第十二章

无穷级数

习题 12－1 常数项级数的概念和性质

1. 写出下列级数的前五项：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+n}{1+n^2}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \cdots \cdot 2n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{5^n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

解 (1) $\dfrac{1+1}{1+1^2}+\dfrac{1+2}{1+2^2}+\dfrac{1+3}{1+3^2}+\dfrac{1+4}{1+4^2}+\dfrac{1+5}{1+5^2}+\cdots$.

(2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\cdots$.

(3) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{5^3}-\dfrac{1}{5^4}+\dfrac{1}{5^5}-\cdots$.

(4) $\dfrac{1!}{1}+\dfrac{2!}{2^2}+\dfrac{3!}{3^3}+\dfrac{4!}{4^4}+\dfrac{5!}{5^5}+\cdots$.

2. 根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$；

(3) $\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{6}+\cdots$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

解 设级数的部分和为 s_n.

(1) 因为

$$\begin{aligned} s_n &= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1}-1, \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty,$$

所以根据定义可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 发散.

(2) 由于 $u_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$,从而

$$\begin{aligned}s_n&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{2},$$

所以根据定义可知级数收敛.

(3) 由于 $u_n=\sin\dfrac{n\pi}{6}=\dfrac{2\sin\dfrac{\pi}{12}\sin\dfrac{n\pi}{6}}{2\sin\dfrac{\pi}{12}}=\dfrac{\cos\dfrac{2n-1}{12}\pi-\cos\dfrac{2n+1}{12}\pi}{2\sin\dfrac{\pi}{12}}$,从而

$$\begin{aligned}s_n=&\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left[\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{3\pi}{12}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\right)+\cdots+\right.\\&\left.\left(\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right)\right]\\=&\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{2n+1}{12}\pi\right),\end{aligned}$$

因为当 $n\to\infty$ 时,$\cos\dfrac{2n+1}{12}\pi$ 的极限不存在,所以 s_n 的极限不存在,即级数发散.

(4) $s_n=\ln 2+\ln\dfrac{3}{2}+\ln\dfrac{4}{3}+\cdots+\ln\dfrac{n+1}{n}=\ln(n+1)$,

因 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$,故级数发散.

3. 判定下列级数的收敛性:

(1) $-\dfrac{8}{9}+\dfrac{8^2}{9^2}-\dfrac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{8^n}{9^n}+\cdots$;

(2) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3n}+\cdots$;

(3) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$;

(4) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3^2}{2^2}+\dfrac{3^3}{2^3}+\cdots+\dfrac{3^n}{2^n}+\cdots$;

(5) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\left(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

解　(1) 此级数为公比 $q=-\dfrac{8}{9}$ 的等比级数,因 $|q|<1$,故该级数收敛.

(2) 此级数的部分和

$$s_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)=+\infty$,故

$$\lim_{n\to\infty}s_n=+\infty,$$

即该级数发散.

(3) 此级数的一般项 $u_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}}=1$,不满足级数收敛的必要条件,故该级数发散.

(4) 此级数为公比 $q=\dfrac{3}{2}$ 的等比级数,因 $|q|>1$,故该级数发散.

(5) 此级数的一般项 $u_n=\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}$,注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 分别是公比 $q=\dfrac{1}{2}$ 与 $q=\dfrac{1}{3}$ 的等比级数,而 $|q|<1$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 均收敛. 根据收敛级数的性质可知,原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)$ 收敛.

*4. 利用柯西审敛原理判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$;

(2) $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{3n-2}+\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n}+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}$;

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}-\dfrac{1}{3n+3}\right)$.

