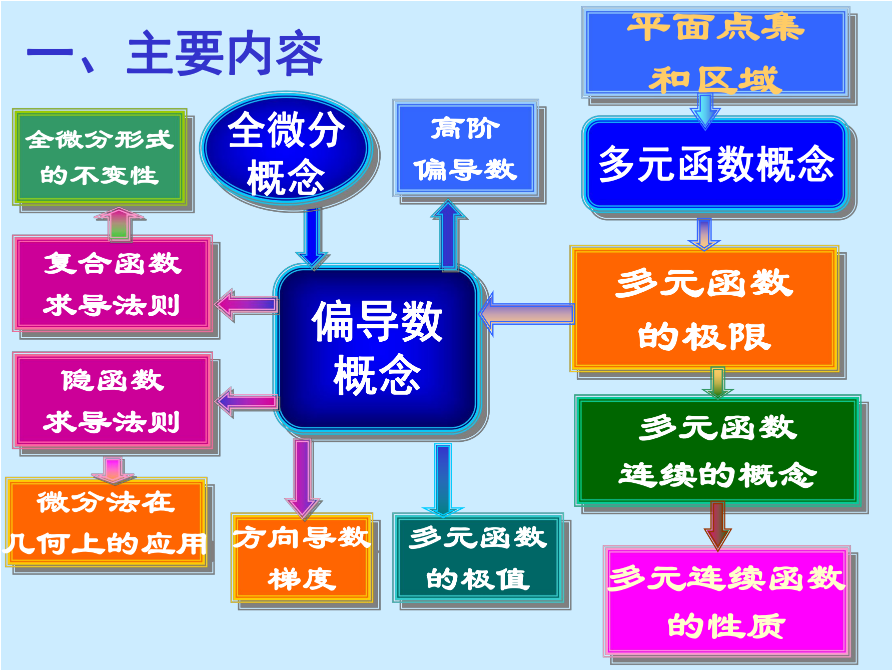
一、主要内容



1、多元函数概念

定义 设D是平面上的一个点集，如果对于每个点$P(x.y)\in D$，变量z按照一定的法则总有确定的值和它对应，则称z是变量x,y的二元函数，记为$z=f(x,y)$（或记为$z=f(P)$）.

类似地可定义三元及三元以上函数.

当$n\geq 2$时，n元函数统称为多元函数.

2、多元函数的极限

定义 设函数$z=f(x,y)$的定义域为D，$P_0(x_0,y_0)$是其聚点，如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于适合不等式$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$的一切点，都有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$成立，则称$A$为函数$z=f(x,y)$当$x\to x_0$，$y\to y_0$时的极限，

记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

（或$f(x,y)\to A \quad (\rho\to 0)$这里$\rho=|PP_0|$）.

说明：

（1）定义中$P\to P_0$的方式是任意的；

（2）二元函数的极限也叫二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$;

（3）二元函数的极限运算法则与一元函数类似.

3、多元函数的连续性

定义 设n元函数$f(P)$的定义域为点集D，P_0是其聚点且$P_0 \in D$，如果$\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$则称$n$元函数$f(P)$在点$P_0$处连续.

设P_0是函数$f(P)$的定义域的聚点，如果$f(P)$在点P_0处不连续，则称P_0是函数$f(P)$的间断点.

4、多元连续函数的性质

（1）最大值和最小值定理

在有界闭区域D上的多元连续函数，在D上至少取得它的最大值和最小值各一次.

（2）介值定理

在有界闭区域D上的多元连续函数，如果在D上取得两个不同的函数值，则它在D上取得介于这两值之间的任何值至少一次.

5、偏导数概念

定义 设函数$z = f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，当y固定在y_0而x在x_0处有增量Δx时，相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

如果$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限为函数$z = f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处对$x$的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \quad \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \text{或} f_x(x_0,y_0).$$

同理可定义函数$z = f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对y的偏导数，为

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

记为$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$或$f_y(x_0,y_0)$.

