удовлетворяющие уравнению

$$\gamma(p)\delta(p) = \alpha(p)S(p) + R(p), \quad (6.206)$$

¹Везде в данном параграфе под e_i будем понимать координатный вектор соответствующей размерности с единицей на i -м месте (например, $e_1 = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$). Размерность вектора будет понятна из контекста или будет специально оговариваться.

которое в рассматриваемом случае имеет единственное решение. Переходя далее к изображению Лапласа, с учетом равенства

$$Y(s) = b_m \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} U(s) + \frac{D(s)}{\alpha(s)},$$

можно записать

$$\begin{aligned} \gamma(s)\delta(s)Y(s) &= ((\alpha(s)S(s) + R(s)) Y(s) = \\ &= b_m S(s)\beta(s)U(s) + R(s)Y(s) + S(s)D(s), \end{aligned}$$

где s – комплексная переменная, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ и $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ – образы Лапласа соответствующих сигналов, а полином $D(s)$ обозначает сумму всех членов, содержащих начальные условия. Тогда

$$y = \frac{1}{\delta(p)} \left[b_m \frac{S(p)\beta(p)}{\gamma(p)} u + \frac{R(p)}{\gamma(p)} y \right] + \epsilon_y,$$

где экспоненциально затухающая функция $\epsilon_y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{S(s)D(s)}{\gamma(s)\delta s} \right\}$ определяется начальными условиями. Принимая во внимание, что $S(p)\beta(p)$ – нормированный полином степени $n - 1$, можно записать

$$\frac{S(p)\beta(p)}{\gamma(p)} = 1 + \frac{\chi(p)}{\gamma(p)},$$

где $\chi(p)$ – полином степени $n - 2$, удовлетворяющий уравнению $S(p)\beta(p) = \gamma(p) + \chi(p)$. Далее, обозначив

$$\frac{1}{b_m} \frac{R(p)}{\gamma(p)} = k_y + \frac{\lambda(p)}{\gamma(p)},$$

где $\lambda(p)$ – полином степени $n - 2$, а k_y – постоянный коэффициент и $k_y\gamma(p) + \lambda(p) = \frac{1}{b_m}R(p)$, получаем

$$y = \frac{b_m}{\delta(p)} \left[u + \frac{\chi(p)}{\gamma(p)}u + \frac{\lambda(p)}{\gamma(p)}y + k_y y \right] + \epsilon_y.$$

Пусть теперь $\theta_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $\theta_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ – постоянные векторы, составленные из неизвестных коэффициентов полиномов $\chi(p)$ и $\lambda(p)$. Тогда, принимая во внимание каноническую форму фильтров (6.203), (6.204), можно записать

$$\frac{\chi(p)}{\gamma(p)}u + \frac{\lambda(p)}{\gamma}y + k_y y = \theta_1^T v_1 + \theta_2^T v_2 + k_y y.$$

Далее, вводя обозначение $\theta_*^T = [\theta_1^T, \theta_2^T, k_y]$, получаем (6.205). ■

Параметризация (6.205) позволяет получить также удобную модель для ошибки слежения (6.202). Выбирая $\delta(p) = \alpha^*(p)$, имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{b_m}{\alpha^*(p)} [\theta^T \omega + u] + \epsilon_y, \quad (6.207)$$

где

$$\theta^T = [\theta_*^T, -\frac{k^*}{b_m}], \quad \omega^T = [\omega_*^T, r].$$

Следует отметить, что в данном случае регрессор $\omega(t)$ может быть представлен также в следующей форме, которая иногда является удобной для анализа свойств сигналов в замкнутой системе управления

$$\omega^T = \frac{1}{\gamma(p)} [u, \dot{u}, \dots, u^{(n-2)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-2)}, \gamma(p)y, \gamma(p)r]. \quad (6.208)$$

Вторая схема вспомогательных фильтров и соответствующая ей параметризованная модель объекта управления определяются следующей леммой [188].

Лемма 6.6. Вместе с моделью (6.200) рассмотрим вспомогательные фильтры вида

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_n &= A_0 \xi_n + k y, \\ \dot{\xi}_i &= A_0 \xi_i + e_{n-i} y, \quad 0 \leq i \leq n-1, \\ \dot{\nu}_i &= A_0 \nu_i + e_{n-i} u, \quad 0 \leq i \leq m,\end{aligned}\tag{6.209}$$

где $\xi_i, \nu_i \in \mathbb{R}^n$, а вектор коэффициентов обратных связей $k = \text{col}(k_1, k_2, \dots, k_n)$ выбран таким, что матрица

$$A_0 = \begin{vmatrix} -k_1 & & & \\ -k_2 & I_{n-1 \times n-1} & & \\ \vdots & & & \\ -k_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

является гурвицевой. Тогда выходная переменная у объекта (6.200) может быть представлена в виде



$$y = \xi_{n,1} + \varphi^T \psi + \epsilon_1, \tag{6.210}$$

где регрессор φ и вектор неизвестных параметров ψ заданы соотношениями

$$\varphi = [\nu_{m,1}, \nu_{m-1,1}, \dots, \nu_{0,1}, \xi_{n-1,1}, \xi_{n-2,1}, \dots, \xi_{0,1}]^T, \tag{6.211}$$

$$\psi = [b_m, b_{m-1}, \dots, b_0, -a_{n-1}, -a_{n-2}, \dots, -a_0]^T, \quad (6.212)$$

функция времени $\epsilon_1 = e_1^T \epsilon$ экспоненциально затухает, а вектор ϵ удовлетворяет уравнению $\dot{\epsilon} = A_0 \epsilon$.

Доказательство леммы 6.6. Представим модель (6.200) в канонической форме вход–состояние–выход

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - a_{n-1}y, \\ \dot{x}_2 &= x_3 - a_{n-2}y, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{\rho-1} &= x_\rho - a_{m+1}y, \\ \dot{x}_\rho &= x_{\rho+1} - a_my + b_mu, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -a_0y + b_0u, \\ y &= x_1\end{aligned} \quad (6.213)$$

или, что эквивалентно,

$$\dot{x} = Ex - \sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{n-i} y + \sum_{i=0}^m b_i e_{n-i} u, \quad (6.214)$$

$$y = e_1^T x, \quad (6.215)$$

где $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $e_i \in \mathbb{R}^n$ и

$$E = \begin{vmatrix} 0 & & & \\ \vdots & I_{n-1 \times n-1} & & \\ 0 & \dots & 0 & \end{vmatrix}.$$

Введем в рассмотрение вектор ошибки оценки состояния

$$\epsilon = x - \xi_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \xi_i - \sum_{i=0}^m b_i \nu_i.$$

Дифференцируя последнее выражение с учетом (6.209) и (6.214), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= Ex - \sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{n-i} y + \sum_{i=0}^m b_i e_{n-i} u - A_0 \xi_n - ky + \\ &+ A_0 \sum_{i=0}^{n-1} a_i \xi_i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{n-i} y - A_0 \sum_{i=0}^m b_i \nu_i - \sum_{i=0}^m b_i e_{n-i} u = A_0 \epsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, вектор состояния x может быть представлен в виде

$$x = \xi_n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \xi_i + \sum_{i=0}^m b_i \nu_i + \epsilon, \quad (6.216)$$

где ϵ удовлетворяет уравнению $\dot{\epsilon} = A_0 \epsilon$. Подставляя (6.216) в (6.215), непосредственно получаем (6.210). ■

В дальнейшем для построения закона управления потребуется модель первой производной регулируемой переменной. Она может быть получена путем дифференцирования выражения (6.210) с учетом (6.209). Таким образом, справедливо следующее следствие из леммы 6.6.

Следствие 6.1. *Производная \dot{y} регулируемой переменной объекта (6.200) может быть представлена в виде*

$$\dot{y} = \beta_1 + \vartheta^T \psi + \epsilon_2, \quad (6.217)$$

где $\epsilon_2 = e_1^T A_0 \epsilon$ экспоненциально затухает,

$$\beta_1 = -k_1 \xi_{n,1} + \xi_{n,2} + k_1 y,$$

$$\begin{aligned} \vartheta = & [-k_1 \nu_{m,1} + \nu_{m,2}, -k_1 \nu_{m-1,1} + \nu_{m-1,2}, \dots, -k_1 \nu_{0,1} + \nu_{0,2}, \\ & -k_1 \xi_{n-1,1} + \xi_{n-1,2} + y, -k_1 \xi_{n-2,1} + \xi_{n-2,2}, \dots, -k_1 \xi_{0,1} + \xi_{0,2}]^T. \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что фильтры (6.209) оказываются удобными для построения параметризованных моделей (6.210), (6.217) и анализа их свойств. Однако для генерирования сигналов ξ_i и ν_i на практике можно использовать только два n -мерных динамических фильтра. Структура данных фильтров и метод получения при этом сигналов ξ_i и ν_i устанавливается вторым следствием из леммы 6.6.

Следствие 6.2 [192]. Рассмотрим два n -мерных фильтра:

$$\dot{\xi}_* = A_0 \xi_* + e_n y, \quad \dot{\nu}_* = A_0 \nu_* + e_n u, \quad (6.218)$$

где $\nu_*, \xi_* \in \mathbb{R}^n$, а матрица A_0 определена в лемме 6.6. Тогда сигналы ξ_i и ν_i могут быть рассчитаны в соответствии со следующими алгебраическими соотношениями

$$\nu_i = A_0^i \nu_*, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (6.219)$$

$$\xi_i = A_0^i \xi_*, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (6.220)$$

$$\xi_n = -A_0^n \xi_*. \quad (6.221)$$

Доказательство следствия 6.2. С учетом специальной структуры матрицы A_0 получаем

$$\begin{aligned} A_0^i e_n &= e_{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \\ A_0^n e_n &= -k. \end{aligned}$$

Тогда легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_i &= A_0^i \dot{\nu}_* = A_0(A_0^i \nu_*) + A_0^i e_n u = A_0 \nu_i + e_{n-i} u, \quad 0 \leq i \leq m, \\ \dot{\xi}_i &= A_0^i \dot{\xi}_* = A_0(A_0^i \xi_*) + A_0^i e_n y = A_0 \xi_i + e_{n-i} y, \quad 0 \leq i \leq n-1, \\ \dot{\xi}_n &= -A_0^n \dot{\xi}_* = A_0(-A_0^n \xi_*) - A_0^n e_n y = A_0 \xi_n + k y. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Сравним свойства параметризованных моделей, представленных леммами 6.5 и 6.6. Для этого запишем модель (6.205) в пространстве состояний

$$y = c^{*T} x^* + \epsilon_y, \quad (6.222)$$

$$\dot{x}^* = A^* x^* + b_m b^*(u + \omega_*^T \theta_*), \quad (6.223)$$

где $x^* \in \mathbb{R}^\rho$ – неизмеряемый вектор состояния, а тройка (c^*, A^*, b^*) является минимальной реализацией передаточной функции $1/\delta(p)$, т. е. $c^{*T}(pI - A^*)^{-1}b^* = 1/\delta(p)$. В то же время дополним модель (6.217) уравнением фильтра, преобразующего сигнал управления u в вектор ν_m

$$y = \xi_{n,1} + \varphi_0^T \psi + b_m e_1^T \nu_m + \epsilon_1, \quad (6.224)$$

$$\dot{\nu}_m = A_0 \nu_m + e_\rho u, \quad (6.225)$$

где вектор φ_0 получен из φ посредством обнуления первого элемента, т. е.

$$\varphi_0 = [0, \nu_{m-1,1}, \dots, \nu_{0,1}, \xi_{n-1,1}, \xi_{n-2,1}, \dots, \xi_{0,1}]^T.$$

Вектор ν_m выбран по той причине, что действительное управление и появляется в аналитическом выражении для ρ -й производной сигнала $\nu_{m,1}$ (т. е. раньше, чем для любой другой переменной $\nu_{i,1}$, $0 \leq i < m$).

Замечание 6.6. В определенном смысле модели (6.222), (6.223) и (6.224), (6.225) являются неполными, так как не содержат уравнений, описывающих поведение $\omega_*(t)$, $\varphi_0(t)$ и $\xi_{n,1}(t)$. Данные уравнения опущены намеренно, чтобы более наглядно продемонстрировать важные структурные свойства исследуемых моделей. Поэтому будем временно рассматривать ω_* , φ_0 и $\xi_{n,1}$ в качестве независимых (внешних) сигналов, а x^* и ν_m – в качестве векторов состояния соответствующих моделей. \square

Анализ выражений (6.222), (6.223) и (6.224), (6.225) показывает, что определенные в леммах 6.5 и 6.6 параметризованные модели объекта управления существенно различаются по уровню

неопределенности, доступности прямым измерениям вектора состояния и по возможности использования априорной информации о значениях параметров объекта.

В соответствии с определением, введенным в 6.2.2, уровень неопределенности равен числу интеграторов, расположенных "между" сигналом управления и неизвестным параметрами. Очевидно, что модель (6.222), (6.223) имеет нулевой уровень неопределенности, так как управление u и неизвестные параметры θ_* появляются в одном и том же уравнении и являются согласованными. Поэтому для синтеза закона управления может быть использован метод непосредственной компенсации. В то же время модель (6.224), (6.225) имеет уровень неопределенности, равный ρ , и не удовлетворяет условию согласования. Следовательно, для преодоления структурных препятствий на пути синтеза закона управления, вызванных нарушением условия согласования, необходимо использовать итеративные процедуры синтеза. (Следует отметить, что при построении закона управления мы воспользуемся аналитическим выражением для производной выходного сигнала \dot{y} и таким образом понизим уровень неопределенности модели (6.224), (6.225) до $\rho = 1$).

Другой важной характеристикой рассматриваемых параметризаций является доступность вектора состояния для прямых измерений. В модели (6.222), (6.223) вектор состояния x^* имеет виртуальный характер и не доступен для измерений. Поэтому синтез адаптивного управления на основе параметризованной модели (6.222), (6.223) требует решения проблемы высокой относительной степени (см. 6.3.1), для чего необходимо использовать специальные методы, изложенные в 6.3.2. В противоположность этому вектор ν_m , генерируемый физически реализуемым фильтром, доступен для прямых измерений. Поэтому использование модели (6.224), (6.225) не вызывает принципиальных трудностей, связанных с управлением по выходной переменной. Более того, как будет показано в 6.4.5, доступность для измерений вектора ν_m позволит включить в закон управления ненастраиваемые обратные связи, существенно улучшающие качество переходных процессов и, кроме того, обеспечивающие устойчивость замкнутой системы даже без адаптивной настройки параметров регулятора.

Наконец, следует отметить, что вектор θ_* модели (6.222), (6.223) сложным образом зависит от параметров a_i и b_j передаточной функции объекта управления. Это не позволяет использовать априорную информацию о параметрах объекта для сокращения размерности вектора θ_* , и параметризация (6.205) требует фиксированного числа настраиваемых параметров регулятора. В

противоположность этому элементами вектора ψ параметризации (6.224), (6.225) являются параметры передаточной функции объекта управления a_i и b_j (см. (6.212)). Следовательно, если некоторые параметры объекта являются априорно известными, то они могут быть исключены из вектора *неизвестных* параметров ψ , что в свою очередь ведет к сокращению числа настраиваемых параметров регулятора и, следовательно, к упрощению его структуры. Другими словами, модель (6.224), (6.225) требует ровно столько настраиваемых параметров регулятора, сколько неизвестных параметров содержит передаточная функция объекта управления.

Таким образом, параметризованные модели (6.205) и (6.210) обладают существенно различными свойствами и требуют привлечения различных методов синтеза адаптивного управления. Модель (6.205) используется для построения управления на основе принципа непосредственной компенсации, а модель (6.210) – на основе итеративной процедуры, известной под общенным называнием "адаптивного обхода интегратора".

6.4.3. Метод непосредственной компенсации

В настоящем разделе для построения закона адаптивного управления будет использована модель ошибки (6.207), полученная на основе параметризации (6.205). Данная модель удовлетворяет условиям согласования и поэтому позволяет применить принцип непосредственной компенсации. Для преодоления структурных препятствий, связанных с высокой относительной степенью объекта управления, будет использована лемма о расширенной ошибке.

