целью определения (идентификации) параметров математической модели. Например, в линейной модели (1.1) требуется оценить коэффициент k по результатам экспериментов.

Хотя методы оценки параметров достаточно хорошо разработаны (см. ниже гл. 4), их применение имеет принципиальные ограничения в силу невозможности построения абсолютно точной модели реальной системы. Наличие неустранимых погрешностей и помех создает ситуацию неопределенности, когда выходные переменные не определяются однозначно входными переменными и параметрами модели. Наличие неопределенности приводит ,к тому, что для одного и того же объекта или процесса может существовать несколько или даже бесконечно много математических моделей.

1.2. Математическое моделирование и теория систем

Важным понятием математического моделирования является понятие «система». Система в абстрактном смысле – эквивалент понятия математической модели и задается парой множеств U, Y (U – множество входов, Y – множество выходов) и отношением на множестве $U \times Y$, формализующим связь (зависимость) между входами и выходами.

Напомним, что отношением R на. множестве $X \times Y$ (или отношение между X и Y) называется подмножество множества $X \times Y$, т.е. некоторый набор пар $R = \{(x, y)\}$, где $x \in X, y \in Y$. Например, функция $y = x^2$ может быть представлена как отношение между множествами $X = (-\infty, \infty)$, $Y = [0, \infty)$, включающее те пары (x, y), для которых $y = x^2$.

Входы (входные сигналы) формализуют воздействия, которые можно прикладывать к системе, а выходы (выходные сигналы) - это совокупность всех данных (величин), доступных наблюдению или измерению. Например, при построении математической модели участка электрической цепи можно в качестве множеств U, Y входных и выходных сигналов взять множество непрерывных вещественнозначных функций, заданных на числовой оси R^1. Тогда в качестве отношения S будет выступать отношение линейной связи между числовыми значениями силы тока и разности потенциалов:

$$\frac{\Delta\varphi(t)}{i(t)} = k = \text{const}.$$

Для системы, описывающей движение материальной точки по закону Ньютона, в качестве U – множества входных функций также можно взять множество непрерывных функций на R^1, но тогда в качестве выходного множества Y следует брать множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, а отношение S устанавливает линейную связь между входной функцией и второй производной от выходной функции по времени.

Соединение систем также является системой и задается отношением. Например, последовательное соединение систем $S_1 \subset U_1 \times Y_1$ и $S_2 \subset U_2 \times Y_2$ есть отношение $S \subset U_1 \times Y_2$, такое что $(u_1, y_2) \in S$, если существуют $y_1 \in Y_1$, $u_2 \in U_2$, удовлетворяющие условиям $(u_1, y_1) \in S_1$, $(u_1, y_2) \in R$, $(u_2, y_2) \in S_2$, где $R \subset Y_1 \times U_2$ – отношение, определяющее связь между y_1 и u_2. Таким образом можно определять сколь угодно сложные системы, исходя из простых, которые становятся частями (подсистемами) составной системы.

Приведенное определение отражает в абстрактном виде особенности, присущие нашему интуитивному представлению о системе: целостность и структурированность. Целостность (единство) означает, что система отделена от внешней среды; среда может оказывать на нее действие (акцию) через входы и воспринимать отклик (реакцию) на эти действия через выходы.

Структурированность означает, что система может быть разделена внутри на несколько подсистем, связанных и взаимодействующих между собой так же, как целая система взаимодействует с внешней средой.

Третье свойство, присущее системе, — целенаправленность, требует задания некоторой цели, достижение которой говорит о правильной работе системы. Цель также задается некоторым отношением, которое иногда включают в математическую модель реальной системы, а иногда - нет в зависимости от удобства для решения конкретной задачи.

