第六章

定积分的应用

习题 6－2　定积分在几何学上的应用

1. 求图 6－1 中各阴影部分的面积：

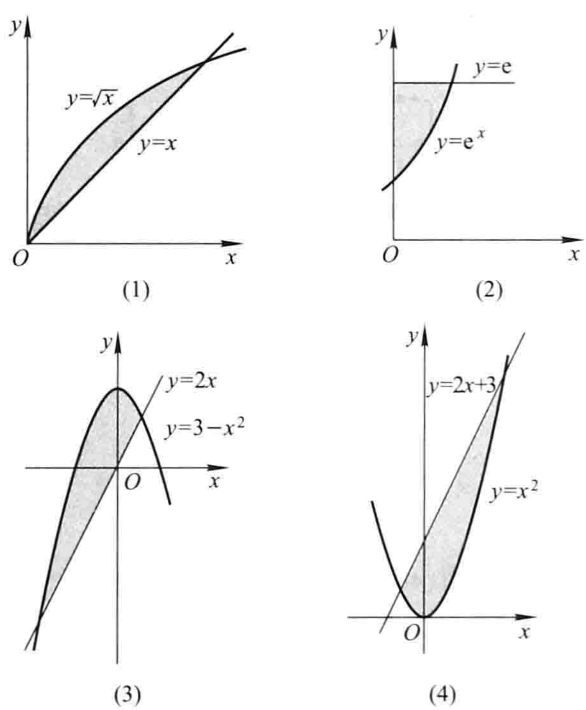

图 6－1

解　(1) 解方程组 $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x, \end{cases}$ 得到交点坐标为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$.

如果取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[0,1]$，相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条面积近似于高为 $\sqrt{x}-x$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

如果取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[0,1]$，相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、底为 $y-y^2$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_0^1(y-y^2)\,\mathrm{d}y=\left[\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

（2）取 x 为积分变量，则易知 x 的变化范围为$[0,1]$，相应于$[0,1]$上的任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的窄条面积近似于高为 $\mathrm{e}-\mathrm{e}^x$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=[\mathrm{e}x-\mathrm{e}^x]_0^1=1.$$

如果取 y 为积分变量，则易知 y 的变化范围为$[1,\mathrm{e}]$，相应于$[1,\mathrm{e}]$上的任一小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、底为 $\ln y$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_1^{\mathrm{e}}\ln y\mathrm{d}y=[y\ln y]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}y=\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=1.$$

（3）解方程组$\begin{cases}y=2x,\\y=3-x^2,\end{cases}$得到交点坐标为$(-3,-6)$和$(1,2)$.

如果取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为$[-3,1]$，相应于$[-3,1]$上的任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的窄条面积近似于高为$(3-x^2)-2x=-x^2-2x+3$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_{-3}^1(-x^2-2x+3)\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{-3}^1=\frac{32}{3}.$$

如果用 y 为积分变量，则 y 的变化范围为$[-6,3]$，但是在$[-6,2]$上的任一小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、底为$\frac{y}{2}-(-\sqrt{3-y})=\frac{y}{2}+\sqrt{3-y}$的窄矩形的面积，在$[2,3]$上的任一小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、宽为$\sqrt{3-y}-(-\sqrt{3-y})=2\sqrt{3-y}$的窄矩形的面积，因此有

$$\begin{aligned}A&=\int_{-6}^2\left(\frac{y}{2}+\sqrt{3-y}\right)\mathrm{d}y+\int_2^3 2\sqrt{3-y}\mathrm{d}y\\&=\left[\frac{y^2}{4}-\frac{2}{3}(3-y)^{\frac{3}{2}}\right]_{-6}^2+\left[-\frac{4}{3}(3-y)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3=\frac{32}{3},\end{aligned}$$

从这里可看到本小题以 x 为积分变量较容易做. 原因是本小题中的图形边界曲线，若分为上下两段的话，则为 $y=2x$ 和 $y=3-x^2$；而分为左右两段的话，则为 $x=-\sqrt{3-y}$和 $x=\begin{cases}\dfrac{y}{2}, & -6\leqslant y<2,\\\sqrt{3-y}, & 2\leqslant y\leqslant 3,\end{cases}$其中右段曲线的表示相对比较复杂，也就导致计算形式复杂.

（4）解方程组$\begin{cases}y=2x+3,\\y=x^2,\end{cases}$得到交点坐标为$(-1,1)$和$(3,9)$，与(3)相同的原因，本小题以 x 为积分变量计算较容易. 取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为$[-1,3]$，相应于$[-1,3]$上的任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的窄条面积近似于高为 $2x+3-x^2$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)\,\mathrm{d}x=\left[x^2+3x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{3}=\frac{32}{3}.$$

2. 求由下列各曲线所围成的图形的面积：

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$(两部分都要计算)；

(2) $y=\frac{1}{x}$与直线 $y=x$ 及 $x=2$；

(3) $y=\mathrm{e}^x,y=\mathrm{e}^{-x}$与直线 $x=1$；

(4) $y=\ln x$,y 轴与直线 $y=\ln a$,$y=\ln b(b>a>0)$.

解　(1) 如图 6-2,先计算图形 D_1(阴影部分)的面积,容易求得 $y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$ 的交点为$(-2,2)$和$(2,2)$. 取 x 为积分变量,则 x 的变化范围为$[-2,2]$,相应于$[-2,2]$上的任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的窄条面积近似于高为$\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积,因此有

$$\begin{aligned}A_1&=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x\\&=2\left[\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2}+4\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{6}x^3\right]_0^2=2\pi+\frac{4}{3},\end{aligned}$$

图形 D_2 的面积为

$$A_2=\pi(2\sqrt{2})^2-\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)=6\pi-\frac{4}{3}.$$

(2) 如图 6-3,取 x 为积分变量,则 x 的变化范围为$[1,2]$,相应于$[1,2]$上的任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$的窄条面积近似于高为 $x-\frac{1}{x}$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积,因此有

$$A=\int_{1}^{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2-\ln x\right]_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2.$$

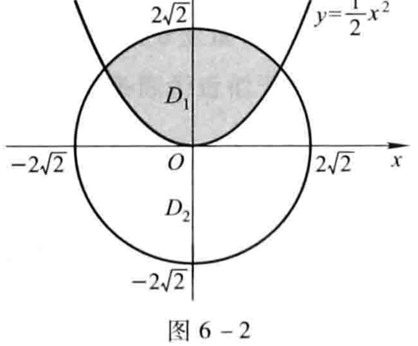

图 6-2

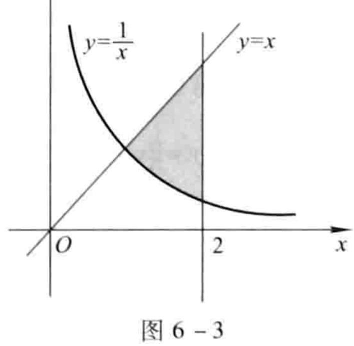

图 6-3

（3）如图 6－4，取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[0,1]$，相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$、底为 $\mathrm{d}x$ 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}-2.$$

（4）如图 6－5，取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[\ln a,\ln b]$，相应于 $[\ln a,\ln b]$ 上的任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的窄条面积近似于高为 $\mathrm{d}y$、底为 e^y 的窄矩形的面积，因此有

$$A=\int_{\ln a}^{\ln b}\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y=[\mathrm{e}^y]_{\ln a}^{\ln b}=b-a.$$

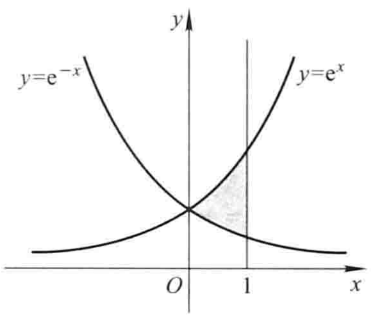

图 6－4

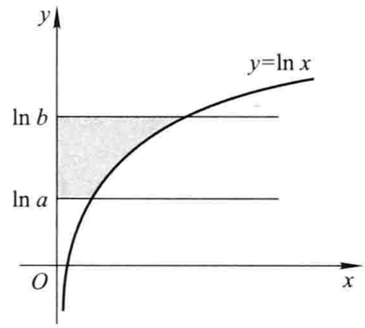

图 6－5

3. 求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点 $(0,-3)$ 和 $(3,0)$ 处的切线所围成的图形的面积.

