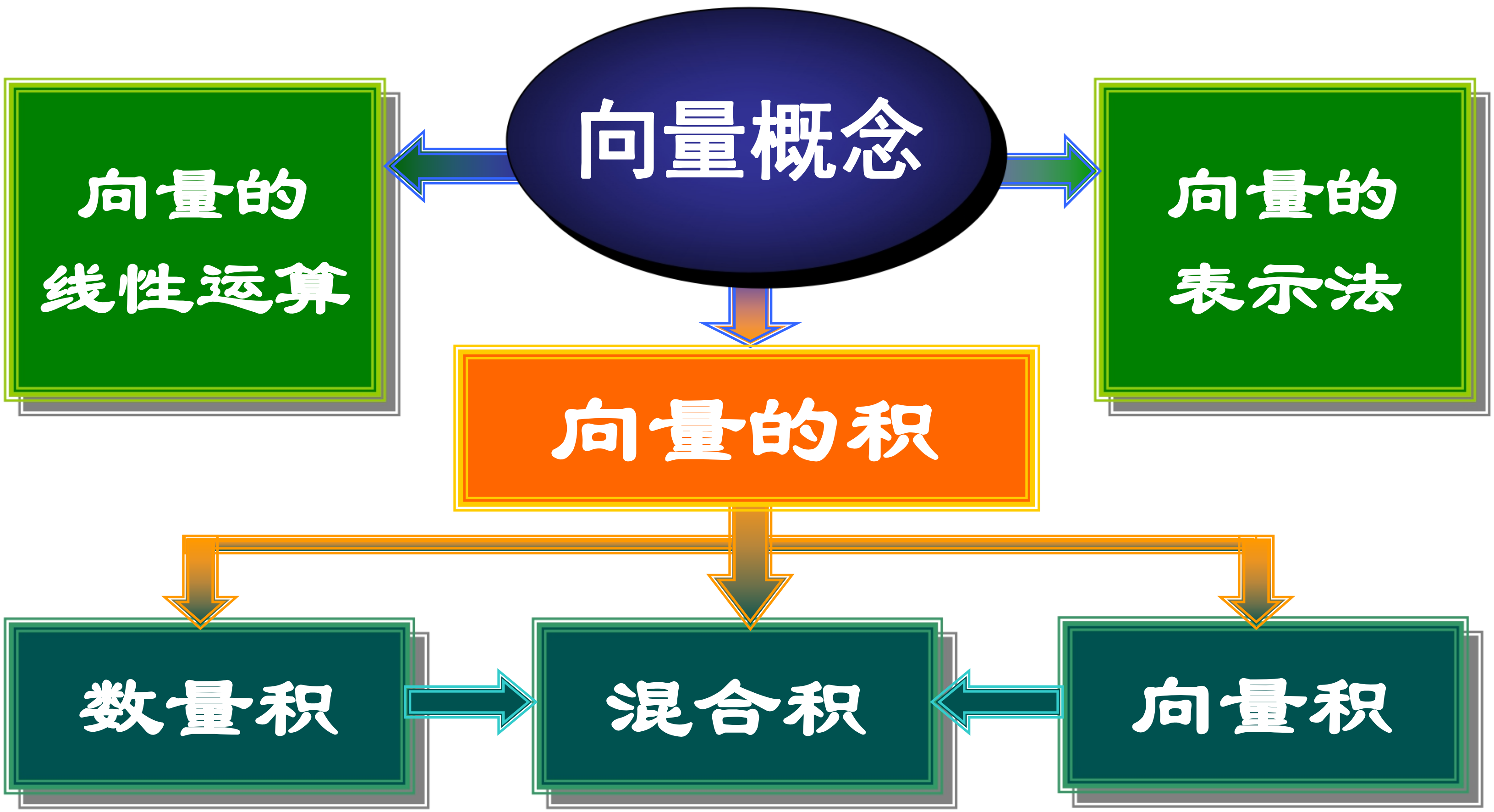
第八章习题课

（一）向量代数



1、向量的概念

定义:既有大小又有方向的量称为向量.

重要概念:

向量的模、单位向量、零向量、

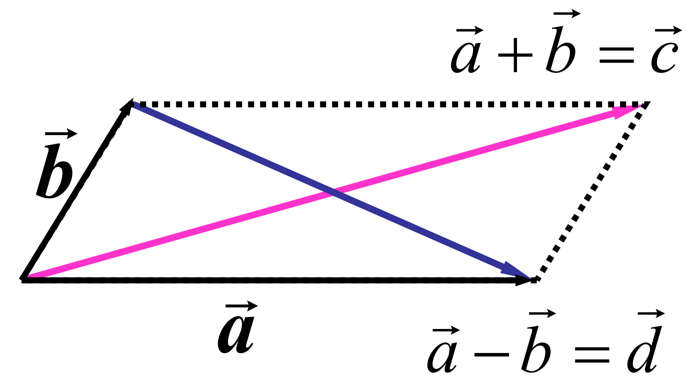
自由向量、 相等向量、 负向量、

平行向量、 向径.

2、向量的线性运算

(1) 加法： $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

(2) 减法： $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}$



(3) 向量与数的乘法：

设λ是一个数，向量$\vec{a}$与λ的乘积$\lambda\vec{a}$规定为

(1) $\lambda>0$, $\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向，$|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$

(2) $\lambda=0$, $\lambda\vec{a}=\vec{0}$

(3) $\lambda<0$, $\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$反向，$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$

3、向量的表示法

向量的分解式： $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

在三个坐标轴上的分向量：$a_x\vec{i}$， $a_y\vec{j}$， $a_z\vec{k}$

向量的坐标表示式：$\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$

向量的坐标： a_x， a_y， a_z

其中 a_x, a_y, a_z 分别为向量在 x, y, z 轴上的投影.

向量的加减法、向量与数的乘积等的坐标表达式

$$\vec{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z) \qquad \vec{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z)$$

$$=(\boldsymbol{a_x}+\boldsymbol{b_x})\vec{\boldsymbol{i}}+(\boldsymbol{a_y}+\boldsymbol{b_y})\vec{\boldsymbol{j}}+(\boldsymbol{a_z}+\boldsymbol{b_z})\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x,\ a_y-b_y,\ a_z-b_z)$$

$$=(\boldsymbol{a_x}-\boldsymbol{b_x})\vec{\boldsymbol{i}}+(\boldsymbol{a_y}-\boldsymbol{b_y})\vec{\boldsymbol{j}}+(\boldsymbol{a_z}-\boldsymbol{b_z})\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z)$$

$$=(\boldsymbol{\lambda a_x})\vec{\boldsymbol{i}}+(\boldsymbol{\lambda a_y})\vec{\boldsymbol{j}}+(\boldsymbol{\lambda a_z})\vec{\boldsymbol{k}}$$

向量模长的坐标表示式 $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

向量方向余弦的坐标表示式

$$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

4、数量积　(点积、内积)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$　　其中θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角

数量积的坐标表达式

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

两向量夹角余弦的坐标表示式

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}\sqrt{b_x^{\ 2}+b_y^{\ 2}+b_z^{\ 2}}}$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

5、向量积 (叉积、外积)

$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$　　其中θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角

$\vec{c}$的方向既垂直于$\vec{a}$，又垂直于$\vec{b}$，指向符合右手系.

向量积的坐标表达式

$$\vec{a}\times\vec{b} =(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}$$
$$+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

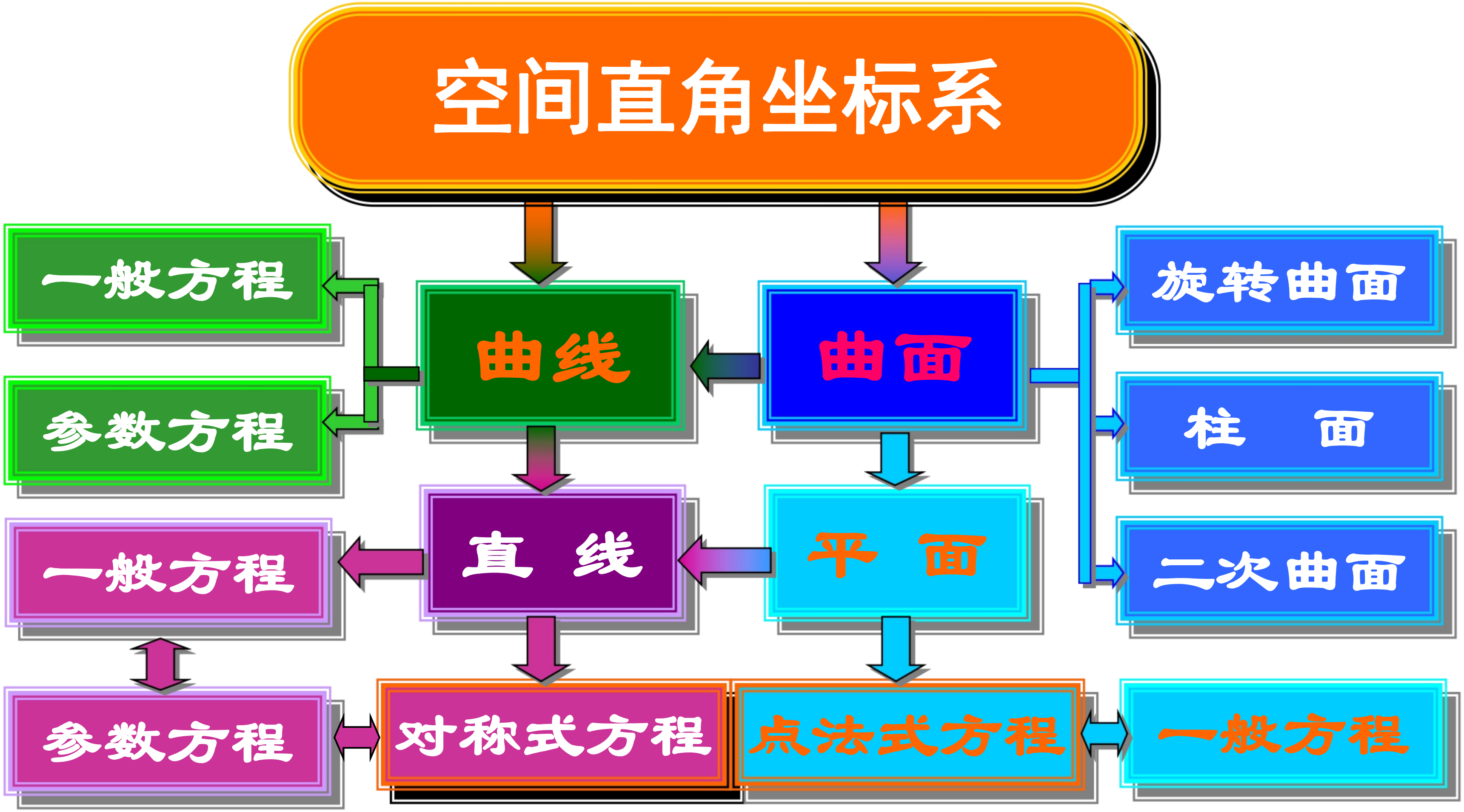
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} // \vec{b} \Longleftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