Начнем с простейшего случая, когда $\rho = 1$. В соответствии с принципом непосредственной компенсации управление выбирается в виде

$$u = -\omega^T \hat{\theta}, \quad (6.226)$$

где $\hat{\theta}$ – вектор настраиваемых параметров. Подставляя последнее выражение в (6.207), получаем следующую модель ошибки замкнутой системы:

$$\varepsilon_1 = \frac{b_m}{\alpha^*(p)} \omega^T \tilde{\theta} + \epsilon_y, \quad (6.227)$$

где $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$. Так как при $\rho = 1$ передаточная функция $b_m/\alpha^*(p)$ является строго положительно вещественной, то можно использовать следующий алгоритм адаптации (см. теорему 6.8):

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \omega \varepsilon_1, \quad \gamma > 0. \quad (6.228)$$

В этом случае свойства устойчивости замкнутой системы определяются следующей теоремой.

Теорема 6.14. *Все сигналы в замкнутой системе, состоящей из объекта управления (6.200) с $\rho = 1$, эталонной модели (6.201), вспомогательных фильтров (6.203), (6.204), настраиваемого регулятора (6.226) и алгоритма адаптации (6.228), для любых $\gamma > 0$ и всех начальных условий являются ограниченными и, кроме того,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y^*(t)) = 0.$$

Доказательство теоремы непосредственно следует из теоремы 6.8 и поэтому не приводится.

Когда $\rho > 1$, передаточная функция $b_m/\alpha^*(p)$ не является строго положительно вещественной и проблема синтеза алгоритма адаптации, использующего только измеряемые переменные, становится нетривиальной. Для ее разрешения используем концепцию расширенной ошибки (см. лемму 6.4). С учетом подстановки $H(p) = 1/\alpha^*(p)$, схема расширения принимает вид

$$\widehat{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 + \widehat{k}\zeta, \quad (6.229)$$

$$\zeta = -\frac{1}{\alpha^*(p)}u - \widehat{\theta}^T \varpi, \quad (6.230)$$

где \hat{k} – дополнительный настраиваемый параметр и

$$\varpi = \frac{1}{\alpha^*(p)} \omega.$$

Тогда в силу леммы 6.4 модель расширенной ошибки может быть представлена в виде

$$\hat{\varepsilon}_1 = b_m \varpi^T \tilde{\theta} - \zeta \tilde{k} + \epsilon_y, \quad (6.231)$$

где ϵ_y – экспоненциально затухающая функция времени, определяемая ненулевыми начальными условиями, и $\tilde{k} = b_m - \hat{k}$. Данная модель позволяет выбрать следующие алгоритмы адаптации:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma_1 \frac{\varpi \hat{\varepsilon}_1}{1 + \varpi^T \varpi}, \quad (6.232)$$

$$\dot{\hat{k}} = -\gamma_2 \frac{\zeta \hat{\varepsilon}_1}{1 + \varpi^T \varpi}, \quad (6.233)$$

где $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$ – коэффициенты усиления.

Замечание 6.7. Так как модель (6.207) содержит неизвестный параметр b_m , то в схему расширения (6.229), (6.230) введен дополнительный настраиваемый параметр \hat{k} . Для его настройки используется второй алгоритм адаптации (6.233). Таким образом, общее

число настраиваемых параметров адаптивного регулятора равно $2n+1$. Причем оно является фиксированным и не зависит от какой-либо априорной информации о параметрах объекта управления. \square

Замечание 6.8. Для систем адаптивного управления с расширенной ошибкой скорость настройки параметров играет ключевую роль при доказательстве свойств устойчивости. В частности, как будет показано ниже, сигнал $\tilde{\theta}(t)$ должен быть квадратично интегрируемым. Именно для обеспечения такого поведения настраиваемых параметров в алгоритмы адаптации введены нормализующие сомножители $1/(1 + \varpi^T \varpi)$. \square

Свойства устойчивости замкнутой системы определяются следующей теоремой.

Теорема 6.15. *Все сигналы в замкнутой системе, состоящей из объекта управления (6.200), эталонной модели (6.201), вспомогательных фильтров (6.203), (6.204), настраиваемого регулятора (6.226), схемы расширения (6.229), (6.230) и алгоритмов адаптации (6.232), (6.233), для любых $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ и всех начальных условий являются ограниченными и, кроме того,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(y(t) - y^*(t) \right) = 0.$$

Доказательство теоремы 6.15. Как было отмечено выше (см. комментарии к теореме 6.10), метод функций Ляпунова не позволяет непосредственно доказать устойчивость систем адаптивного управления с расширенной ошибкой и для этой цели необходим дополнительный анализ свойств сигналов замкнутой системы. Полное доказательство теоремы 6.15 может быть найдено в [222], а ниже приводятся его основные этапы.

Этап 1. Пренебрегая экспоненциально затухающим слагаемым ϵ_y , запишем модель замкнутой системы, полученную на основе выражений (6.231)–(6.233):

$$\hat{\varepsilon}_1 = b_m \varpi^T \tilde{\theta} - \zeta \tilde{k}, \quad (6.234)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma_1 \frac{\varpi \hat{\varepsilon}_1}{1 + \varpi^T \varpi}, \quad (6.235)$$

$$\dot{\tilde{k}} = \gamma_2 \frac{\zeta \hat{\varepsilon}_1}{1 + \varpi^T \varpi}. \quad (6.236)$$

Выберем функцию Ляпунова

$$V(\tilde{\theta}, \tilde{k}) = \frac{b_m}{2\gamma_1} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{k}^2.$$

Ее производная по времени в силу уравнений (6.234)–(6.236) имеет вид:

$$\dot{V} = -\frac{\hat{\varepsilon}^2}{1 + \varpi^T \varpi} \leq 0.$$

Следовательно, используя те же аргументы, что и при доказательстве теоремы 6.9, можно показать, что $\tilde{\theta}, \tilde{k} \in \mathcal{L}_\infty$, $\tilde{\theta} \in \mathcal{L}_2$ и $\hat{\varepsilon}_1 = f(t)\sqrt{1 + \varpi^T \varpi}$, где $f(t) \in \mathcal{L}_2$.

Отметим также, что незначительное изменение структуры функции Ляпунова позволяет получить те же результаты и в случае присутствия экспоненциально затухающего слагаемого ϵ_y .

Этап 2. Так как на данной стадии мы не можем непосредственно доказать устойчивость замкнутой системы управления, используем метод доказательства от противоположного и предположим, что сигналы в замкнутой системе неограниченно растут. Тогда с учетом линейности замкнутой системы при отключенных цепях настройки регулятора оказывается, что сигналы y , v_2 , ω и ϖ могут расти не быстрее, чем экспоненциально, и только с одинаковой скоростью, т. е.

$$\sup_{\tau \leq t} |y(\tau)| \sim \sup_{\tau \leq t} |v_2(\tau)| \sim \sup_{\tau \leq t} |\omega(\tau)| \sim \sup_{\tau \leq t} |\varpi(\tau)|. \quad (6.237)$$

Этап 3. Так как $\dot{\tilde{\theta}} \in \mathcal{L}_2$, то с учетом леммы 6.2. получаем что

$$\zeta(t) = o[\sup_{\tau \leq t} |\omega(\tau)|].$$

Принимая далее во внимание зависимость

$$v_2 = (pI - \Lambda)^{-1}e_{n-1}y = (pI - \Lambda)^{-1}e_{n-1}(y^* + \hat{\epsilon}_1 - \hat{k}\zeta)$$

и тот факт, что $\hat{\epsilon}_1 = f(t)\sqrt{1 + \varpi^T \varpi}$, где $f(t) \in \mathcal{L}_2$, можно показать, что v_2 растет медленнее, чем $\omega(t)$. Однако последнее противоречит (6.237), и, следовательно, все сигналы в замкнутой системе являются ограниченными.

Этап 4. Используя тот же подход, что и при доказательстве теоремы 6.9, получаем, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_1(t) = 0$. ■

Пример 6.3. Рассмотрим объект управления

$$y = \frac{b_0}{p(p^2 + a_2p + a_1)}u, \quad (6.238)$$

где параметры $b_0 = 2.5$, $a_2 = 3$, $a_1 = -1$ полагаются априорно неизвестными. Цель управления состоит в асимптотическом слежении за эталонной моделью (6.201), где $\alpha^*(p) = (p+1)^3$, $k^* = 1$ и $r = 2.5 \sin 0.8t$.

Выбирая $\gamma(p) = p^2 + p + 0.125$, получаем следующие выражения для вспомогательных фильтров (6.203), (6.204):

$$\dot{v}_{1,1} = v_{1,2}, \quad \dot{v}_{1,2} = -0.125v_{1,1} - v_{1,2} + u, \quad (6.239)$$

$$\dot{v}_{2,1} = v_{2,2}, \quad \dot{v}_{2,2} = -0.125v_{2,1} - v_{2,2} + y. \quad (6.240)$$

При этом модель ошибки слежения принимает вид (см. лемму 6.5):

$$\varepsilon_1 = \frac{b_0}{(p+1)^3} [\omega(t)^T \theta + u] + \epsilon_y,$$

где $\theta \in \mathbb{R}^6$ – вектор неизвестных параметров и

$$\omega^T = [v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}, y, r].$$

Таким образом, несмотря на тот факт, что модель (6.238) несет определенную информацию о параметрах объекта управления (а именно – априорно известно, что $b_2 = b_1 = a_0 = 0$), мы вынуждены использовать алгоритм адаптивного управления с шестью настраиваемыми параметрами $\hat{\theta}_i$:

$$u = -\hat{\theta}_1 v_{1,1} - \hat{\theta}_2 v_{1,2} - \hat{\theta}_3 v_{2,1} - \hat{\theta}_4 v_{2,2} - \hat{\theta}_5 y - \hat{\theta}_6 r = -\omega^T \hat{\theta}, \quad (6.241)$$

где $\hat{\theta}^T = [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4, \hat{\theta}_5, \hat{\theta}_6]$.

Для того чтобы оценить сложность рассматриваемого алгоритма управления, представим уравнения, описывающие вспомогательные фильтры, схему расширения и алгоритмы адаптации:

$$\varpi_1 = \frac{1}{\alpha^*(p)} v_{1,1}, \quad \varpi_2 = \frac{1}{\alpha^*(p)} v_{1,2}, \quad \varpi_3 = \frac{1}{\alpha^*(p)} v_{2,1}, \quad (6.242)$$

$$\varpi_4 = \frac{1}{\alpha^*(p)} v_{2,2}, \quad \varpi_5 = \frac{1}{\alpha^*(p)} y, \quad \varpi_6 = \frac{1}{\alpha^*(p)} r = y^*, \quad (6.243)$$

$$\hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 + \hat{k} \zeta, \quad \zeta = -\frac{1}{\alpha^*(p)} u - \hat{\theta}^T \varpi, \quad (6.244)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \gamma_1 \frac{\varpi_i \hat{\varepsilon}_1}{1 + \varpi^T \varpi}, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (6.245)$$

$$\dot{\hat{k}} = -\gamma_2 \frac{\zeta \hat{\varepsilon}_1}{1 + \varpi^T \varpi}. \quad (6.246)$$

Таким образом, структура адаптивного регулятора для объекта (6.238) полностью описывается уравнениями (6.239)–(6.246). Общий динамический порядок регулятора равен 29. Поэтому

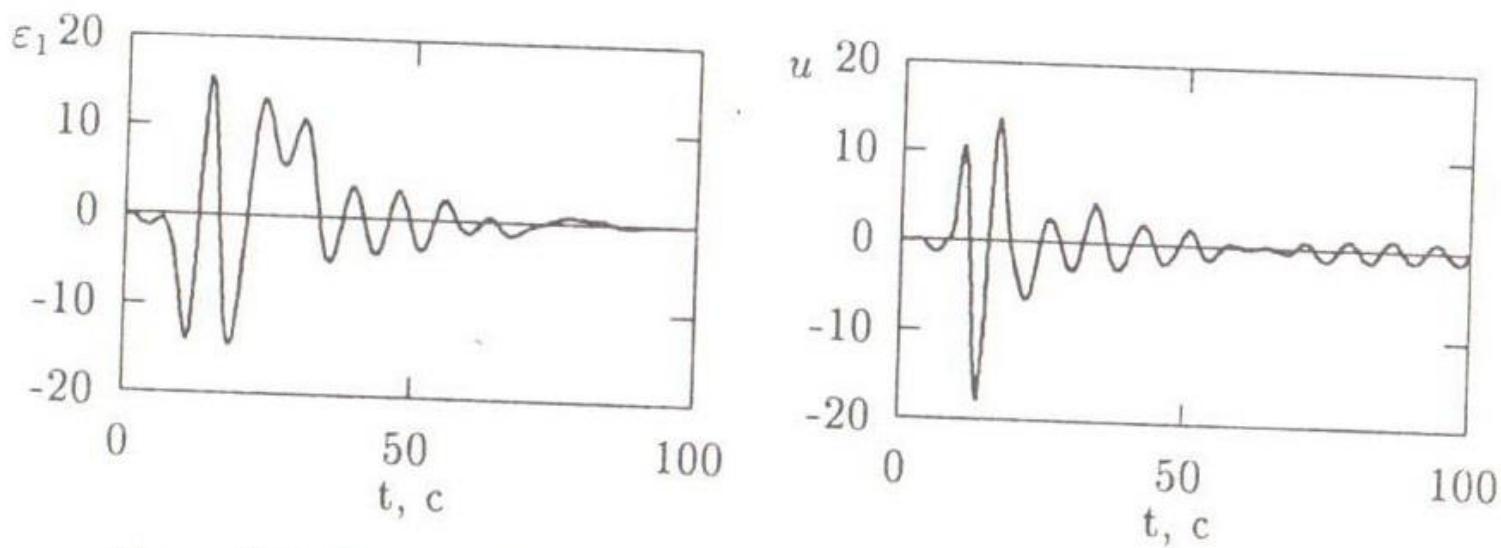


Рис. 6.1. Процессы в системе, замкнутой адаптивным регулятором с расширенной ошибкой.

для формирования сигнала управления и необходим существенный объем обработки и преобразования измеряемых сигналов.

Результаты моделирования переходных процессов в замкнутой системе адаптивного управления представлены на рис. 6.1. При моделировании начальные условия объекта управления, эталонной модели и всех вспомогательных фильтров были нулевыми, $\hat{k}(0) = 0$, $\hat{\theta}_i(0) = 0$ ($i = 1, \dots, 6$) и $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$.

Результаты моделирования

— 14 —

Результаты, представленные на рис. 6.1, являются типичными для систем адаптивного управления с расширенной ошибкой. Как правило, данные системы демонстрируют низкое качество переходных процессов (большое перерегулирование, колебательность, медленную сходимость), несмотря на достижение (в асимптотике) нулевой установившейся ошибки слежения. Известно, что качество переходных процессов систем адаптивного управления с расширенной ошибкой может быть существенно различным в зависимости от ряда факторов таких, как характеристики (динамический порядок, относительная степень) объекта управления, форма задающего воздействия $r(t)$, начальные значения параметрических ошибок $\tilde{\theta}_0$, величина коэффициентов адаптации γ_1 и γ_2 и т. д. [89]. При этом многие из указанных факторов (например, характеристики объекта управления и задающего воздействия) не могут быть учтены на этапе проектирования системы, так как заранее не известны. В результате, в литературе до сих пор не предложены методы априорной оценки качества переходных процессов в системах с расширенной ошибкой. С формальной точки зрения это объясняется тем, что при доказательстве свойств устойчивости замкнутой системы удается установить свойства нормализованного сигнала расширенной ошибки \hat{e}_1 , а не самой ошибки слежения e_1 (см. комментарии к теореме 6.10).

Плохое качество переходных процессов в системах адаптивного управления с расширенной ошибкой объясняется также мед-

ленной скоростью настройки параметров в нормализованных алгоритмах адаптации, содержащих сомножитель $1/(1 + \varpi^T \varpi)$. Поэтому для улучшения качества переходных процессов необходимо снять ограничение на скорость настройки параметров и использовать алгоритмы адаптации с действительной, а не расширенной ошибкой слежения. Два принципиально различных подхода к указанной проблеме рассмотрены в 6.4.4 и 6.4.5. \square

ТЕМА 10.2

- ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИНТЕЗА АЛГОРИТМА АДАПТАЦИИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА (п.п. 6.4.4. (с.с. 401-407)

6.4.4. Использование алгоритмов адаптации высокого порядка

Основное отличие рассматриваемого здесь метода синтеза состоит в получении строго положительно вещественной модели ошибки без применения методов расширения. Это позволит использовать в алгоритме адаптации сигнал действительной ошибки слежения, снять требование медленной скорости настройки параметров и в результате улучшить качество переходных процессов. С этой целью используется алгоритм адаптации высокого порядка, универсальный метод синтеза которого был представлен в 6.3.3.