解　(1)

$$\begin{aligned}|s_{n+p}-s_n|&=|u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\cdots+u_{n+p}|\\&=\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}+\frac{(-1)^{n+3}}{n+2}+\frac{(-1)^{n+4}}{n+3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+p+1}}{n+p}\right|\\&=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right|.\end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots+\begin{cases}\dfrac{1}{n+p}, & p\text{ 为奇数}\\[2mm] \dfrac{1}{n+p-1}-\dfrac{1}{n+p}, & p\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

故
$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}>0,\forall p\in\mathbf{Z}^{+}.$$

于是,当 p 为奇数时,

$$|s_{n+p}-s_n| = \frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)<\frac{1}{n+1};$$

当 p 为偶数时,

$$|s_{n+p}-s_n| = \frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n+1}.$$

因此,对任意给定的正数 ε,取正整数 $N\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$,则当 $n>N$ 时,对任何正整数 p,都有

$$|s_{n+p}-s_n| < \frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

根据柯西收敛原理知,级数收敛.

(2) 当 n 是 3 的倍数时,如果取 $p=3n$,则必有

$$|s_{n+p}-s_n| = \left|\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\frac{1}{n+4}+\left(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right)+\cdots+\frac{1}{4n-2}+\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)\right|$$

$$>\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{4n-2}>\underbrace{\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\cdots+\frac{1}{4n}}_{n\text{个}}=\frac{1}{4}.$$

于是对 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$,不论 N 为何正整数,当 $n>N$ 并 n 是 3 的倍数,且当 $p=3n$ 时,就有

$$|s_{n+p}-s_n| > \varepsilon_0,$$

根据柯西收敛原理知,级数发散.

注　柯西收敛原理是这样叙述的:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件为"对任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,对任意的正整数 p,都有 $|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon$".

因此按柯西收敛原理,判别级数发散的充要条件就是对上述条件的否定,即"对某个正数 ε_0,不论 N 取什么正整数,至少有一个 $n(>N)$ 且至少有一个 $p\in\mathbf{Z}^{+}$,使得 $|s_{n+p}-s_n|\geqslant\varepsilon_0$".

(3) $|s_{n+p}-s_n| = |u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|$

$$=\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{p}}}{1-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2^{n}}.$$

由此可知,对任意给定的正数 ε,取正整数 $N\geqslant\log_2\frac{1}{\varepsilon}$,当 $n>N$ 时,对一切正整数 p,都有 $|s_{n+p}-s_n|<\varepsilon$. 按柯西收敛原理,该级数收敛.

(4) 本题与(2)类同,因 $u_n=\frac{1}{3n+1}+\left(\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)>\frac{1}{3n+1}\geqslant\frac{1}{4n}$,故对 $\varepsilon_0=\frac{1}{8}$,不论 n 取什么正整数,取 $p=n$ 时,就有 $|s_{n+p}-s_n|=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{2n}\geqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)>\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. 因此该级数发散.

习题 12-2 常数项级数的审敛法

1. 用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性:

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$;

(2) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$;

(3) $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\cdots$;

(4) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2^2}+\sin\frac{\pi}{2^3}+\cdots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\cdots$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}(a>0)$.

解 (1) 解法一 $u_n=\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}(n=1,2,\cdots)$,由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故各项乘$\frac{1}{2}$后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 也发散,由比较审敛法知原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散.

解法二 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

(2) $u_n=\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{1+n}{n+n^2}=\frac{1}{n}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,由比较审敛法知原级数

发散.

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}}{\dfrac{1}{n^2}}=1$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,由极限形式的比较审敛法知原级数收敛.

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^n}}{\dfrac{\pi}{2^n}}=\pi$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛,故由极限形式的比较审敛法知原级数收敛.

(5) 当 $0<a\leqslant 1$ 时,$\dfrac{1}{1+a^n}\geqslant\dfrac{1}{2}$,一般项不趋于零,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 发散;当 $a>1$ 时,$\dfrac{1}{1+a^n}<\dfrac{1}{a^n}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^n}$ 收敛,故由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 收敛.

2. 用比值审敛法判定下列级数的收敛性:

(1) $\dfrac{3}{1\cdot 2}+\dfrac{3^2}{2\cdot 2^2}+\dfrac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\dfrac{3^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

解 (1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\Big/\dfrac{3^n}{n2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{3}{2}>1$,故级数发散.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\Big/\dfrac{n^2}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(n+1)^2}{n^2}=\dfrac{1}{3}<1$,故级数收敛.