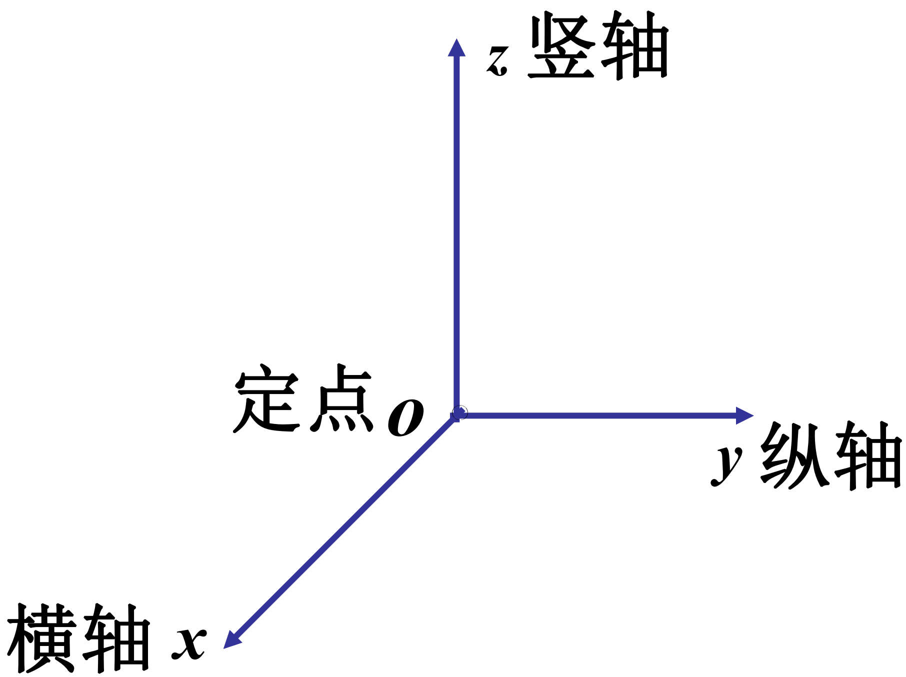
6、混合积

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

（二）空间解析几何


空间直角坐标系
一般方程
参数方程
曲线
曲面
旋转曲面
柱 面
二次曲面
一般方程
直 线
平 面
参数方程
对称式方程
点法式方程
一般方程

1、空间直角坐标系



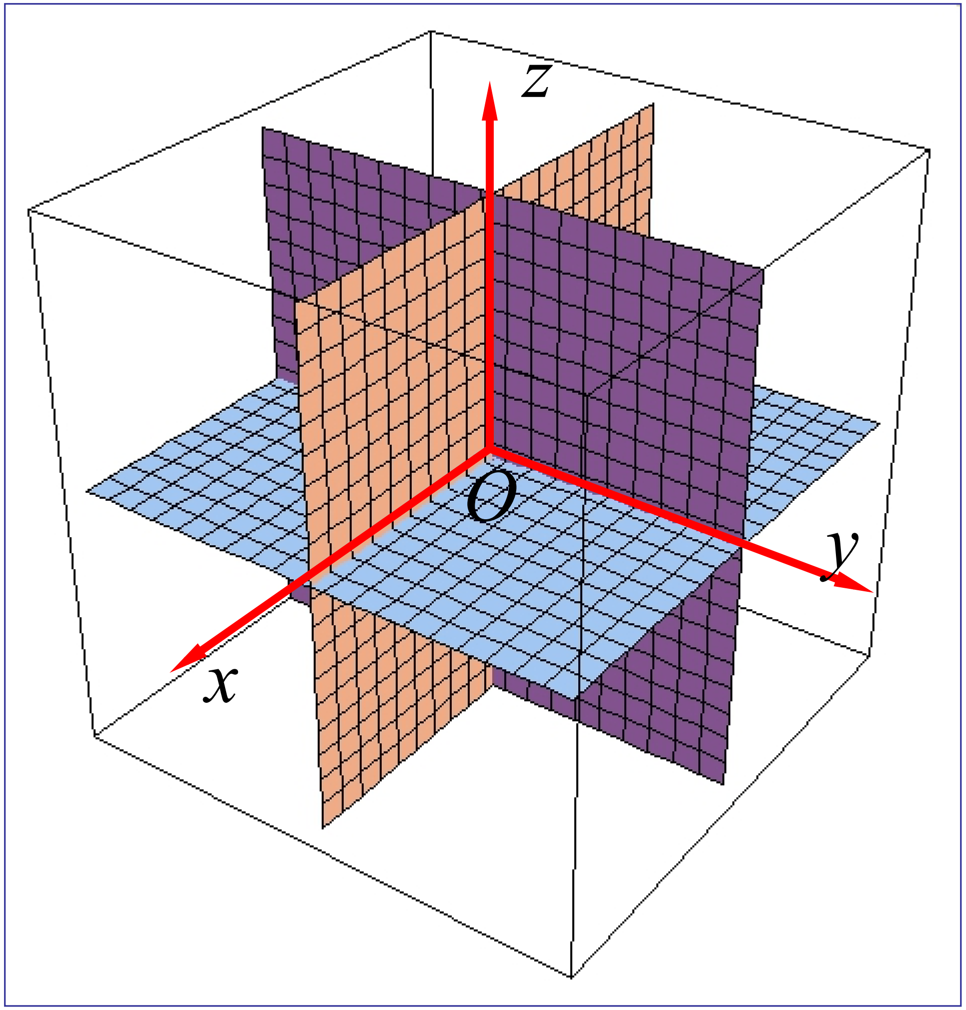
空间的点

$\Updownarrow$

(x, y, z)

有序数组

空间直角坐标系



共有一个原点,三个坐标轴,三个坐标面,八个卦限.

两点间距离公式:

设$M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点

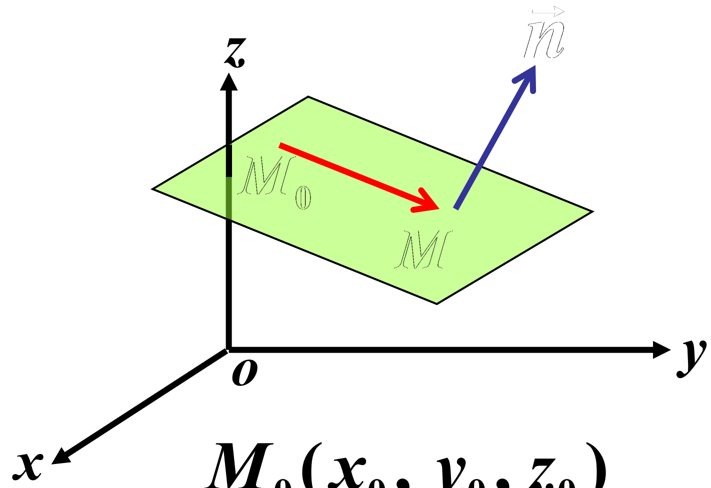
它们距离为

$$\left|M_1M_2\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

2、平面

[1] 平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$



$$M_0(x_0,y_0,z_0)$$

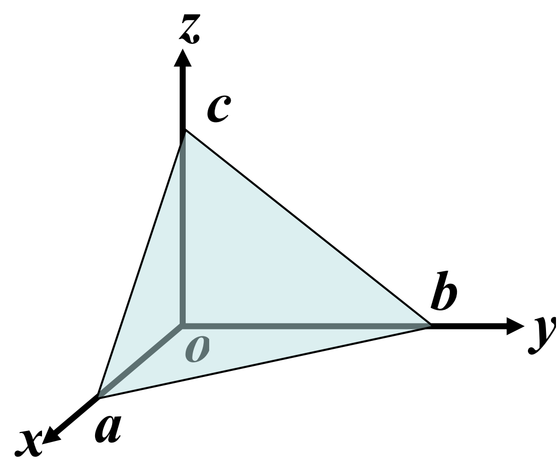
$$\vec{n}=\{A,B,C\}$$

[2] 平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

[3] 平面的截距式方程

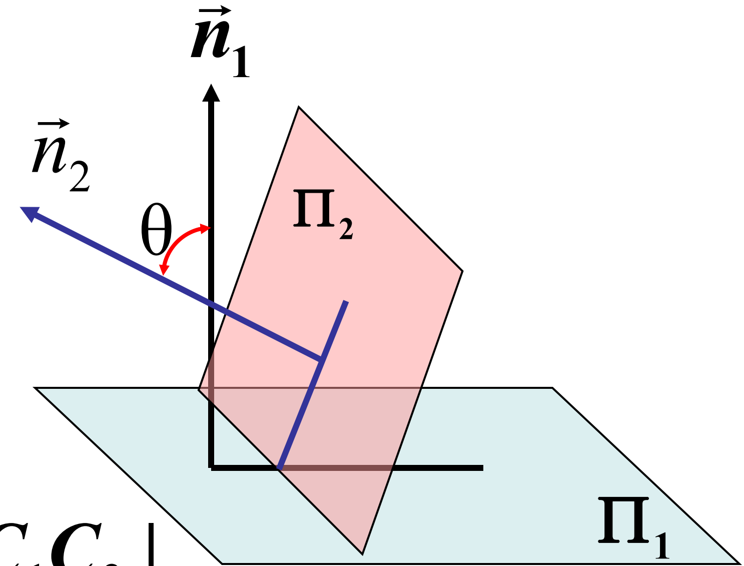
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$



[4] 平面的夹角

$$\Pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

[5] 两平面位置特征：

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

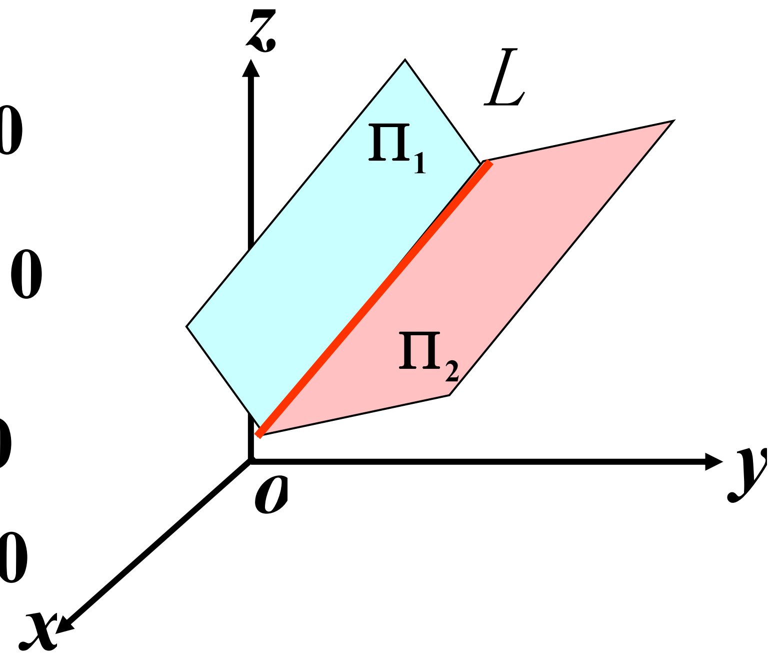
3、空间直线

[1] 空间直线的一般方程

$$\Pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

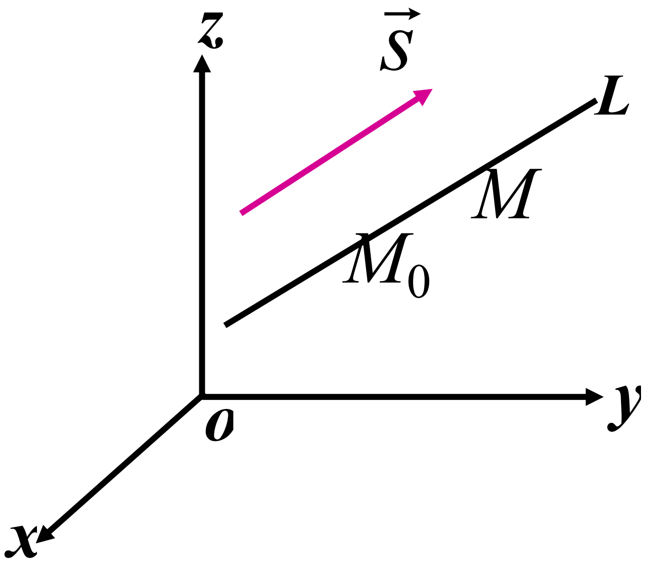


[2] 空间直线的对称式方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

[3] 空间直线的参数方程

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$



$M_0(x_0, y_0, z_0)$

$\vec{s} = \{m, n, p\}$

[4] 两直线的夹角

直线 L_1： $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$

直线 L_2： $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$

$$\cos(\widehat{L_1,L_2})=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

两直线的夹角公式

[5] 两直线的位置关系：

$$(1) \quad L_1 \perp L_2 \iff m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$(2) \quad L_1 // L_2 \iff \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