Выберем передаточную функцию $W(p)$ с относительной степенью $\rho - 1$ такую, что

$$W(p) = \frac{p + \lambda}{\alpha^*(p)},$$

где λ – произвольная положительная константа. Тогда модель ошибки слежения (6.207) может быть переписана в виде

$$\varepsilon_1 = \frac{b_m}{p + \lambda} [\varpi(t)^T \theta + W(p)[u]] + \epsilon_y, \quad (6.247)$$

где

$$\varpi(t) = W(p)[\omega(t)]. \quad (6.248)$$

В соответствии с методом, изложенным в 6.3.3, сигнал управления будем формировать по правилу

$$u = -W(p)^{-1}[\varpi(t)^T \hat{\theta}], \quad (6.249)$$

где $\hat{\theta}$ – вектор настраиваемых параметров. Подставляя (6.249) в (6.247), получаем

$$\varepsilon_1 = \frac{b_m}{p + \lambda} [\varpi^T \tilde{\theta}] + \epsilon_y, \quad (6.250)$$

где $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$. Так как передаточная функция $\frac{b_m}{p + \lambda}$ является строго положительно вещественной, то для настройки параметров $\hat{\theta}$

регулятора (6.249) может быть использован алгоритм адаптации, замкнутый по ошибке слежения ε_1 .

Особо отметим, что производные $\varpi^{(i)}$ ($1 \leq i \leq \rho - 1$) могут быть непосредственно получены из (6.248). Поэтому физическая реализуемость алгоритма управления (6.249) зависит от возможности вычисления производных $\hat{\theta}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, \rho - 1$), что в свою очередь определяется правилом формирования вектора $\hat{\theta}$. В работе [214] регулятор (6.249) был использован для решения задачи адаптивного управления линейным объектом с относительной степенью, равной двум. В этом случае передаточная функция $W(p)$ может быть выбрана в виде $W(p) = \frac{1}{w_1 p + w_0}$ и, следовательно,

$$u = -W(p)[\varpi^T \hat{\theta}] = -w_1 \dot{\varpi}^T \hat{\theta} - w_1 \varpi^T \dot{\hat{\theta}} - w_0 \varpi^T \hat{\theta}, \quad (6.251)$$

где w_0 и w_1 – положительные константы. Так как передаточная функция $\frac{b_m}{p+\lambda}$ строго положительно вещественная, то для настройки параметров $\hat{\theta}$ регулятора (6.251) может быть использован следующий стандартный алгоритм адаптации (см. теорему 6.8):

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \varpi \varepsilon_1, \quad \gamma > 0. \quad (6.252)$$

Очевидно, что закон управления (6.251) физически реализуем, так как величина $\hat{\theta}$ может быть непосредственно получена из алгоритма адаптации (6.252). Используя стандартные аргументы, можно показать ограниченность всех сигналов в замкнутой системе (6.200), (6.201), (6.203), (6.204), (6.249) и (6.252) (при $\rho = 2$) и асимптотическое слежение выходной переменной y за эталонным выходом y^* .

Однако если $\rho > 2$, то физическая реализация регулятора (6.249) становится нетривиальной задачей, так как требует вычисления старших производных настраиваемых параметров. Для ее решения используем алгоритм адаптации высокого порядка (см. теорему 6.11):

$$\dot{\hat{\psi}}_i = \varpi_i \varepsilon_1, \quad (6.253)$$

$$\dot{\eta}_i = (1 + \mu \varpi^T \varpi)(\bar{A}\eta_i + \bar{b}\hat{\psi}_i), \quad (6.254)$$

$$\hat{\theta}_i = \bar{c}^T \eta_i, \quad (6.255)$$

где $i = 1, 2, \dots, 2n$, тройка $(\bar{c}, \bar{A}, \bar{b})$ является минимальной реализацией передаточной функции $\bar{\alpha}(0)/\bar{\alpha}(p)$ с произвольным гурвицевым полиномом $\bar{\alpha}(p)$ степени $\rho - 2$, а $\mu > 0$ – постоянный коэффициент.

Свойства замкнутой системы управления определяются следующей теоремой.

Теорема 6.16. Рассмотрим систему, состоящую из объекта (6.200), эталонной модели (6.201), вспомогательных фильтров (6.203), (6.204), регулятора (6.249) и алгоритма адаптации (6.253)–(6.255). Если

$$\mu > \frac{3n}{2\lambda}(\bar{b}_m|\bar{c}| + |P\bar{A}^{-1}\bar{b}|)^2, \quad (6.256)$$

где $\bar{b}_m > b_m$ – верхняя оценка параметра b_m , а симметрическая положительно определенная матрица P является решением уравнения Ляпунова $\bar{A}^T P + P\bar{A} = -2I$, то для любых начальных условий:

- 1) все сигналы в замкнутой системе являются ограниченными;
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y^*(t)) = 0$;
- 3) L_2 - и L_∞ -нормы ошибки слежения ε_1 удовлетворяют оценкам

$$\|\varepsilon_1\|_2 \leq \sqrt{\frac{3}{\lambda}V(0)}, \quad (6.257)$$

$$\|\varepsilon_1\|_\infty \leq \sqrt{2V(0)}, \quad (6.258)$$

где $V(0)$ – начальное значение функции вида

$$V(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_1^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} z_i(t)^T P z_i(t) + \\ + \frac{b_m}{2} \sum_{i=1}^{2n} \tilde{\psi}_i^2(t) + \frac{3}{4\lambda} \int_t^\infty \bar{\epsilon}_y^2(\tau) d\tau, \quad (6.259)$$

$\bar{\epsilon}_y = \dot{\epsilon}_y + \lambda \epsilon_y$, а переменные z_1 и $\tilde{\psi}_i$ определяются выражениями

$$z_i = \eta_i + \bar{A}^{-1} \bar{b} \hat{\psi}_i, \quad \tilde{\psi} = \theta_i - \hat{\psi}_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2n.$$

Доказательство теоремы 6.16. Используя результаты теоремы 6.11, можно показать, что производная функции $V(t)$ (6.259) в силу уравнений замкнутой системы удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{\lambda}{3} \varepsilon_1^2 - \sum_{i=1}^{2n} z_i^2 \leq 0, \quad (6.260)$$

откуда следует ограниченность $\varepsilon_1(t)$, $y(t)$, $\hat{\psi}_i(t)$ и $\eta_i(t)$.

Для доказательства ограниченности управления и представим "отфильтрованный" регрессор $\varpi(t)$ в виде отклика на входные

сигналы, ограниченность которых уже доказана. С учетом (6.208) и (6.200) имеем

$$\begin{aligned}\varpi &= \frac{W(p)}{\gamma(p)} \left[\frac{\alpha(p)}{b_m \beta(p)} [1, p, \dots, p^{n-2}] y, [1, p, \dots, p^{n-2}] y, \gamma(p)y, \gamma(p)r \right] = \\ &= H_y(p)y + W(p)e_{2n}^T r,\end{aligned}\quad (6.261)$$

где $\gamma(p)$ – характеристический полином вспомогательных фильтров (6.203), (6.204), $e_{2n} = \text{col}(0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{2n}$ и

$$H_y(p) = \frac{1}{\gamma(p)} W(p) \left[\frac{1}{b_m} \frac{\alpha(p)}{\beta(p)} [1, p, \dots, p^{n-2}], [1, p, \dots, p^{n-2}], \gamma(p), 0 \right].$$

Так как $2n \times 1$ -передаточная матрица $H_y(p)$ собственная и асимптотически устойчивая, а сигналы $y(t)$ и $r(t)$ являются ограниченными, то из (6.261) следует ограниченность $\varpi(t)$, а из (6.254) и (6.255) – ограниченность $\hat{\theta}$. Далее, перепишем модель (6.250) в виде

$$\dot{y} = -\lambda y + \lambda y^* + \dot{y}_r + b_m \varpi^T \tilde{\theta} + \bar{\epsilon}_y, \quad (6.262)$$

откуда непосредственно следует, что сигнал \dot{y} ограничен. Тогда с учетом (6.261) получаем ограниченность $\dot{\varpi}(t)$, а из (6.254) и (6.255) – ограниченность $\ddot{\theta}$. Дифференцируя по времени \dot{y} с учетом (6.262), легко показать ограниченность \ddot{y} и, следовательно, ограниченность $\ddot{\varpi}$ и $\hat{\theta}^{(3)}$. Таким же образом показывается ограниченность $\varpi^{(i)}$ и $\hat{\theta}^{(i)}$ для всех $1 \leq i \leq \rho - 2$. Тогда из (6.249) непосредственно следует ограниченность u . В свою очередь (6.208) означает ограниченность ω . Часть (1) доказана.

Далее, в силу леммы Барбалата имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(t) = 0.$$

С учетом (6.260) последнее выражение означает, что $\varepsilon_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Часть (2) доказана.

Далее, используя тот же подход, что и в теореме 6.11, легко получить оценки (6.257) и (6.258). ■

Необходимо отметить, что неравенства (6.257) и (6.258) позволяют не только получить оценки L_2 - и L_∞ -норм ошибки слежения ε_1 , но также предлагают конструктивные способы улучшения качества переходных процессов. Из (6.257) и (6.258) очевидно, что ошибка слежения будет малой (в смысле указанных норм), если мало начальное значение $V(0)$. Для его уменьшения можно выбрать

$$\eta_i(0) = -\bar{A}^{-1}\bar{b}\hat{\psi}_i(0), \quad i = 1, 2, \dots, 2n.$$

В этом случае $z_i(0) = 0$ и неравенства (6.257), (6.258) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_1\|_2 &\leq \kappa_2 \sum_{i=1}^{2n} |\tilde{\psi}_i(0)| + \kappa_{02}, \\ \|\varepsilon_1\|_\infty &\leq \kappa_\infty \sum_{i=1}^{2n} |\tilde{\psi}_i(0)| + \kappa_{0\infty},\end{aligned}$$

где постоянные

$$\kappa_2 = \sqrt{\frac{3b_m}{2\lambda}}, \quad \kappa_\infty = \sqrt{b_m}$$

зависят от параметров объекта управления, а константы

$$\kappa_{02} = \sqrt{\frac{3}{2\lambda}} \varepsilon_1(0) + \frac{3}{2\lambda} \|\bar{\epsilon}_y\|_2, \quad \kappa_{0\infty} = \varepsilon_1(0) + \sqrt{\frac{3}{2\lambda}} \|\bar{\epsilon}_y\|_2$$

зависят только от начальных состояний объекта и вспомогательных фильтров.

Пример 6.4. Рассмотрим опять задачу управления, сформулированную в примере 6.3. А именно – рассмотрим объект (6.238)

$$y = \frac{b_0}{p(p^2 + a_2 p + a_1)} u$$

с неизвестными параметрами $b_0 = 2.5$, $a_2 = 3$, $a_1 = -1$ и эталонную модель (6.201) с $\alpha^*(p) = (p+1)^3$, где $k^* = 1$ и $r = 2.5 \sin 0.8t$. Дополнительно будем полагать, что заранее известна верхняя оценка \bar{b}_0 параметра b_0 . Пусть $\bar{b}_0 = 4$.

Выбирая $\gamma(p) = p^2 + p + 0.125$, получаем те же выражения для вспомогательных фильтров, что и в примере 6.3 (см. (6.239) и (6.240)):

$$\dot{v}_{1,1} = v_{1,2}, \quad \dot{v}_{1,2} = -0.125v_{1,1} - v_{1,2} + u, \quad (6.263)$$

$$\dot{v}_{2,1} = v_{2,2}, \quad \dot{v}_{2,2} = -0.125v_{2,1} - v_{2,2} + y. \quad (6.264)$$

Тогда $\omega^T = [v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}, y, r]$.

Для построения настраиваемого регулятора, выберем

$$W(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 1}, \quad \overline{\alpha}(p) = p^2 + 2p + 1.$$

Следовательно, $\lambda = 1$, а модель ошибки принимает вид

$$\varepsilon_1 = \frac{b_0}{p+1} \left[\varpi(t)^T \theta + \frac{1}{p^2 + 2p + 1} [u] \right] + \epsilon_y,$$

где $\theta \in \mathbb{R}^6$ – вектор неизвестных параметров, а элементы "отфильтрованного" регрессора ϖ определяются выражениями

$$\varpi_i = \frac{1}{p^2 + 2p + 1} [\omega_i], \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (6.265)$$

В этом случае настраиваемый регулятор (6.249) задается уравнениями

$$\begin{aligned} u &= -(p^2 + 2p + 1) \varpi^T \hat{\theta} = \\ &= -\left(\ddot{\varpi}^T \hat{\theta} + \varpi^T \ddot{\hat{\theta}} + 2\dot{\varpi}^T \dot{\hat{\theta}} + 2\dot{\varpi}^T \hat{\theta} + 2\varpi^T \dot{\hat{\theta}} + \varpi^T \hat{\theta} \right). \end{aligned} \quad (6.266)$$

Так как в рассматриваемом случае $\rho - 2 = 1$, то выберем полином $\bar{\alpha}(p)$ первой степени: $\bar{\alpha}(p) = p + 3$. Тогда уравнения алгоритма адаптации 2-го порядка (6.253)–(6.255) принимают вид

$$\dot{\hat{\psi}}_i = \varpi_i \varepsilon_1, \quad (6.267)$$

$$\dot{\eta}_i = (1 + \mu \varpi^T \varpi)(-3\eta_i + 3\hat{\psi}_i), \quad (6.268)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \eta_i, \quad (6.269)$$

где $i = 1, 2, \dots, 6$, $\varpi = [\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_4, \varpi_5, \varpi_6]^T$. Условия (6.256) дают оценку $\mu > 92$. Выбедем $n = 100$

Уравнения (6.267)–(6.269) позволяют получить следующие аналитические выражения для производных $\dot{\hat{\theta}}$ и $\ddot{\hat{\theta}}$, необходимые для реализации управления (6.266):

$$\dot{\hat{\theta}}_i = (1 + \mu \varpi^T \varpi)(-3\eta_i + 3\hat{\psi}_i), \quad (6.270)$$

$$\ddot{\hat{\theta}}_i = 2\mu \dot{\varpi}^T \varpi(-3\eta_i + 3\hat{\psi}_i) + (1 + \mu \varpi^T \varpi)(-3\dot{\eta}_i + 3\dot{\hat{\psi}}_i), \quad (6.271)$$

где сигнал $\dot{\varpi}$ непосредственно доступен из (6.265), а производные $\dot{\eta}_i$ и $\dot{\hat{\psi}}_i$ заменяются их аналитическими выражениями из (6.268) и (6.267).

Структура регулятора с алгоритмом адаптации высокого порядка в рассматриваемом случае полностью описывается уравнениями (6.263)–(6.271). Общий динамический порядок регулятора равен 28, что не превышает динамического порядка адаптивного регулятора из примера 6.3. Однако фильтры (6.268) являются нелинейными, а формирование управления в соответствии с выражениями (6.266), (6.270) и (6.271) требует значительных вычислительных затрат. Следовательно, по сравнению с адаптивным регулятором (6.239)–(6.246), рассмотренным в примере 6.3, структура регулятора (6.263)–(6.271) является более сложной.

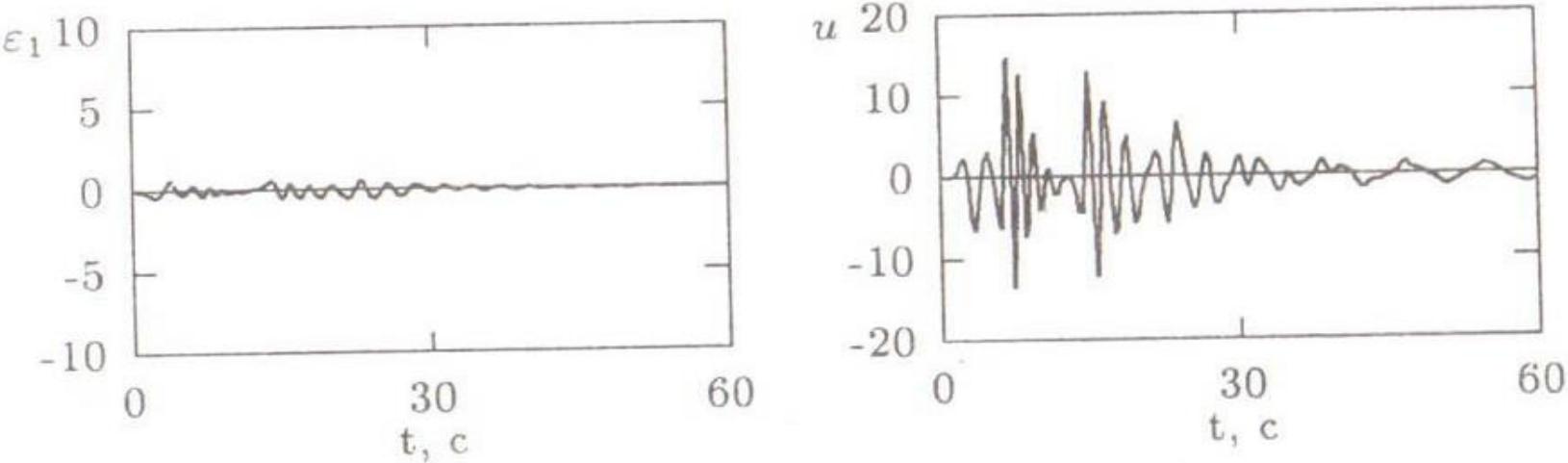


Рис. 6.2. Процессы в системе, замкнутой регулятором с алгоритмом адаптации высокого порядка.

