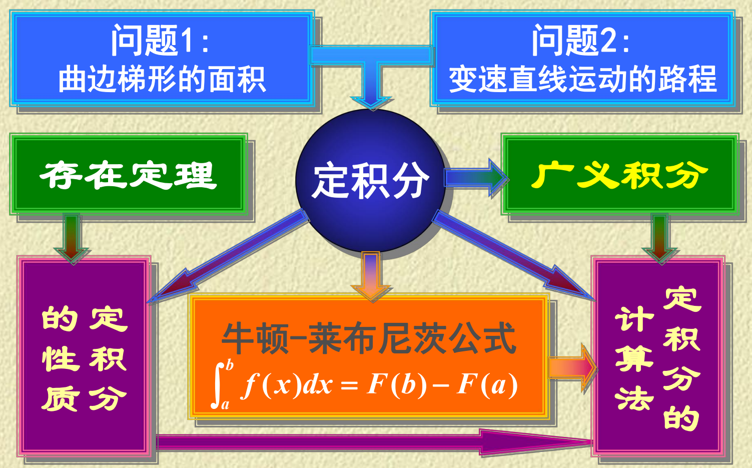
第五章　定 积 分

习 题 课

- 主要内容
- 典型例题

帮助 返回

一、主要内容



上页 下页 返回

1、问题的提出

实例1　（求曲边梯形的面积A）

曲边梯形由连续曲线 $y = f(x)(f(x) \geq 0)$、x轴与两条直线$x = a$、$x = b$所围成.

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

上页 下页 返回

实例2　（求变速直线运动的路程）

设某物体作直线运动，已知速度$v = v(t)$是时间间隔$[T_1, T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t) \geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程 S.

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$$

方法:分割、求和、取极限.

上页 下页 返回

2、定积分的定义

定义 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有界，在$[a,b]$中任意若干若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间$[a,b]$分成n个小区间，

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots[x_{n-1},x_n],$$

各小区间的长度依次为$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$(i=1,2,\cdots)$，

在各小区间上任取一点ξ_i（$\xi_i \in \Delta x_i$），

作乘积$f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots)$ 并作和$S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，

记$\lambda = \max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果不论对$[a,b]$怎样的分法，也不论在小区间$[x_{i-1},x_i]$上点$\xi_i$怎样的取法，只要当$\lambda \to 0$时，和$S$总趋于确定的极限$I$，

我们称这个极限I为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，

记为 $$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

上页 下页 返回

3、存在定理

可积的两个充分条件：

定理1 当函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续时，称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

定理2 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

上页 下页 返回

4、定积分的性质

性质1 $\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$

性质2 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

性质3 $\int_a^b 1\cdot dx = \int_a^b dx = b-a$

上页 下页 返回

性质4　如果在区间$[a,b]$上$f(x)\geq 0$，

则$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \qquad (a<b)$

推论：（1） 如果在区间$[a,b]$上$f(x)\leq g(x)$，

则$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \qquad (a<b)$

（2） $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a<b)$

上页 下页 返回

性质5　设M及m分别是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值及最小值，

则　$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$

性质6 (定积分中值定理)

如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，

则在积分区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，

使$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad (a\leq \xi \leq b)$

积分中值公式

上页 下页 返回

5、牛顿—莱布尼茨公式

定理1　如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限的函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上具有导数，且它的导数是　$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (a\leq x\leq b)$

定理2（原函数存在定理）如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限的函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$就是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

上页 下页 返回

定理 3（微积分基本公式） 如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

也可写成　$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$.

牛顿—莱布尼茨公式

表明：一个连续函数在区间$[a,b]$上的定积分等于它的任一原函数在区间$[a,b]$上的增量.

上页 下页 返回

6、定积分的计算法

（1）换元法

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

换元公式

（2）分部积分法

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

分部积分公式

上页 下页 返回

7、广义积分

(1)无穷限的广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

当极限存在时，称广义积分收敛；当极限不存在时，称广义积分发散.

上页 下页 返回

(2)无界函数的广义积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)dx$$

当极限存在时，称广义积分收敛；当极限不存在时，称广义积分发散.