[6] 直线与平面的夹角

$$L: \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad \Pi: \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \qquad \left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$$

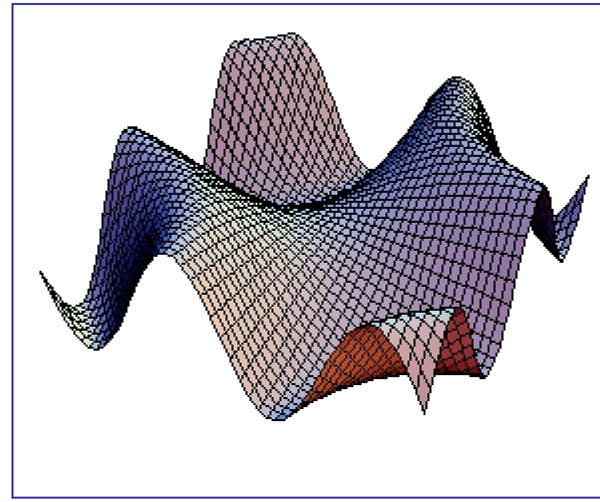
直线与平面的夹角公式

[7] 直线与平面的位置关系

(1) $L \perp \Pi \iff \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$

(2) $L \parallel \Pi \iff Am + Bn + Cp = 0$

4、曲面



曲面方程的定义：

如果曲面S与三元方程$F(x,y,z)=0$有下述关系：

(1) 曲面S上任一点的坐标都满足方程；

(2) 不在曲面S上的点的坐标都不满足方程；

那么，方程$F(x,y,z)=0$就叫做曲面S的方程，而曲面S就叫做方程的图形.

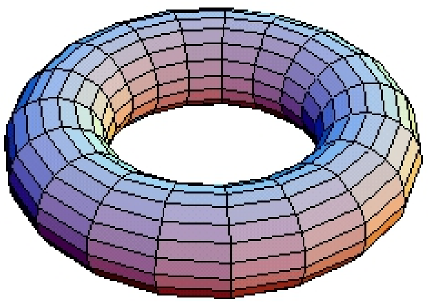
研究空间曲面的两个基本问题：

（1）已知曲面作为点的轨迹时，求曲面方程.

（2）已知坐标间的关系式，研究曲面形状.

[1] 旋转曲面

定义：以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称之.



这条定直线叫旋转曲面的**轴**.

方程特点:

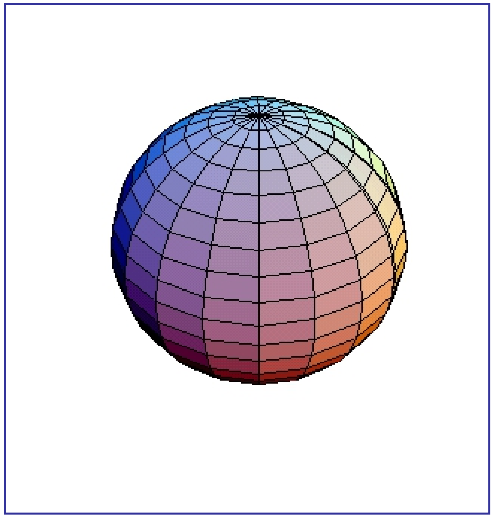
设有平面曲线 $L:\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

(1) 曲线 L 绕 x 轴旋转所成的旋转曲面 方程为

$$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$$

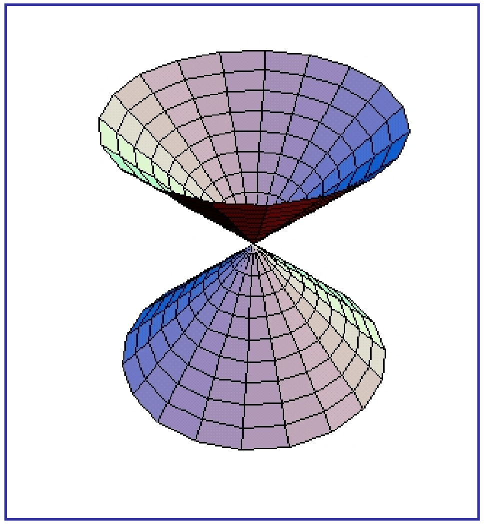
(2) 曲线 L 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面 方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$$



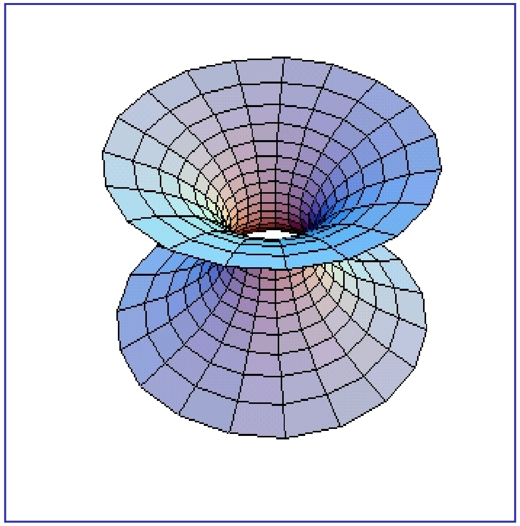
（1）球面

$$x^2+y^2+z^2=1$$



（2）圆锥面

$$x^2+y^2=z^2$$



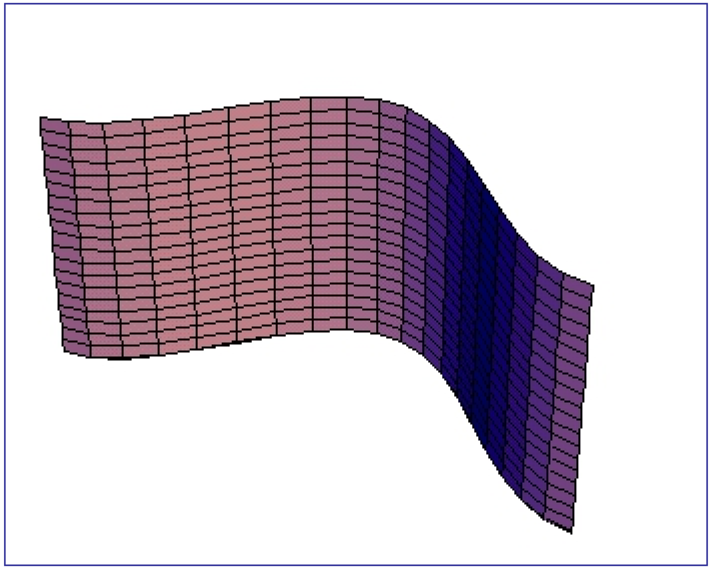
（3）旋转双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

[2] 柱面

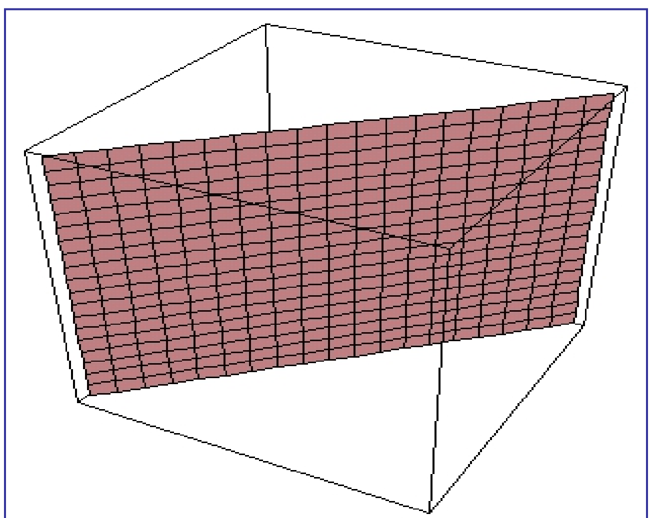
定义：平行于定直线并沿定曲线C移动的直线L所形成的曲面称之.

这条定曲线叫柱面的准线，动直线叫柱面的母线.



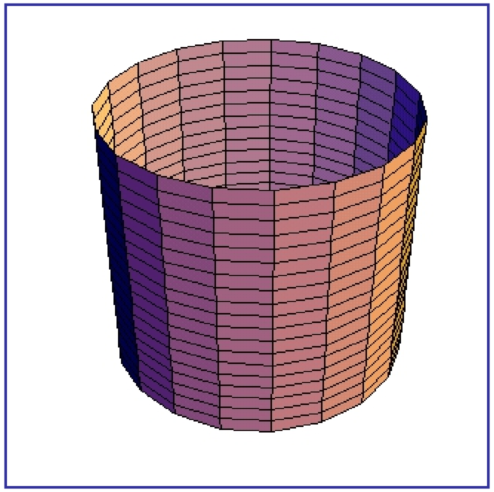
从柱面方程看柱面的特征：

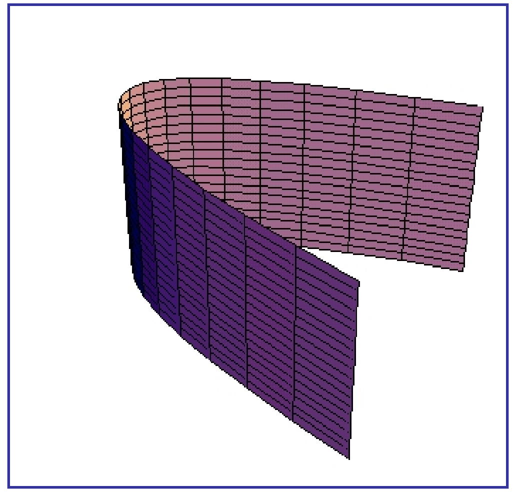
只含x, y而缺z的方程$F(x, y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于z轴的柱面，其准线为xoy面上曲线C.