Результаты моделирования представлены на рис. 6.2 (при моделировании начальные условия объекта управления, эталонной модели и всех вспомогательных фильтров были установлены нулевыми и $\hat{\theta}(0) = 0$). Графики на рис. 6.2 демонстрируют существенное улучшение качества переходного процесса (по сравнению со схемой адаптивного управления с расширенной ошибкой), достигаемое без заметного увеличения амплитуды сигнала управления u . Таким образом, результаты моделирования подтверждают тот факт, что использование алгоритма адаптации без нормализующего сомножителя (что в свою очередь снимает ограничение на скорость настройки параметров) является более предпочтительным с точки зрения качества переходных процессов. □

ТЕМА 10.3

- ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАТИВНЫХ ПРОЦЕДУР СИНТЕЗА АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ (п.п. 6.4.5. (с.с. 407-429)

6.4.5. Итеративная процедура синтеза адаптивного управления по выходу

Альтернативный метод синтеза регуляторов адаптивного управления по выходу, настраиваемых ненормализованными алгоритмами адаптации, основан на использовании модели (6.224), (6.225) и предполагает привлечение итеративных методов синтеза, известных под общенным назначением *адаптивного обхода интегратора* (см. 6.2.2). Первоначально данные методы синтеза были предложены в [179, 189] для построения алгоритмов управления нелинейными объектами. В случае линейного объекта с неизмеряетсям вектором состояния метод адаптивного обхода интегратора позволяет получить замкнутые системы управления, обладающие целым рядом принципиально новых свойств, которые были недостижимы при использовании метода непосредственной компенсации. Среди указанных свойств – *параметрическая робастность* (т. е. обеспечение устойчивости замкнутой системы без адаптив-

ной настройки параметров регулятора), а также возможность использования априорной информации о значениях отдельных параметров объекта управления.

Использование метода адаптивного обхода интегратора для управления линейными объектами по выходу было предложено в работе [190], а свойство параметрической робастности исследовано в [191] (см. также [192]). Адаптивный регулятор, который будет синтезирован ниже, имеет два существенных отличия от регуляторов, представленных в [190, 192]. Во-первых, мы используем отличную от работ [190, 192] параметризацию первой производной выходного сигнала \dot{y} . Как видно из следствия 6.1, данная параметризация получена непосредственным дифференцированием выражения (6.210) с учетом (6.209). В работах [190, 192] параметризованная модель сигнала \dot{y} была получена с использованием оценки второй координаты x_2 вектора состояния модели (6.213)

$$\dot{y} = x_2 - a_{n-1}y = \xi_{n,2} + \vartheta_*^T \psi + \epsilon_2,$$

где

$$\vartheta_*^T = [\nu_{m,2}, \nu_{m-1,2}, \dots, \nu_{0,2}, \xi_{n-1,2} + y, \xi_{n-2,2}, \dots, \xi_{0,2}].$$

Как показано в [190]

Как показано в [230], синтез алгоритмов адаптивного управления на основе параметризации (6.217) позволяет улучшить качество переходных процессов, а также усилить свойство параметрической робастности (в том смысле, что устойчивость замкнутой системы без адаптивной настройки параметров регулятора гарантируется при меньших значениях коэффициентов обратных связей).

Второе отличие состоит в том, что для регуляторов, представленных в [190, 192], свойство параметрической робастности обеспечивается только в частном случае, когда коэффициент $b_m = 1$ является известным. Приведенная ниже процедура синтеза позволяет преодолеть это ограничение и добиться параметрической робастности замкнутой системы при неизвестном параметре b_m .

Еще раз отметим, что параметризованная модель (6.224), (6.225) содержит неизвестный постоянный вектор ψ , регрессор (вектор известных функций) ϑ и экспоненциально затухающую функцию времени ϵ_2 , обусловленную ненулевыми начальными условиями. Как показано ниже, при итеративной процедуре синтеза модель ошибки будет содержать функцию ϵ_2 в качестве сомножителя нелинейной функции от y . Поэтому в отличие от процедур синтеза, рассмотренных в 6.4.3 и 6.4.4, в данном случае для глобальной стабилизации замкнутой системы необходимо использовать специальные методы компенсации возмущающего влияния ϵ_2 . Один из таких методов, состоящий в применении специальной не-

линейной обратной связи, определяется теоремой 6.3 (см. часть (3) данной теоремы).

Таким образом, итеративная процедура синтеза управления с использованием параметризации (6.224), (6.225) основана на совместном применении метода адаптивного обхода интегратора (теорема 6.6) и специального метода нелинейного демпфирования экспоненциально затухающих возмущений (теорема 6.3, часть (3)). Данная процедура включает в себя следующие шаги.

Шаг 1. Дифференцируя ошибку слежения $\varepsilon_1 = y - y^*$ с учетом (6.217), получаем

$$\dot{\varepsilon}_1 = \beta_1 + \vartheta_0^T \psi + b_m(-k_1 \nu_{m,1} + \nu_{m,2}) - \dot{y}^* + \epsilon_2, \quad (6.272)$$

где вектор ϑ_0 получен из ϑ посредством обнуления первого элемента, т. е.

$$\begin{aligned} \vartheta_0 = & [0, -k_1 \nu_{m-1,1} + \nu_{m-1,2}, \dots, -k_1 \nu_{0,1} + \nu_{0,2}, \\ & -k_1 \xi_{n-1,1} + \xi_{n-1,2} + y, -k_1 \xi_{n-2,1} + \xi_{n-2,2}, \dots, -k_1 \xi_{0,1} + \xi_{0,2}]^T. \end{aligned}$$

Предположим на время, что сигнал $\nu_{m,2}$ является управлением в (6.272), и определим закон управления $\nu_{m,1} = U_1$, стабилизирующий (6.272). Такой закон управления может быть выбран, например, в виде

$$U_1 = -c_1 \varepsilon_1 - d_1 \dot{\varepsilon}_1 + k_1 \nu_{m,1} - \bar{\kappa} \bar{U}, \quad (6.273)$$

где

$$\bar{U} = \beta_1 - \dot{y}^* + \vartheta_0^T \hat{\psi}, \quad (6.274)$$

$c_1 > 0$ и $d_1 > 0$ – ненастраиваемые коэффициенты обратных связей, $\hat{\psi}$ – вектор настраиваемых параметров (оценка вектора ψ), а $\hat{\kappa}$ – дополнительный настраиваемый коэффициент, рассматриваемый в качестве оценки величины $\kappa = b_m^{-1}$. При этом сигнал \dot{y}^* может быть непосредственно получен из (6.201) (отметим, что эталонная модель (6.201) позволяет получить производные сигнала y^* до порядка ρ включительно).

Подставляя $v_{m,2} = U_1$ в (6.272), после элементарных преобразований получаем

$$\dot{\varepsilon}_1 = -b_m(c_1 + d_1)\varepsilon_1 + \vartheta_0^T \tilde{\psi} + b_m \bar{U} \tilde{\kappa} + \epsilon_2, \quad (6.275)$$

где $\tilde{\psi} = \psi - \hat{\psi}$ и $\tilde{\kappa} = \kappa - \hat{\kappa}$ – параметрические ошибки.

Анализ модели (6.275) позволяет выбрать следующие алгоритмы адаптивной настройки коэффициента $\hat{\kappa}$:

$$\dot{\hat{\kappa}} = \gamma \bar{U} \varepsilon_1, \quad \gamma > 0, \quad (6.276)$$

и вектора $\hat{\psi}$

$$\dot{\hat{\psi}} = \Theta_1,$$

где

$$\Theta_1 = \Gamma \vartheta_0 \varepsilon_1, \quad \Gamma = \Gamma^T > 0. \quad (6.277)$$

В отличие от регуляторов (6.226) и (6.249) функция стабилизации (6.273), (6.274) содержит ненастраиваемые обратные связи по ошибке слежения $-c_1 \varepsilon_1$ и $-d_1 \varepsilon_1$. Введение подобных связей на всех шагах процедуры синтеза (что является возможным благодаря измеримости вектора v_m) обеспечивает принципиально новое свойство замкнутой системы – параметрическую робастность. Также следует отметить, что обратная связь $-d_1 \varepsilon_1$ введена для компенсации экспоненциально затухающего возмущения ε_2 . Окончательный вид данная связь примет начиная со второго шага процедуры синтеза.

Учтем теперь, что сигнал $v_{m,2}$ не является управлением. Поэтому введем новую регулируемую переменную в виде разности между реальным и желаемым значениями $v_{m,2}$:

$$\varepsilon_2 = v_{m,2} - U_1, \quad (6.278)$$

и будем рассматривать U_1 не в качестве действительного закона управления, а в качестве первой функции стабилизации.

Продолжим процедуру синтеза с целью стабилизации новой регулируемой переменной ε_2 . Как мы увидим в дальнейшем, неизвестный вектор θ появится в модели ошибки на следующем шаге. Поэтому мы не используем соотношение $\hat{\theta} = \Theta_1$ в качестве алгоритма адаптации $\hat{\theta}$, а рассматриваем Θ_1 (6.277) как первую функцию настройки.

Шаг 2. Рассматривая U_1 в качестве функций переменных y , ξ_l , $\nu_{i,1}$, $\nu_{j,2}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\kappa}$, y^* и \dot{y}^* (где $0 \leq l \leq n$, $0 \leq i \leq m$ и $0 \leq j \leq m - 1$), продифференцируем (6.278) с учетом (6.209) и (6.217). Получим

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_2 &= \dot{\nu}_{m,2} - \dot{U}_1 = -k_2 \nu_{m,1} - \nu_{m,3} - \frac{\partial U_1}{\partial y} (\beta_1 + \vartheta^T \psi + \epsilon_2) - \\ &- \frac{\partial U_1}{\partial \xi_n} (A_0 \xi_n + k y) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial U_1}{\partial \xi_i} (A_0 \xi_i + e_{n-i} y) - \frac{\partial U_1}{\partial \hat{\kappa}} \dot{\hat{\kappa}} - \\ &- \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial U_1}{\partial \nu_{l,j}} (\nu_{l,j+1} - k_j \nu_{l,1}) - \frac{\partial U_1}{\partial \nu_{m,1}} (\nu_{m,2} - k_1 \nu_{m,1}) - \\ &- \frac{\partial U_1}{\partial \hat{\psi}} \dot{\hat{\psi}} - \frac{\partial U_1}{\partial y^*} \dot{y}^* - \frac{\partial U_1}{\partial \dot{y}^*} \ddot{y}^* \pm (b_m - \hat{b}_m) \varepsilon_1 \pm \frac{\partial U_1}{\partial y} \vartheta^T \hat{\psi} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nu_{m,3} - b_m \varepsilon_1 + \beta_2 - \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \vartheta^T - e_1^T \varepsilon_1 \right) \tilde{\psi} - \\
&- \frac{\partial U_1}{\partial \tilde{\psi}} \dot{\tilde{\psi}} - \frac{\partial U_1}{\partial y} \epsilon_2,
\end{aligned} \tag{6.279}$$

где слагаемое β_2 содержит только известные компоненты:

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= - \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial U_1}{\partial \nu_{l,j}} (\nu_{l,j+1} - k_j \nu_{l,1}) - \frac{\partial U_1}{\partial \nu_{m,1}} (\nu_{m,2} - k_1 \nu_{m,1}) - \\
&- k_2 \nu_{m,1} - \frac{\partial U_1}{\partial y} \beta_1 - \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \vartheta^T - e_1^T \varepsilon_1 \right) \tilde{\psi} - \frac{\partial U_1}{\partial \xi_n} (A_0 \xi_n + k y) - \\
&- \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial U_1}{\partial \xi_i} (A_0 \xi_i + e_{n-i} y) - \frac{\partial U_1}{\partial y^*} \dot{y}^* - \frac{\partial U_1}{\partial \dot{y}^*} \ddot{y}^* - \frac{\partial U_1}{\partial \hat{\kappa}} \dot{\hat{\kappa}}.
\end{aligned} \tag{6.280}$$

Объединяя уравнения (6.272) и (6.279) с учетом (6.273), (6.274) и (6.278), получим

$$\dot{\varepsilon}_1 = -b_m(c_1 + d_1)\varepsilon_1 + b_m\varepsilon_2 + \vartheta_0^T \tilde{\psi} + b_m \bar{U} \tilde{\kappa} + \epsilon_2, \tag{6.281}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_2 &= -b_m \varepsilon_1 + \nu_{m,3} + \beta_2 - \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \vartheta^T - e_1^T \varepsilon_1 \right) \tilde{\psi} - \\
&- \frac{\partial U_1}{\partial y} \epsilon_2 - \frac{\partial U_1}{\partial \tilde{\psi}} \dot{\tilde{\psi}}.
\end{aligned} \tag{6.282}$$

Полагая на время сигнал $\nu_{m,3}$ управлением, стабилизируем модель (6.281) и (6.282) посредством выбора $\nu_{m,3} = U_2$, где вторая функция стабилизации U_2 имеет вид

$$U_2 = -c_1 \varepsilon_2 - d_2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)^2 \varepsilon_2 - \beta_2 + \frac{\partial U_1}{\partial \hat{\psi}} \Theta_2, \quad (6.283)$$

$c_2 > 0$ и $d_2 > 0$ – коэффициенты обратных связей, а $d_2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)^2 \varepsilon_2$ компенсирует возмущающее влияние слагаемого $-\frac{\partial U_1}{\partial y} \varepsilon_2$. При этом для настройки $\hat{\psi}$ может быть использован алгоритм адаптации $\dot{\hat{\psi}} = \Theta_2$, где

$$\Theta_2 = \Theta_1 - \Gamma \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \vartheta - e_1 \varepsilon_1 \right) \varepsilon_2, \quad (6.284)$$

$$e_1 = \text{col}(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+m+1}.$$

Однако $\nu_{m,3}$ не является управлением в (6.281) и (6.282). Поэтому введем новую регулируемую переменную

$$\varepsilon_3 = \nu_{m,3} - U_2 \quad (6.285)$$

и продолжим процедуру синтеза с целью стабилизации ε_3 . При этом соотношение $\dot{\hat{\psi}} = \Theta_2$ не используется как алгоритм адаптации, а Θ_2 рассматривается как вторая функция настройки.