如果函数$z=f(x,y)$在区域D内任一点(x,y)处对x的偏导数都存在，那么这个偏导数就是x、y的函数，它就称为函数$z=f(x,y)$对自变量x的偏导数，

记作$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$z_x$或$f_x(x,y)$.

同理可以定义函数$z=f(x,y)$对自变量y的偏导数，记作$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$z_y$或$f_y(x,y)$.

6、高阶偏导数

函数$z=f(x,y)$的二阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y),$$

纯偏导

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y).$$

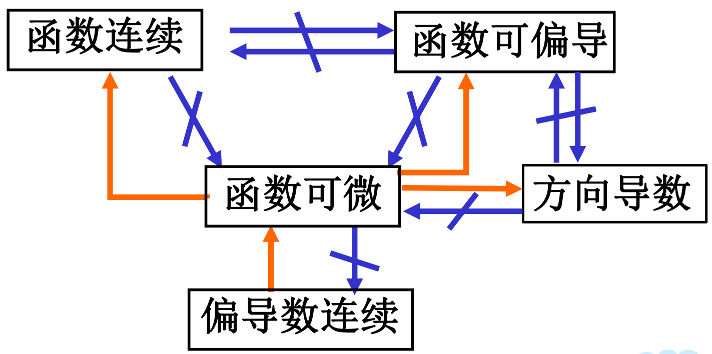
混合偏导

定义　二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

7、全微分概念

如果函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的全增量$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$可以表示为$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A,B 不依赖于$\Delta x,\Delta y$而仅与$x,y$有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$可微分，$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$的全微分，记为$dz$，即 $dz=A\Delta x+B\Delta y$.

多元函数连续、可导、可微的关系



8、复合函数求导法则

如果$u=\phi(x,y)$及$v=\psi(x,y)$都在点(x,y)具有对x和y的偏导数，且函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，则复合函数$z=f[\phi(x,y),\psi(x,y)]$在对应点(x,y)的两个偏导数存在，且可用下列公式计算

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

9、隐函数的求导法则

(1) $F(x,y)=0$

隐函数存在定理 1 设函数$F(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域内具有连续的偏导数，且$F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程$F(x,y)=0$在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续导数的函数$y=f(x)$，它满足条件$y_0=f(x_0)$，并有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

隐函数的求导公式

(2) $F(x,y,z)=0$

隐函数存在定理 2 设函数$F(x,y,z)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内有连续的偏导数，且$F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程$F(x,y,z)=0$在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数$z=f(x,y)$，它满足条件$z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

（3）方程组的情形

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}\qquad \begin{cases}u=(x,y)\\ v=(x,y)\end{cases}$$

隐函数存在定理 3 设$F(x,y,u,v)$、$G(x,y,u,v)$在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内有对各个变量的连续偏导数，且$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$, $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，且偏导数所组成的函数行列式（或称雅可比式）

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$不等于零，则方程组

$$F(x,y,u,v)=0、\qquad G(x,y,u,v)=0$$

在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数

$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，它们满足条件 $\quad J=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$

$u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

空间曲线方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$, $\quad\begin{cases}x=x\\ y=\varphi(x)\\ z=\psi(x)\end{cases}$

切线的切向量为 $\boxed{\vec{T}=\left(1,\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0,z_0)},\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\right)}$

$$\vec{T}_1=\left(\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_0,\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_0,\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_0\right)$$

切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_0}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_0}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_0},$$

法平面方程为

$$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_0(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_0(y-y_0)+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_0(z-z_0)=0.$$

10、微分法在几何上的应用

（1） 空间曲线的切线与法平面

Γ： $x=\phi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t).$

$$\boxed{切向量:\vec{T}=\left(\phi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\right)}$$

切线方程为 $$\frac{x-x_0}{\phi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

法平面方程为

$$\phi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0.$$

（2） 曲面的切平面与法线

π： $F(x,y,z)=0.$

切平面的法向量为

$$\boxed{\vec{n}=\left(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\right)}$$