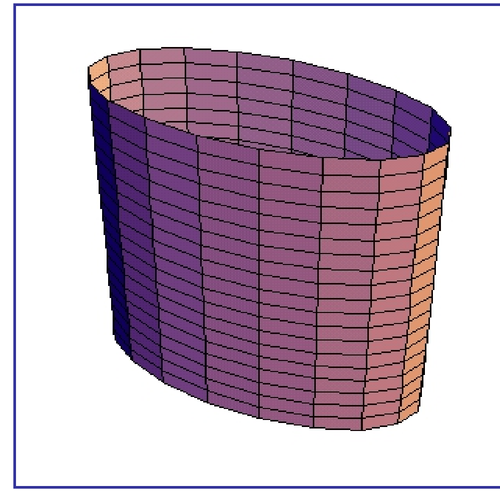


(1) 平面

$$y = x$$







(2) 圆柱面

$$x^2 + y^2 = R^2$$

(3) 抛物柱面

$$x^2 = 2py$$

$$(p > 0)$$

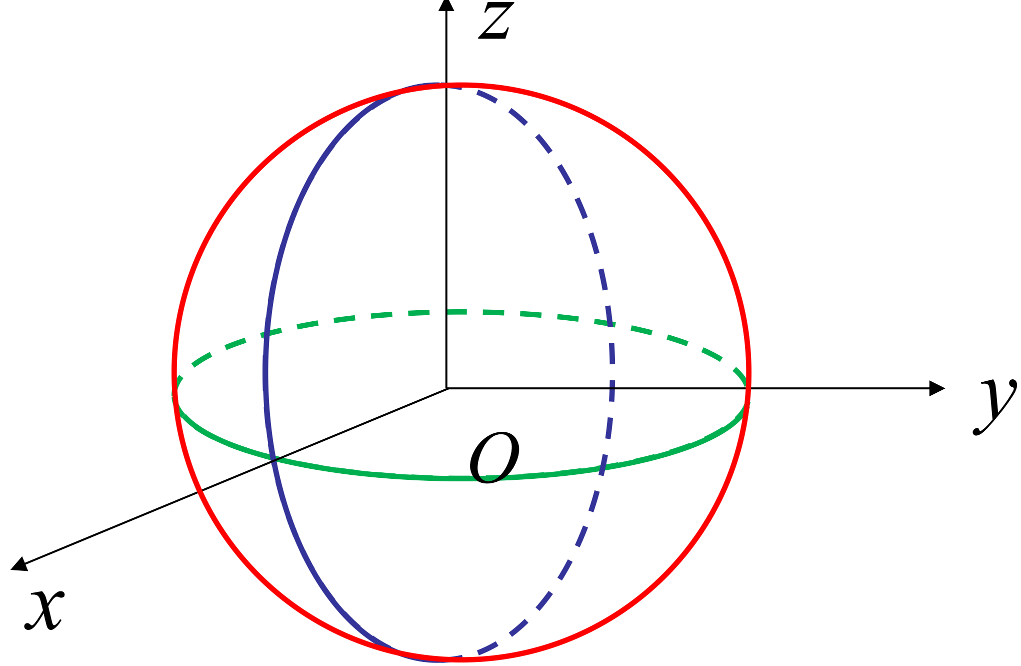
(4) 椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

[3] 二次曲面

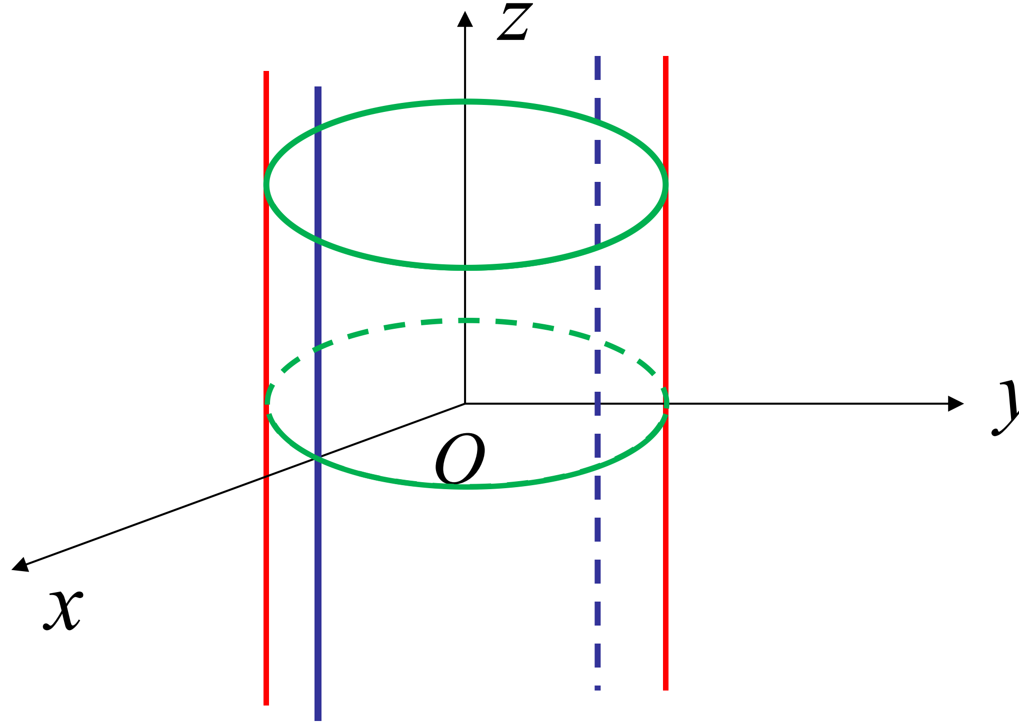
1、球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



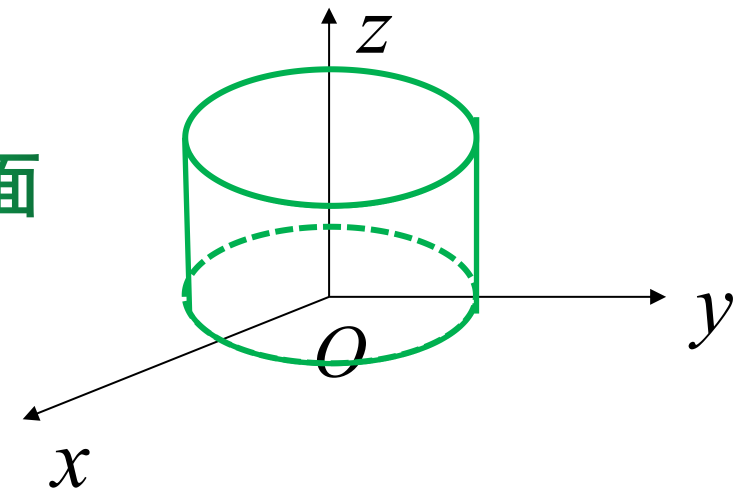
2、柱面

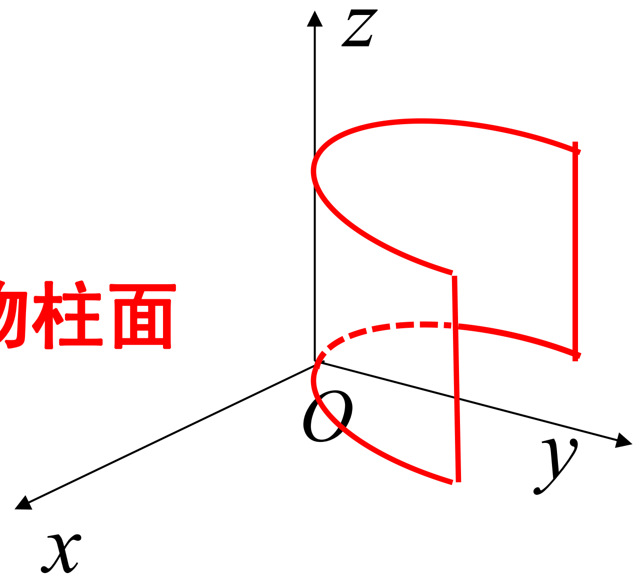
$$x^2 + y^2 = R^2$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

椭圆柱面



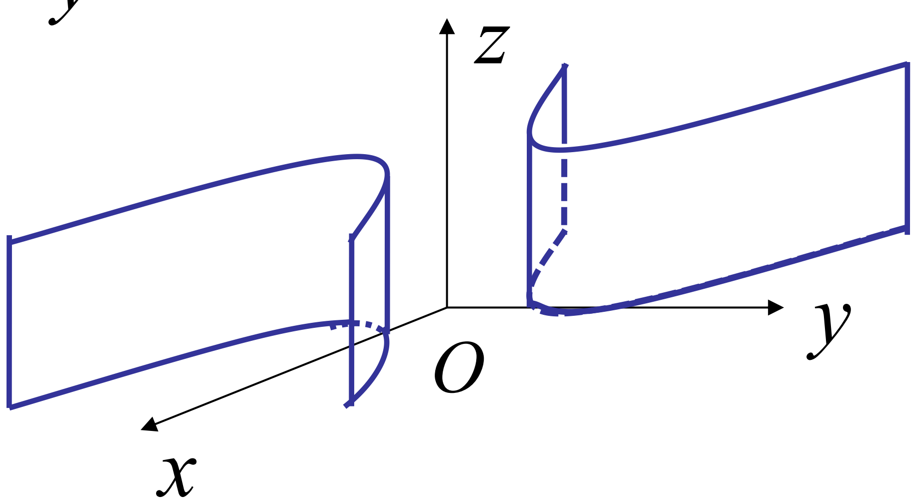


$$y=\frac{x^2}{a^2}$$

抛物柱面

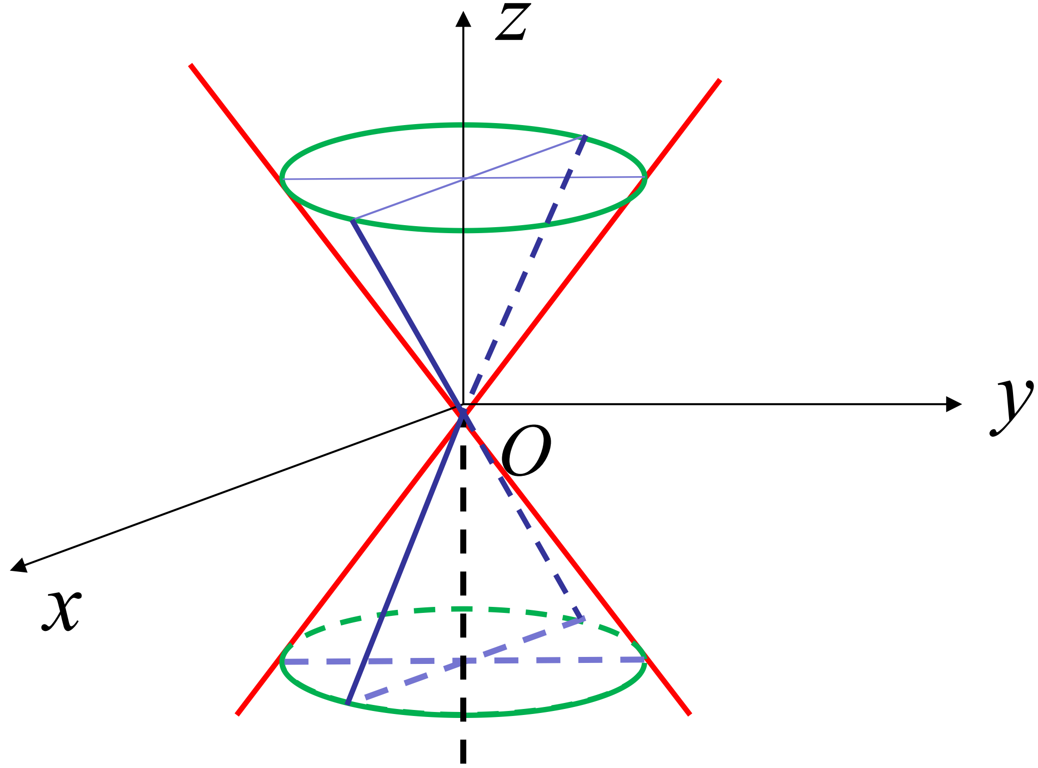
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