Шаг 3. Рассматривая U_2 как функцию переменных y , ξ_l , $\nu_{i,j}$, $\nu_{m,1}$, $\nu_{m,2}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\kappa}$, y^* , \dot{y}^* и \ddot{y}^* (где $0 \leq l \leq n$, $0 \leq i \leq m - 1$ и $1 \leq j \leq 3$), вычислим производную ε_3 :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_3 &= \dot{\nu}_{m,3} - \dot{U}_2 = \\ &= \nu_{m,4} + \beta_3 - \frac{\partial U_2}{\partial y} \vartheta^T \tilde{\psi} - \frac{\partial U_2}{\partial \hat{\psi}} \dot{\hat{\psi}} - \frac{\partial U_2}{\partial y} \epsilon_2,\end{aligned}\quad (6.286)$$

где β_3 является функцией переменных, доступных прямым измерениям:

$$\begin{aligned}\beta_3 &= - \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial U_2}{\partial \nu_{l,j}} (\nu_{l,j+1} - k_j \nu_{l,1}) - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial U_2}{\partial \nu_{m,j}} (\nu_{m,j+1} - k_j \nu_{m,1}) - \\ &\quad - k_3 \nu_{m,1} - \frac{\partial U_2}{\partial y} (\beta_1 + \vartheta^T \hat{\psi}) - \frac{\partial U_2}{\partial \xi_n} (A_0 \xi_n + k y) - \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial U_2}{\partial \xi_i} (A_0 \xi_i + e_{n-i} y) - \frac{\partial U_2}{\partial \hat{\kappa}} \dot{\hat{\kappa}} - \sum_{j=0}^3 \frac{\partial U_2}{\partial y^{*(j)}} y^{*(j+1)}.\end{aligned}\quad (6.287)$$

Анализ выражений (6.281), (6.282) и (6.286) мотивирует выбор алгоритма адаптации $\dot{\hat{\psi}} = \Theta_3$, где

$$\Theta_3 = \Theta_2 - \Gamma \frac{\partial U_2}{\partial y} \vartheta \varepsilon_3.$$

При этом заметим, что

$$\Theta_2 - \dot{\hat{\psi}} = \Theta_2 \pm \Theta_3 - \dot{\hat{\psi}} = \Gamma \frac{\partial U_2}{\partial y} \vartheta \varepsilon_3 + (\Theta_3 - \dot{\hat{\psi}}). \quad (6.288)$$

Тогда, объединяя выражения (6.281), (6.282) и (6.286) (с учетом (6.283), (6.285) и (6.288)), получаем

$$\dot{\varepsilon}_1 = -b_m(c_1 + d_1)\varepsilon_1 + b_m\varepsilon_2 + \vartheta_0^T \tilde{\psi} + b_m \overline{U} \tilde{\kappa} + \epsilon_2, \quad (6.289)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_2 = & -b_m\varepsilon_1 - c_2\varepsilon_2 - d_2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)^2 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \vartheta^T - e_1^T \varepsilon_1 \right) \tilde{\psi} - \\ & - \frac{\partial U_1}{\partial y} \epsilon_2 + \frac{\partial U_1}{\partial \hat{\psi}} \Gamma \frac{\partial U_2}{\partial y} \vartheta \varepsilon_3 + \frac{\partial U_1}{\partial \hat{\psi}} (\Theta_3 - \dot{\hat{\psi}}), \end{aligned} \quad (6.290)$$

$$\dot{\varepsilon}_3 = \nu_{m,4} + \beta_3 - \frac{\partial U_2}{\partial y} \vartheta^T \tilde{\psi} - \frac{\partial U_2}{\partial \hat{\psi}} \dot{\hat{\psi}} - \frac{\partial U_2}{\partial y} \epsilon_2. \quad (6.291)$$

Если бы переменная $\nu_{m,4}$ была сигналом управления, и если бы $\dot{\hat{\psi}} = \Theta_3$, то для стабилизации системы (6.289)–(6.291) можно было бы использовать алгоритм управления $\nu_{m,4} = U_3$, где

$$U_3 = -\varepsilon_2 - c_3 \varepsilon_3 - d_3 \left(\frac{\partial U_2}{\partial y} \right)^2 \varepsilon_3 - \beta_3 + \frac{\partial U_2}{\partial \hat{\psi}} \Theta_3 - \frac{\partial U_1}{\partial \hat{\psi}} \Gamma \frac{\partial U_2}{\partial y} \vartheta \varepsilon_2 \quad (6.292)$$

и $c_3 > 0$, $d_3 > 0$.

Замечание 6.9. В уравнении (6.290) слагаемое

$$\frac{\partial U_1}{\partial \hat{\psi}} \Gamma \frac{\partial U_2}{\partial y} \vartheta \varepsilon_3 = \frac{\partial U_1}{\partial \hat{\psi}} (\Theta_2 - \Theta_3)$$

не может быть компенсировано посредством подходящего выбора второй функции стабилизации U_2 , так как оно само зависит от U_2 . Однако его влияние на устойчивость замкнутой системы может быть подавлено при помощи следующей функции стабилизации U_3 , в которую введен член $-\frac{\partial U_1}{\partial \hat{\psi}} \Gamma \frac{\partial U_2}{\partial y} \vartheta \varepsilon_2$. Как будет видно после выражения (6.305), значение этого члена состоит в обеспечении кососимметричности определенной матрицы замкнутой системы, что будет использовано при доказательстве свойств устойчивости. \square

Так как $\nu_{m,4}$ не является сигналом управления, продолжим процедуру синтеза, вводя новую регулируемую переменную $\varepsilon_4 = \nu_{m,4} - U_3$.

Шаг i ($4 \leq i < \rho$). На всех последующих шагах новые регулируемые переменные определяются в соответствии с выражениями

$$\varepsilon_i = \nu_{m,i} - U_{i-1}, \quad (6.293)$$

а их производные выражаются в виде

$$\dot{\varepsilon}_i = \nu_{m,i+1} + \beta_i - \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \vartheta^T \tilde{\psi} - \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \epsilon_2 - \frac{\partial U_{i-1}}{\partial \hat{\psi}} \dot{\hat{\psi}}, \quad (6.294)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_i = & - \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j=1}^i \frac{\partial U_{i-1}}{\partial \nu_{l,j}} (\nu_{l,j+1} - k_j \nu_{l,1}) - \\ & - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial U_{i-1}}{\partial \nu_{m,j}} (\nu_{m,j+1} - k_j \nu_{m,1}) - \\ & - k_1 \nu_{m,1} - \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} (\beta_1 + \vartheta^T \hat{\psi}) - \frac{\partial U_{i-1}}{\partial \xi_n} (A_0 \xi_n + k y) - \\ & - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial U_{i-1}}{\partial \xi_j} (A_0 \xi_j + e_{n-j} y) - \frac{\partial U_{i-1}}{\partial \hat{\kappa}} \dot{\hat{\kappa}} - \end{aligned}$$

$$-\sum_{j=0}^{i-1} \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y^{*(j)}} y^{*(j+1)}. \quad (6.295)$$

Для всех последующих шагов процедуры синтеза функции стабилизации U_i и функции настройки Θ_i имеют следующий стандартный вид:

$$\begin{aligned} U_i = & -c_i \varepsilon_i - d_i \left(\frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \right)^2 \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1} - \beta_i + \frac{\partial U_{i-1}}{\partial \hat{\psi}} \Theta_i - \\ & - \left(\sum_{k=2}^{i-1} \varepsilon_k \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \hat{\psi}} \right) \Gamma \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \vartheta, \end{aligned} \quad (6.296)$$

$$\Theta_i = \Theta_{i-1} - \Gamma \frac{\partial U_i}{\partial y} \vartheta \varepsilon_i, \quad (6.297)$$

где $c_i > 0$ и $d_i > 0$. В (6.296) последнее слагаемое обеспечивает компенсацию разности между Θ_i и $\Theta_2, \Theta_3, \dots, \Theta_{i-1}$ на всех предшествующих шагах процедуры синтеза, а $d_i \left(\frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \right)^2 \varepsilon_i$ – член нелинейной компенсации экспоненциально затухающего возмущения $\frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \varepsilon_2$. При этом модель ошибки принимает вид

$$\dot{\varepsilon}_1 = -b_m(c_1 + d_1)\varepsilon_1 + b_m\varepsilon_2 + \vartheta_0^T \tilde{\psi} + b_m \bar{U} \tilde{\kappa} + \epsilon_2, \quad (6.298)$$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_2 &= -b_m \varepsilon_1 - c_2 \varepsilon_2 - d_2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)^2 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \vartheta^T - e_1^T \varepsilon_1 \right) \tilde{\psi} - \\ &\quad - \frac{\partial U_1}{\partial y} \epsilon_2 + \sum_{k=3}^i \frac{\partial U_1}{\partial \hat{\psi}} \Gamma \frac{\partial U_{k-1}}{\partial y} \vartheta \varepsilon_k - \frac{\partial U_1}{\partial \hat{\psi}} (\Theta_i - \dot{\hat{\psi}}),\end{aligned}\tag{6.299}$$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_j &= -\varepsilon_{j-1} - c_j \varepsilon_j - d_j \left(\frac{\partial U_{j-1}}{\partial y} \right)^2 \varepsilon_j - \sum_{k=2}^{j-1} \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \hat{\psi}} \Gamma \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y} \vartheta \varepsilon_k + \\ &\quad + \varepsilon_{j+1} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y} \vartheta^T \tilde{\psi} - \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y} \epsilon_2 + \sum_{k=j+1}^i \frac{\partial U_{j-1}}{\partial \hat{\psi}} \Gamma \frac{\partial U_{k-1}}{\partial y} \vartheta \varepsilon_k + \\ &\quad + \frac{\partial U_1}{\partial \hat{\psi}} (\Theta_i - \dot{\hat{\psi}}), \quad 3 \leq j \leq i-1,\end{aligned}\tag{6.300}$$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_i &= -\varepsilon_{i-1} - c_i \varepsilon_i - d_i \left(\frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \right)^2 \varepsilon_i - \sum_{k=2}^{i-1} \frac{\partial U_{k-1}}{\partial \hat{\psi}} \Gamma \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \vartheta \varepsilon_k + \\ &\quad + \varepsilon_{i+1} - \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \vartheta^T \tilde{\psi} - \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \epsilon_2 - \frac{\partial U_{i-1}}{\partial \hat{\psi}} (\Theta_i - \dot{\hat{\psi}}).\end{aligned}\tag{6.301}$$

Шаг ρ . Для ρ -й регулируемой переменной $\varepsilon_\rho = \nu_{m,\rho} - U_{\rho-1}$ имеем

$$\dot{\varepsilon}_\rho = u + \nu_{m,\rho+1} + \beta_\rho - \frac{\partial U_{\rho-1}}{\partial y} \vartheta^T \tilde{\psi} - \frac{\partial U_{\rho-1}}{\partial \hat{\psi}} \dot{\hat{\psi}} - \frac{\partial U_{\rho-1}}{\partial y} \epsilon_2. \quad (6.302)$$

Следует отметить, что выражение (6.302) в явном виде содержит сигнал управления u . Анализ данного выражения определяет выбор действительного закона управления

$$u = U_\rho - \nu_{m,\rho+1} \quad (6.303)$$

и действительного алгоритма адаптации

$$\dot{\hat{\psi}} = \Theta_\rho, \quad (6.304)$$

где U_ρ и Θ_ρ задаются выражениями (6.296) и (6.297) с учетом подстановки $i = \rho$.

Тогда результирующая система в координатах $(\varepsilon, \epsilon, \tilde{\psi}, \tilde{\kappa})$ будет иметь вид

$$\dot{\varepsilon} = A(\varepsilon, t)\varepsilon + B_\psi(\varepsilon, t)\tilde{\psi} + b_\epsilon(\varepsilon, t)e_1^T A_0 \epsilon + b_m e_1 \bar{U} \tilde{\kappa}, \quad (6.305)$$

$$\dot{\tilde{\psi}} = -\Gamma B_\psi(\varepsilon, t)^T \varepsilon, \quad (6.306)$$

$$\dot{\tilde{\kappa}} = -\gamma \bar{U} \varepsilon_1, \quad (6.307)$$

$$\dot{\epsilon} = A_0 \epsilon, \quad (6.308)$$

где $\varepsilon = \text{col}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\rho)$. Матрицы $A(\varepsilon, t)$, $B_\psi(\varepsilon, t)$ и вектор $b_\varepsilon(\varepsilon, t)$ представлены ниже с использованием обозначений $\omega_i = \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y}$ и $\phi_{i,j} = \frac{\partial U_{i-1}}{\partial \psi} \Gamma \frac{\partial U_{j-1}}{\partial y} \vartheta$:

$$A = \begin{vmatrix} -b_m(c_1 + d_1) & b_m & 0 & \dots & 0 \\ -b_m & -c_2 - d_2\omega_2^2 & 1 + \phi_{23} & & \phi_{2\rho} \\ \vdots & & & & \\ 0 & -1 - \phi_{23} & -c_3 - d_3\omega_3^2 & \ddots & \phi_{3\rho} \\ 0 & -\phi_{24} & -1 - \phi_{34} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 + \phi_{\rho-1,\rho} \\ 0 & -\phi_{2\rho} & -\phi_{3\rho} & \dots & -c_\rho - d_\rho\omega_\rho^2 \end{vmatrix},$$

$$b_\varepsilon = \begin{vmatrix} 1 \\ -\omega_2 \\ -\omega_3 \\ \vdots \\ -\omega_\rho \end{vmatrix}, \quad B_\psi(\varepsilon, t) = \begin{vmatrix} \vartheta_0^T \\ -\omega_2 \vartheta^T \\ -\omega_3 \vartheta^T \\ \vdots \\ -\omega_\rho \vartheta^T \end{vmatrix} + e_2 e_1^T \varepsilon_1.$$

Свойства устойчивости замкнутой системы в данном случае определяются следующей теоремой.

Теорема 6.17. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из объекта (6.200), эталонной модели (6.201), вспомогательных фильтров (6.209), настраиваемого регулятора (6.303) и алгоритмов адаптации (6.276) и (6.304). Тогда для любых $c_i > 0$, $d_i > 0$ и произвольных начальных условий:

- 1) все сигналы в системе являются ограниченными;
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y^*(t)) = 0$;
- 3) L_2 - и L_∞ -нормы вектора ε удовлетворяют оценкам

$$\|\varepsilon\|_2 \leq \sqrt{\frac{V(0)}{c_0}}, \quad (6.309)$$

$$\|\varepsilon\|_\infty \leq \sqrt{2V(0)}, \quad (6.310)$$

где $V(0) = V(\varepsilon(0), \epsilon(0), \tilde{\psi}(0), \tilde{\kappa}(0))$ – начальное значение функции Ляпунова:

$$V(\varepsilon, \epsilon, \tilde{\psi}, \tilde{\kappa}) = \frac{1}{2}\varepsilon^T \varepsilon + \frac{\rho k_\epsilon^2}{4d_0} \epsilon^T P \epsilon + \frac{1}{2}\tilde{\psi}^T \Gamma^{-1} \tilde{\psi} + \frac{|b_m|}{2\gamma} \tilde{\kappa}^2, \quad (6.311)$$

$$c_0 = \min_{1 \leq i \leq \rho} \{b_m c_1, c_2, \dots, c_\rho\}, \quad d_0 = \min_{1 \leq i \leq \rho} \{b_m d_1, d_2, \dots, d_\rho\},$$

$$P : A_0^T P + P A_0 = -I, \quad k_\epsilon : k_\epsilon > |e_1^T A_0|.$$

Доказательство теоремы 6.17. Производная функции Ляпунова (6.311) системы (6.305)–(6.308) удовлетворяет следующим неравенствам (для удобства обозначений примем $\partial U_0 / \partial y = -1$):

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -c_0 |\varepsilon|^2 - d_0 \sum_{i=1}^{\rho} \left(\frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \right)^2 \varepsilon_i^2 + \tilde{\psi}^T B_\psi^T \varepsilon + e_1^T A_0 \epsilon b_\epsilon^T \varepsilon + \\
&\quad + \tilde{\kappa} \bar{U} b_m e_1^T \varepsilon - \frac{\rho k_\epsilon^2}{4d_0} \epsilon^T \epsilon - \tilde{\psi}^T B_\psi^T \varepsilon - |b_m| \tilde{\kappa} \bar{U} e_1^T \varepsilon \leq \\
&\leq -c_0 |\varepsilon|^2 - d_0 \sum_{i=1}^{\rho} \left(\left| \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \right|^2 \varepsilon_i^2 - \frac{k_\epsilon}{d_0} |\epsilon| \left| \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \right| |\varepsilon_i| + \frac{k_\epsilon^2}{4d_0^2} |\epsilon|^2 \right) \leq \\
&\leq -c_0 |\varepsilon|^2 - d_0 \sum_{i=1}^{\rho} \left(\left| \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y} \right| \varepsilon_i - \frac{k_\epsilon}{2d_0} |\epsilon| \right)^2 \leq -c_0 |\varepsilon|^2. \tag{6.312}
\end{aligned}$$

Следовательно, ε , $\tilde{\psi}$, $\tilde{\kappa}$ и y ограничены. Тогда из (6.218) непосредственно получаем ограниченность ξ_i для всех $0 \leq i \leq n$.

Для доказательства ограниченности ν_i ($0 \leq i \leq m$) используем соотношение (6.218) и представим i -ю координату вектора ν_* в виде

$$\nu_{*i} = \frac{\sum_{j=1}^i k_{i-j} p^{j-1}}{K(p)} u = \frac{\alpha(p) \sum_{j=1}^i k_{i-j} p^{j-1}}{b_m \beta(p) K(p)} y, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $k_0 = 1$ и $K(p) = p^n + k_1 p^{n-1} + \dots + k_n$. Принимая во внимание, что сигнал y ограничен, а $\beta(p)$ – гурвицев полином, получаем ограниченность сигналов $\nu_{*1}, \nu_{*2}, \dots, \nu_{*(m+1)}$. Ограниченность сигналов $\nu_{*(m+2)}, \dots, \nu_{*n}$ непосредственно следует из анализа выражений $\nu_{m,1} = \varepsilon_i - U_{i-1}$ для всех $2 \leq i \leq \rho$. Наконец, с учетом (6.219) и (6.216) делаем вывод, что вектор состояния x модели (6.213) ограничен. Часть (1) доказана.