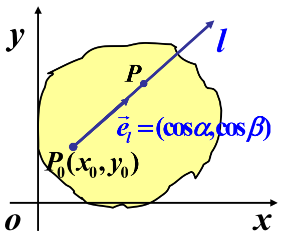
切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$
$$+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

11、(1)方向导数(沿 l 的变化率)



$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

定理 如果函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$是可微分的，那末函数在该点沿任意方向 l的方向导数都存在，且有 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$,

其中$\cos\alpha,\cos\beta$ 是方向 l的方向余弦.

推广可得三元函数方向导数的定义

对于三元函数$u=f(x,y,z)$，它在空间一点$P(x,y,z)$沿着方向 L 的方向导数 ，可定义为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{t}$$

设方向 L 的方向角为α,β,γ

$\Delta x=t\cos\alpha$, $\Delta y=t\cos\beta$, $\Delta z=t\cos\gamma$,

同理：当函数在此点可微时，那末函数在该点沿任意方向 L 的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

（2）梯度的概念

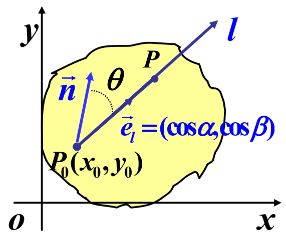
定义 设函数$z=f(x,y)$在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点$P(x,y)\in D$，都可定出一个向量$\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$，这向量称为函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$的梯度，记为

$$gradf(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}.$$

或
$$gradf(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

梯度的含义 $\vec{n}=gradf(x,y)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$
$$=gradf(x,y)\cdot\vec{e}$$
$$=|gradf(x,y)|\cos\theta.$$



当 $\cos\theta=1$ 时， $\dfrac{\partial f}{\partial l}$有最大值.

函数在某点的梯度是这样一个向量，在它的方向上，函数取得最大方向导数,而它的模为方向导数的最大值．最大值就是梯度的模

$$|gradf(x,y)|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

梯度的概念可以推广到三元函数

三元函数$u=f(x,y,z)$在空间区域 G 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点$P(x,y,z)\in G$，都可定义一个向量(梯度)

$$grad f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

类似于二元函数，此梯度也是一个向量，其方向与取得最大方向导数的方向一致，其模为方向导数的最大值.

12、多元函数的极值

定义 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，对于该邻域内异于(x_0,y_0)的点(x,y)：若满足不等式$f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则称函数在(x_0,y_0)有极大值；若满足不等式$f(x,y)>f(x_0,y_0)$，则称函数在(x_0,y_0)有极小值；

极大值、极小值统称为极值.

使函数取得极值的点称为极值点.

多元函数取得极值的条件

定理 1（必要条件）

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)具有偏导数，且在点(x_0,y_0)处有极值，则它在该点的偏导数必然为零：$f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$.

定义 一阶偏导数同时为零的点，称为多元函数的驻点.

注意 驻点 $\overset{\longleftarrow}{\not\longrightarrow}$ 极值点

定理 2（充分条件）

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内连续，有一阶及二阶连续偏导数，

又 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，令
$f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$，

则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处是否取得极值的条件如下：

（1）$AC-B^2>0$时有极值，

当$A<0$时有极大值，当$A>0$时有极小值；

（2）$AC-B^2<0$时没有极值；

（3）$AC-B^2=0$时可能有极值.

求函数$z=f(x,y)$极值的一般步骤：

第一步　解方程组 $f_x(x,y)=0,\quad f_y(x,y)=0$

求出实数解，得驻点.

第二步　对于每一个驻点(x_0,y_0)，

求出二阶偏导数的值A、B、C.

第三步　定出$AC-B^2$的符号，再判定是否是极值.

条件极值：对自变量有附加条件的极值.