双曲柱面



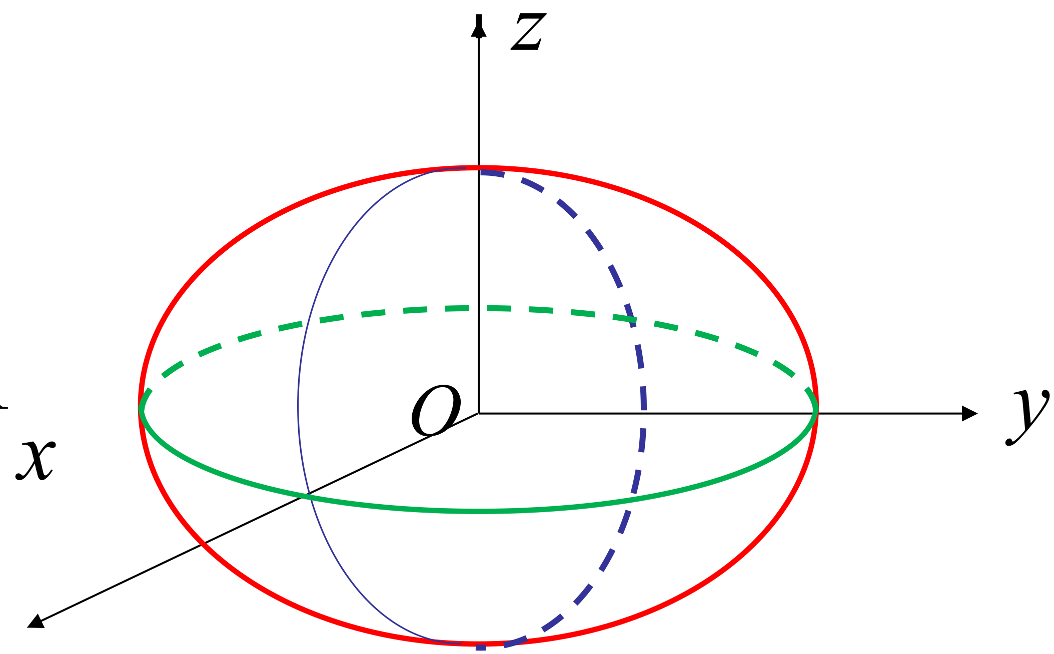
3、椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$



4、椭球面

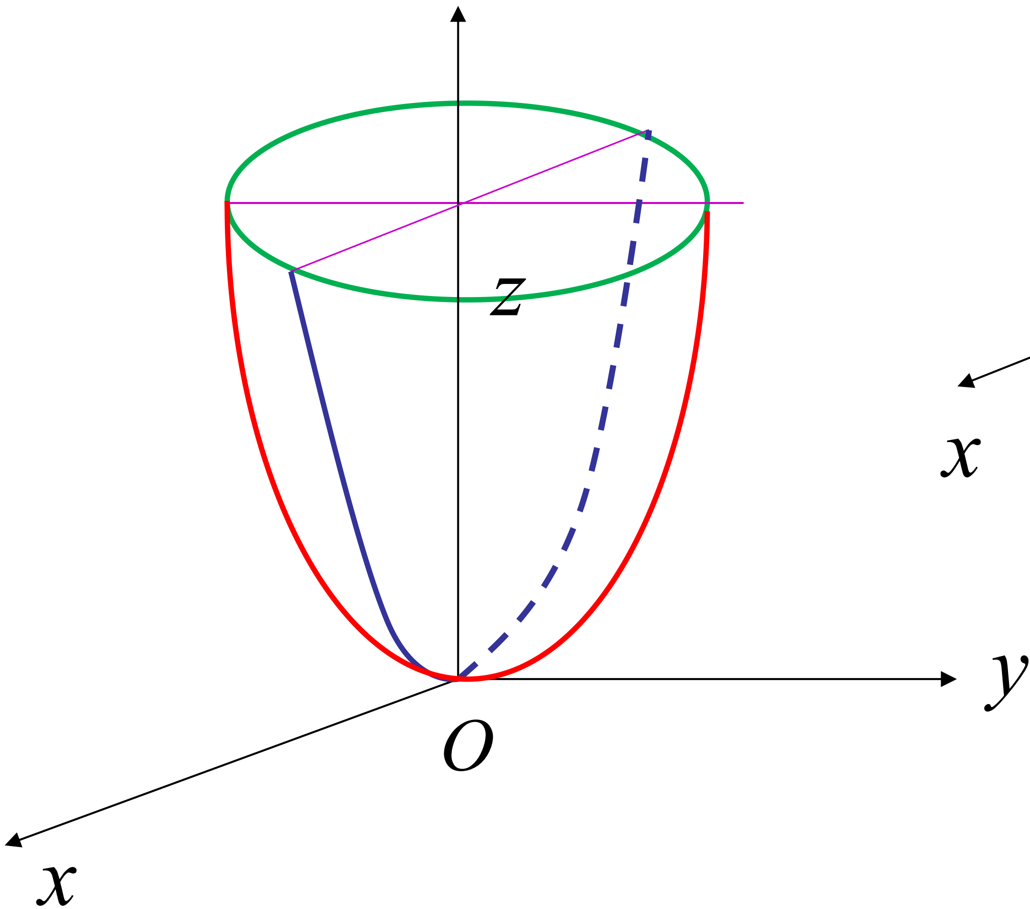
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