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\dfrac{2^n n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n=\dfrac{2}{\mathrm{e}}<1$,故级数收敛.

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\Big/n\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1,$$

故级数收敛.

***3.** 用根值审敛法判定下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{[\ln(n+1)]^{n}}$；　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^{n}$，其中 $a_n \to a(n\to\infty)$，a_n,b,a 均为正数.

解　(1) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$，故级数收敛.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(n+1)}=0<1$，故级数收敛.

(3) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2}<1$，故级数收敛.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b}{a_n}=\dfrac{b}{a}$.

当 $b<a$ 时，因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$，故级数收敛；

当 $b>a$ 时，因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}>1$，故级数发散；

当 $b=a$ 时，级数的收敛性不能确定$\left(\text{例如，}b=1,a_n=1,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1\text{ 发散；又如，}b=1,a_n=n^{\frac{2}{n}}\to 1(n\to\infty),\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\text{ 收敛}\right)$.

4. 判定下列级数的收敛性：

(1) $\dfrac{3}{4}+2\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2}+3\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3}+\cdots+n\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n}+\cdots$；

(2) $\dfrac{1^4}{1!}+\dfrac{2^4}{2!}+\dfrac{3^4}{3!}+\cdots+\dfrac{n^4}{n!}+\cdots$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n}\sin\dfrac{\pi}{3^{n}}$；

(5) $\sqrt{2}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}+\cdots$；

(6) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{2a+b}+\cdots+\dfrac{1}{na+b}+\cdots(a>0,b>0)$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}<1$，由比值审敛法知级数收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{4}\cdot\dfrac{1}{n+1}=0<1$，由比值审敛法知级数收敛.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n(n+2)}\Big/\dfrac{1}{n}=1$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，由极限形式的比较审敛法知原

级数发散.

(4) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}\Big/\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3^n}}{\dfrac{\pi}{3^n}}=\pi$,而几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 收敛,故由极限形式的比较审敛法知原级数收敛.

(5) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=1\neq 0$,故级数发散.

(6) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{na+b}\Big/\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a+\dfrac{b}{n}}=\dfrac{1}{a}$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,故由极限形式的比较审敛法知原级数发散.

5. 判定下列级数是否收敛.如果是收敛的,是绝对收敛还是条件收敛?

(1) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\cdots$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$;

(3) $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^n}+\cdots$;

(4) $\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 3}+\dfrac{1}{\ln 4}-\dfrac{1}{\ln 5}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}+\cdots$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$.

解 (1) $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{1}{2}}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 是发散的;又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是交错级数,满足 $|u_n|>|u_{n+1}|$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,故由莱布尼茨定理知原级数收敛且条件收敛.

(2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\,\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{1}{3}<1$,由比值审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,故原级数绝对收敛.

(3) $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{3\cdot 2^n}$,因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3\cdot 2^n}$ 是公比 $q=\dfrac{1}{2}(|q|<1)$ 的等比级数,故收敛,从而原级数绝对收敛.

(4) $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$, $|u_n|=\dfrac{1}{\ln(n+1)}>\dfrac{1}{n+1}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 是发散的,故由比较审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是交错级数,满足 $|u_n|>|u_{n+1}|$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,故由莱布尼茨定理知原级数收敛且条件收敛.

(5) $u_n=\frac{(-1)^{n+1}2^{n^2}}{n!}$，$|u_n|=\frac{2^n\cdot 2^n\cdot\cdots\cdot 2^n}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}$，由于 $2^n>k(k=1,2,\cdots,n)$，故 $|u_n|>1$，即原级数的一般项 u_n 当 $n\to\infty$ 时不趋于零，故该级数发散．

习题 12－3　幂级数

1. 求下列幂级数的收敛区间：

(1) $x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$；

(2) $1-x+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n^2}+\cdots$；

(3) $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 4}+\frac{x^3}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots+\frac{x^n}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}+\cdots$；

(4) $\frac{x}{1\cdot 3}+\frac{x^2}{2\cdot 3^2}+\frac{x^3}{3\cdot 3^3}+\cdots+\frac{x^n}{n\cdot 3^n}+\cdots$；

(5) $\frac{2}{2}x+\frac{2^2}{5}x^2+\frac{2^3}{10}x^3+\cdots+\frac{2^n}{n^2+1}x^n+\cdots$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$；

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，故收敛半径为 1，收敛区间是 $(-1,1)$.

