

- 1、(1) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导,  $a, b$  是  $f(x)=0$  的两个相异实根. 求证:  
 $2021f(x) + f'(x) = 0$  在  $(a, b)$  上至少有一个实根.  
 (2)  $nf(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ . 设  
 (3)  $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ . 设  
 (4) 设  $f(x)$  在  $[1, e]$  上可导, 且  $f(1)=0, f(e)=1$ , 证明方程  $xf'(x) - 1 = 0$  在  $(1, e)$  内至少有一实根.

2. 函数  $y = \sin x$  的 3 阶麦克劳林公式为\_\_\_\_\_. (两种余项形式均可)

3. 写出  $f(x) = \ln \sin x$  在  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  处的拉格朗日型余项及佩亚诺型余项的二阶泰勒公式.

$$\text{由 } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \ln 2, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cot \frac{\pi}{4} = 1, \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\csc^2 \frac{\pi}{4} = -2,$$

$$f'''(x) = 2 \csc^2 x \cdot \cot x \quad (0 < x < \pi),$$

得  $f(x) = \ln \sin x$  在  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  处拉格朗日型余项的二阶泰勒公式为

$$\ln \sin x = -\frac{1}{2} \ln 2 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\csc^2 \xi \cdot \cot \xi}{3} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3, \quad \text{其中 } \xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } \frac{\pi}{4} \text{ 之}$$

间;

佩亚诺型余项的二阶泰勒公式为

$$\ln \sin x = -\frac{1}{2} \ln 2 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right).$$

4. 求  $f(x) = 2x^3 - 6x$  在闭区间  $[-1, 2]$  上的最大值与最小值.

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f(-1) = 4, f(1) = -4, f(2) = 4$$

5. 求  $f(x) = x^2 e^{-x}$  的单调区间及极值、其图形的凹凸区间及拐点.

解:  $D_f = (-\infty, +\infty)$ ;  $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = -xe^{-x}(x-2)$  的零点为 0 和 2;

$$f''(x) = 2e^{-x} - 4xe^{-x} + x^2 e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = e^{-x}(x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2}))$$

的零点为  $2 \pm \sqrt{2}$ .

列表:

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2 - \sqrt{2})$	$2 - \sqrt{2}$	$(2 - \sqrt{2}, 2)$	2	$(2, 2 + \sqrt{2})$	$2 + \sqrt{2}$	$(2 + \sqrt{2}, +\infty)$
$f'(x)$	—	0	+	+	+	0	—	—	—
$f''(x)$	+	+	+	0	—	—	—	0	+
$f(x)$	减, 凹	极值	增, 凹	拐点	增, 凸	极值	减, 凸	拐点	减, 凹

$\therefore f(x)$  在  $(-\infty, 0]$ 、 $[2, +\infty)$  上单调减少, 在  $[0, 2]$  上单调增加;

其图形在  $(-\infty, 2 - \sqrt{2}]$ 、 $[2 + \sqrt{2}, +\infty)$  上是凹的, 在  $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$  上是凸的, 拐点为  $(2 - \sqrt{2}, (6 - 4\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}})$  和  $(2 + \sqrt{2}, (6 + 4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}})$ , 极小值 0, 极大值  $4e^{-2}$ .

6、讨论函数  $y = 1 + \frac{36x}{(x+3)^2}$  的单调区间和极值以及凹凸性和拐点. (课本)

7、证明: 当  $x > 1$  时,  $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ .

8. 证明不等式:  $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$  ( $0 < x < \frac{\pi}{2}$ )

9、证明不等式  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ . (有  $x - y$ ) 的考虑拉氏定理。

10. 设  $x > y > 0$ , 证明:  $x^5 - y^5 < 5x^4(x - y)$ .

11. 利用凹凸性证明  $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$  ( $x \neq y$ )