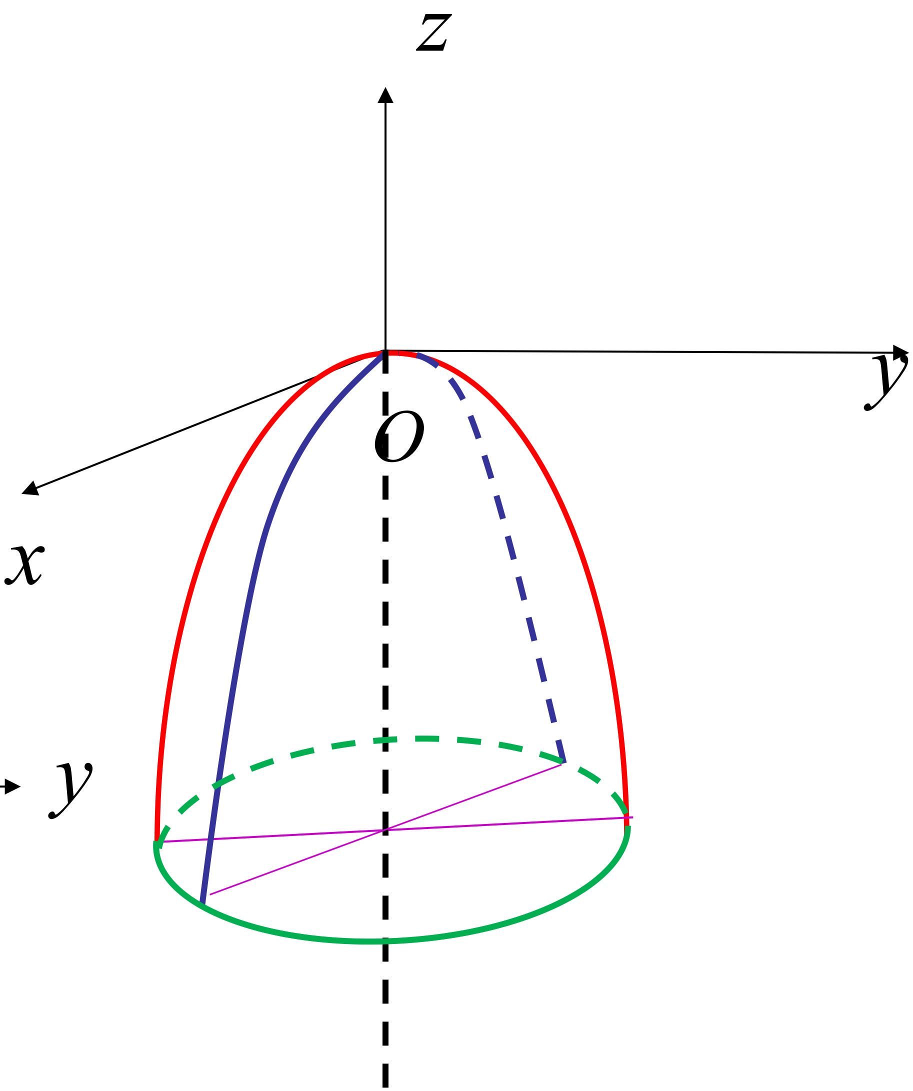


5、椭圆抛物面

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

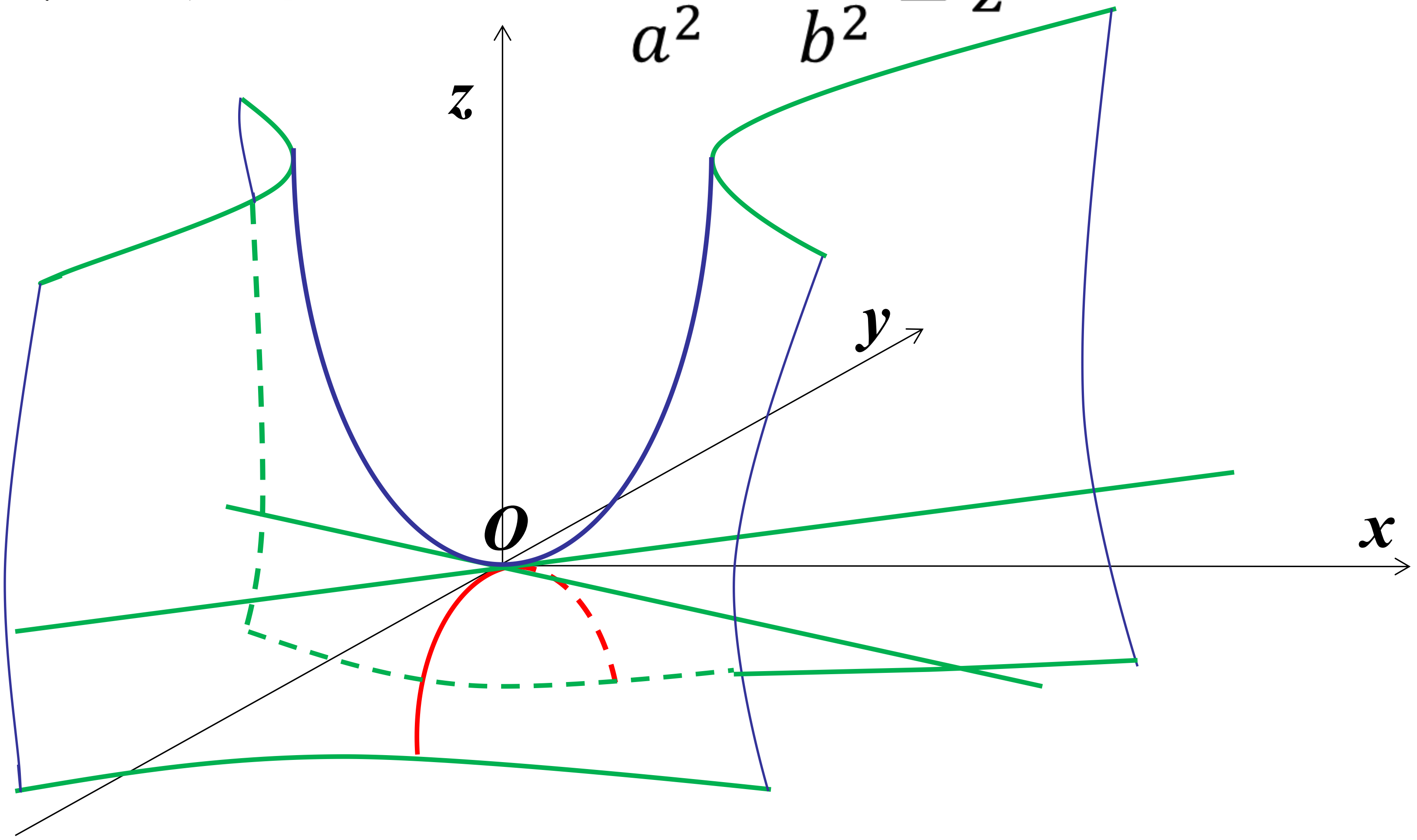
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$





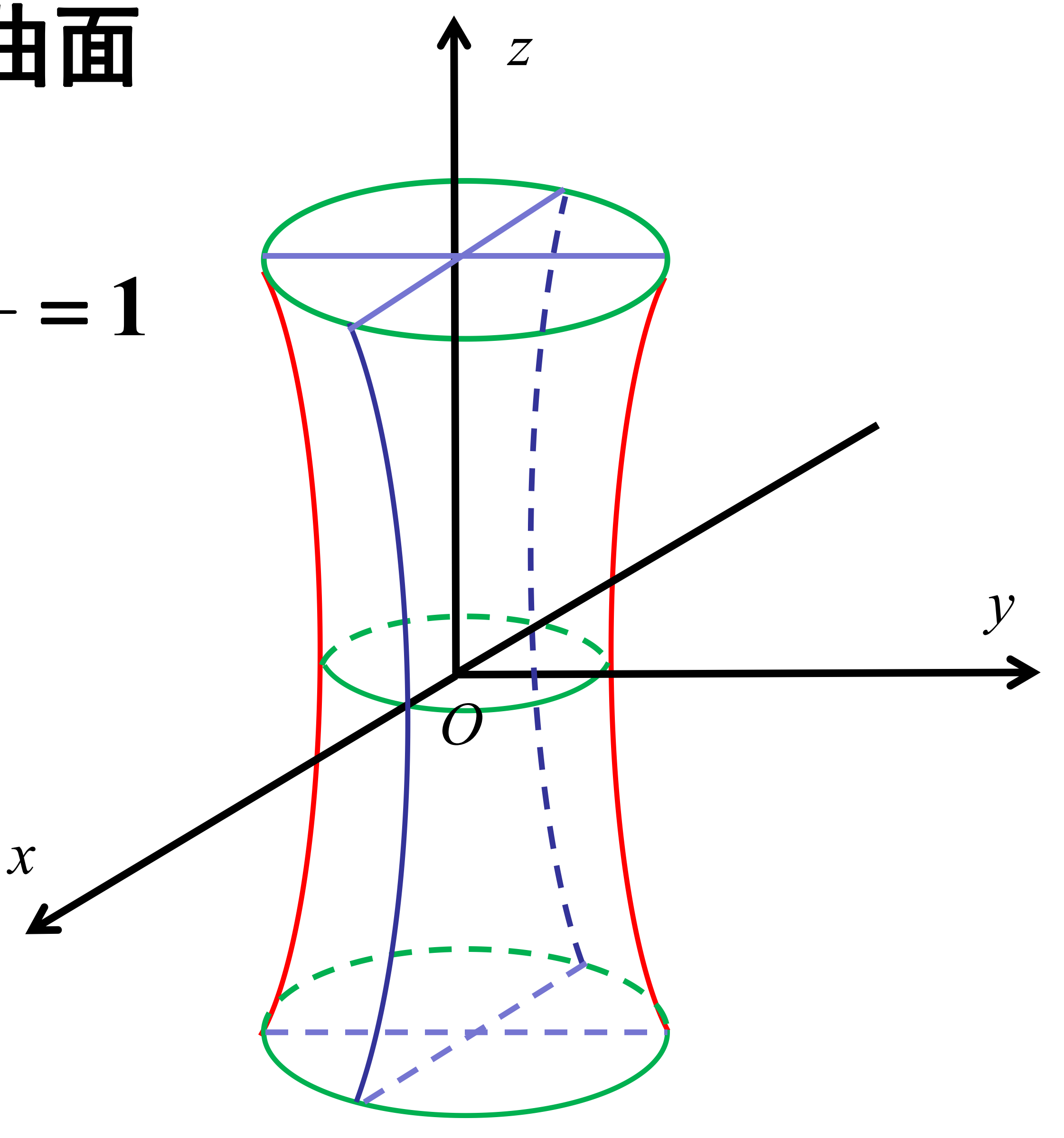
6、双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$



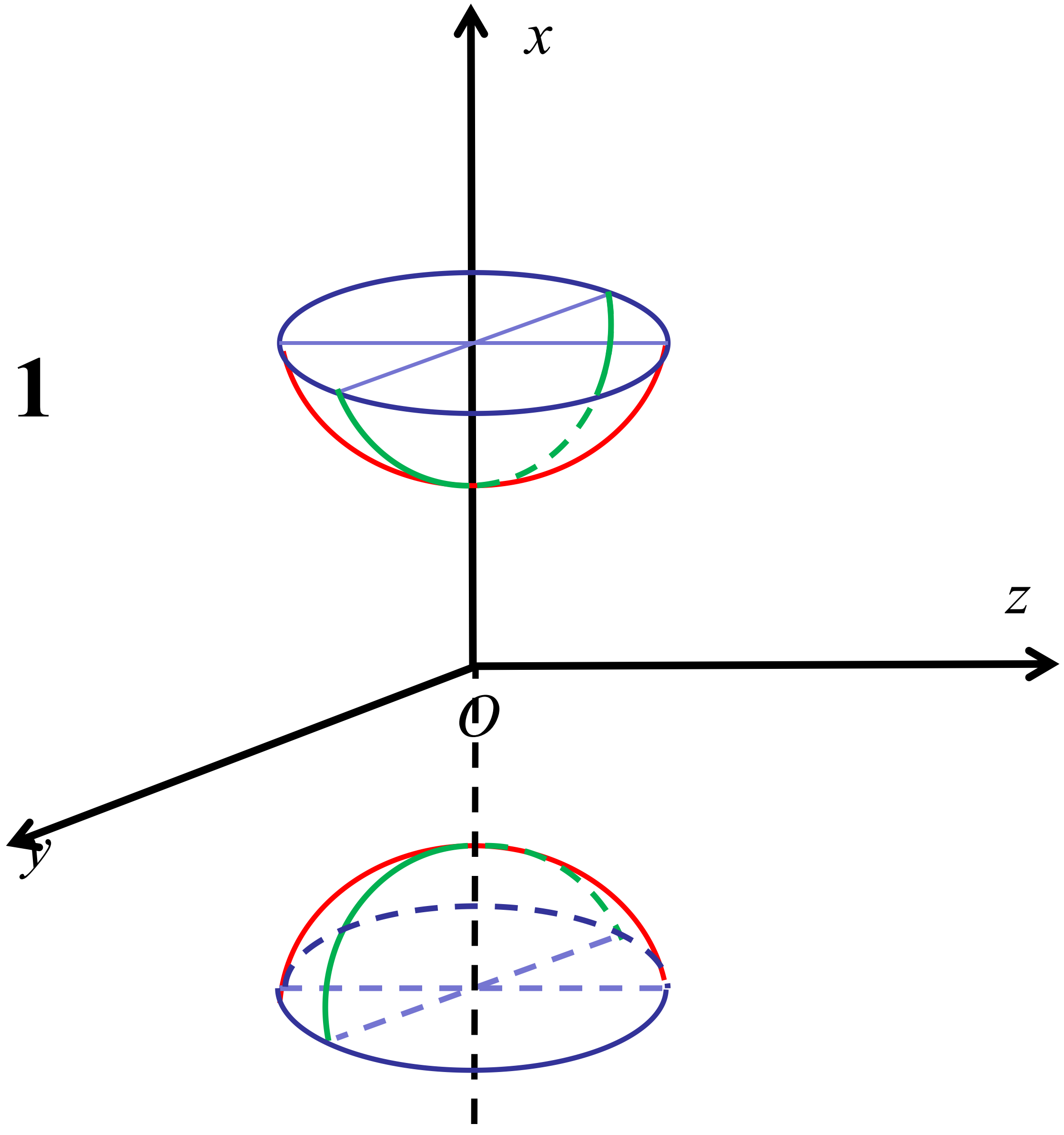
7、单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



8、双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



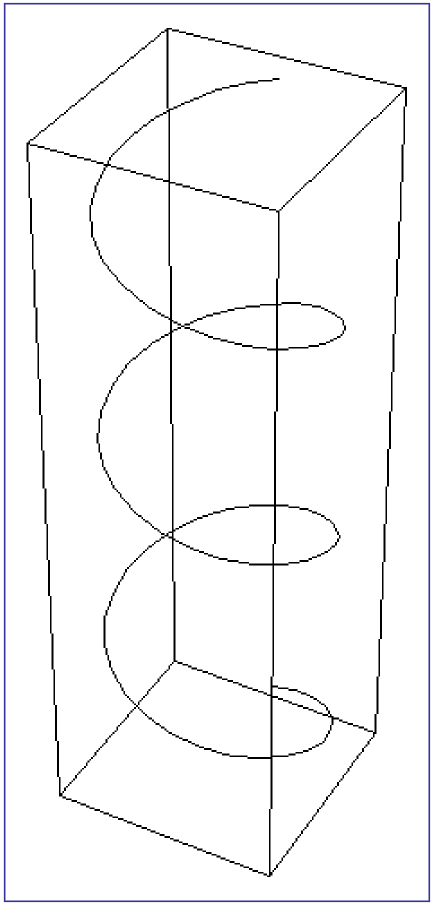
5、空间曲线

[1] 空间曲线的一般方程

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

[2] 空间曲线的参数方程

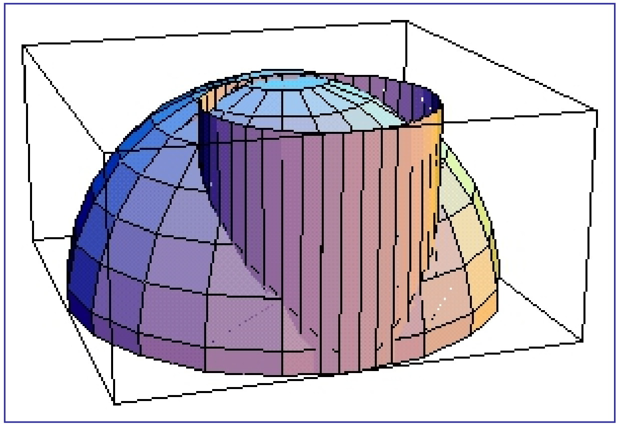
$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$