上页 下页 返回

二、典型例题

例1　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}dx.$

解　原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x - \cos x|dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x - \cos x)dx$$

$$= 2\sqrt{2} - 2.$$

上页 下页 返回

例2 求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x}{\sin^p x+\cos^p x}dx \qquad (p>0)$

解 令$x=\frac{\pi}{2}-t$,则$dx=-dt$,

当$x=\frac{\pi}{2}$时，$t=0$;当$x=0$时，$t=\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x}{\sin^p x+\cos^p x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^p(\frac{\pi}{2}-t)}{\sin^p(\frac{\pi}{2}-t)+\cos^p(\frac{\pi}{2}-t)}(-dt)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^p t}{\cos^p t+\sin^p t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^p x}{\cos^p x+\sin^p x}dx$$

$$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x}{\sin^p x+\cos^p x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x+\cos^p x}{\sin^p x+\cos^p x}dx=\frac{\pi}{4}$$

例3 求$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx.$

解 令$e^{-x}=\sin t$,

x	0	$\ln 2$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$

则$x=-\ln\sin t$, $dx=-\frac{\cos t}{\sin t}dt$.

$$\text{原式}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos t(-\frac{\cos t}{\sin t})dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例4 求$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[\frac{\sin x}{x^8+1}+\sqrt{\ln^2(1-x)}]dx.$

解 $$\text{原式}=0+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\ln(1-x)|dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(1-x)dx-\int_0^{\frac{1}{2}}\ln(1-x)dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{1}{2}.$$

例5 求$\int_{-2}^{2}\min\{\frac{1}{|x|},x^2\}dx.$

解 $\because \min\{\frac{1}{|x|},x^2\}=\begin{cases}x^2, & |x|\le 1\\ \frac{1}{|x|}, & |x|>1\end{cases}$ 是偶函数,

$$\text{原式}=2\int_0^2\min\{\frac{1}{|x|},x^2\}dx$$

$$=2\int_0^1 x^2dx+2\int_1^2\frac{1}{x}dx=\frac{2}{3}+2\ln 2.$$

例6 设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$，求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)dx$.

解 原式 $=\int_0^1 (x-1)^2\left[\int_0^x e^{-y^2+2y}dy\right]dx$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\int_0^x e^{-y^2+2y}dy\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}(x-1)^3e^{-x^2+2x}dx$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 (x-1)^2e^{-(x-1)^2+1}d[(x-1)^2]$$

$$\xlongequal{令(x-1)^2=u}-\frac{e}{6}\int_1^0 ue^{-u}du=\frac{e}{6}\int_0^1 ue^{-u}du\ =\frac{e}{6}\int_0^1 ud(-e^{-u})$$

$$=\frac{e}{6}\left[-e^{-u}u\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-u}du\right]=\frac{e}{6}\left[-e^{-1}-e^{-u}\Big|_0^1\right]\ =\frac{1}{6}(e-2).$$

上页 下页 返回

例7 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，证明：

$$\int_0^\pi\frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{f(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx.$$

例 6 若 $f(x)$在$[0,1]$上连续，证明

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$；

（2）$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

证 令 $x=\pi-t$，

$dx=-dt$，

$$左边=\int_\pi^0\frac{(\pi-t)f(\sin t)}{1+\cos^2 t}(-dt)$$

$$=\int_0^\pi\frac{(\pi-x)f(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx$$

上页 下页 返回

$$=\pi\int_0^\pi\frac{f(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx-\int_0^\pi\frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx$$

即 $2\int_0^\pi\frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^\pi\frac{f(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx$

$$\therefore\quad \int_0^\pi\frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{f(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx.$$

上页 下页 返回

例8 求 $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 xdx}{1+e^x}$.

解 原式 $=\int_{-\frac{\pi}{6}}^0\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^0\frac{\sin^2 t}{1+e^{-t}}(-dt)+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{e^t\sin^2 t}{1+e^t}dt+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx$$

$$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

上页 下页 返回

例9 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$.

解 由定积分的定义的可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\int_1^2\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$$

所以，所求极限式的值是$\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$

上页 下页 返回

例10 求下列广义积分：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$; (2) $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

解 (1) 原式$=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+4x+9}dx+\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+9}dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+(\frac{x+2}{\sqrt{5}})^2}d\frac{x+2}{\sqrt{5}}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(\frac{x+2}{\sqrt{5}})^2}d\frac{x+2}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{\sqrt{5}}arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

上页 下页 返回

(2) $\because\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}=\infty$,

$\therefore x=1$为$f(x)$的瑕点.

$$原式\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{td\frac{1}{t}}{\sqrt{\frac{3}{t^2}-\frac{2}{t}-1}}=\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{-dt}{t\sqrt{\frac{3}{t^2}-\frac{2}{t}-1}}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{-t^2-2t+3}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{d(t+1)}{\sqrt{2-(t+1)^2}}$$

$$=(\arcsin\frac{1+t}{2})_{0.5}^{1}\quad=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{4}.$$

上页 下页 返回

例10 求下列广义积分：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$; (2) $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

解 (1) 原式$=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+9}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x+2)^2+5}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+2)^2+5}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_0^b$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