Используя теперь теорему 2.18, получаем, что $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Последнее, в частности, доказывает часть (2).

Так как $\dot{V} \leq -c_0 |\varepsilon|^2$, то

$$\|\varepsilon\|_2^2 = \int_0^\infty |\varepsilon(\tau)|^2 d\tau \leq \frac{1}{c_0} (V(0) - V(\infty)) \leq \frac{1}{c_0} V(0),$$

откуда следует (6.309). Наконец, принимая во внимание, что $V(t)$ – невозрастающая функция времени, можно записать

$$2V(t) = |\varepsilon(t)|^2 + \frac{\rho k_\varepsilon^2}{2d_0} |\varepsilon(t)|_P^2 + |\tilde{\psi}(t)|_{\Gamma^{-1}}^2 + \frac{|b_m|}{\gamma} \tilde{\kappa}^2(t) \leq 2V(0),$$

что доказывает (6.310). ■

Как и в случае управления с алгоритмом адаптации высокого порядка, оценки (6.309), (6.310) предлагают конструктивный метод улучшения качества переходных процессов. Очевидно, что для уменьшения ошибки слежения (в смысле \mathcal{L}_2 - и \mathcal{L}_∞ -норм вектора ε), начальное значение V должно быть уменьшено. Для этой цели можно выбрать $\nu_{m,i}(0) = U_{i-1}(0)$ ($i = 2, 3, \dots, \rho$), что гарантирует нулевые начальные значения переменных ε_i ($2 \leq i \leq \rho$) и в результате уменьшает начальное значение $V(0)$.

Замечание 6.10. Так как неизвестный вектор

$$\psi = [b_m, b_{m-1}, \dots, b_0, -a_{n-1}, -a_{n-2}, \dots, -a_0]^T$$

составлен из параметров a_i и b_j передаточной функции объекта управления, то процедура синтеза, рассмотренная в этом разделе, позволяет легко учесть априорную информацию о параметрах объекта. А именно, если некоторые из параметров a_i и b_j известны заранее, то они могут быть исключены из вектора *неизвестных*

параметров ψ , а соответствующие им компоненты модели ошибки могут быть компенсированы без привлечения методов адаптивного управления.

В важном частном случае, когда известен коэффициент b_m , из векторов ψ и $\vartheta(t)$ исключается первый элемент:

$$\psi^T = [b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_0, -a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, -a_0], \quad (6.313)$$

$$\begin{aligned} \vartheta = & [-k_1 \nu_{m-1,1} + \nu_{m-1,2}, -k_1 \nu_{m-2,1} + \nu_{m-2,2}, \dots, -k_1 \nu_{0,1} + \nu_{0,2}, \\ & -k_1 \xi_{n-1,1} + \xi_{n-1,2} + y, -k_1 \xi_{n-2,1} + \xi_{n-2,2}, \dots, -k_1 \xi_{0,1} + \xi_{0,2}]^T. \end{aligned} \quad (6.314)$$

Более того, в данном случае можно не использовать дополнительный настраиваемый параметр $\hat{\kappa}$, и первая функция стабилизации принимает вид

$$U_1 = k_1 \nu_{m,1} - \frac{1}{b_m} (c_1 \varepsilon_1 + d_1 \varepsilon_1 + \beta_1 - \dot{y}^* + \vartheta^T \hat{\psi}). \quad \square$$

Покажем теперь, что регулятор, синтезированный с помощью процедуры адаптивного обхода интегратора, может использоватьсь не только в режиме адаптивного управления, но и в режиме робастной стабилизации замкнутой системы при отключенных цепях настройки параметров регулятора. Последнее означает, что при обнуленных коэффициентах адаптации и наличии параметрических ошибок (т. е. когда $\Gamma = 0$, $\gamma = 0$, $\tilde{\psi} \neq 0$ и $\tilde{\kappa} \neq 0$) представленный регулятор обеспечивает устойчивость замкнутой системы для достаточно больших значениях ненастраиваемых коэффициентов обратных связей c_i и d_i .

Для того чтобы избежать рутинных математических выкладок, рассмотрим случай нулевых значений настраиваемых параметров, т. е. положим $\hat{\psi} = 0$ и $\hat{\kappa} = 0$. Все полученные результаты непосредственно распространяются на общий случай, когда $\hat{\psi} \neq 0$ и $\hat{\kappa} \neq 0$.

Пренебрегая экспоненциально затухающим членом ϵ_2 , перепишем модель (6.305) с учетом подстановки $\Gamma = 0$, $\gamma = 0$, $\psi = 0$ и $\hat{\kappa} = 0$:

$$\dot{\varepsilon} = A_\omega \varepsilon + B_\omega \vartheta + e_1(\beta_1 - \dot{y}^*), \quad (6.315)$$

где матрицы A_ω B_ω представлены ниже с использованием обозначения $\omega_i = \frac{\partial U_{i-1}}{\partial y}$:

$$A_\omega = \begin{vmatrix} -b_m(c_1 + d_1) & b_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -c_2 - d_2\omega_2^2 & 1 & & 0 \\ 0 & -1 & -c_3 - d_3\omega_3^2 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_\rho - d_\rho\omega_\rho^2 \end{vmatrix},$$

$$B_\omega = \left[\psi_0, -\omega_2 \psi, -\omega_3 \psi, \dots, -\omega_\rho \psi \right]^T.$$

Анализируя выражения для функций стабилизации U_i ($1 \leq i \leq \rho - 1$) при условии, что $\Gamma = 0$ и $\gamma = 0$, легко показать, что все производные $\frac{\partial U_i}{\partial y}$ являются известными постоянными коэффициентами, зависящими от c_i и d_i (а также $\hat{\psi}$ и $\hat{\kappa}$, когда $\hat{\psi} \neq 0$ и $\hat{\kappa} \neq 0$). Следовательно, матрицы A_ω и B_ω являются постоянными, а замкнутая система управления с отключеными цепями адаптации (т. е. при $\Gamma = 0$ и $\gamma = 0$) является линейной.

Далее представим член $B_\omega \vartheta$ в виде

$$B_\omega \vartheta = \begin{vmatrix} \psi_0^T & | & 0 & | \\ -\omega_2 \psi^T & | & -\omega_2 & | \\ \vdots & | & \vdots & | \\ -\omega_\rho \psi^T & | & -\omega_\rho & | \end{vmatrix} \vartheta_0 + b_m \quad (6.316)$$

где вектор ϑ_0 получен из ϑ посредством обнуления первого элемента, а функция ϑ_1 имеет вид

$$\vartheta_1 = \dot{\nu}_{m,1} = -k_1 \nu_{m,1} + \nu_{m,2}.$$

Принимая во внимание тот факт, что $\nu_{m,2} = \varepsilon_2 + U_1$, можно записать:

$$\vartheta_1 = -(c_1 + d_1)\varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (6.317)$$

Наконец, поставляя (6.316) и (6.317) в (6.315), окончательно получаем

$$\dot{\varepsilon} = A_c \varepsilon + B_c \vartheta_0 + e_1(\beta_1 - \dot{y}^*), \quad (6.318)$$

где

$$A_c = \begin{vmatrix} -\varrho & b_m & 0 & \dots & 0 \\ \varrho\omega_2 & -c_2 - d_2\omega_2^2 - b_m\omega_2 & 1 & & 0 \\ \varrho\omega_3 & -1 - b_m\omega_3 & -c_3 - d_3\omega_3^2 & \ddots & 0 \\ \varrho\omega_4 & -b_m\omega_4 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ \varrho\omega_\rho & -b_m\omega_\rho & 0 & \dots & -c_\rho - d_\rho\omega_\rho^2 \end{vmatrix},$$

$$B_c = [1, -\omega_2, -\omega_3, \dots, -\omega_\rho]^T \psi^T$$

и $\varrho = b_m(c_1 + d_1)$.

Представим вектор ϑ_0 в виде отклика на регулируемую переменную y :

$$\begin{aligned}\vartheta_0 &= \left[0, \frac{p}{K(p)} [p^{m-1}, \dots, p, 1] u, \frac{p}{K(p)} [p^{n-1}, \dots, p, 1] y \right]^T = \\ &= \frac{p}{K(p)} \left[0, [p^{m-1}, \dots, p, 1] \frac{\alpha(p)}{b_m \beta(p)}, [p^{n-1}, \dots, p, 1] \right]^T y = \\ &= H_\vartheta(p) y,\end{aligned}$$

где $K(p) = p^n + k_1 p^{n-1} + \dots + k_{n-1} p + k_n$, а $(n+m+1) \times 1$ -матрица

$$H_\vartheta(p) = \frac{p}{K(p)} \left[0, [p^{m-1}, \dots, p, 1] \frac{\alpha(p)}{b_m \beta(p)}, [p^{n-1}, \dots, p, 1] \right]^T$$

является собственной и асимптотически устойчивой. При этом коэффициенты $H_\vartheta(p)$ не зависят от c_i и d_i .

Далее для β_1 можно записать

$$\beta_1 = \dot{\xi}_{n,1} = \frac{p^n k_1 + p^{n-1} k_2 + \dots + p k_n}{K(p)} y = \frac{\bar{K}(p)}{K(p)} y,$$

где $\bar{K}(p) = p^n k_1 + p^{n-1} k_2 + \dots + p k_n$. Передаточная функция $\bar{K}(p)/K(p)$ является собственной и асимптотически устойчивой, а ее коэффициенты не зависят от c_i и d_i .

Следовательно, справедливы следующие соотношения:

$$\vartheta_0 = H_\vartheta(p)(\varepsilon_1 + y^*), \quad (6.319)$$

$$\beta_1 = \frac{\overline{K}(p)}{K(p)}(\varepsilon_1 + y^*). \quad (6.320)$$

Пусть четверка $(\overline{C}_1, \overline{A}_1, \bar{b}_1, \bar{h}_1)$ будет минимальной реализацией передаточной матрицы $H_\vartheta(p)$, а четверка $(\bar{c}_2, \overline{A}_2, \bar{b}_2, \bar{h}_2)$ – минимальной реализацией передаточной функции $\overline{K}(p)/K(p)$, т. е.

$$H_\vartheta(p) = \overline{C}_1^T (pI - \overline{A}_1)^{-1} \bar{b}_1 + \bar{h}_1,$$

$$\frac{\overline{K}(p)}{K(p)} = \bar{c}_2^T (pI - \overline{A}_2)^{-1} \bar{b}_2 + \bar{h}_2.$$

Тогда, с учетом выражений (6.318)–(6.320), можно записать следующую модель замкнутой системы:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= A_c \varepsilon + B_c (\overline{C}_1^T \bar{x}_1 + \bar{h}_1 \varepsilon_1 + \bar{h}_1 y^*) + \\ &\quad + e_1 (\bar{c}_2^T \bar{x}_2 + \bar{h}_2 \varepsilon_1 + \bar{h}_2 y^* - \dot{y}^*), \end{aligned} \quad (6.321)$$

$$\dot{\bar{x}}_1 = \overline{A}_1 \bar{x}_1 + \bar{b}_1 (\varepsilon_1 + y^*), \quad (6.322)$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = \overline{A}_2 \bar{x}_2 + \bar{b}_2 (\varepsilon_1 + y^*), \quad (6.323)$$

где $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{n+m}$, $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, а матрицы \bar{A}_1 , \bar{A}_2 , \bar{C}_1 , векторы \bar{b}_1 , \bar{b}_2 , \bar{c}_2 , \bar{h}_1 и константа \bar{h}_2 не зависят от c_i and d_i . Кроме того, следует отметить, что матрицы \bar{A}_1 и \bar{A}_2 являются гурвицевыми.

Покажем теперь, что при достаточно больших коэффициентах обратных связей c_i и d_i матрица A_c также является гурвицевой. Для этого вычислим производную функции Ляпунова $V_\varepsilon(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^T\varepsilon$ в силу системы $\dot{\varepsilon} = A_c\varepsilon$. Получим:

$$\begin{aligned} \dot{V}_\varepsilon &\leq -c_0|\varepsilon|^2 - d_1 b_m \varepsilon_1^2 - \sum_{i=2}^{\rho} d_i \omega_i^2 \varepsilon_i^2 - (1-\lambda)b_m c_1 \varepsilon_1^2 - (1-\lambda)c_2 \varepsilon_2^2 + \\ &+ b_m |\varepsilon_1| |\varepsilon_2| + (c_1 + d_1)b_m |\varepsilon_1| \sum_{i=2}^{\rho} |\omega_i| |\varepsilon_i| + b_m |\varepsilon_2| \sum_{i=2}^{\rho} |\omega_i| |\varepsilon_i|, \end{aligned}$$

где $0 < \lambda < 1$ – произвольная константа и

$$c_0 = \min \left\{ b_m \lambda c_1, \lambda c_2, \dots, c_\rho \right\}.$$

Далее:

$$\begin{aligned}\dot{V}_\varepsilon &= -\frac{1}{2}c_0|\varepsilon|^2 - \frac{1}{2}d_0 \sum_{i=1}^{\rho} \omega_i^2 \varepsilon_i^2 - \left(\frac{1}{2}c_0 \varepsilon_1^2 - b_m |\varepsilon_1| |\varepsilon_2| + \frac{1}{2}c_0 \varepsilon_2^2 \right) - \\ &\quad - \sum_{i=2}^{\rho} \left(\frac{(1-\lambda)c_1}{\rho-1} b_m \varepsilon_1^2 - (c_1 + d_1) b_m |\varepsilon_1| |\varepsilon_i| |\omega_i| + \frac{1}{4} \bar{d}_0 \omega_i^2 \varepsilon_i^2 \right) - \\ &\quad - \sum_{i=2}^{\rho} \left(\frac{(1-\lambda)c_2}{\rho-1} \varepsilon_2^2 - b_m |\varepsilon_2| |\varepsilon_i| |\omega_i| + \frac{1}{4} \bar{d}_0 \omega_i^2 \varepsilon_i^2 \right),\end{aligned}$$

где $\omega_1 = 1$ и

$$d_0 = \min \{b_m d_1, d_2, \dots, d_\rho\},$$

$$\bar{d}_0 = \min \{d_2, d_3, \dots, d_\rho\}.$$

Если

$$c_0 \geq \sqrt{b_m}, \tag{6.324}$$

$$\bar{d}_0 \geq \frac{\rho-1}{1-\lambda} \max \left\{ \frac{b_m(c_1+d_1)^2}{c_1}, \frac{b_m^2}{c_2} \right\}, \tag{6.325}$$

то, выделяя в выражении для производной функции Ляпунова V_ε полные квадраты, убеждаемся в справедливости неравенства

$$\dot{V}_\varepsilon \leq -\frac{1}{2}c_0|\varepsilon|^2 - \frac{1}{2}d_0 \sum_{i=1}^{\rho} \varepsilon_i^2 \omega_i^2.$$

Последнее означает, что специальный выбор достаточно больших коэффициентов обратных связей c_i и d_i обеспечивает гурвицевость матрицы A_c . Следует также отметить, что условие (6.325) может быть всегда выполнено, так как $\bar{d}_0 = \min\{d_2, d_2, \dots, d_\rho\}$, где множество $\{d_2, d_2, \dots, d_\rho\}$ не содержит d_1, c_1, c_2 и b_m .