解　首先求得导数 $y'\big|_{x=0}=4$，$y'\big|_{x=3}=-2$，故抛物线在点 $(0,-3)$，$(3,0)$ 处的切线分别为 $y=4x-3$，$y=-2x+6$，容易求得这两条切线交点为 $\left(\frac{3}{2},3\right)$（如图 6－6），因此所求面积为

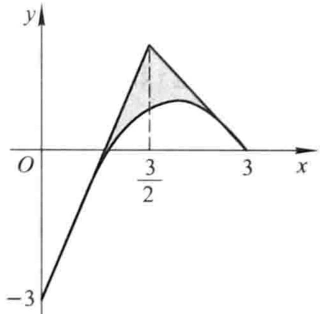

图 6－6

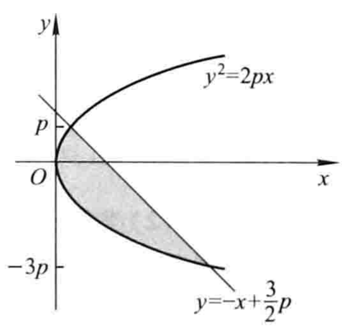

图 6－7

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}[4x-3-(-x^2+4x-3)]\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^3[-2x+6-(-x^2+4x-3)]\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{9}{4}.$$

4. 求抛物线 $y^2=2px$ 及其在点 $\left(\frac{p}{2},p\right)$ 处的法线所围成的图形的面积.

解 利用隐函数求导方法,抛物线方程 $y^2=2px$ 两端分别对 x 求导,得

$$2yy'=2p,$$

即得 $y'\Big|_{\left(\frac{p}{2},p\right)}=1$,故法线斜率为 $k=-1$,从而得到法线方程为 $y=-x+\frac{3}{2}p$(如图 6-7),因此所求面积为

$$A=\int_{-3p}^{p}\left(-y+\frac{3}{2}p-\frac{1}{2p}y^2\right)\mathrm{d}y=\left[-\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}py-\frac{1}{6p}y^3\right]_{-3p}^{p}=\frac{16}{3}p^2.$$

5. 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

(1) $\rho=2a\cos\theta$;　　(2) $x=a\cos^3t,y=a\sin^3t$;

(3) $\rho=2a(2+\cos\theta)$.

解 (1) $A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(2a\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\pi a^2.$

(2) 由对称性可知,所求面积为第一象限部分面积的 4 倍,记曲线 $x=a\cos^3t,y=a\sin^3t$ 上的点为(x,y),因此

$$\begin{aligned}A&=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left[a\sin^3t\cdot 3a\cos^2t(-\sin t)\right]\mathrm{d}t\\&=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4t-\sin^6t)\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2.\end{aligned}$$

注 对于参数方程的处理方式一般可采用本题的方法,首先根据问题化为积分(其中记曲线上的点为(x,y)),再根据参数方程进行换元,即可化为关于参数的积分进行计算.

(3) $A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[2a(2+\cos\theta)]^2\mathrm{d}\theta=2a^2\int_0^{2\pi}(4+4\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$

$$=2a^2\int_0^{2\pi}(4+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=18\pi a^2.$$

6. 求由摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ 的一拱$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与横轴所围成的图形的面积.

解 本题做法与题 5(2)类似. 以 x 为积分变量,则 x 的变化范围为$[0,2\pi a]$,设摆线上的点为(x,y),则所求面积为

$$A=\int_0^{2\pi a}y\mathrm{d}x,$$

再根据参数方程换元,令 $x=a(t-\sin t)$,则 $y=a(1-\cos t)$,因此有

$$A=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2t)\mathrm{d}t$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2 t)\mathrm{d}t=3\pi a^2.$$

7. 求对数螺线 $\rho=a\mathrm{e}^{\theta}(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 及射线 $\theta=\pi$ 所围成的图形的面积.

解　$A=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(a\mathrm{e}^{\theta})^2\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{4}[\mathrm{e}^{2\theta}]_{-\pi}^{\pi}=\frac{a^2}{4}(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}).$

8. 求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积：

(1) $\rho=3\cos\theta$ 及 $\rho=1+\cos\theta$；

(2) $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$ 及 $\rho^2=\cos 2\theta$.

解　(1) 首先求出两曲线交点为 $\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3}\right)$、$\left(\frac{3}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$，由于图形关于极轴的对称性(如图 6-8)，因此所求面积为极轴上面部分面积的 2 倍，即得

$$A=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(3\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta\right]=\frac{5\pi}{4}.$$

(2) 首先求出两曲线交点为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{6}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$，由于图形的对称性(如图 6-9)，因此有

$$A=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}(\sqrt{2}\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta\right]=\frac{\pi}{6}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

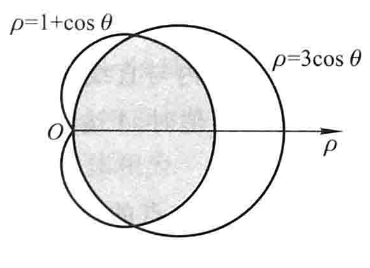

图 6-8

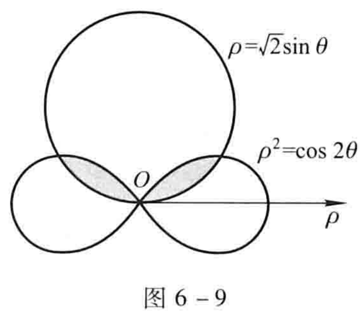

图 6-9

9. 求位于曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 下方，该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间的图形的面积.

解　先求曲线过原点的切线方程，设切点为 (x_0,y_0)，其中 $y_0=\mathrm{e}^{x_0}$，则切线的斜率为 e^{x_0}，故切线方程为

$$y-y_0=\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0),$$

由于该切线过原点，因此有 $y_0=\mathrm{e}^{x_0}x_0$，解得 $x_0=1,y_0=\mathrm{e}$，即切线方程为

$$y=\mathrm{e}x.$$

如图 6-10 可知所求面积为

$$A=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x)\mathrm{d}x$$

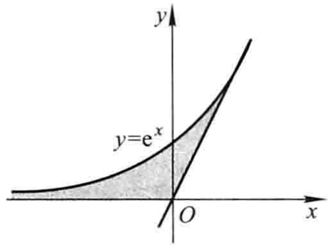

图 6-10

$$=\left[e^x\right]_{-\infty}^{0}+\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1=\frac{e}{2}.$$

10. 求由抛物线 $y^2=4ax$ 与过焦点的弦所围成的图形面积的最小值.