上页 下页 返回

(2) $\because \lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = \infty,$

$\therefore x=1$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

$$\text{原式} = \lim_{t\to1^+}\int_t^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$$

$$= \lim_{t\to1^+}\left[-\int_t^2 \frac{d(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{2^2-(1+\frac{1}{x})^2}}\right]$$

$$= -\lim_{t\to1^+}\arcsin\frac{1+\frac{1}{x}}{2}\Big|_t^2 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}.$$

上页 下页 返回

测验题

一、选择题:

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)=$（　　）

（A）0；　　（B）$\dfrac{1}{2}$；

（C）$\dfrac{\pi}{4}$；　　（D）$\dfrac{\pi}{2}$　.

2、$\dfrac{d}{dx}\int_0^x \ln(t^2+1)\,dt=$（　　）

（A）$\ln(x^2+1)$；　　（B）$\ln(t^2+1)$；

（C）$2x\ln(x^2+1)$；　　（D）$2t\ln(t^2+1)$　.

上页 下页 返回

3、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}=$（　　）

（A）0；　　（B）1；

（C）$\dfrac{1}{3}$；　　（D）∞　.

4.、定积分 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$ 的值是（　　）

（A）e；　　（B）$\dfrac{1}{2}$；

（C）$e^{\frac{1}{2}}$；　　（D）2　.

上页 下页 返回

5、下列积分中，使用变换正确的是（　）

（A）$\int_0^\pi \dfrac{dx}{1+\sin^3 x}$，令　$x=\arctan t$；

（B）$\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}dx$，令　$x=\sin t$；

（C）$\int_{-1}^2 \dfrac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$，令 $1+x^2=u$；

（D）$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$，令 $x=t^{\frac{1}{3}}$　.

6、下列积分中，值为零的是（　）

（A）$\int_{-1}^1 x^2dx$；　　（B）$\int_{-1}^2 x^3dx$；

（C）$\int_{-1}^1 \quad dx$；　　（D）$\int_{-1}^1 x^2\sin x dx$　.

上页 下页 返回

7、已知 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，

则 $\int_0^2 xf''(x)dx=$（ ）

（A）12；　　（B）8；

（C）7；　　（D）6.

8、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\ge 0\\ \dfrac{1}{1+e^x}, & x<0\end{cases}$，则定积分 $\int_0^2 f(x-1)dx$

=（ ）

（A）$1+\ln(1+\frac{1}{e})$；　　（B）$2-\ln(1+e^2)+\ln 3$；

（C）$1+\ln(1+\frac{1}{e})+\ln 2$；　　（D）$1-\ln(1+\frac{1}{e})$.

上页 下页 返回

9、广义积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=$（ ）

（A）$\ln 4$；　　（B）0；

（C）$\frac{1}{3}\ln 4$；　　（D）发散.

10、广义积分 $\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}=$（ ）

（A）$1-\ln 3$；　　（B）$\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$；

（C）$\ln 3$；　　（D）发散.

上页 下页 返回

二、证明不等式:

$$\frac{1}{2}\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}\le\frac{\pi}{6},\quad (n>2).$$

三、求下列函数的导数:

1、$F(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$；

2.、由方程 $\int_0^y e^{t^2}dt+\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=1$，确定 y 为 x 的函数，求 $\frac{dy}{dx}$.

上页 下页 返回

四、求下列定积分:

1、$\int_1^4\frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$；　　2、$\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$；

3、$\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$；　　4、$\int_{-2}^5|x^2-2x-3|dx$；

5、$\int_{-1}^1\frac{dx}{1+2^{\frac{1}{x}}}$；　　6、$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$；

7、$\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$；　　8、$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$.

上页 下页 返回

五、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，$f(0)=0$，且 $0<f'(x)\le 1$，试证：

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 \ge \int_0^1 [f(x)]^3 dx.$$

六、设 $f(x)$ 在[0，1]上有二阶连续导数，证明：

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx.$$

上页 下页 返回

测验题答案

一、1、C；　2、A；　3、C；　4、D；　5、C；

6、D；　7、B；　8、A；　9、C；　10、D.

三、1、$\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$；　2、$\pm 2e^{-y^2}\sin x^2$.

四、1、$2\ln\dfrac{4}{3}$；　2、$\dfrac{\pi}{4}$；　3、$\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$；　4、$\dfrac{71}{3}$；

5、1；　6、$\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$；　7、$\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{3}{4}$；　8、$\pi$.

五、提示：做辅助函数 $F(x)=\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2-\int_0^x f^3(t)dt$

六、提示：用分部积分

上页 下页 返回