2021级《高等数学II》期末考试题型

一、选择题（每题4分，共20分）

1、2、3、4、5

二、填空题（每题3分，共30分）

1、2、3、4、5、6、7、8、9、10

三、计算题（每题5分，共30分）

1、2、3、4、5、6

四、解答题（每题10分，共20分）

1、2

高等数学II期末复习

第五、六章

一、定积分定义与性质

(一)定义： 课本271页总习题五4

1、 $\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$

2、 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

3、 $\int_a^b 1\cdot dx=\int_a^b dx=b-a$

4、如果在区间$[a,b]$上$f(x) \le g(x)$， 习题5-1 13

则$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \qquad (a < b)$

5、设M及m分别是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值和最小值

习题5-1 10

则 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

6、如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，

则在积分区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，

使$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \qquad (a \le \xi \le b)$

二、定积分计算

1、变限函数求导

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上具有导数，且它的导数是 $\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\qquad(a\le x\le b)$

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)dt=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$$

课本243页例7、8

习题5-2　1、2、3、4、5、11

2、定积分换元法　　课本247页例1、2、3、4、8、9

3、定积分分部积分法　　课本253页例10、11、12

习题5-2 8、　习题5-3 1、7

4、反常积分

（1）无穷限的反常积分 课本258页例1、2、3　　习题5-4

（2）无界函数的反常积分 课本260页例4、5、6、7

三、定积分的应用

1、平面图形的面积

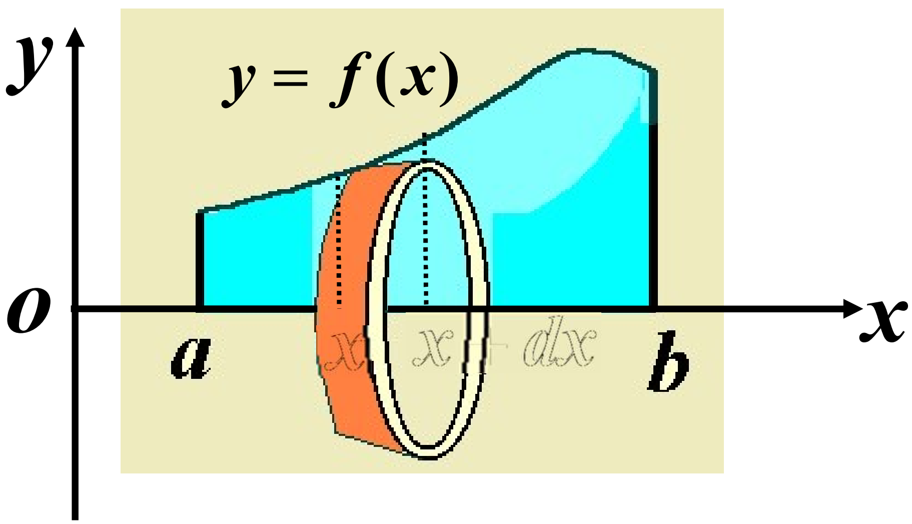
（1）直角坐标情形 课本277页例1、2　习题6-2 1、2、3、4、

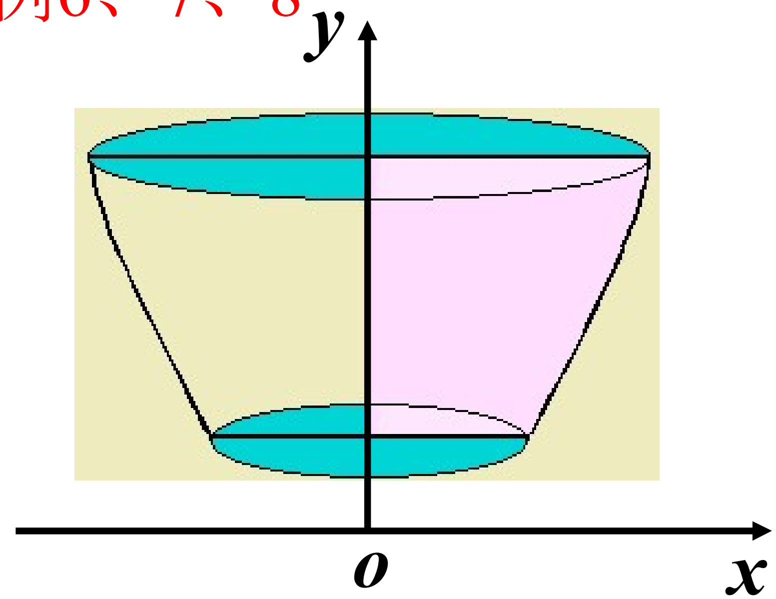
（2）参数方程情形 课本277页例3　习题6-2 5（2）、6、

（3）极坐标情形 课本277页 例4、5 习题6-2 5(1)(3)、7、8

2、旋转体的体积

课本280页 例6、7、8





$$\boxed{V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx}$$

$$\boxed{V=\int_c^d \pi\varphi^2(y)\,dy}$$

习题6-2 12、13、14、15

3、平面曲线的弧长

（1）直角坐标情形 课本285页例11 习题6-2 22、23、24

曲线弧为 $y=f(x),(a\le x\le b)$ $\boxed{s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx.}$

（2）参数方程情形 课本285页例12

曲线弧为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, $(\alpha\le t\le\beta)$ 习题6-2 25、27