解 抛物线的焦点为 $(a,0)$,设过焦点的直线为 $y=k(x-a)$,则该直线与抛物线的交点的纵坐标为 $y_1=\dfrac{2a-2a\sqrt{1+k^2}}{k}$,$y_2=\dfrac{2a+2a\sqrt{1+k^2}}{k}$,面积为

$$A=\int_{y_1}^{y_2}\left(a+\frac{y}{k}-\frac{y^2}{4a}\right)dy=a(y_2-y_1)+\frac{y_2^2-y_1^2}{2k}-\frac{y_2^3-y_1^3}{12a}$$

$$=\frac{8a^2(1+k^2)^{3/2}}{3k^3}=\frac{8a^2}{3}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{3/2},$$

故面积是 k 的单调减少函数,因此其最小值在 $k\to\infty$ 即弦为 $x=a$ 时取到,最小值为 $\dfrac{8}{3}a^2$.

11. 已知抛物线 $y=px^2+qx$(其中 $p<0,q>0$)在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切,且此抛物线与 x 轴所围成的图形的面积为 A. 问 p 和 q 为何值时,A 达到最大值,并求出此最大值.

解 依题意知,抛物线如图 6-11 所示,求得它与 x 轴交点的横坐标为 $x_1=0$,$x_2=-\dfrac{q}{p}$.

抛物线与 x 轴所围成的图形面积为

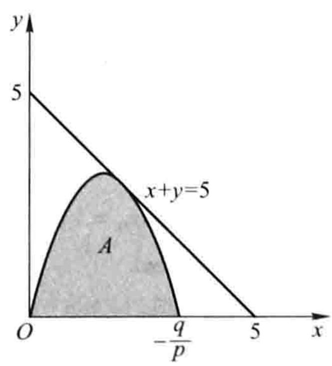

图 6-11

$$A=\int_0^{-\frac{q}{p}}(px^2+qx)\mathrm{d}x=\left[\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2\right]_0^{-\frac{q}{p}}=\frac{q^3}{6p^2}.$$

因直线 $x+y=5$ 与抛物线 $y=px^2+qx$ 相切,故它们有惟一交点. 由方程组

$$\begin{cases}x+y=5,\\ y=px^2+qx,\end{cases}$$

得 $px^2+(q+1)x-5=0$,其判别式 $\Delta=(q+1)^2+20p=0$,解得 $p=-\frac{1}{20}(1+q)^2$,代入面积 A,得

$$A(q)=\frac{200q^3}{3(1+q)^4}.$$

令 $A'(q)=\frac{200q^2(3-q)}{3(q+1)^5}=0$,得惟一驻点 $q=3$. 当 $0<q<3$ 时,$A'(q)>0$,当 $q>3$ 时,$A'(q)<0$. 于是,当 $q=3$ 时,$A(q)$ 取极大值,也是最大值. 此时 $p=-\frac{4}{5}$,最大值 $A=\frac{225}{32}$.

12. 由 $y=x^3,x=2,y=0$ 所围成的图形,分别绕 x 轴及 y 轴旋转,计算所得两个旋转体的体积.

解 (1) 图形绕 x 轴旋转,该体积为

$$V=\int_0^2\pi(x^3)^2\mathrm{d}x=\frac{128}{7}\pi.$$

(2) 图形绕 y 轴旋转,则该立体可看作圆柱体(即由 $x=2,y=8,x=0,y=0$所围成的图形绕 y 轴所得的立体)减去由曲线 $x=\sqrt[3]{y},y=8,x=0$ 所围成的图形绕 y 轴所得的立体,因此体积为

$$V=\pi\cdot2^2\cdot8-\int_0^8\pi(\sqrt[3]{y})^2\mathrm{d}y=\frac{64}{5}\pi.$$

13. 把星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$所围成的图形绕 x 轴旋转,计算所得旋转体的体积.

解 记 x 轴上方部分星形线的函数为 $y=y(x)$,则所求体积为曲线 $y=y(x)$ 与 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转而成,故有

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\mathrm{d}x.$$

由于星形线的参数方程为 $x=a\cos^3t,y=a\sin^3t$,所以对上述积分作换元 $x=a\cos^3t$,便得

$$V=\int_{\pi}^{0}\pi(a\sin^3t)^2(a\cos^3t)'\mathrm{d}t=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

14. 用积分方法证明图 6-12 中球缺的体积为

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

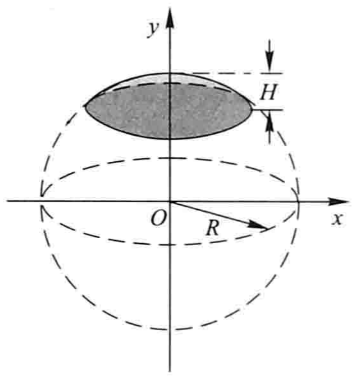

图 6 - 12

解 该立体可看作由曲线 $x=\sqrt{R^2-y^2}$, $y=R-H$ 和 $x=0$ 所围成的图形绕 y 轴旋转所得,因此体积为

$$V=\int_{R-H}^{R}\pi(\sqrt{R^2-y^2})^2\mathrm{d}y=\pi\left[R^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{R-H}^{R}$$

$$=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right).$$

15. 求下列已知曲线所围成的图形,按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

(1) $y=x^2$, $x=y^2$,绕 y 轴;

(2) $y=\arcsin x$, $x=1$, $y=0$,绕 x 轴;

(3) $x^2+(y-5)^2=16$,绕 x 轴;

(4) 摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 的一拱, $y=0$,绕直线 $y=2a$.

解 (1) $V=\int_0^1[\pi(\sqrt{y})^2-\pi(y^2)^2]\mathrm{d}y=\frac{3}{10}\pi.$

(2) $$V=\int_0^1\pi(\arcsin x)^2\mathrm{d}x=[\pi x(\arcsin x)^2]_0^1-2\pi\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^3}{4}-2\pi\left\{[-\sqrt{1-x^2}\arcsin x]_0^1+\int_0^1\mathrm{d}x\right\}=\frac{\pi^3}{4}-2\pi.$$

(3) 该立体为由曲线 $y=5+\sqrt{16-x^2}$, $x=-4$, $x=4$, $y=0$ 所围成图形绕 x 轴旋转所得立体减去由曲线 $y=5-\sqrt{16-x^2}$, $x=-4$, $x=4$, $y=0$ 所围成图形绕 x 轴旋转所得立体,因此体积为

$$V=\int_{-4}^{4}\pi(5+\sqrt{16-x^2})^2\mathrm{d}x-\int_{-4}^{4}\pi(5-\sqrt{16-x^2})^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-4}^{4}20\pi\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=4\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}320\pi\cos^2t\mathrm{d}t=640\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t=160\pi^2.$$

（4）该立体可看作由直线 $y=2a,y=0,x=0,x=2\pi a$ 所围成的图形绕 $y=2a$ 旋转所得的圆柱体减去由摆线以及直线 $y=2a,x=0,x=2\pi a$ 所围成的图形绕 $y=2a$ 旋转所得的立体，记摆线上的点为 (x,y)，则体积为

$$V=\pi(2a)^2(2\pi a)-\int_0^{2\pi a}\pi(2a-y)^2\mathrm{d}x=8\pi^2a^3-\int_0^{2\pi a}\pi(2a-y)^2\mathrm{d}x,$$

再根据摆线的参数方程进行换元，即作换元 $x=a(t-\sin t)$，此时 $y=a(1-\cos t)$，因此有

$$\begin{aligned}V&=8\pi^2a^3-\int_0^{2\pi}\pi[2a-a(1-\cos t)]^2a(1-\cos t)\mathrm{d}t\\&=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos t-\cos^2t-\cos^3t)\mathrm{d}t\\&=8\pi^2a^3-4\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\mathrm{d}t=7\pi^2a^3.\end{aligned}$$

16. 求圆盘 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 绕 $x=-b(b>a>0)$ 旋转所成旋转体的体积.