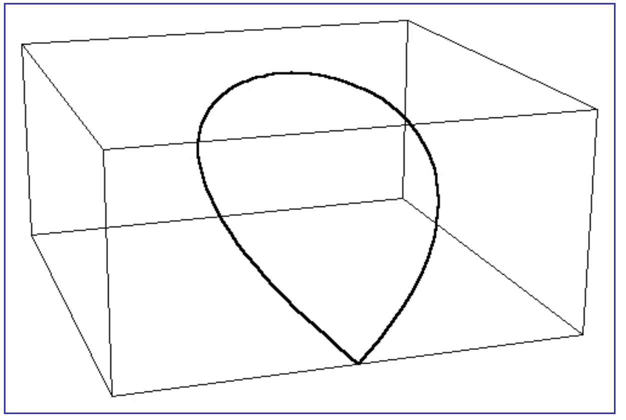
如图空间曲线

一般方程为

$$\begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2 \end{cases}$$



参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}\sin t \\ z = \sin\frac{t}{2} \end{cases}$



[3] 空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线的一般方程：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

投影柱面

消去变量z后得：$H(x,y)=0$

曲线在xoy 面上的投影曲线为$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

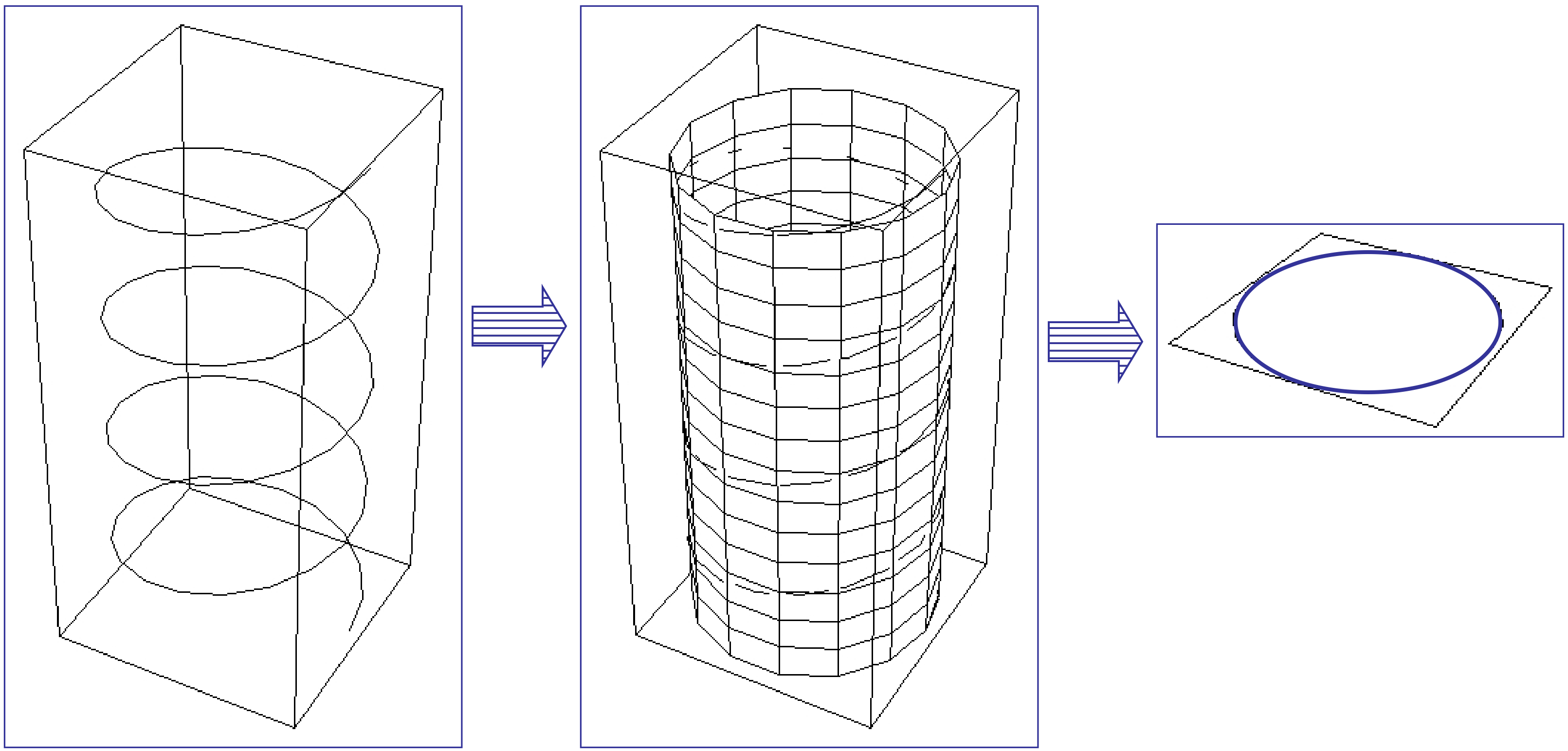
yoz面上的投影曲线

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

xoz面上的投影曲线

$$\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

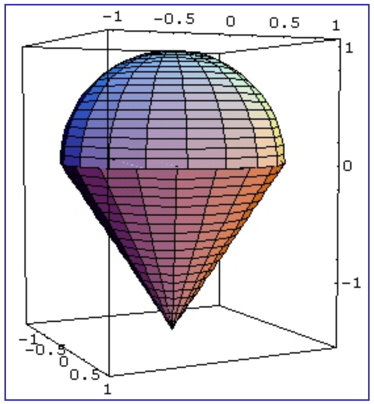
如图:投影曲线的研究过程.

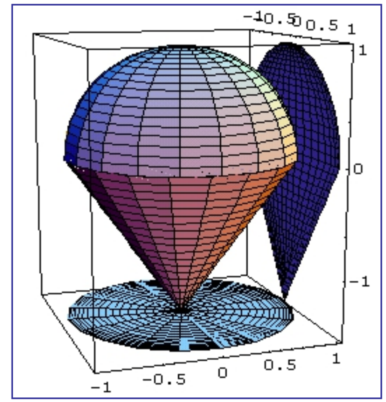


空间曲线　　　　投影柱面　　　　投影曲线

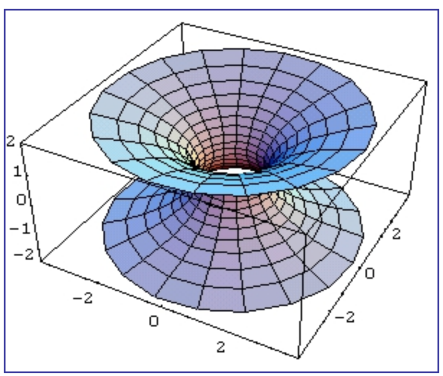
[4] 空间立体或曲面在坐标面上的投影

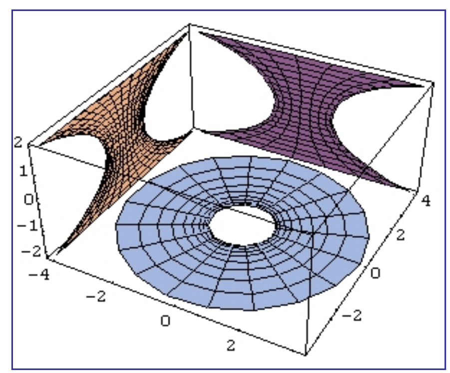
空间立体





曲面





二、典型例题

例1 已知 $\vec{a}=\vec{i}, \vec{b}=\vec{j}-2\vec{k}, \vec{c}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$,

求一单位向量 $\vec{n}^0$, 使 $\vec{n}^0 \perp \vec{c}$, 且 $\vec{n}^0, \vec{a}, \vec{b}$ 共面.

解 设 $\vec{n}^0 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, 由题设条件得

$$\begin{cases} \left|\vec{n}^0\right| = 1 \\ \vec{n}^0 \perp \vec{c} \\ \vec{n}^0 \perp \vec{a} \times \vec{b} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

解得 $\vec{n}^0 = \pm\left(\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right).$

例2 求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases} y = 2x \\ z = x-1 \end{cases}$,

$L_2:\begin{cases} y = 3x-4 \\ z = 2x-1 \end{cases}$ 都相交的直线 L.

解 将两已知直线方程化为参数方程为

$$L_1:\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t-1 \end{cases}, \quad L_2:\begin{cases} x = t \\ y = 3t-4 \\ z = 2t-1 \end{cases}$$

设所求直线 L 与 L_1, L_2 的交点分别为

$A(t_1, 2t_1, t_1 - 1)$ 和 $B(t_2, 3t_2 - 4, 2t_2 - 1)$.

$\because M_0(1,1,1)$ 与 A, B 三点共线,

故 $\overrightarrow{M_0A} = \lambda \overrightarrow{M_0B}$ (λ 为实数).

于是 $\overrightarrow{M_0A}, \overrightarrow{M_0B}$ 对应坐标成比例，即有

$$\frac{t_1 - 1}{t_2 - 1} = \frac{2t_1 - 1}{(3t_2 - 4) - 1} = \frac{(t_1 - 1) - 1}{(2t_2 - 1) - 1},$$

解之得 $t_1 = 0, t_2 = 2,$

$\therefore A(0,0,-1), B(2,2,3)$

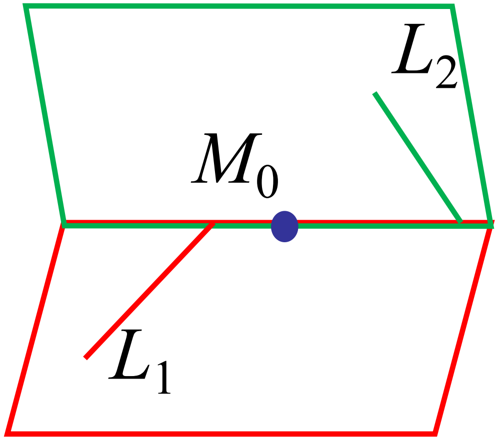
$\because$ 点 $M_0(1,1,1)$ 和 $B(2,2,3)$同在直线 L 上,

故 L 的方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

例2 求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases} y=2x \\ z=x-1 \end{cases}$,

$L_2:\begin{cases} y=3x-4 \\ z=2x-1 \end{cases}$ 都相交的直线 L.