$$\boxed{s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.}$$

（3）极坐标情形 课本285页例13

曲线弧为 $r=r(\theta)$ $(\alpha\le\theta\le\beta)$

$$\boxed{s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta.}$$

习题6-2 28、29、30

第八章

一、向量的概念、运算、坐标

加法、减法、数乘、数量积、向量积、混合积

若$\vec{a} \neq \vec{0}$, 则$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a}$

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$,

若$\vec{a} \neq \vec{0}$, 则$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z}$

二、向量的模、方向角、方向余弦、投影

$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x,y,z)$

模：$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

投影：$\mathrm{Pr}\,j_u\vec{a}=|\vec{a}|\cos(\vec{a},u)$

$$\mathrm{Pr}\,j_x\vec{a}=x$$

$$\mathrm{Pr}\,j_y\vec{a}=y$$

$$\mathrm{Pr}\,j_z\vec{a}=z$$

二、数量积、向量积、混合积　　习题8-2

1、数量积

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$$

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$$

若$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

2、向量积

大小：$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$

课本19页例4

方向：$\vec{a}\times\vec{b}$既垂直于$\vec{a}$，又垂直于$\vec{b}$，且$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{a}\times\vec{b}$成右手系

$$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0} \qquad \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

若$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

3、混合积

习题8-2 1、2、3、6、7、9、10

三、平面和直线

1、平面方程 课本25页例1、2、3、6

习题8-3：1、2、3、6、8

2、直线方程 课本31页例1、3、4、5、6、7

习题8-4：1、2、3、4、6、7、8、10、11、12、13、15

3、夹角

两平面的夹角θ：$\cos\theta = |\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})|$ 课本28页例5

习题8-3：5

两直线的夹角θ：$\cos\theta = |\cos(\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2})|$ 课本31页例2

习题8-4：5

平面与直线的夹角φ：$\sin\varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{s})|$ 习题8-4：9

4、平面束

课本35页例7

习题8-4：15

5、点到平面的距离:

$$d=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

习题8-3： 9

四、空间曲面和空间曲线

1、空间曲面

(1)旋转曲面　　**课本38页例3、4**

习题8-5：5、6、7

(2)柱面

(3)八类曲面

2、空间曲线在坐标面上的投影

课本50页例4、例5　　习题8-6

总习题八

第九章

一、多元函数的极限

课本61页例5、7、8　　习题9-1　6、7

二、偏导数、全微分、方向导数、梯度

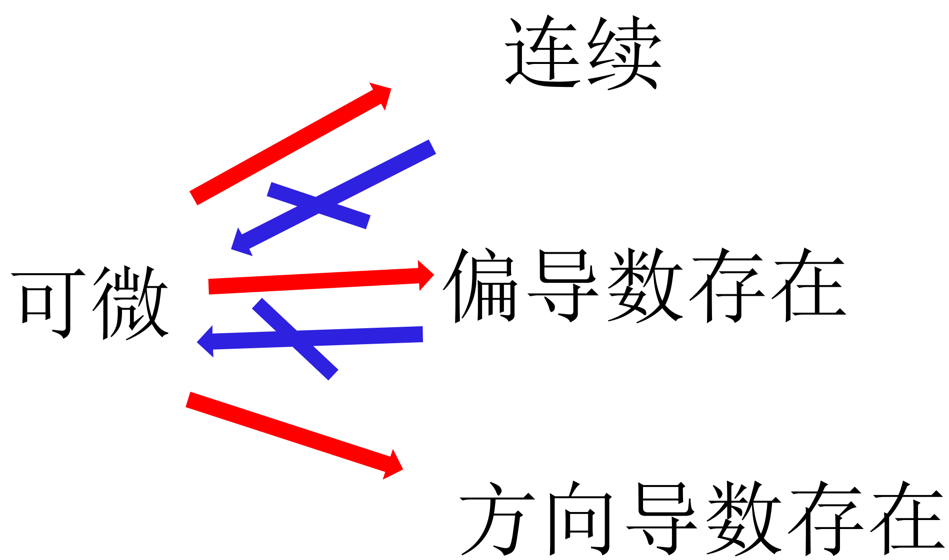
1、函数求偏导数

课本67页例1、2、3、4、6

习题9-2

总习题九

2、全微分、方向导数、梯度



(1)全微分 课本75页例1、2、3　习题9-3：1、2、3、4、5

$$df(x,y)=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$$

$$df(x,y,z)=f_x(x,y,z)dx+f_y(x,y,z)dy+f(x,y,z)dz$$

(2)方向导数 课本105页例1、2

习题9-7：1、2、3、4、5、6、7

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial l} = f_x(x,y)\cos\alpha + f_y(x,y)\cos\beta$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial l} = f_x(x,y,z)\cos\alpha + f_y(x,y,z)\cos\beta + f_z(x,y,z)\cos\gamma$$

(3)梯度 课本108页例3、4、5、6　　习题9-7：8、10

$$grad f(x,y) = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j}$$

$$grad f(x,y,z) = f_x(x,y,z)\vec{i} + f_y(x,y,z)\vec{j} + f_z(x,y,z)\vec{k}$$

四、多元复合函数的求导法则、隐函数求导

1、多元复合函数的求导法则

课本81页例4　　习题9-4 8、9、10、11、12

2、隐函数求导

(1)一个方程的情形

课本88页例2　　习题9-5：1、2、3、4、5、6、7、8、9

(2)方程组的情形

课本90页例3　　习题9-5：10、11

五、曲线的切线与法平面、曲面的切平面与法线 习题9-2

1、曲线的切线与法平面

(1)参数方程的曲线 $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$ （t为参数）

$M(x_0, y_0, z_0)$

切向量 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

课本97页例4

切线方程：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$ 习题9-6 4、7

法平面方程：

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

(2)一般方程的曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ $M(x_0,y_0,z_0)$

课本99页例5

习题9-6　5、6

$$\text{切向量}\vec{T}=\left(1,\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0,z_0)},\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\right)$$

$$\text{切向量}\vec{T}=\left(\left.\frac{dx}{dy}\right|_{(x_0,y_0,z_0)},1,\left.\frac{dz}{dy}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\right)$$

$$\text{切向量}\vec{T}=\left(\left.\frac{dx}{dz}\right|_{(x_0,y_0,z_0)},\left.\frac{dy}{dz}\right|_{(x_0,y_0,z_0)},1\right)$$

2、曲面的切平面与法线 习题9-6 7，8，9，10，11，12

(1)曲面方程$F(x,y,z)=0$ 课本97页例6

法向量$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$

切平面方程：

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程：$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