解　记由曲线 $x=\sqrt{a^2-y^2},x=-b,y=-a,y=a$ 围成的图形绕 $x=-b$ 旋转所得旋转体的体积为 V_1，由曲线 $x=-\sqrt{a^2-y^2},x=-b,y=-a,y=a$ 围成的图形绕 $x=-b$ 旋转所得旋转体的体积为 V_2，则所求体积为

$$\begin{aligned}V&=V_1-V_2=\int_{-a}^{a}\pi(\sqrt{a^2-y^2}+b)^2\mathrm{d}y-\int_{-a}^{a}\pi(-\sqrt{a^2-y^2}+b)^2\mathrm{d}y\\&=\int_{-a}^{a}4\pi b\sqrt{a^2-y^2}\mathrm{d}y\xlongequal{y=a\sin t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\pi a^2b\cos^2t\mathrm{d}t\\&=8\pi a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t=2\pi^2a^2b.\end{aligned}$$

17. 设有一截锥体，其高为 h，上、下底均为椭圆，椭圆的轴长分别为 $2a$、$2b$ 和 $2A$、$2B$，求这截锥体的体积.

解　用与下底相距 x 且平行于底面的平面去截该立体得到一个椭圆，记其半轴长分别为 u、v，则

$$u=\frac{a-A}{h}x+A,\quad v=\frac{b-B}{h}x+B,$$

该椭圆面积为 $\pi\left(\frac{a-A}{h}x+A\right)\left(\frac{b-B}{h}x+B\right)$，因此体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_0^h\pi\left(\frac{a-A}{h}x+A\right)\left(\frac{b-B}{h}x+B\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{6}\pi h[2(ab+AB)+aB+bA].\end{aligned}$$

18. 计算底面是半径为 R 的圆，而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积（图 6－13）.

解　以 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[-R,R]$，相应的截面等边三角形边长为

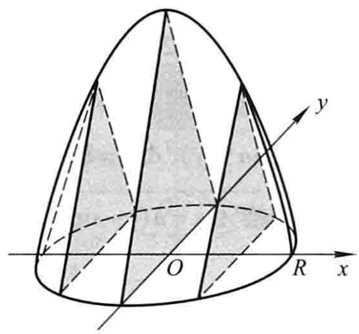

图 6 - 13

$2\sqrt{R^2-x^2}$,面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{R^2-x^2})^2=\sqrt{3}(R^2-x^2)$,因此体积为

$$V=\int_{-R}^{R}\sqrt{3}(R^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3.$$

19. 证明:由平面图形 $0\leqslant a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant f(x)$ 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

证 取横坐标 x 为积分变量,与区间$[a,b]$上任一小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$相应的窄条图形绕 y 轴旋转所成的旋转体近似于一圆柱壳,柱壳的高为 $f(x)$,厚为 $\mathrm{d}x$,底面圆周长为 $2\pi x$,故其体积近似等于 $2\pi xf(x)\mathrm{d}x$,从而由元素法即得结论.

20. 利用题 19 的结论,计算曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

解 $V=2\pi\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=\pi^2\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=2\pi^2.$

注 在计算积分时,这里利用了教材第五章第三节中的例 6 的结论 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x.$

21. 设由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 D_1,由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 D_2,其中$0<a<2$(图 6 - 14).

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1,D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2;

(2) 问当 a 为何值时,V_1+V_2 取得最大值? 试求此最大值.

解 (1) $V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)$;

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4.$$

(2) 设

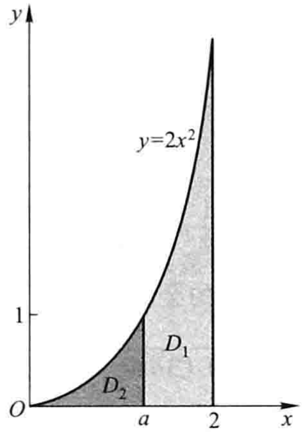

图 6－14

$$V = V_1 + V_2 = \frac{4\pi}{5}(32 - a^5) + \pi a^4,$$

由 $V' = 4\pi a^3(1-a) = 0$，解得区间 $(0,2)$ 内惟一驻点 $a=1$.

当 $0<a<1$ 时，$V'>0$；当 $a>1$ 时，$V'<0$. 因此 $a=1$ 是极大值点也是最大值点，此时 V_1+V_2 取得最大值 $\frac{129}{5}\pi$.

22. 计算曲线 $y=\ln x$ 相应于 $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$ 的一段弧的长度.

解　$s = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sqrt{u^2-1}} \int_2^3 \frac{u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u$

$= \left[u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_2^3 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$

23. 计算半立方抛物线 $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2 = \frac{x}{3}$ 截得的一段弧的长度.

解　联立两个方程 $\begin{cases} y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3, \\ y^2 = \frac{x}{3}, \end{cases}$ 得到两条曲线的交点为 $\left(2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 和 $\left(2, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$，由于曲线关于 x 轴对称，因此所求弧段长为第一象限部分的 2 倍，第一象限部分弧段为 $y=\sqrt{\frac{2}{3}(x-1)^3}\ (1\leqslant x\leqslant 2)$，$y'=\sqrt{\frac{3}{2}(x-1)}$，故所求弧的长度为

$$s = 2\int_1^2\sqrt{1+\frac{3}{2}(x-1)}\,\mathrm{d}x = \sqrt{6}\left[\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

24. 计算抛物线 $y^2 = 2px$ 从顶点到这曲线上的一点 $M(x,y)$ 的弧长.

解　不妨设 $p>0$，由于顶点到 (x,y) 的弧长与顶点到 $(x,-y)$ 的弧长相等，因此不妨设 $y>0$，故有

$$s=\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{y}{p}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{p^2+y^2}+\frac{1}{2}p^2\ln(y+\sqrt{p^2+y^2})\right]_0^y$$
$$=\frac{1}{2p}y\sqrt{p^2+y^2}+\frac{1}{2}p\ln\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}.$$

25. 计算星形线 $x=a\cos^3t,y=a\sin^3t$ 的全长.

解 $$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\cos^2t\sin t)^2+(3a\sin^2t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\mathrm{d}t=6a.$$

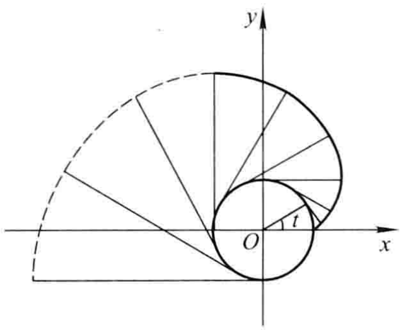

图 6 - 15

26. 将绕在圆(半径为 a)上的细线放开拉直,使细线与圆周始终相切(图6 - 15),细线端点画出的轨迹叫做圆的渐伸线,它的方程为

$$x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t).$$

算出这曲线上相应于 $0\leqslant t\leqslant\pi$ 的一段弧的长度.

解 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=at\cos t,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=at\sin t$,因此有

$$s=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}at\mathrm{d}t=\frac{a}{2}\pi^2.$$

27. 在摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ 上求分摆线第一拱成 1∶3 的点的坐标.