方法二：

过直线L_1的平面束为：

$2x-y+\lambda(x-z-1)=0$

过点M_0和直线L_1的平面满足：

$2-1+\lambda(1-1-1)=0$ 解得$\lambda=1$， 代入平面束得到

过点M_0和直线L_1的平面： $3x-y-z-1=0$

同理可得过点M_0和直线L_2的平面：$2x-z-1=0$

所求直线方程为：

$$\begin{cases} 3x-y-z-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$$

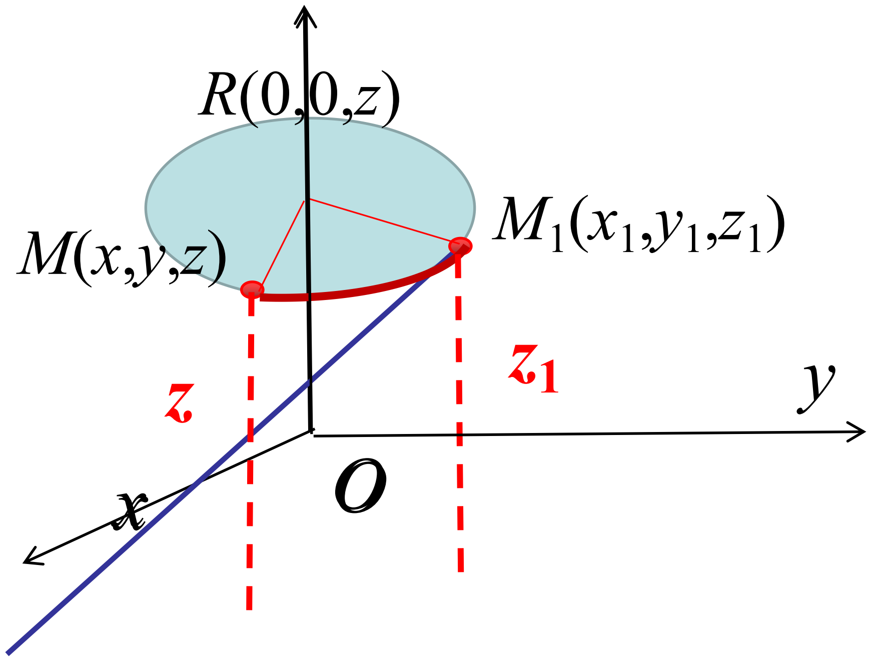
例3 直线$L: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$绕$z$轴旋转一周，求旋转曲面的方程.

解 设直线上一点 $M_1(1, y_1, z_1)$ 有 $y_1 = z_1$,

旋转后 $M_1(1, y_1, z_1)$ 到达 $M(x, y, z)$ 位置

由于高度不变，有 $z = z_1$,

又 M 和 M_1 到 z 轴的距离 r 不因旋转而改变，



故 $r^2 = 1 + y_1^2 \ = x^2 + y^2$,

由于 $z = z_1 = y_1$,

故所求旋转曲面方程为

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

例4 求过直线：$\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0, \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 组成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

解 过已知直线的平面束方程为

$$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0,$$

即 $(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0,$

其法向量 $\vec{n}=\{1+\lambda,5,1-\lambda\}.$

又已知平面的法向量 $\vec{n}=\{1,-4,-8\}.$

由题设知

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|}$$

$$=\frac{|(1+\lambda)\cdot 1+5\cdot(-4)+(1-\lambda)\cdot(-8)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}}$$

即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{|\lambda-3|}{\sqrt{2\lambda^2+27}}$， 由此解得 $\lambda=-\dfrac{3}{4}.$

代回平面束方程为 $x+20y+7z-12=0.$

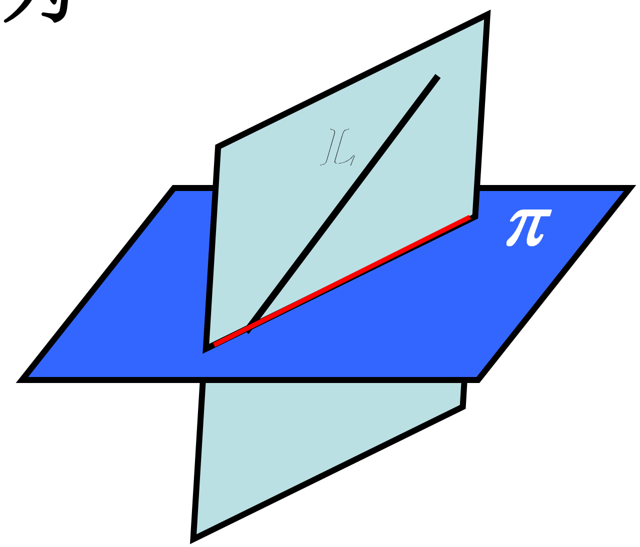
所以所求平面为 $x-z+4=0,\ x+20y+7z-12=0$

例5 求直线 $L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\ x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 π: $x+2y-z=0$ 上的投影直线的方程.

解 过直线 L 的平面束方程为

$$(2x-y+z-1)$$
$$+\lambda(x+y-z+1)=0,$$

即 $(2+\lambda)x+(\lambda-1)y$
$$+(1-\lambda)z+(\lambda-1)=0.$$



又 $\because$ 垂直于平面 π,

$$\therefore (2+\lambda)\cdot 1+(\lambda-1)\cdot 2+(1-\lambda)\cdot(-1)=0.$$

即 $4\lambda-1=0$, 故 $\lambda=\dfrac{1}{4}$

将 λ 代入平面束方程，得 $3x-y+z-1=0.$

所求投影直线方程为 $\begin{cases} 3x-y+z-1=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}.$

测　验　题

一、选择题：

1、若$\vec{a}$，$\vec{b}$为共线的单位向量，则它们的数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　　）.

（A） 1；　　　　　　（B）-1；

（C） 0；　　　　　　（D）$\cos(\vec{a},\vec{b})$.

2、向量$\vec{a}\times\vec{b}$与二向量$\vec{a}$及$\vec{b}$的位置关系是（　　）.

（A） 共面；　　　　　　（B）共线；

（C） 垂直；　　　　　　（D）斜交 .

3、设向量$\vec{Q}$与三轴正向夹角依次为α, β, γ，当$\cos\beta = 0$时，有（　　）

(A) $\vec{Q} \parallel xoy$面；　　(B) $\vec{Q} \parallel yoz$面;

(C) $\vec{Q} \parallel xoz$面;　　(D) $\vec{Q} \perp xoz$面

4、设向量$\vec{Q}$ 与三轴正向夹角依次为α, β, γ当$\cos\gamma = 1$时有（　　）

(A) $\vec{Q} \perp xoy$面；　　(B) $\vec{Q} \perp yoz$面;

(C) $\vec{Q} \perp xoz$面;　　(D) $\vec{Q} \parallel xoy$面

5、$(\vec{\alpha} \pm \vec{\beta})^2 =$（　　）

（A）$\vec{\alpha}^2 \pm \vec{\beta}^2$；　　（B）$\vec{\alpha}^2 \pm 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2$；

（C）$\vec{\alpha}^2 \pm \vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2$；　　（D）$\vec{\alpha}^2 \pm \vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\beta}^2$.

6、设平面方程为$Bx + Cz + D = 0$，且$B, C, D \neq 0$，则平面（　　）.

（A） 平行于 x 轴；

（B） 平行于 y 轴；

（C） 经过 y 轴；

（D） 垂直于 y 轴.

7、设直线方程为$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ B_2y+D_2=0 \end{cases}$且

$A_1, B_1, C_1, D_1, B_2, D_2 \neq 0$, 则直线（　　）.

（A） 过原点；　　　　　（B）平行于 z 轴；

（C）垂直于 y 轴；　　　（D）平行于 x 轴.

8、曲面$z^2+xy-yz-5x=0$与直线$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-5}{3}$

$=\dfrac{z-10}{7}$的交点是（　）.

（A）$(1,2,3),(2,-1,-4)$；

（B）$(1,2,3)$；

（C）$(2,3,4)$；

（D）$(2,-1,-4)$.

9、已知球面经过$(0,-3,1)$且与xoy面交成圆周

$\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z=0 \end{cases}$，则此球面的方程是（　　）.

（A）$x^2+y^2+z^2+6z+16=0$;

（B）$x^2+y^2+z^2-16z=0$;

（C）$x^2+y^2+z^2-6z+16=0$;

（D）$x^2+y^2+z^2+6z-16=0$.

10、下列方程中所示曲面是双叶旋转双曲面的是（　　）.

（A）$x^2+y^2+z^2=1$;　　（B）$x^2+y^2=4z$;

（C）$x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$;　　（D）$\dfrac{x^2+y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=-1$.

二、已知向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角等于$\frac{\pi}{3}$，且$\left|\vec{a}\right| = 2$，$\left|\vec{b}\right| = 5$，求$(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b})$．

三、求向量$\vec{a} = \{4,-3,4\}$在向量$\vec{b} = \{2,2,1\}$上的投影．

四、设平行四边形二边为向量$\vec{a} = \{1,-3,1\}$；$b = \{2,-1,3\}$，求其面积．

五、已知$\vec{a}, \vec{b}$，为两非零不共线向量，求证：$(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$.

六、一动点与点$M(1,0,0)$的距离是它到平面$x=4$的距离的一半，试求该动点轨迹曲面与yoz面的交线方程．

七、求直线L：$\begin{cases} x=3-t \\ y=-1+2t \\ z=5+8t \end{cases}$，在三个坐标面上及平面$\pi: x-y+3z+8=0$上的投影方程．

八、求通过直线$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$且垂直于平面$3x+2y-z-5=0$的平面方程．

九、求点$(-1,-4,3)$并与下面两直线

$$L_1:\begin{cases}2x-4y+z=1\\x+3y=-5\end{cases},\quad L_2:\begin{cases}x=2+4t\\y=-1-t\\z=-3+2t\end{cases}$$ 都垂直的直线方程．

十、求通过三平面：$2x+y-z-2=0$，$x-3y+z+1=0$和$x+y+z-3=0$的交点，且平行于平面$x+y+2z=0$的平面方程．

十一、 在平面$x+y+z+1=0$内，求作一直线，使它通过直线$\begin{cases} y+z+1=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$与平面的交点，且与已知直线垂直 .

十二、 判断下列两直线 $L_1: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$, $L_2: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$, 是否在同一平面上, 在同 一平面上求交点，不在同一平面上求两直线间的距离 .

测验题答案

一、1、D；　2、C；　3、C；　4、A；　5、B；
6、B；　7、C；　8、A；　9、D；　10、D.

二、-103.　　三、2.　　四、$3\sqrt{10}$.

六、$\begin{cases} \dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{3}=1 \\ x=0 \end{cases}$.

七、$\begin{cases} x=3t \\ y=-1+2t, \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3-t \\ y=0 \\ z=5+8t \end{cases}$, $\begin{cases} x=0 \\ y=-1+2t, \\ z=5+8t \end{cases}$

$\begin{cases} 14x+11y-z-26=0 \\ x-y+3z+8=0 \end{cases}$.

八、$x-8y-13z+9=0.$

九、$\begin{cases} x=-1-12t \\ y=-4+46t. \\ z=3+t \end{cases}$

十、$x+y+2z-4=0.$

十一、$\begin{cases} 2x+y-z+1=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases}.$

十二、直线L_1与L_2为异面直线，$d=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.（1、求过L_1平行于L_2的平面；2、求连接两点的向量在平面法向量上的投影。）