Рассмотрим теперь автономную часть системы (6.321)–(6.323):

$$\dot{\varepsilon} = A_c \varepsilon + B_c (\bar{C}_1^T \bar{x}_1 + \bar{h}_1 \varepsilon_1) + e_1 (\bar{c}_2^T \bar{x}_2 + \bar{h}_2 \varepsilon_1), \quad (6.326)$$

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_1 \bar{x}_1 + \bar{b}_1 \varepsilon_1, \quad (6.327)$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_2 \bar{x}_2 + \bar{b}_2 \varepsilon_1. \quad (6.328)$$

Для доказательства асимптотической устойчивости последней системы при достаточно больших коэффициентах c_i и d_i используем следующую функцию Ляпунова:

$$V(\varepsilon, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon + \frac{1}{2} \bar{x}_1^T P_1 \bar{x}_1 + \bar{x}_2^T P_2 \bar{x}_2, \quad (6.329)$$

где $P_1 = P_1^T > 0$ и $P_2 = P_2^T > 0$ являются решениями следующих уравнений:

$$\bar{A}_1^T P_1 + P_1 \bar{A}_1 = -2I, \quad \bar{A}_2^T P_2 + P_2 \bar{A}_2 = -2I.$$

Тогда производная $V(\varepsilon, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ в силу системы (6.326)–(6.328) принимает вид

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\frac{1}{2}c_0|\varepsilon|^2 - \frac{1}{2}d_0 \sum_{i=1}^{\rho} \omega_i^2 \varepsilon_i^2 + |\bar{C}_1| |\psi| |\bar{x}_1| \sum_{i=1}^{\rho} |\omega_i| |\varepsilon_i| + \\
&+ |\bar{h}_1| |\psi| |\varepsilon| \sum_{i=1}^{\rho} |\omega_i| |\varepsilon_i| + |\bar{c}_2| |\bar{x}_2| |\varepsilon| + |\bar{h}_2| |\varepsilon|^2 - \\
&- |\bar{x}_1|^2 - |\bar{x}_2|^2 + |\bar{P}_1 \bar{b}_1| |\bar{x}_1| |\varepsilon| + |\bar{P}_2 \bar{b}_2| |\bar{x}_2| |\varepsilon| \leq \\
&\leq -\frac{1}{10}c_0|\varepsilon|^2 - \frac{1}{3}|\bar{x}_1|^2 - \frac{1}{2}|\bar{x}_2|^2 - \\
&- \sum_{i=1}^{\rho} \left(\frac{1}{4}d_0 \omega_i^2 \varepsilon_i^2 - |\bar{h}_1| |\psi| |\varepsilon| |\omega_i| |\varepsilon_i| + \frac{c_0}{10\rho} |\varepsilon|^2 \right) - \\
&- \sum_{i=1}^{\rho} \left(\frac{1}{4}d_0 \omega_i^2 \varepsilon_i^2 - |\bar{C}_1| |\psi| |\bar{x}_1| |\omega_i| |\varepsilon_i| + \frac{1}{3\rho} |\bar{x}_1|^2 \right) - \\
&- \left(\frac{1}{10}c_0 - |\bar{h}_2| \right) |\varepsilon|^2 - \left(\frac{1}{10}c_0 |\varepsilon|^2 - |\bar{P}_1 \bar{b}_1| |\bar{x}_1| |\varepsilon| + \frac{1}{3} |\bar{x}_1|^2 \right) - \\
&- \left(\frac{1}{10}c_0 |\varepsilon|^2 - (|\bar{c}_2| + |\bar{P}_2 \bar{b}_2|) |\bar{x}_2| |\varepsilon| + \frac{1}{2} |\bar{x}_2|^2 \right).
\end{aligned}$$

Если

$$c_0 > \max \left\{ \sqrt{b_m}, 10|\bar{h}_2|, 5(|\bar{c}_2| + |\bar{P}_2 \bar{b}_2|)^2, \frac{15}{2}|\bar{P}_1 \bar{b}_1|^2 \right\}, \quad (6.330)$$

$$d_1 > \max \left\{ 3\rho|\bar{c}_1|^2|\psi|^2, \frac{10\rho}{c_0}|\bar{h}_1|^2|\psi|^2 \right\}, \quad (6.331)$$

$$\bar{d}_0 > \max \left\{ d_1, \frac{b_m(\rho - 1)(c_1 + d_1)^2}{c_1(1 - \lambda)}, \frac{b_m^2(\rho - 1)}{c_2(1 - \lambda)} \right\}, \quad (6.332)$$

то

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{10}c_0|\varepsilon|^2 - \varrho d_0 \sum_{i=1}^{\rho} \omega_i^2 \varepsilon_i^2 - \frac{1}{3}|\bar{x}_1|^2 - \frac{1}{2}|\bar{x}_2|^2, \quad (6.333)$$

где $\varrho > 0$. Последнее означает асимптотическую устойчивость системы (6.326)–(6.328). Так как сигналы y^* и \dot{y}^* ограничены, то из (6.321)–(6.323) непосредственно получаем ограниченность ε . Тогда, используя тот же подход, что и в теореме 6.17, можно показать ограниченность всех сигналов в замкнутой системе управления.

В завершение покажем, что установившееся значение ошибки слежения может быть сделано произвольно малым за счет увеличения c_i и d_i . Для этой цели вычислим производную функции Ляпунова (6.329) системы (6.321)–(6.323). С учетом (6.333) получаем

$$\begin{aligned}\dot{V} \leq & -\frac{1}{10}c_0|\varepsilon|^2 - \varrho d_0 \sum_{i=1}^{\rho} \omega_i^2 \varepsilon_i^2 - \frac{1}{3}|\bar{x}_1|^2 - \frac{1}{2}|\bar{x}_2|^2 + \\ & + |\bar{h}_1| \|y^*\|_\infty \sum_{i=1}^{\rho} |\omega_i| |\varepsilon_i| + + |\bar{h}_2| |\varepsilon| \|y^*\|_\infty + |\varepsilon| \|\dot{y}^*\|_\infty + \\ & + \|y^*\|_\infty |P_1 \bar{b}_1| |\bar{x}_1| + \|y^*\|_\infty |P_2 \bar{b}_2| |\bar{x}_2|.\end{aligned}$$

Выделяя полные квадраты, имеем

$$\dot{V} \leq -\varrho_1 c_0 |\varepsilon|^2 + \frac{1}{c_0} \left(\varrho_2 \|y^*\|_\infty^2 + \varrho_3 \|\dot{y}^*\|_\infty^2 \right) + \left(\frac{\varrho_4}{d_0} + \varrho_5 \right) \|y^*\|_\infty^2,$$

где положительные константы ϱ_i не зависят от c_i и d_i . Последнее выражение означает, что $\varepsilon(t)$ сходится к установившемуся множеству

$$D_\varepsilon = \left\{ \varepsilon : |\varepsilon|^2 < \frac{1}{\varrho_1 c_0} \left[\frac{1}{c_0} \left(\varrho_2 \|y^*\|_\infty^2 + \varrho_3 \|\dot{y}^*\|_\infty^2 \right) + \left(\frac{\varrho_4}{d_0} + \varrho_5 \right) \|y^*\|_\infty^2 \right] \right\}.$$

Так как ϱ_i , $\|y^*\|_\infty$ и $\|\dot{y}^*\|_\infty$ не зависят от c_i и d_i , то радиус множества может быть сделан произвольно малым за счет увеличения c_i и d_i .

Таким образом, показано, что система адаптивного управления по выходу, синтезированная в данном параграфе, является робастной в том смысле, что при отключенных цепях адаптации выбор достаточно больших ненастраиваемых коэффициентов обратных связей c_i и d_i обеспечивает ограниченность всех сигналов и возможность достижения произвольно малой ошибки слежения. Причем данные свойства достигаются для любых значений вектора неизвестных параметров ψ , не превышающих по норме некоторое пороговое значение, использованное при выборе c_i и d_i . Поэтому, если параметрические возмущения являются небольшими, а требуемые значения коэффициентов обратных связей – приемлемыми с точки зрения практической реализации, то цепи адаптации могут быть отключены и синтезированный регулятор может использоваться как *неадаптивный робастный регулятор*. Еще раз подчеркнем, что при этом закон управления является линейным.

Пример 6.5. Рассмотрим опять задачу адаптивного управления из примера 6.3. А именно: рассмотрим объект (6.238)

$$y = \frac{b_0}{p(p^2 + a_2p + a_1)} u \quad (6.334)$$

с неизвестными параметрами $b_0 = 2.5$, $a_2 = 3$, $a_1 = -1$ и эталонную модель (6.201) с $\alpha^*(p) = (p+1)^3$, $k^* = 1$ и $r = 2.5 \sin 0.8t$.

Теперь для получения параметризованной модели объекта управления, воспользуемся леммой 6.6. Так как модель (6.334) несет априорную информацию о параметрах объекта (а именно – из (6.334) очевидно, что $b_2 = b_1 = a_0 = 0$), то используем только четыре вспомогательных фильтра:

$$\begin{vmatrix} \dot{\xi}_{3,1} \\ \dot{\xi}_{3,2} \\ \dot{\xi}_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k_1 & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 \\ -k_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_{3,1} \\ \xi_{3,2} \\ \xi_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{vmatrix} y, \quad (6.335)$$

$$\begin{vmatrix} \dot{\xi}_{2,1} \\ \dot{\xi}_{2,2} \\ \dot{\xi}_{2,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k_1 & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 \\ -k_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_{2,1} \\ \xi_{2,2} \\ \xi_{2,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} y, \quad (6.336)$$

$$\begin{vmatrix} \dot{\xi}_{1,1} \\ \dot{\xi}_{1,2} \\ \dot{\xi}_{1,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k_1 & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 \\ -k_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_{1,1} \\ \xi_{1,2} \\ \xi_{1,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} y, \quad (6.337)$$

$$\begin{vmatrix} \dot{\nu}_{0,1} \\ \dot{\nu}_{0,2} \\ \dot{\nu}_{0,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k_1 & 1 & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 \\ -k_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \nu_{0,1} \\ \nu_{0,2} \\ \nu_{0,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} u. \quad (6.338)$$

При этом регулируемая переменная y объекта (6.334) может

быть представлена в виде

$$y = \xi_{3,1} + \psi_1 \nu_{0,1} + \psi_2 \xi_{2,1} + \psi_3 \xi_{1,1} + \epsilon_1,$$

где $\psi_1 = b_0$, $\psi_2 = -a_2$ и $\psi_3 = -a_1$ – неизвестные параметры, а ϵ_1 экспоненциально затухает. С учетом моделей (6.335)–(6.338) легко получить следующее выражение для первой производной выходного сигнала:

$$\dot{y} = \beta_1 + \psi_1 \vartheta_1 + \psi_2 \vartheta_2 + \psi_3 \vartheta_3 + \epsilon_2,$$

где ϵ_2 экспоненциально затухает и

$$\beta_1 = -k_1 \xi_{3,1} + \xi_{3,2} + k_1 y, \quad \vartheta_1 = -k_1 \nu_{0,1} + \nu_{0,2},$$

$$\vartheta_2 = -k_1 \xi_{2,1} + \xi_{2,2} + y, \quad \vartheta_3 = -k_1 \xi_{1,1} + \xi_{1,2}.$$

Так как относительная степень объекта (6.334) равна трем, то итеративная процедура синтеза будет состоять из трех шагов. На первом шаге в качестве регулируемой переменной рассматривается ошибка слежения $\epsilon_1 = y - y^*$, производная которой может быть представлена в виде

$$\dot{\varepsilon}_1 = \beta_1 + \psi_1(-k_1\nu_{0,1} + \nu_{0,2}) + \psi_2\vartheta_2 + \psi_3\vartheta_3 - \dot{y}^* + \epsilon_2, \quad (6.339)$$

где сигнал \dot{y}^* непосредственно доступен из (6.201). Рассматривая переменную $\nu_{0,2}$ в качестве управления, выберем первую функцию стабилизации

$$U_1 = -c_1\varepsilon_1 - d_1\varepsilon_1 + k_1\nu_{0,1} - \hat{\kappa}\bar{U},$$

где

$$\bar{U} = \beta_1 - \dot{y}^* + \hat{\psi}_2\vartheta_2 + \hat{\psi}_3\vartheta_3.$$

Далее, выбирая $\Gamma = \text{diag}\{\gamma\}$, определим первые функции настройки:

$$\Theta_{1,1} = 0,$$

$$\Theta_{1,2} = \gamma\vartheta_2\varepsilon_1,$$

$$\Theta_{1,3} = \gamma\vartheta_3\varepsilon_1,$$

а также алгоритм адаптации для дополнительного настраиваемого параметра $\hat{\kappa}$:

$$\dot{\hat{\kappa}} = \gamma\bar{U}\varepsilon_1. \quad (6.340)$$

На втором шаге синтеза вводится новая регулируемая переменная $\varepsilon_2 = \nu_{0,2} - U_1$. Тогда вторая функция стабилизации определяется выражением

$$\begin{aligned} U_2 = & -c_2 \varepsilon_2 - d_2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)^2 \varepsilon_2 + \frac{\partial U_1}{\partial y} \left(\beta_1 + \hat{\psi}_1 \vartheta_1 + \hat{\psi}_2 \vartheta_2 + \hat{\psi}_3 \vartheta_3 \right) - \\ & - \varepsilon_1 \hat{\psi}_1 + k_2 \nu_{0,1} + \frac{\partial U_1}{\partial y^*} \dot{y}^* + \frac{\partial U_1}{\partial \dot{y}^*} \ddot{y}^* + \frac{\partial U_1}{\partial \xi_{3,1}} \dot{\xi}_{3,1} + \frac{\partial U_1}{\partial \xi_{3,2}} \dot{\xi}_{3,2} + \\ & + \frac{\partial U_1}{\partial \xi_{2,1}} \dot{\xi}_{2,1} + \frac{\partial U_1}{\partial \xi_{2,2}} \dot{\xi}_{2,2} + \frac{\partial U_1}{\partial \xi_{1,1}} \dot{\xi}_{1,1} + \frac{\partial U_1}{\partial \xi_{1,2}} \dot{\xi}_{1,2} + \\ & + \frac{\partial U_1}{\partial \nu_{0,1}} \dot{\nu}_{0,1} + \frac{\partial U_1}{\partial \hat{\kappa}} \dot{\hat{\kappa}} + \frac{\partial U_1}{\partial \hat{\psi}_2} \Theta_{2,2} + \frac{\partial U_1}{\partial \hat{\psi}_3} \Theta_{2,3}, \end{aligned}$$

где производные $\dot{\xi}_{3,1}$, $\dot{\xi}_{3,2}$, $\dot{\xi}_{2,1}$, $\dot{\xi}_{2,2}$, $\dot{\xi}_{1,1}$, $\dot{\xi}_{1,2}$ и $\dot{\nu}_{0,1}$ заменяются их аналитическими выражениями из (6.335)–(6.338), а сигналы \dot{y}^* и \ddot{y}^* непосредственно доступны из (6.201). При этом вторые функции настройки выбираются в виде

$$\Theta_{2,1} = -\gamma \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \vartheta_i - \varepsilon_1 \right) \varepsilon_2,$$

$$\Theta_{2,i} = \Theta_{1,i} - \gamma \frac{\partial U_1}{\partial y} \vartheta_i \varepsilon_2, \quad i = 2, 3.$$

На третьем шаге синтеза вводится регулируемая переменная вида

$$\varepsilon_3 = \nu_{0,3} - U_2$$

и определяется действительный закон управления:

$$\begin{aligned}
u = & -c_3 \varepsilon_3 - d_3 \left(\frac{\partial U_2}{\partial y} \right)^2 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 + \frac{\partial U_2}{\partial y} \left(\beta_1 + \hat{\psi}_1 \vartheta_1 + \hat{\psi}_2 \vartheta_2 + \hat{\psi}_3 \vartheta_3 \right) + \\
& + k_3 \nu_{0,1} + \frac{\partial U_2}{\partial y^*} \dot{y}^* + \frac{\partial U_2}{\partial \dot{y}^*} \ddot{y}^* + \frac{\partial U_2}{\partial \ddot{y}^*} y_r^{(3)} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{3,1}} \dot{\xi}_{3,1} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{3,2}} \dot{\xi}_{3,2} + \\
& + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{3,3}} \dot{\xi}_{3,3} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{2,1}} \dot{\xi}_{2,1} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{2,2}} \dot{\xi}_{2,2} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{2,3}} \dot{\xi}_{2,3} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{1,1}} \dot{\xi}_{1,1} + \\
& + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{1,2}} \dot{\xi}_{1,2} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi_{1,3}} \dot{\xi}_{1,3} + \frac{\partial U_2}{\partial \nu_{0,1}} \dot{\nu}_{0,1} + \frac{\partial U_2}{\partial \nu_{0,2}} \dot{\nu}_{0,2} + \frac{\partial U_2}{\partial \hat{\kappa}} \dot{\hat{\kappa}} + \\
& + \frac{\partial U_2}{\partial \hat{\psi}_1} \Theta_{3,1} + \frac{\partial U_2}{\partial \hat{\psi}_2} \Theta_{3,2} + \frac{\partial U_2}{\partial \hat{\psi}_3} \Theta_{3,3} - \\
& - \gamma \frac{\partial U_2}{\partial y} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \hat{\psi}_2} \vartheta_2 + \frac{\partial U_1}{\partial \hat{\psi}_3} \vartheta_3 \right) \varepsilon_2,
\end{aligned} \tag{6.341}$$

где сигналы $\dot{\xi}_{3,1}, \dot{\xi}_{3,2}, \dot{\xi}_{3,3}, \dot{\xi}_{2,1}, \dot{\xi}_{2,2}, \dot{\xi}_{2,3}, \dot{\xi}_{1,1}, \dot{\xi}_{1,2}, \dot{\xi}_{1,3}, \dot{\nu}_{0,1}, \dot{\nu}_{0,2}, \dot{y}^*, \ddot{y}^*$ и $y_r^{(3)}$ непосредственно доступны из (6.335)–(6.338) и (6.201). При

этом действительные алгоритмы адаптации определяются выражениями

$$\dot{\hat{\psi}}_i = \Theta_{3,i} = \Theta_{2,i} - \gamma \frac{\partial U_2}{\partial y} \vartheta_i \varepsilon_3, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.342)$$

Таким образом, синтезированный алгоритм адаптивного управления полностью описывается уравнениями (6.335)–(6.338) и (6.340)–(6.342). Общий динамический порядок регулятора равен 16 и с учетом следствия 6.2 может быть уменьшен до 10. Однако, как видно из представленных формул, практическая реализация алгоритма управления (6.341) требует больших вычислительных затрат (в частности, следует отметить, что выражение (6.341) содержит 9 степень регулируемой переменной y).