(2) $n\geqslant 1$ 起，$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{1}{(n+1)^2}\Big/\frac{1}{n^2}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1$，故收敛半径为 1，收敛区间为 $(-1,1)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}=0$，故收敛半径为 $+\infty$，收敛区间是 $(-\infty,+\infty)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{3}$，故收敛半径为 3，收敛区间为 $(-3,3)$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=2$，故收敛半径为 $\frac{1}{2}$，收敛区间为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

(6) 这是缺(偶次幂)项的级数，把 $(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 视为数项级数的一般项 u_n，

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}|x|^2=|x|^2,$$

当 $|x|<1$ 时,级数绝对收敛;当 $|x|>1$ 时,因一般项 $u_n\not\to 0(n\to\infty)$,级数发散.故原级数收敛半径为1,收敛区间为$(-1,1)$.

(7) 这是缺(奇次幂)项的级数.

解法一　与(6)类似,将它按数项级数处理,用比值法确定收敛半径和收敛区间.

解法二　令 $t=x^2$,先讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}t^{n-1}$ 的收敛区间.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{2},$$

故该级数的收敛半径为2,因此,原级数的收敛半径为$\sqrt{2}$,收敛区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=1$,故收敛半径为1.当 $|x-5|<1$ 时,级数收敛;当 $|x-5|>1$ 时,级数发散.故级数的收敛区间为$(4,6)$.

2. 利用逐项求导或逐项积分,求下列级数的和函数:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$;

(3) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+3}$.

解　(1) 容易求出此级数的收敛半径为1.当 $-1<x<1$ 时,

$$\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}.$$

在上式两端对 x 求导得

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

又原级数在 $x=\pm1$ 处发散,故它的和函数 $s(x)=\frac{1}{(1-x)^2}(-1<x<1)$.

(2) 不难求出此级数的收敛半径为1.当 $-1<x<1$ 时,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\frac{x^4}{1-x^4},$$

在上式两端分别从 0 至 x 积分，并由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 在 $x=0$ 处收敛于 0，故得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\int_0^x\frac{x^4}{1-x^4}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\left(-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x.$$

又原级数在 $x=\pm1$ 处均发散，故它的和函数

$$s(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x\quad(-1<x<1).$$

(3) 记级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，其收敛半径为 1. 当 $-1<x<1$ 时，

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2},$$

在上式两端分别从 0 至 x 积分，并注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 在 $x=0$ 处收敛于 0，故得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

又原级数在 $x=\pm1$ 处均发散，故它的和函数

$$s(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad(-1<x<1).$$

(4) 容易求得此级数的收敛半径为 1，收敛域为 $(-1,1)$. 当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+3}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^{n+1}=x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2}\right)',$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2}=x^3\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{x^3}{1-x}$. 又 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2}\right)'=\left(\frac{x^3}{1-x}\right)'=\frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}$，故原级数的和函数

$$s(x)=x^2\cdot\frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}=\frac{3x^4-2x^5}{(1-x)^2}\quad(-1<x<1).$$

习题 12-4　函数展开成幂级数

1. 求函数 $f(x)=\cos x$ 的泰勒级数，并验证它在整个数轴上收敛于这个函数.