Приведенное выше формальное определение весьма общо; под него подпадают практически все виды математических моделей систем: дифференциальные и разностные уравнения, регрессионные модели, системы массового обслуживания, конечные и стохастические автоматы, дедуктивные системы (исчисления) и т.д. Можно трактовать как систему любой преобразователь входных данных в выходные (рис. 1.1, а). Например, системой можно назвать процесс решения любой задачи. При этом входами будут являться исходные данные, выходами - результаты, а целью – правильное решение (рис. 1.1, 6). Такой подход к системе подчеркивает ее целенаправленность и ведет свое происхождение от исследования операций – научной дисциплины, занимающейся разработкой количественных методов обоснования решений. Основное понятие здесь – операция, т.е. действие, которое подвергается исследованию (проектирование, конструирование, управление, экономическая деятельность и т,д.). Операция соответствует некоторой системе. Входами этой системы являются элементы принимаемого решения о проводимой операции, выходами — результаты проведения операции (показатели ее эффективности (рис. 1.1, в).

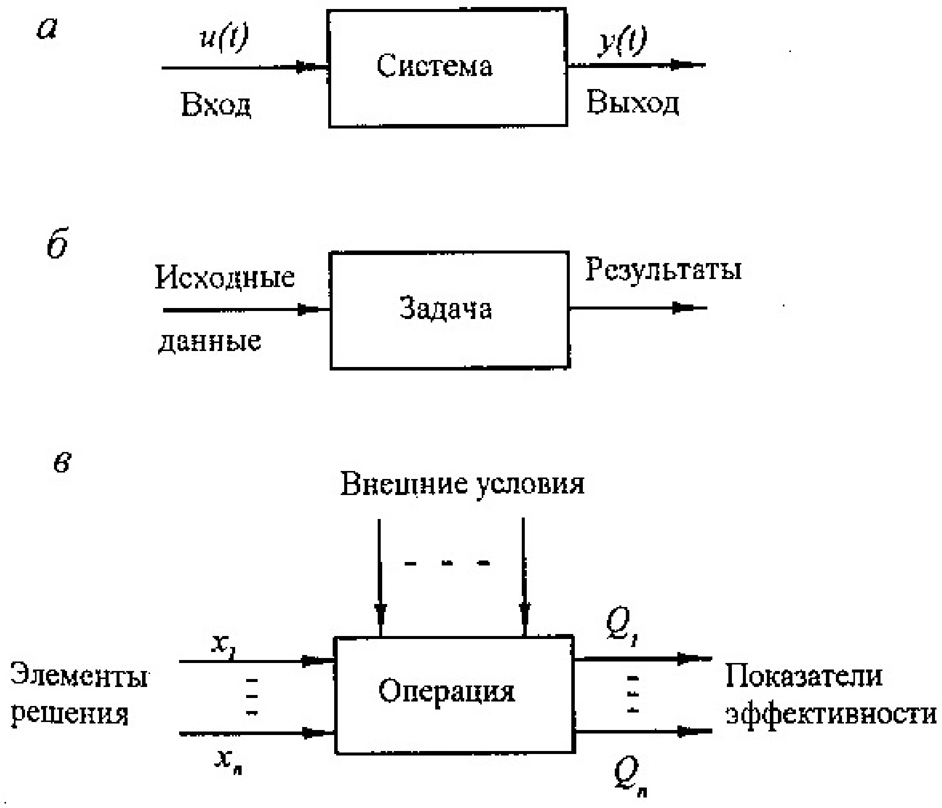

Рисунок 1.1 – Иллюстрация понятия системы

В дальнейшем будем рассматривать так называемые временные системы, функционирование которых – это процесс, разворачивающийся во времени, т.е. множества возможных входов и выходов $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{Y}$ – это множества функций времени со значениями соответственно во множествах U, Y:

$$\mathbf{U} = \{u : T \rightarrow U\}, \mathbf{Y} = \{y : T \rightarrow Y\}$$

где T – множество моментов времени, на котором рассматривается система.

Система называется функциональной (определенной), если каждой входной функции $u(t)$ соответствует единственная выходная функция $y(t)$. В противном случае система называется неопределенной. Неопределенность обычно возникает из-за неполноты информации о внешних условиях работы системы. Важным свойством, присущим реальным системам, является причинность. Она означает, что если входные функции $u_1(s)$ и $u_2(s)$ совпадают при $s \leq t$, т.е. $u_1(s) = u_2(s)$ при $s \leq t$, то соответствующие выходные функции удовлетворяют условию $y_1(t) = y_2(t)$, т.е. «настоящее не зависит от будущего при заданном прошлом».