При моделировании использовались следующие значения коэффициентов регулятора, алгоритмов адаптации и вспомогательных фильтров:

$$k_1 = 6, \quad k_2 = 12, \quad k_3 = 8, \quad c_1 = c_2 = c_3 = 1,$$

$$d_1 = d_2 = d_3 = 0.1, \quad \gamma = 20.$$

Начальные условия объекта управления, эталонной модели и всех вспомогательных фильтров были установлены нулевыми и $\hat{\kappa}(0) = 0$, $\hat{\psi}_i(0) = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Результаты моделирования, представленные на рис. 6.3, демонстрируют высокое качество переходных процессов (небольшую амплитуду ошибки слежения, достаточно быструю сходимость), достигаемое при небольшом сигнале управления.

В заключение проиллюстрируем свойство параметрической робастности. Для этого отключим цепи адаптивной настройки регулятора (т. е. установим $\gamma = 0$) при нулевых значениях настраиваемых параметров $\hat{\psi}_1 = \hat{\psi}_2 = \hat{\psi}_3 = \hat{\kappa} = 0$. Тогда для не больших коэффициентов обратных связей $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ и $d_1 = d_2 = d_3 = 0.1$ замкнутая система оказывается неустойчивой. Однако при $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ и $d_1 = d_2 = d_3 = 0.3$ замкнутая система уже устойчива (рис. 6.4,а), а дальнейшее увеличение коэффициентов c_i и d_i ведет к уменьшению установившегося значения ошибки слежения (рис. 6.4,б). Таким образом, синтезированный регулятор может использоваться как адаптивный, обеспечивающий нулевую установившуюся ошибку слежения, и как ненастраиваемый робастный, обеспечивающий малую установившуюся ошибку слежения. \square

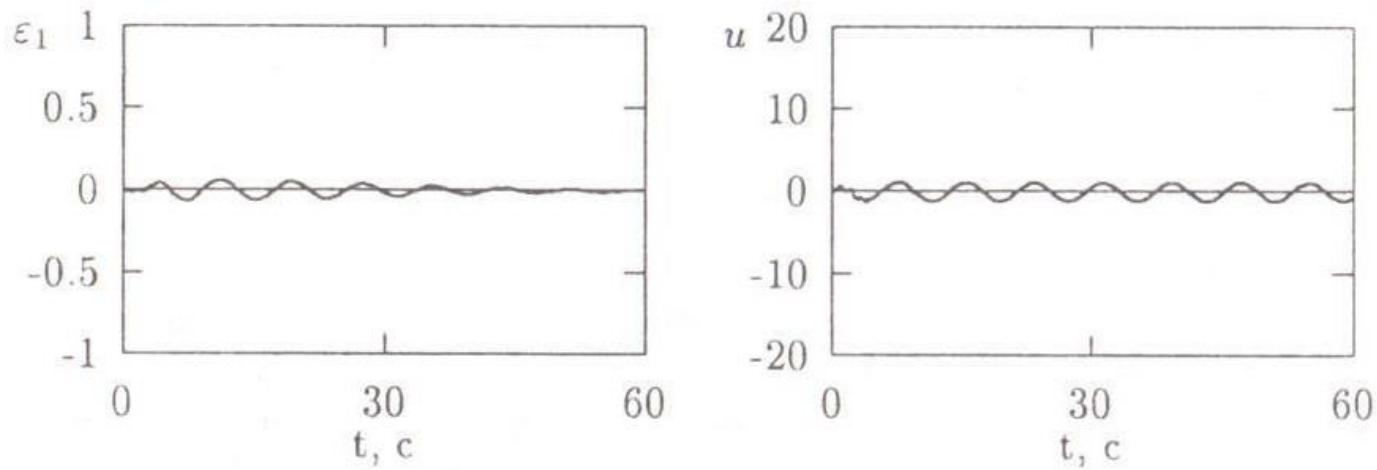
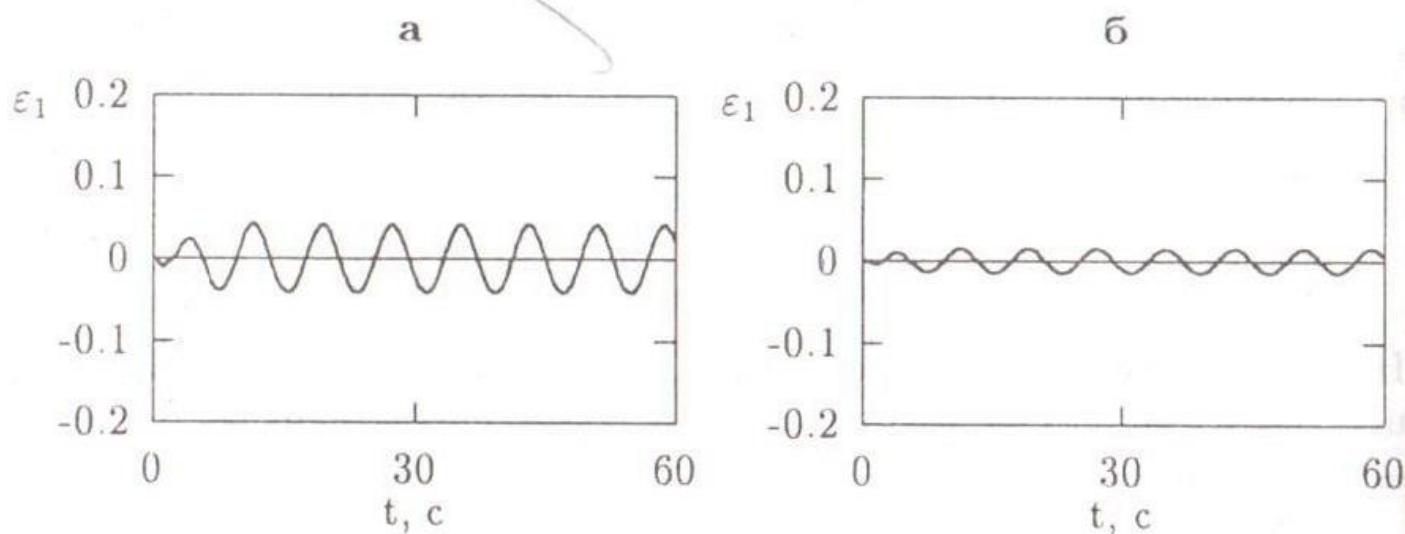


Рис. 6.3. Процессы в системе с адаптивным регулятором, синтезированным методом адаптивного обхода интегратора.



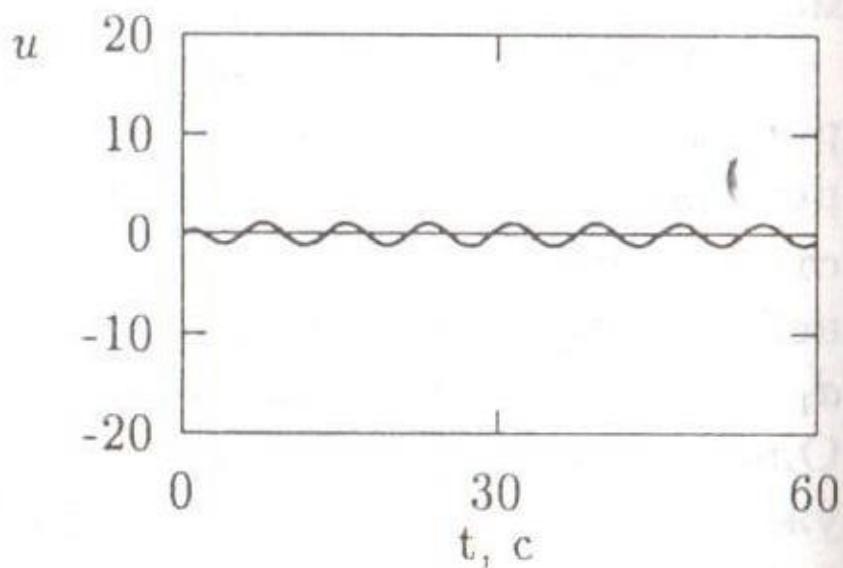
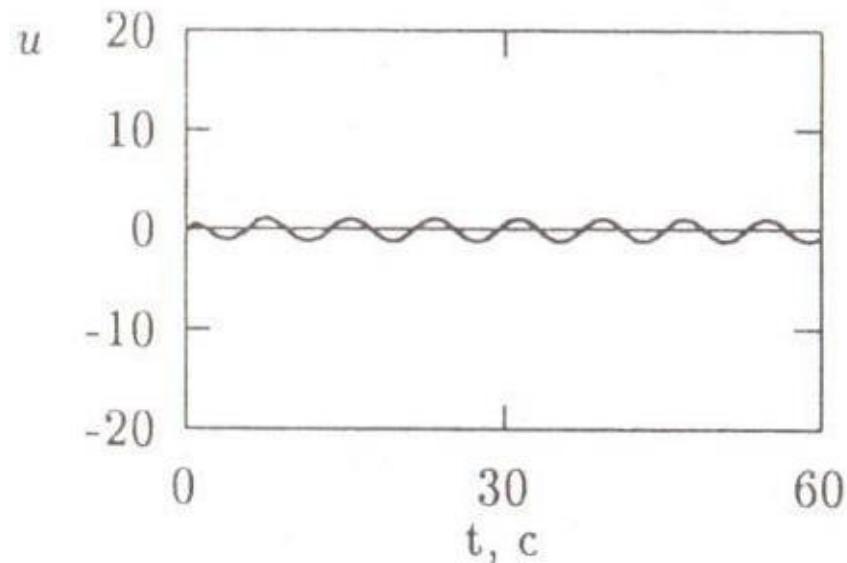


Рис. 6.4. Процессы в замкнутой системе при отключенных цепях настройки параметров регулятора:
 а – $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, $d_1 = d_2 = d_3 = 0.3$;
 б – $c_1 = c_2 = c_3 = 5$, $d_1 = d_2 = d_3 = 0.3$.

Т а б л и ц а 6.1.

Характеристики процедуры синтеза

Регулятор	Характеристики
РРО	Процедура синтеза достаточно простая и не требует проведения каких-либо аналитических преобразований
РААВП	Требуются незначительные аналитические вычисления при выводе выражений для старших производных настраиваемых параметров
РИПС	Процедура синтеза аналитически сложная и требует вычисления большого количества частных производных. Желательно использование специального программного обеспечения для проведения символьных вычислений

ТЕМА 10.4

- СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРАКТИЧЕСКИХ СХЕМ АДАПТИВНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ С РАСШИРЕННОЙ ОШИБКОЙ, С АЛГОРИТМОМ АДАПТАЦИИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА И СИНТЕЗИРОВАННЫХ НА ОСНОВЕ ИТЕРАТИВНОЙ ПРОЦЕДУРЫ СИНТЕЗА (п.п. 6.4.6. (с.с. 429-432)

6.4.6. Какой алгоритм выбрать?

Выше были представлены три различные схемы адаптивного управления по выходу линейными параметрически неопределенными объектами при идеальных условиях. Приведенные схемы создавались (и модифицировались) различными авторами в течение более чем 20 лет и обладают существенно различными свойствами. Поэтому представляет интерес сравнить приведенные схемы адаптивного управления и, если это вообще возможно, указать области их наиболее предпочтительного использования. Для того чтобы унифицировать критерии сравнения, последние объединены в следующие три группы (см. табл. 6.1, 6.2 и 6.3): характеристики процедуры синтеза, характеристики закона управления и характеристики замкнутой системы. В таблицах использованы следующие сокращения: РРО – регулятор с расширенной ошибкой (см. 6.4.3), РААВП – регулятор с алгоритмом адаптации высокого порядка (см. 6.4.4), РИПС – регулятор, синтезированный на основе итеративной процедуры синтеза (см. 6.4.5).

Суммируя информацию, приведенную в таблицах, отметим следующее. Регулятор с расширенной ошибкой, синтезируемый на основе принципа непосредственной компенсации, является наиболее простым (с точки зрения простоты процедуры синтеза и получаемой структуры регулятора). В то же время он обеспечивает наиболее слабые свойства замкнутой системы управления. В противоположность этому регулятор, синтезируемый на основе

Таблица 6.2.

Характеристики закона управления

Регулятор	Динамический порядок регулятора	Аналитическая сложность	Возможность использования априорной информации о параметрах объекта
РРО	Фиксированный и равен $2n(\rho + 2) - 1$	Для расчета управления требуется выполнение $10n+3$ операций умножения и одной операции деления. В целом регулятор имеет достаточно простую структуру	Нет
РААВП	Фиксированный и равен $2n(2\rho - 1) - 2$	Структура регулятора является более сложной по сравнению с РРО из-за необходимости расчета старших производных настраиваемых параметров	Нет
РИПС	Зависит от априорной информации о параметрах объекта управления и не превышает $3n+m+2$	Аналитические выражения, используемые для расчета сигнала управления, являются достаточно сложными (по крайней мере, для систем высокого порядка с большим числом неизвестных параметров)	Есть

Таблица 6.3.

Характеристики замкнутой системы управления

Регулятор	Качество переходных процессов	Оценки качества переходных процессов	Свойство параметрической робастности
РРО	Несмотря на нулевую устанавливающуюся ошибку слежения, возможно произвольно плохое качество переходных процессов	Нет	Нет
РААВП	Хорошее качество переходных процессов, обеспечиваемое без увеличения амплитуды сигнала управления	Есть	Нет
РИПС	Высокое качество переходных процессов, обеспечиваемое без увеличения амплитуды сигнала управления	Есть	Есть

итеративной процедуры адаптивного обхода интегратора, является наиболее сложным (с точки зрения сложности самой процедуры синтеза и получаемого в результате закона управления), но он обеспечивает лучшее качество переходных процессов. Более того, замкнутая система управления обладает рядом желательных свойств, которые не могут быть обеспечены при использовании принципа непосредственной компенсации. Среди этих свойств – параметрическая робастность и возможность использования априорной информации о параметрах объекта управления. Регулятор с алгоритмом адаптации высокого порядка по своим характеристикам занимает промежуточное положение между регулятором с расширенной ошибкой и регулятором, синтезируемым на основе итеративной процедуры обхода интегратора.

Таким образом, можно сделать следующие выводы. Во-первых, проблема выбора между представленными адаптивными регуляторами не имеет универсального бесспорного решения. Предпочтение одному или другому регулятору может быть сделано только с учетом конкретных условий решаемой задачи управления: характеристик объекта управления (его порядка, относительной степени, априорной информации о его параметрах), требований к качеству переходных процессов, аппаратных ресурсов для

реализации закона управления и т. д. Во-вторых, с практической точки зрения, задача адаптивного управления по выходной переменной не может считаться окончательно решенной, так как известные алгоритмы управления либо не обеспечивают высокого качества в переходном режиме, либо являются крайне сложными для практической реализации. Поэтому одним из важных направлений исследований в области адаптивного управления может рассматриваться задача синтеза достаточно простых алгоритмов адаптивного управления по выходной переменной с гарантированными показателями качества переходных процессов.



Благодарю за внимание

Заслуженный профессор СПбГЭТУ «ЛЭТИ»,
д.т.н., профессор В.В. Путов

Кафедра систем автоматического управления
Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
Санкт-Петербург, Россия
vputov@mail.ru