解　在定点 x_0 处，因

$$f^{(n)}(x_0)=\cos\left(x_0+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

故 $f(x)$ 的泰勒级数为

$$\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{\cos\left(x_0+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots.$$

因为对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\cos\left(\xi+\frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

(其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间),而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0$,于是得

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

所以在整个数轴上,有

$$f(x)=\cos x=\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{\cos\left(x_0+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots.$$

2. 将下列函数展开成 x 的幂级数,并求展开式成立的区间:

(1) $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;　(2) $\ln(a+x)(a>0)$;

(3) a^x;　(4) $\sin^2x$;

(5) $(1+x)\ln(1+x)$;　(6) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 (1) 由于 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}, x\in(-\infty,+\infty)$,故

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

于是

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) $\ln(a+x)=\ln a+\ln\left(1+\dfrac{x}{a}\right)$,利用

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\quad x\in(-1,+1],$$

得

$$\ln(a+x)=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{a}\right)^n,\quad x\in(-a,+a].$$

(3) 利用 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, x\in(-\infty,+\infty)$,得

$$a^x=e^{x\ln a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(4) 解法一 利用

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

得
$$\sin^2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{2(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

解法二 $(\sin^2x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

将上式两端从 0 至 x 积分并逐项积分,得

$$\sin^2x=\int_0^x(\sin^2x)'\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(5) 解法一 因为

$$[(1+x)\ln(1+x)]'=\ln(1+x)+1=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\quad x\in(-1,1).$$

将上式两端从 0 至 x 积分并逐项积分得

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{(n-1)n},\quad x\in(-1,1),$$

又在 $x=1$ 处,上式右端的幂级数收敛,且函数 $(1+x)\ln(1+x)$ 连续,故

$$(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n(n-1)},\quad x\in(-1,1].$$

解法二 利用 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, x\in(-1,1]$,得

$$(1+x)\ln(1+x)=\ln(1+x)+x\ln(1+x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n-1}$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^n}{n-1}\right]x^n$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}, \quad x \in (-1,1].$$

(6) 解法一　利用 $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots, x \in [-1,1]$，并因为 $\int_0^x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2} - 1$，以 x^2 替换上面幂级数中的 x，得

$$\int_0^x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2} - 1$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 - \cdots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n} + \cdots.$$

在 $(-1,1)$ 内将上式两端对 x 求导，得

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}x^{2n-1} + \cdots$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}x^{2n-1}$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}, \quad x \in (-1,1).$$

在 $x = \pm 1$ 处上式右端的级数均收敛且函数 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 连续，故

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}, \quad x \in [-1,1].$$

解法二　将 x^2 替换展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^n \quad (x \in (-1,1])$$

中的 x，得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n}, \quad x \in [-1,1].$$

从而得

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}x^{2n+1}$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}, \quad x \in [-1,1].$$

3. 将下列函数展开成 $x-1$ 的幂级数，并求展开式成立的区间：

(1) $\sqrt{x^3}$；　　　　(2) $\lg x$.

解　(1) 当 $m > 0$ 时，因

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

$$x\in[-1,1],$$

而 $$\sqrt{x^3}=[1+(x-1)]^{\frac{3}{2}},$$

在以上二项展开式中取 $m=\frac{3}{2}$，并用 $x-1$ 替换其中的 x，得

$$\sqrt{x^3}=1+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)(x-1)^2+\cdots+$$

$$\frac{1}{n!}\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{3}{2}-n+1\right)(x-1)^n+\cdots$$

$$=1+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^{n+2}(n+2)!}(x-1)^{n+2}$$

$$=1+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{3}{(n+1)(n+2)2^n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n+2},\quad x\in[0,2].$$

(2) $\lg x=\frac{\ln x}{\ln 10}=\frac{1}{\ln 10}\ln[1+(x-1)]$，利用

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1],$$

将上式中的 x 换成 $x-1$，得

$$\lg x=\frac{1}{\ln 10}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n},\quad x\in(0,2].$$

4. 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 $x+\frac{\pi}{3}$ 的幂级数.

解 $$\cos x=\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

将 $x+\frac{\pi}{3}$ 替换以下两式

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

中的 x，得

$$\cos x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}\right],\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

5. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数.