高数 I 复习题

一、填空题（注：期末考试中，第一大题是单选题）

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}=$____________.

2、设 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^n}$，则 y 有________个间断点.

3、设 $f(1)=0$，$f'(1)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\cdot\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}=$________.

4、设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$________.

5、当 $x\to 0$ 时，如果 $a=$________，那么 $x-(2+a\cos x)\sin x$ 是 x 的高阶无穷小.

6、$\int_{-1}^{1}\ln(x+\sqrt{x^2+4})dx=$________.

7、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^{x^2}\sin t^2 \mathrm{d}t}{\int_x^0 t[\ln(1+t^2)]^2 dt}=$________.

8、下面有三个命题，填出其中所有真命题的序号________.

(1) $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $y=f(|x|)$ 在 $x=0$ 处可导；

(2) $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $y=f(x^2)$ 在 $x=0$ 处可导；

(3) $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上可导且 $f'(0)=1$，则 $\exists\delta>0$，使得 $(-\delta,\delta)$ 上 $f'(x)>0$.

二、计算题

1、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{\cos(\sin x)-\cos x}$.

2、求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$

3、设函数 $y=f(x)$ 由方程 $x=\int_x^y e^{-t^2}dt$ 所确定，求 $f'(0)$.

4、讨论函数 $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$ 的单调区间和极值以及凹凸性和拐点.

5、计算：$\int\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx$

6、计算 $\int_0^1\dfrac{(1+x)^3}{(1+x^2)^2}dx$.

7、求 $x^2-y^2=1$ 和 $x=\sqrt{2}$ 所围成封闭图形的面积.

8、求由曲线 $(x-1)^2+y^2=1$ 与绕 y 轴旋转得到的旋转体体积.

三、证明题

1、若 $x>0$，求证：$(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a-h,a+h]$ 上有 4 阶导数，且 $f(a-h)=f(a)=f(a+h)$，$|f^{(4)}(x)|\le A$. 证明：$|f^{(4)}(a)|\le\dfrac{Ah^2}{12}$.