(2)曲面方程$z=f(x,y)$ 课本97页例7

法向量$\vec{n}=\pm(f_x(x_0,y_0,z_0),f_y(x_0,y_0,z_0),-1)$

六、极值

1、无条件极值

课本113页例4

习题9-8　2、3、4

2、条件极值

课本118页 例7、8

习题9-8　11、12、13

总习题九　17、18

第十章

一、二重积分定义与性质

1、$\iint\limits_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma=\alpha\iint\limits_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$

2、$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$(其中$D$分为$D_1$和$D_2$)

3、$\iint\limits_D 1d\sigma=D$的面积

4、如果在D上，$f(x,\ y)\le g(x,y)$，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\le\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$

习题10-1　5

5、设M及m分别是函数$f(x,y)$在D上的最大值和最小值

则有$m\sigma \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma$　　习题10-1　6

6、　设函数$f(x,y)$在D上连续，则在D上至少存在一点(ξ,η),使得

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

二、二重积分的计算 习题10-2 、总习题十

1、直角坐标系下 课本144页例1、例2、例3 、例4

2、极坐标系下 课本151页例6

3、交换积分次序

习题9-2 6、12、13

总习题十 2(3)、4、5

4、对称性

总习题十 2(2)、3(4)

三、三重积分的计算　　习题10-3　总习题十：2、8、9

1、投影法　　课本162页例1

2、截面法　　课本163页例2

3、柱坐标　　课本164页例3

4、球坐标　　课本166页例4

4、对称性　　总习题十 2(1)、9(2)

四、曲面的面积、空间立体的体积

1、曲面的面积

课本170页例1

习题10-4　　1、2、3

2、空间立体的体积

课本146页例4、151页例6、166页例4

习题10-2：8、9、10、17、18

习题10-3：12、13、14

总习题十

第十二章

一、级数概念与性质

习题12-1：2、3

课本**253**页例**1、2、3**

1、定义

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \qquad \lim_{n\to\infty} s_n \text{不存在} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散}$$

2、性质

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} k u_n \text{收敛}$$

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛、}\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) \text{收敛}$$

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \Leftrightarrow \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n \text{收敛} \qquad (k \geq 1)$$

(4)收敛级数加括号后仍收敛，且和不变。

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

3、两个参考级数

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} aq^n : \begin{matrix} |q| < 1, \text{级数收敛} \\ |q| \geq 1, \text{级数发散} \end{matrix}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p} : \begin{matrix} p > 1, \text{级数收敛} \\ p \leq 1, \text{级数发散} \end{matrix}}$$

二、级数的敛散性

习题12-2：1、2、3、4、5

1、正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad u_n \geq 0$

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\Leftrightarrow \{s_n\}$有界

(1)比较审敛法　课本261页例3、7、8　习题12-2　1、

定理、推论、极限形式

(2)比值审敛法　课本263页例4、5　习题12-2　2、

$$设\sum_{n=1}^{\infty} u_n 是正项级数，则 \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho(有限或+\infty)\begin{cases}\rho<1, 收敛\\ \rho=1, 不定\\ \rho>1, 发散\end{cases}$$

(3)根值审敛法　课本263页例6　习题12-2　3、

$$设\sum_{n=1}^{\infty} u_n 是正项级数, 则 \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho(有限或+\infty)\begin{cases}\rho<1, 收敛\\ \rho=1, 不定\\ \rho>1, 发散\end{cases}$$

2、交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{或} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \quad (\text{其中} u_n > 0)$$

课本266页

定理: $\left.\begin{array}{l} u_n \geq u_{n+1} \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛

3、任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ $\begin{cases} \text{收敛}\begin{cases} \text{绝对收敛:} \sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{收敛} \\ \text{条件收敛}\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{发散} \\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{收敛} \end{cases} \end{cases} \\ \text{发散}(\lim\limits_{n\to\infty}u_n \neq 0) \end{cases}$

课本268页例8、9

习题12-2 5、

三、幂级数

1、收敛半径、收敛区间、收敛域

课本277页例1、2、3、4、5

习题12-3　1、

2、和函数

课本277页例6

习题12-3　2、