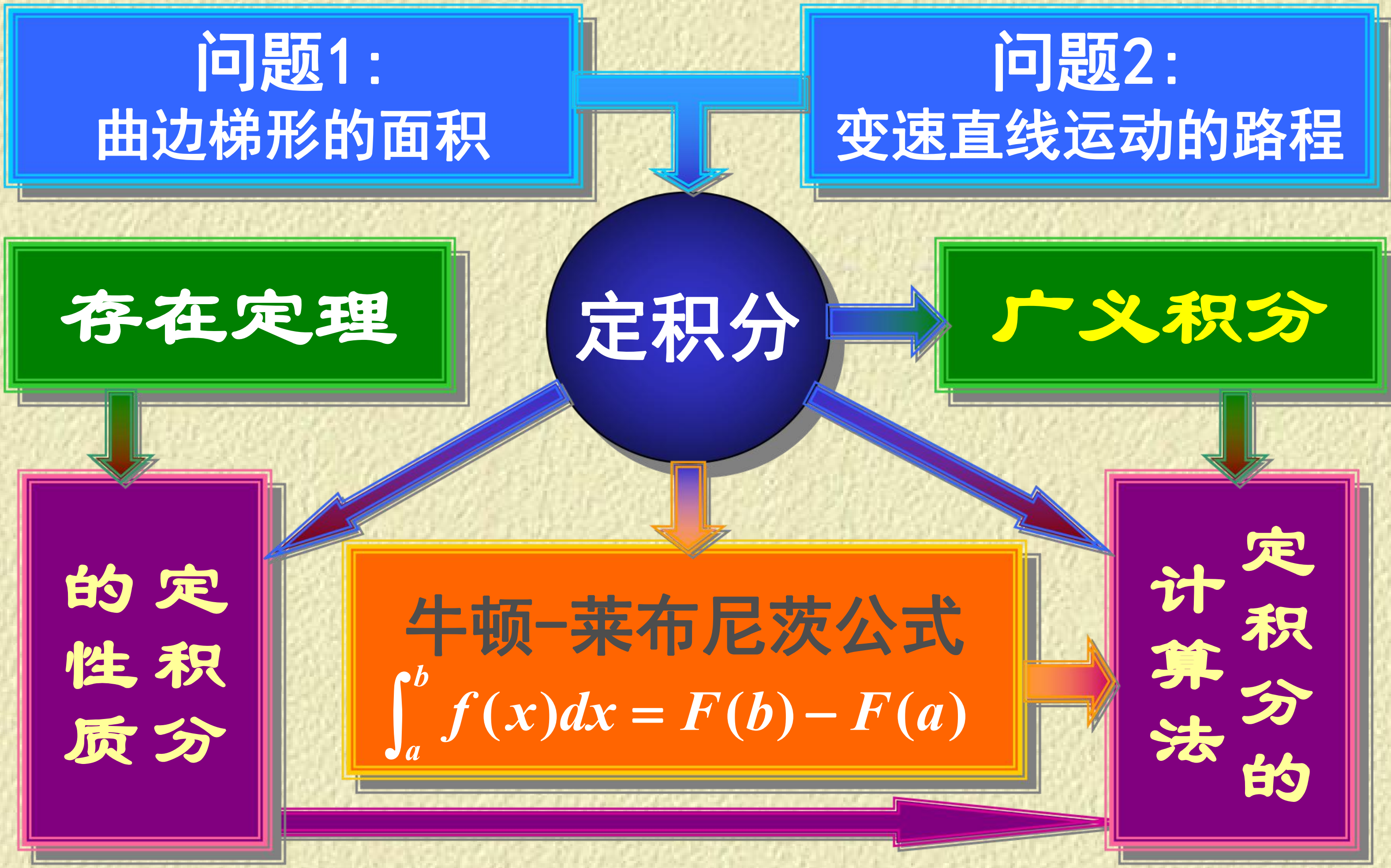
第五章　定 积 分

习 题 课

- 主要内容
- 典型例题

帮助　返回

一、主要内容



上页 下页 返回

1、问题的提出

实例1 （求曲边梯形的面积A）

曲边梯形由连续曲线 $y = f(x)(f(x) \geq 0)$、x轴与两条直线$x = a$、$x = b$所围成.

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

实例2 （求变速直线运动的路程）

设某物体作直线运动，已知速度$v = v(t)$是时间间隔$[T_1, T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t) \geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程 S.

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i) \Delta t_i$$

方法:分割、求和、取极限.

2、定积分的定义

定义 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有界，在$[a,b]$中任意若干若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间$[a,b]$分成n个小区间，

$$[x_0, x_1],[x_1, x_2],\cdots[x_{n-1}, x_n],$$

各小区间的长度依次为$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$(i = 1,2,\cdots)$，

在各小区间上任取 一点ξ_i（$\xi_i \in \Delta x_i$），

上页 下页 返回

作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots)$ 并作和 $S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，

记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果不论对 $[a,b]$

怎样的分法，也不论在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上点 ξ_i 怎样

的取法，只要当 $\lambda\to 0$ 时，和 S 总趋于确定的极限 I，

我们称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，

记为 $$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

上页 下页 返回

3、存在定理

可积的两个充分条件：

定理1　当函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续时，

称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

定理2　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，

且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

4、定积分的性质

性质1 $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

性质2 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

性质3 $\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a$

性质4　如果在区间$[a,b]$上$f(x)\geq 0$，

则$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \qquad (a<b)$

推论：（1）　如果在区间$[a,b]$上$f(x)\leq g(x)$，

则$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \qquad (a<b)$

（2）　$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a<b)$

性质5　设M及m分别是函数$f(x)$在区间$[a,b]$

上的最大值及最小值，

则　$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

性质6 (定积分中值定理)

如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，

则在积分区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，

使$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \le \xi \le b)$$

积分中值公式

上页　下页　返回

5、牛顿—莱布尼茨公式

定理1 如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限的函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上具有导数，且它的导数是 $\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\qquad(a\le x\le b)$

定理2（原函数存在定理）如 果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$就是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

定理 3（微积分基本公式） 如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

也可写成 $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b.$

牛顿—莱布尼茨公式

表明：一个连续函数在区间 $[a,b]$ 上的定积分等于它的任一原函数在区间 $[a,b]$ 上的增量.