解 对应于摆线第一拱的参数 t 的范围为 $[0,2\pi]$,参数 t 在范围 $[0,t_0]$ 时摆线的长度为

$$s_0=\int_0^{t_0}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2t}\,\mathrm{d}t=a\int_0^{t_0}2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$
$$=4a\left(1-\cos\frac{t_0}{2}\right),$$

当 $t_0=2\pi$ 时,长度为 $8a$,故所求点对应的参数 t_0 满足 $4a\left(1-\cos\dfrac{t_0}{2}\right)=\dfrac{8a}{4}$,解得

$t_0=\dfrac{2\pi}{3}$，从而得到点的坐标为$\left(\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a,\dfrac{3a}{2}\right)$.

28. 求对数螺线 $\rho=e^{a\theta}$ 相应于 $0\leqslant\theta\leqslant\varphi$ 的一段弧长.

解　$s=\displaystyle\int_0^{\varphi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=\int_0^{\varphi}\sqrt{1+a^2}\,e^{a\theta}d\theta=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\varphi}-1)$.

29. 求曲线 $\rho\theta=1$ 相应于 $\dfrac{3}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{4}{3}$ 的一段弧长.

解
$$
\begin{aligned}
s&=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta^2}d\theta=-\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{1+\theta^2}\,d\left(\frac{1}{\theta}\right)\\
&=-\left[\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{\theta}\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}+\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}d\theta=\frac{5}{12}+\left[\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\\
&=\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}.
\end{aligned}
$$

30. 求心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 的全长.

解　$s=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=8a$.

习题 6－3　定积分在物理学上的应用

1. 由实验知道，弹簧在拉伸过程中，需要的力 F（单位：N）与伸长量 s（单位：cm）成正比，即

$$F=ks\ (k\text{ 是比例常数}).$$

如果把弹簧由原长拉伸 6 cm，计算所作的功.

解　$W=\displaystyle\int_0^6 ks\,ds=18k(\text{N}\cdot\text{cm})=0.18k(\text{J})$.

2. 直径为 20 cm、高为 80 cm 的圆筒内充满压强为 10 N/cm^2 的蒸汽. 设温度保持不变，要使蒸汽体积缩小一半，问需要作多少功？

解　由条件 $pV=k$ 为常数，故 $k=10\cdot100^2\cdot\pi\cdot0.1^2\cdot0.8=800\pi$. 设圆筒内高度减少 h m 时蒸汽的压强为 $p(h)$ N/m^2，则 $p(h)=\dfrac{k}{V}=\dfrac{800\pi}{(0.8-h)S}$，压力为 $P=p(h)S=\dfrac{800\pi}{0.8-h}$，因此作的功为

$$W=\int_0^{0.4}\frac{800\pi}{0.8-h}dh=800\pi\left[-\ln(0.8-h)\right]_0^{0.4}=800\pi\ln2\approx1\,742(\text{J}).$$

3. (1) 证明：把质量为 m 的物体从地球表面升高到 h 处所作的功是

$$W=\frac{mgRh}{R+h},$$

其中 g 是地面上的重力加速度，R 是地球的半径；

(2) 一个人造地球卫星的质量为 173 kg，在高于地面 630 km 处进入轨道. 问把这个卫星从地面送到 630 km 的高空处，克服地球引力要作多少功？已知 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$，地球半径 $R=6\,370$ km.

解　(1) 质量为 m 的物体与地球中心相距 x 时，引力为 $F=G\dfrac{mM}{x^2}$，根据条件 $mg=G\dfrac{mM}{R^2}$，因此有 $G=\dfrac{R^2g}{M}$，从而作的功为

$$W=\int_R^{R+h}\frac{mgR^2}{x^2}\mathrm{d}x=mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=\frac{mgRh}{R+h}.$$

(2) 作的功为 $W=\dfrac{mgRh}{R+h}=971\,973\approx 9.72\times 10^5(\mathrm{kJ})$.

4. 一物体按规律 $x=ct^3$ 作直线运动，介质的阻力与速度的平方成正比. 计算物体由 $x=0$ 移到 $x=a$ 时，克服介质阻力所作的功.

解　速度为 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3ct^2$，阻力为 $R=kv^2=9kc^2t^4$，由此得到

$$\mathrm{d}W=R\mathrm{d}x=27kc^3t^6\mathrm{d}t.$$

设当 $t=T$ 时，$x=a$，得 $T=\left(\dfrac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}$，故

$$W=\int_0^T 27kc^3t^6\mathrm{d}t=\frac{27kc^3}{7}T^7=\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}.$$

5. 用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比，在击第一次时，将铁钉击入木板 1 cm. 如果铁锤每次打击铁钉所作的功相等，问锤击第二次时，铁钉又击入多少？

解　设木板对铁钉的阻力为 R，则铁钉击入木板的深度为 h 时的阻力为

$$R=kh,\quad 其中\ k\ 为常数.$$

铁锤击第一次时所作的功为

$$W_1=\int_0^1 R\mathrm{d}h=\int_0^1 kh\mathrm{d}h=\frac{k}{2}.$$

设锤击第二次时，铁钉又击入 h_0 cm，则锤击第二次所作的功为

$$W_2=\int_1^{1+h_0}R\mathrm{d}h=\int_1^{1+h_0}kh\mathrm{d}h=\frac{k}{2}[(1+h_0)^2-1],$$

由条件 $W_1=W_2$ 得 $h_0=\sqrt{2}-1$.

6. 设一圆锥形贮水池，深 15 m，口径 20 m，盛满水，今以唧筒将水吸尽，问要作多少功？

解　以高度 h 为积分变量，变化范围为 $[0,15]$，对该区间内任一小区间 $[h,$

$h+\mathrm{d}h]$,体积为 $\pi\left(\frac{10}{15}h\right)^2\mathrm{d}h$,记 γ 为水的密度,则作功为

$$W=\int_0^{15}\frac{4}{9}\pi\gamma gh^2(15-h)\,\mathrm{d}h=1\,875\pi\gamma g$$

$$\approx 5.769\,75\times10^7(\mathrm{J}).$$

7. 有一闸门,它的形状和尺寸如图 6-16 所示,水面超过门顶 2 m. 求闸门上所受的水压力.

解　设水深 x m 的地方压强为 $p(x)$,则

$$p(x)=1\,000gx,$$

取 x 为积分变量,则 x 的变化范围为[2,5],对该区间内任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$,压力为

$$\mathrm{d}F=p(x)\,\mathrm{d}S=2p(x)\,\mathrm{d}x=2\,000gx\mathrm{d}x,$$

因此闸门上所受的水压力为

$$F=\int_2^5 2\,000gx\mathrm{d}x=1\,000g[x^2]_2^5=21\,000g(\mathrm{N})\approx205.8(\mathrm{kN}).$$

8. 洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体,尺寸如图 6-17 所示. 当水箱装满水时,计算水箱的一个侧面所受的压力.

