解：设 $g(x)=e^{2021x}$

$g'(x)=$

1、(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，a,b 是 $f(x)=0$ 的两个相异实根．求证：$2021f(x)+f'(x)=0$ 在 (a,b) 上至少有一个实根．设 $g(x)=e^{2021x}$

（2）$nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$．设 $g(x)=x^n f(x)$.

（3）$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$. 设 $g(x)=xf(x)$.

（4）设 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上可导，且 $f(1)=0, f(e)=1$，证明方程 $xf'(x)-1=0$ 在 $(1,e)$ 内至少有一实根.

2．函数 $y=\sin x$ 的 3 阶麦克劳林公式为________________．（两种余项形式均可）

3．写出 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $x_0=\dfrac{\pi}{4}$ 处的拉格朗日型余项及佩亚诺型余项的二阶泰勒公式.

由 $f(\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{1}{2}\ln 2$，$f'(\dfrac{\pi}{4})=\cot\dfrac{\pi}{4}=1$，$f''(\dfrac{\pi}{4})=-\csc^2\dfrac{\pi}{4}=-2$，

$f'''(x)=2\csc^2 x\cdot\cot x \quad (0<x<\pi)$，

得 $f(x)=\ln\sin x$ 在 $x_0=\dfrac{\pi}{4}$ 处拉格朗日型余项的二阶泰勒公式为

$\ln\sin x=-\dfrac{1}{2}\ln 2+(x-\dfrac{\pi}{4})-(x-\dfrac{\pi}{4})^2+\dfrac{\csc^2\xi\cdot\cot\xi}{3}(x-\dfrac{\pi}{4})^3$，其中 ξ 介于 x 与 $\dfrac{\pi}{4}$ 之间；

佩亚诺型余项的二阶泰勒公式为

$$\ln\sin x=-\frac{1}{2}\ln 2+(x-\frac{\pi}{4})-(x-\frac{\pi}{4})^2+o\left((x-\frac{\pi}{4})^2\right).$$

4．求 $f(x)=2x^3-6x$ 在闭区间 $[-1,2]$ 上的最大值与最小值.

$f'(x)=6x^2-6=0\Rightarrow x=\pm1$

$f(-1)=4, f(1)=-4, f(2)=4$

5．求 $f(x)=x^2e^{-x}$ 的单调区间及极值、其图形的凹凸区间及拐点.

解：$D_f=(-\infty,+\infty)$；　$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=-xe^{-x}(x-2)$ 的零点为 0 和 2；

$f''(x)=2e^{-x}-4xe^{-x}+x^2e^{-x}=e^{-x}(x^2-4x+2)\ =e^{-x}(x-(2+\sqrt{2})(x-(2-\sqrt{2}))$

的零点为 $2\pm\sqrt{2}$.

列表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2-\sqrt{2})$	$2-\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{2},2)$	2	$(2,2+\sqrt{2})$	$2+\sqrt{2}$	$(2+\sqrt{2},+\infty)$
$f'(x)$	－	0	＋	＋	＋	0	－	－	－
$f''(x)$	＋	＋	＋	0	－	－	－	0	＋
$f(x)$	减，凹	极值	增，凹	拐点	增，凸	极值	减，凸	拐点	减，凹

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0]$、$[2,+\infty)$ 上单调减少，在 $[0,2]$ 上单调增加；

其图形在 $(-\infty,2-\sqrt{2}]$、$[2+\sqrt{2},+\infty)$ 上是凹的，在 $[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$ 上是凸的，拐点为 $(2-\sqrt{2},(6-4\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}})$ 和 $(2+\sqrt{2},(6+4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}})$，极小值 0，极大值 $4e^{-2}$.

6、讨论函数 $y=1+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$ 的单调区间和极值以及凹凸性和拐点.（课本）

7、证明：当 $x>1$ 时，$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

8. 证明不等式：$\tan x > x+\dfrac{1}{3}x^3 (0<x<\dfrac{\pi}{2})$

9、证明不等式 $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$.（有 $x-y$）的考虑拉氏定理。

10. 设 $x>y>0$，证明：$x^5-y^5<5x^4(x-y)$.

11. 利用凹凸性证明 $\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}} (x\ne y)$

解：由题意可知 $f(x)=e^x$ 为凹函数

$f(x)$ 上，两点连线的中点的纵坐标大于所在横坐标对应的函数值.

即 $\dfrac{f(x)+f(y)}{2}>f(\dfrac{x+y}{2})$.

即：$\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x\ne y)$ 得证.