拉格朗日乘数法

要找函数$z=f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$下的可能极值点，

先构造函数$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，

其中λ为某一常数，可由

$$\boxed{\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases}}$$

解出x,y,λ，其中x,y就是可能的极值点的坐标.

二、典型例题

例1 设 $z=x^3f(xy,\dfrac{y}{x})$，(f 具有二阶连续偏导数)，

求 $\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

$$\boxed{f_1'=f_1'(xy,\frac{y}{x})}\qquad \boxed{f_2'=f_2'(xy,\frac{y}{x})}$$

解 $$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3(f_1'x+f_2'\frac{1}{x})=x^4f_1'+x^2f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4(f_{11}''x+f_{12}''\frac{1}{x})+x^2(f_{21}''x+f_{22}''\frac{1}{x})$$

$$=x^5f_{11}''+2x^3f_{12}''+xf_{22}'',$$

$$\boxed{f_1'=f_1'(xy,\frac{y}{x})}\qquad \boxed{f_2'=f_2'(xy,\frac{y}{x})}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^4f_1'+x^2f_2')$$

$$=4x^3f_1'+x^4\frac{\partial f_1'}{\partial x}+2xf_2'+x^2\frac{\partial f_2'}{\partial x}$$

$$=4x^3f_1'+x^4[f_{11}''y+f_{12}''(-\frac{y}{x^2})]+2xf_2'+x^2[f_{21}''y+f_{22}''(-\frac{y}{x^2})]$$

$$=4x^3f_1'+2xf_2'+x^4yf_{11}''-yf_{22}''.$$

例2 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 之间的最短距离.

解 设 $P(x,y,z)$ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 上任一点,则 P 到平面 $x+y-2z-2=0$ 的距离为 d,

$$d=\frac{1}{\sqrt{6}}|x+y-2z-2|.$$

分析: 本题变为求一点 $P(x,y,z)$,使得 x,y,z 满足 $x^2+y^2-z=0$且使 $d=\frac{1}{\sqrt{6}}|x+y-2z-2|$ (即 $d^2=\frac{1}{6}(x+y-2z-2)^2$) 最小.

令 $F(x,y,z)=\frac{1}{6}(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$, 得

$$\begin{cases} F'_x=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)-2\lambda x=0, & (1)\\ F'_y=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)-2\lambda y=0, & (2)\\ F'_z=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)(-2)+\lambda=0, & (3)\\ z=x^2+y^2, & (4)\end{cases}$$

解此方程组得 $x=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{4},\ z=\frac{1}{8}.$

即得唯一驻点 $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8})$,

根据题意距离的最小值一定存在,且有唯一驻点,故必在 $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8})$ 处取得最小值.

$$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right|=\frac{7}{4\sqrt{6}}.$$

测 验 题

一、选择题:

1、二元函数 $z=\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\arcsin\frac{1}{x^2+y^2}$ 的定义域是(   ).

(A) $1\le x^2+y^2\le 4$; (B) $1<x^2+y^2\le 4$;

(C) $1\le x^2+y^2<4$; (D) $1<x^2+y^2<4$.

2、设 $f(xy,\frac{x}{y})=(x+y)^2$, 则 $f(x,y)=$(   ).

(A) $x^2(y+\frac{1}{y})^2$; (B) $\frac{x}{y}(1+y)^2$;

(C) $y^2(x+\frac{1}{x})^2$; (D) $\frac{y}{x}(1+y)^2$.

3、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=$(　).

(A)　0　;　　　(B)　1　;

(C)　2　;　　　(D)　e　.

4、函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续,且两个偏导数$f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$存在是$f(x,y)$在该点可微的(　).

(A) 充分条件,但不是必要条件;

(B) 必要条件,但不是充分条件;

(C) 充分必要条件;

(D) 既不是充分条件,也不是必要条件.

5、设$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

则在原点$(0,0)$处$f(x,y)$(　).

(A)偏导数不存在;　　(B)不可微;

(C)偏导数存在且不连续;　　(D)可微 .