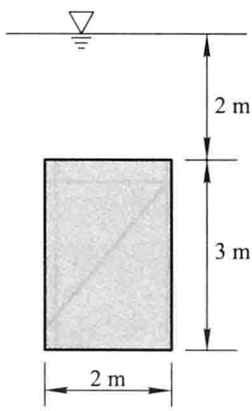

图 6-16

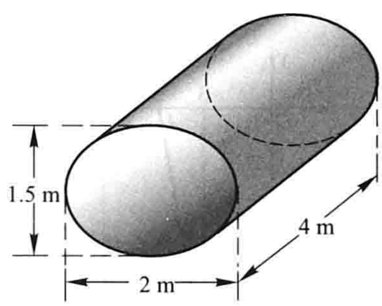

图 6-17

解　以侧面的椭圆长轴为 x 轴,短轴为 y 轴设立坐标系,则该椭圆的方程为 $x^2+\frac{y^2}{0.75^2}=1$,取 y 为积分变量,则 y 的变化范围为 $[-0.75,0.75]$,对该区间内任一小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$,该小区间相应的水深为 $0.75-y$,相应面积为

$$\mathrm{d}S=2\sqrt{1-\frac{y^2}{0.75^2}}\,\mathrm{d}y,$$

得到该小区间相应的压力

$$\mathrm{d}F=1\,000g(0.75-y)\,\mathrm{d}S=2\,000g(0.75-y)\sqrt{1-\frac{y^2}{0.75^2}}\,\mathrm{d}y,$$

因此压力为

$$F=\int_{-0.75}^{0.75}2\,000g(0.75-y)\sqrt{1-\frac{y^2}{0.75^2}}\,dy\approx 17\,318(\mathrm{N})\approx 17.3(\mathrm{kN}).$$

9. 有一等腰梯形闸门,它的两条底边各长 10 m 和 6 m,高为 20 m,较长的底边与水面相齐. 计算闸门的一侧所受的水压力.

解　如图 6－18 建立坐标系,则过 A、B 两点的直线方程为 $y=10x-50$. 取 y 为积分变量,y 的变化范围为$[-20,0]$,对应小区间$[y,y+dy]$的面积近似值为 $2xdy=\left(\frac{y}{5}+10\right)dy$,$\gamma$ 表示水的密度,因此水压力为

$$P=\int_{-20}^{0}\left(\frac{y}{5}+10\right)(-y)\gamma g dy=1.437\,3\times 10^7(\mathrm{N})=14\,373(\mathrm{kN}).$$

10. 一底为 8 cm、高为 6 cm 的等腰三角形片,铅直地沉没在水中,顶在上,底在下且与水面平行,而顶离水面 3 cm,试求它每面所受的压力.

解　如图 6－19 建立坐标系,取三角形顶点为原点,取积分变量为 x,则 x 的变化范围为$[0,0.06]$,易知 B 的坐标为$(0.06,0.04)$,因此 OB 的方程为 $y=\frac{2}{3}x$,故对应小区间$[x,x+dx]$的面积近似值为

$$dS=2\cdot\frac{2}{3}x\cdot dx=\frac{4}{3}xdx.$$

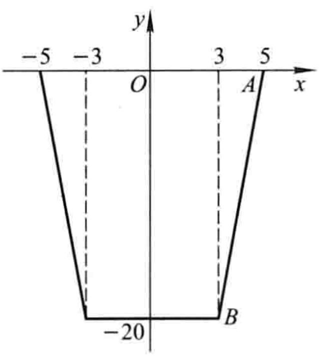

图 6－18

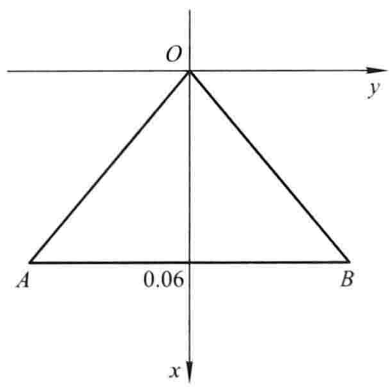

图 6－19

记 γ 为水的密度,则在 x 处的水压强为

$$p=\gamma g(x+0.03)=1\,000g(x+0.03),$$

故压力为

$$F=\int_0^{0.06}1\,000g(x+0.03)\cdot\frac{4}{3}xdx=0.168g\approx 1.65(\mathrm{N}).$$

11. 设有一长度为 l、线密度为 μ 的均匀细直棒,在与棒的一端垂直距离为 a 单位处有一质量为 m 的质点 M,试求这细棒对质点 M 的引力.

解　如图 6 - 20 设立坐标系，取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 $[0,l]$，对应小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 与质点 M 的引力的大小的近似值为

$$\mathrm{d}F=G\frac{m\mu\mathrm{d}x}{r^2},$$

其中 $r=\sqrt{a^2+x^2}$，把该力分解，得到 x 轴、y 轴方向的分量分别为

$$\mathrm{d}F_x=-\frac{a}{r}\mathrm{d}F=-G\frac{am\mu}{(a^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}F_y=\frac{x}{r}\mathrm{d}F=G\frac{m\mu x}{(a^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x,$$

因此

$$F_x=\int_0^l -G\frac{am\mu}{(a^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=a\tan t}-G\frac{m\mu}{a}\int_0^{\arctan\frac{l}{a}}\cos t\mathrm{d}t=-\frac{Gm\mu l}{a\sqrt{a^2+l^2}},$$

$$F_y=\int_0^l G\frac{m\mu x}{(a^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\left[-G\frac{m\mu}{(a^2+x^2)^{1/2}}\right]_0^l=m\mu G\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}}\right).$$

12. 设有一半径为 R、中心角为 φ 的圆弧形细棒，其线密度为常数 μ. 在圆心处有一质量为 m 的质点 M，试求这细棒对质点 M 的引力.

解　如图 6 - 21 建立坐标系，则相应小区间 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 的弧长为 $R\mathrm{d}\theta$，根据对称性可知所求的铅直方向引力分量为零，水平方向的引力分量为

$$F_x=\int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\cos\theta\frac{Gm\mu R\mathrm{d}\theta}{R^2}=\frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

故所求引力的大小为 $\frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}$，方向为 M 指向圆弧的中心.

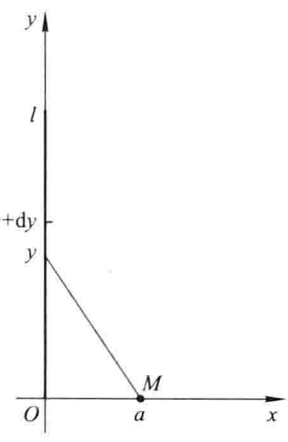

图 6 - 20

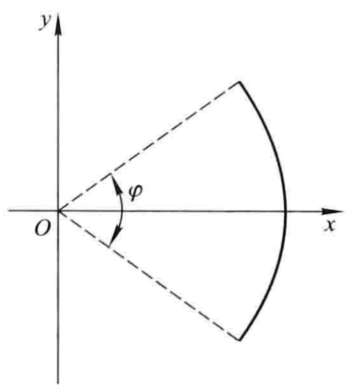

图 6 - 21

总习题六

1. 填空：

（1）曲线 $y=x^3-5x^2+6x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$__________.

(2) 曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 上相应于 $1\leqslant x\leqslant 3$ 的一段弧的长度 $s=$__________.

解　(1) 令 $x^3-5x^2+6x=0$,解得 $x=0,2,3$.

当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时,$y\geqslant 0$;当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时,$y\leqslant 0$. 故

$$A=\int_0^2(x^3-5x^2+6x)\,\mathrm{d}x-\int_2^3(x^3-5x^2+6x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^2-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_2^3=\frac{37}{12}.$$

(2) $s=\int_1^3\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\left[\sqrt{x}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^3=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}.$

2. 以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

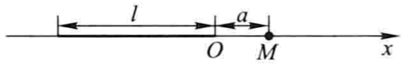

图 6-22

(1) 设 x 轴上有一长度为 l、线密度为常数 μ 的细棒,在细棒右端的距离为 a 处有一质量为 m 的质点 M(图 6-22),已知万有引力常量为 G,则质点 M 和细棒之间的引力的大小为(　　).