6、设$z=f(x,v),v=v(x,y)$其中f,v具有二阶连续偏导数. 则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$(　).

(A) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial y}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$;　　(B) $\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$;

(C) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}(\dfrac{\partial v}{\partial y})^2+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$;　　(D) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

7、曲面$xyz=a^3(a>0)$的切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积 V=(　).

(A)　$\frac{3}{2}a^3$;　　　(B)　$3a^3$;

(C)　$\frac{9}{2}a^3$;　　　(D)　$6a^3$.

8、二元函数$z=3(x+y)-x^3-y^3$的极值点是(　).

(A)　(1,2);　　　(B)　(1.-2);

(C)　(-1,2);　　　(D)　(-1,-1).

9、函数$u=\sin x\sin y\sin z$满足

$x+y+z=\dfrac{\pi}{2}(x>0,y>0,z>0)$的条件极值是

(　).

(A)　1　;　　　(B)　0　;

(C)　$\frac{1}{6}$　;　　　(D)　$\frac{1}{8}$　.

10、设函数$u=u(x,y),v=v(x,y)$在点(x,y)的某邻域内可微分,则 在点(x,y)处有

$grad(uv)=$(　).

(A)　$gradu\cdot gradv$;

(B)　$u\cdot gradv+v\cdot gradu$;

(C)　$u\cdot gradv$;

(D)　$v\cdot gradu$.

二、讨论函数$z=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$的连续性，并指出间断点类型.

三、求下列函数的一阶偏导数:

1、$z = x^{\ln y}$ ；

2、$u = f(x, xy, xyz), z = \varphi(x, y)$；

3、$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$.

四、设$u = f(x,z)$, 而$z(x,y)$是由方程$z = x + y\varphi(z)$所确的函数, 求du .

五、设$z = (u, x, y), u = xe^y$, 其中f 具有连续的二阶偏导数, 求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

六、设$x = e^u \cos v, y = e^u \sin v, z = uv$, 试求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

七、设 x 轴正向到方向 l 的转角为 φ, 求函数 $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$在点(1, 1)沿方向l的方向导数, 并分别确定转角φ,使这导数有(1)最大值；(2)最小值；(3)等于零 .

八、求平面$\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{5} = 1$和柱面$x^2 + y^2 = 1$的交线上与$xoy$平面距离最短的点 .

九、在第一卦限内作椭球面$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$的切平面, 使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小, 求这切平面的切点, 并求此最小体积 .

测验题答案

一、1、A；　2、B；　3、B；　4、B；　5、D；
　6、C；　7、C；　8、D；　9、D；　10、B.

二、(1)当$x + y \neq 0$时, 在点(x,y)函数连续；
(2)当$x + y = 0$时, 而(x,y)不是原点时,
则(x,y)为可去间断点, $(0,0)$为无穷间断点.

三、1、$z_x = (\ln y) x^{\ln y - 1}, \ z_y = \dfrac{\ln x}{y} x^{\ln y}$；

2、$u_x = f_1 + yf_2 + (yz + xyz_x) f_3$,
$u_y = xf_2 + (xz + xyz_y) f_3$.

3、$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$,

$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, x^2 + y^2 \neq 0 \\ o, x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$.

四、$(f_1 - \dfrac{f_2}{y\varphi'(z) - 1})dx - \dfrac{f_2 \varphi(z)}{y\varphi'(z) - 1} dy$.

五、$xe^{2y} f''_{uu} + e^y f''_{uy} + xe^y f''_{xu} + f''_{xy} + e^y f'_u$.

六、$\dfrac{\partial z}{\partial x} = (v\cos v - u\sin v)e^{-u}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = (u\cos v + v\sin v)e^{-u}$.

七、$\dfrac{\partial f}{\partial l} = \cos\varphi + \sin\varphi$,

(1) $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, (2) $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$, (3) $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ 及 $\dfrac{7\pi}{4}$.

八、$(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12})$.

九、切点$(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$，$V_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.