(A) $\int_{-l}^0\frac{Gm\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^l\frac{Gm\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$

(C) $2\int_{-\frac{l}{2}}^0\frac{Gm\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$　　(D) $2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{Gm\mu}{(a-x)^2}\mathrm{d}x$

(2) 设在区间 $[a,b]$ 上,$f(x)>0$,$f'(x)>0$,$f''(x)<0$. 令 $A_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,$A_2=f(a)(b-a)$,$A_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$,则有(　　).

(A) $A_1<A_2<A_3$　　(B) $A_2<A_1<A_3$

(C) $A_3<A_1<A_2$　　(D) $A_2<A_3<A_1$

解　(1) 选(A).

(2) 解法一　从几何意义判断:因为 $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加. 又因 $f''(x)<0$,所以曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上向上凸,如图 6-23 所示,矩形面积 < 梯形面积 < 曲边梯形面积,故选(D).

解法二　证 $A_2<A_3$. 因 $f'(x)>0$,故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加,得 $f(b)>f(a)$,从而

$$A_3-A_2=(b-a)\frac{f(b)-f(a)}{2}>0,$$

即 $A_3>A_2$.

证 $A_1>A_3$. 联结点 $(a,f(a))$ 与点 $(b,f(b))$ 的直线方程为

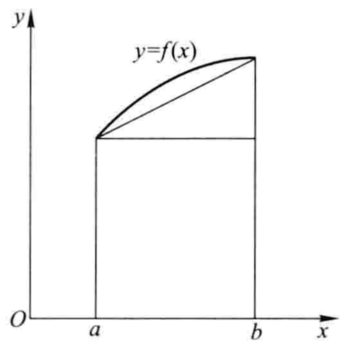

图 6－23

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

因为 $f''(x)<0$，所以曲线 $y=f(x)$ 是向上凸的，从而有

$$f(x)>f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),\quad x\in(a,b).$$

两边积分，得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a),$$

即 $A_1>A_3$.

3. 一金属棒长 3 m，离棒左端 x m 处的线密度 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$(kg/m). 问 x 为何值时，$[0,x]$ 一段的质量为全棒质量的一半.

解　$[0,x]$ 一段的质量为

$$m(x)=\int_0^x \rho(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x=2(\sqrt{1+x}-1),$$

总质量为 $m(3)=2$，要满足 $m(x)=\frac{1}{2}m(3)$，求得 $x=\frac{5}{4}$(m).

4. 求由曲线 $\rho=a\sin\theta$ 及 $\rho=a(\cos\theta+\sin\theta)$ $(a>0)$ 所围图形公共部分的面积.

解　首先求出两曲线的交点，联立方程 $\begin{cases}\rho=a\sin\theta,\\ \rho=a(\cos\theta+\sin\theta),\end{cases}$ 解得交点坐标为 $\left(a,\frac{\pi}{2}\right)$，注意到当 $\theta=0$ 时，$\rho=a\sin\theta=0$，当 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 时，$\rho=a(\cos\theta+\sin\theta)=0$，故两曲线分别过 $(0,0)$ 和 $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$，即都过极点（见图 6－24），因此所求面积为

$$A=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{2}[a(\cos\theta+\sin\theta)]^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(1+\sin 2\theta)\,\mathrm{d}\theta+\frac{\pi a^2}{8}$$

$$=\frac{a^2}{4}(\pi-1).$$

5. 如图 6－25 所示,从下到上依次有三条曲线:$y=x^2$,$y=2x^2$ 和 C,假设对曲线 $y=2x^2$ 上的任一点 P,所对应的面积 A 和 B 恒相等,求曲线 C 的方程.

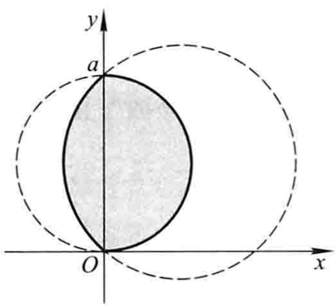

图 6－24

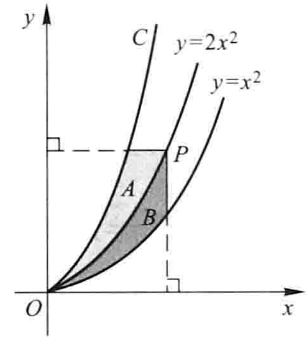

图 6－25

解　设曲线 C 的方程为 $x=f(y)$,P 点坐标为$\left(\sqrt{\frac{y}{2}},y\right)$,则

$$A=\int_0^y\left[\sqrt{\frac{y}{2}}-f(y)\right]\mathrm{d}y,\quad B=\int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}}(2x^2-x^2)\,\mathrm{d}x,$$

根据条件,对任意 $y\geqslant 0$ 都有

$$\int_0^y\left[\sqrt{\frac{y}{2}}-f(y)\right]\mathrm{d}y=\int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}}(2x^2-x^2)\,\mathrm{d}x,$$

上式对 y 求导,得

$$\sqrt{\frac{y}{2}}-f(y)=\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2y}},$$

因此

$$f(y)=\frac{3\sqrt{2y}}{8},$$

即曲线 C 为 $x=\frac{3\sqrt{2y}}{8}$,或 $y=\frac{32}{9}x^2(x\geqslant 0)$.

6. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点(0,0),且当 $x\in[0,1]$ 时,$y\geqslant 0$. 试确定 a,b,c 的值,使得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1$,$y=0$ 所围图形的面积为$\frac{4}{9}$,且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

解　由已知条件:抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过点(0,0),可得 $c=0$. 抛物线

$y=ax^2+bx+c$ 与直线 $x=1,y=0$ 所围图形的面积为

$$S=\int_0^1 (ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2},$$

从而得到$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{4}{9}$,即 $a=\frac{4}{3}-\frac{3}{2}b$. 该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V=\int_0^1 \pi(ax^2+bx)^2\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3}\right)=\frac{\pi}{30}(b-2)^2+\frac{2}{9}\pi,$$

因此当 $b=2$ 时体积为最小,此时 $a=-\frac{5}{3}$,抛物线为

$$y=-\frac{5}{3}x^2+2x=\frac{x}{3}(6-5x),$$

在区间[0,1]上,此抛物线满足 $y\geqslant 0$,故所求解:$a=-\frac{5}{3},b=2,c=0$ 符合题目要求.

7. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A;(2) 求 D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

解　(1) 设切点的横坐标为 x_0,则曲线 $y=\ln x$ 在点$(x_0,\ln x_0)$处的切线方程是

$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$

由该切线过原点知 $y=\ln x_0-1=0$,从而 $x_0=\mathrm{e}$,所以该切线的方程是

$$y=\frac{1}{\mathrm{e}}x.$$

平面图形 D 的面积

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}-1.$$

(2) 切线 $y=\frac{x}{\mathrm{e}}$与 x 轴及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围成的三角形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得的圆锥体的体积为

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}^2.$$

曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围成的图形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得的旋转体的体积为

$$V_2=\int_0^1\pi(\mathrm{e}-\mathrm{e}^y)^2\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}(-\mathrm{e}^2+4\mathrm{e}-1),$$

因此,所求旋转体的体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}(5\mathrm{e}^2-12\mathrm{e}+3).$$

8. 求由曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$,直线 $x=4$ 及 x 轴所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解　如图 6-26,取 x 为积分变量,则 x 的变化范围为[0,4],因此体积为

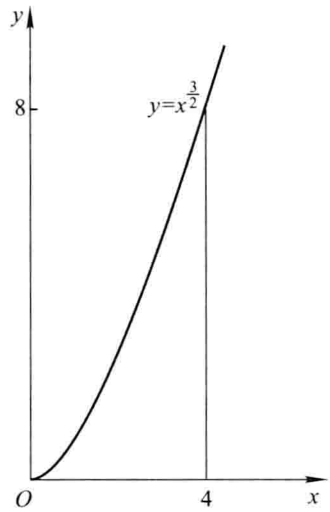

图 6-26

$$V=\int_0^4 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^4 2\pi x^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{512}{7}\pi.$$

9. 求圆盘$(x-2)^2+y^2\leqslant 1$绕y轴旋转而成的旋转体的体积.

解　这是一个圆环面,可以看作由图形$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2+\sqrt{1-y^2},\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$绕$y$轴旋转所得的立体减去由图形$\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2-\sqrt{1-y^2},\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$绕$y$轴旋转所得的立体,因此

$$\begin{aligned}V&=\int_{-1}^{1}\pi(2+\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}y-\int_{-1}^{1}\pi(2-\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}y=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y\\&=8\pi\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y\right]_{-1}^{1}=4\pi^2.\end{aligned}$$

10. 求抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$被圆$x^2+y^2=3$所截下的有限部分的弧长.

解　联立两曲线方程$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x^2,\\x^2+y^2=3,\end{cases}$得到两曲线的交点为$(-\sqrt{2},1)$,$(\sqrt{2},1)$,因此所求弧长为

$$\begin{aligned}s&=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\\&=\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

11. 半径为r的球沉入水中,球的上部与水面相切,球的密度与水相同,现将球从水中取出,需作多少功?

解 取 x 轴的正向铅直向上，沉入水中的球心为原点，并取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[-r,r]$. 对应区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的球的薄片的体积为

$$\mathrm{d}V=\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2\mathrm{d}x=\pi(r^2-x^2)\mathrm{d}x,$$

由于该部分在水面以下重力与浮力的合力为零（因为球的密度与水的密度相同），在水面以上移动距离为 $r+x$，故作功为

$$\begin{aligned}W&=\int_{-r}^{r}g\pi(r^2-x^2)(r+x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-r}^{r}g\pi r(r^2-x^2)\mathrm{d}x+\int_{-r}^{r}g\pi x(r^2-x^2)\mathrm{d}x\\&=2\pi gr\int_0^r(r^2-x^2)\ \mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi gr^4.\end{aligned}$$

12. 边长为 a 和 b 的矩形薄板，与液面成 α 角斜沉于液体内，长边平行于液面而位于深 h 处，设 $a>b$，液体的密度为 ρ，试求薄板每面所受的压力.

解 如图 6－27，记 x 为薄板上点到近水面的长边的距离，取 x 为积分变量，则 x 的变化范围为 $[0,b]$，对应小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，压强为 $\rho g(h+x\sin\alpha)$，面积为 $a\mathrm{d}x$，因此压力为

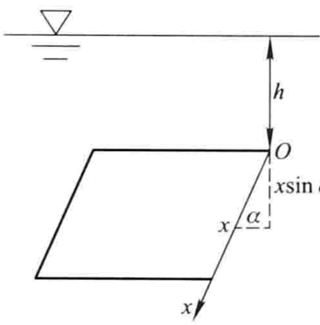

图 6－27

$$F=\int_0^b\rho ga(h+x\sin\alpha)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\rho gab(2h+b\sin\alpha).$$

13. 设星形线 $x=a\cos^3t,y=a\sin^3t$ 上每一点处的线密度的大小等于该点到原点距离的立方，在原点 O 处有一单位质点，求星形线的第一象限的弧段对这质点的引力.

解 取参数 t 为积分变量，变化范围为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，对应区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 的弧长为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t=3a\cos t\sin t\mathrm{d}t,$$

该弧段质量为 $(a^2\cos^6t+a^2\sin^6t)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}s=3a^4\cos t\sin t(\cos^6t+\sin^6t)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t$，该弧段与质点的引力大小为

$$G\frac{3a^4\cos t\sin t(\cos^6t+\sin^6t)^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}t}{a^2\cos^6t+a^2\sin^6t}=3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6t+\sin^6t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t,$$

因此曲线弧对这质点引力的水平方向分量、铅直方向分量分别为

$$F_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos^3 t}{\sqrt{a^2\cos^6 t+a^2\sin^6 t}}3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6 t+\sin^6 t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3Ga^2\cos^4 t\sin t\mathrm{d}t=3Ga^2\left[-\frac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{5}Ga^2,$$

$$F_y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\sin^3 t}{\sqrt{a^2\cos^6 t+a^2\sin^6 t}}3Ga^2\cos t\sin t(\cos^6 t+\sin^6 t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3Ga^2\cos t\sin^4 t\mathrm{d}t=3Ga^2\left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{5}Ga^2,$$

因此所求引力 $\boldsymbol{F}=\left(\frac{3}{5}Ga^2,\frac{3}{5}Ga^2\right)$,即大小为$\frac{3\sqrt{2}}{5}G\,a^2$,方向角为$\frac{\pi}{4}$.

14. 某建筑工地打地基时,需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打,都要克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为 $k,k>0$). 汽锤第一次击打将桩打进地下 a m. 根据设计方案,要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 $r(0<r<1)$. 问:

(1) 汽锤击打桩 3 次后,可将桩打进地下多深?

(2) 若击打次数不限,则汽锤至多能将桩打进地下多深?

解 (1) 设第 n 次击打后,桩被打进地下 x_n,第 n 次击打时,汽锤克服阻力所作的功为 $W_n(n\in\mathbf{N}^*)$. 由题设,当桩被打进地下的深度为 x 时,土层对桩的阻力的大小为 kx,所以

$$W_1=\int_0^{x_1}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}x_1^2=\frac{k}{2}a^2,$$

$$W_2=\int_{x_1}^{x_2}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2)=\frac{k}{2}(x_2^2-a^2).$$

由 $W_2=rW_1$,可得

$$x_2^2-a^2=ra^2,$$

即 $x_2^2=(1+r)a^2$.

$$W_3=\int_{x_2}^{x_3}kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_3^2-x_2^2)=\frac{k}{2}[x_3^2-(1+r)a^2],$$

由 $W_3=rW_2=r^2W_1$,可得

$$x_3^2-(1+r)a^2=r^2a^2,$$

从而

$$x_3=\sqrt{1+r+r^2}a,$$

即汽锤击打桩 3 次后,可将桩打进地下$\sqrt{1+r+r^2}a$ m.

（2）$W_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} kx\mathrm{d}x = \frac{k}{2}(x_n^2 - x_{n-1}^2)$，由 $W_n = rW_{n-1}$，可得

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = r(x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2),$$

由(1)知 $x_2^2 - x_1^2 = ra^2$，因此 $x_n^2 - x_{n-1}^2 = r^{n-1}a^2$，从而由归纳法，可得

$$x_n = \sqrt{1 + r + \cdots + r^{n-1}}\,a,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a\sqrt{\frac{1-r^n}{1-r}} = \frac{a}{\sqrt{1-r}},$$

即若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下 $\frac{a}{\sqrt{1-r}}$ m.