6、定积分的计算法

（1）换元法

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

换元公式

（2）分部积分法

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

分部积分公式

上页 下页 返回

7、广义积分

(1)无穷限的广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

当极限存在时，称广义积分收敛；当极限不存在时，称广义积分发散.

(2)无界函数的广义积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)dx$$

当极限存在时，称广义积分收敛；当极限不存在时，称广义积分发散.

二、典型例题

例1　求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}dx$.

解　原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)dx$$

$$= 2\sqrt{2} - 2.$$

例2 求$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x}{\sin^p x+\cos^p x}dx \qquad (p>0)$

解 令$x=\dfrac{\pi}{2}-t$,则$dx=-dt$,

当$x=\dfrac{\pi}{2}$时, $t=0$;当$x=0$时, $t=\dfrac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x}{\sin^p x+\cos^p x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^p(\frac{\pi}{2}-t)}{\sin^p(\frac{\pi}{2}-t)+\cos^p(\frac{\pi}{2}-t)}(-dt)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^p t}{\cos^p t+\sin^p t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^p x}{\cos^p x+\sin^p x}dx$$

$$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x}{\sin^p x+\cos^p x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x+\cos^p x}{\sin^p x+\cos^p x}dx=\frac{\pi}{4}$$

例3 求 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx.$

解 令 $e^{-x}=\sin t,$

x	0	$\ln 2$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$

则 $x=-\ln\sin t,\ dx=-\dfrac{\cos t}{\sin t}dt.$

$$原式=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos t\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right)dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

上页 下页 返回

例4　求 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[\frac{\sin x}{x^8+1}+\sqrt{\ln^2(1-x)}]dx.$

解　$原式=0+\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|\ln(1-x)|dx$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\ln(1-x)dx-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\ln(1-x)dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{1}{2}.$$

例5 求 $\int_{-2}^{2}\min\{\frac{1}{|x|},x^2\}dx.$

解 $\because \min\{\frac{1}{|x|},x^2\}=\begin{cases} x^2, & |x|\le 1 \\ \frac{1}{|x|}, & |x|>1 \end{cases}$ 是偶函数,

$$原式=2\int_0^2\min\{\frac{1}{|x|},x^2\}dx$$

$$=2\int_0^1 x^2dx+2\int_1^2\frac{1}{x}dx=\frac{2}{3}+2\ln 2.$$

例6 设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$,求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)dx$.

解 原式 $=\int_0^1 (x-1)^2[\int_0^x e^{-y^2+2y}dy]dx$

$$=[\frac{1}{3}(x-1)^3\int_0^x e^{-y^2+2y}dy]_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}(x-1)^3e^{-x^2+2x}dx$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 (x-1)^2e^{-(x-1)^2+1}d[(x-1)^2]$$

$$\underline{\underline{\text{令}\,(x-1)^2=u}}\quad-\frac{e}{6}\int_1^0 ue^{-u}du=\frac{e}{6}\int_0^1 ue^{-u}du\quad=\frac{e}{6}\int_0^1 ud(-e^{-u})$$

$$=\frac{e}{6}\left[-e^{-u}u\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-u}du\right]=\frac{e}{6}\left[-e^{-1}-e^{-u}\Big|_0^1\right]=\frac{1}{6}(e-2).$$

上页 下页 返回

例7 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,证明:

$$\int_0^{\pi}\frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{f(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx.$$

例 6 若 $f(x)$在$[0,1]$上连续,证明

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$

证 令 $x=\pi-t,$

$dx=-dt,$

$$左边=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)f(\sin t)}{1+\cos^2 t}(-dt)$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)f(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx$$

上页 下页 返回

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{f(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx-\int_0^{\pi}\frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx$$

即 $2\int_0^{\pi}\frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{f(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx$

$$\therefore\quad \int_0^{\pi}\frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{f(\sin x)}{1+\cos^2 x}dx.$$

例8 求 $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x dx}{1+e^x}$.

解

$$\text{原式} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\sin^2 t}{1+e^{-t}} (-dt) + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{e^t \sin^2 t}{1+e^t} dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{e^x \sin^2 x}{1+e^x} dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx$$

$$\therefore \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

例9 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}$.

解 由定积分的定义的可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\int_1^2\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$$

所以，所求极限式的值是 $\dfrac{4\sqrt{2}-2}{3}$

例10　求下列广义积分：

$$(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9};\quad (2)\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$$

解 (1) 原式 $=\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+4x+9}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+9}dx$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+(\frac{x+2}{\sqrt5})^2}d\frac{x+2}{\sqrt5}+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+(\frac{x+2}{\sqrt5})^2}d\frac{x+2}{\sqrt5}$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\arctan\frac{x+2}{\sqrt5}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{\sqrt5}arctan\frac{x+2}{\sqrt5}\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt5}.$$

(2) $\because \lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}=\infty,$

$\therefore x=1$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

$$\text{原式} \overset{x=\frac{1}{t}}{=} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{t\,d\dfrac{1}{t}}{\sqrt{\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{2}{t}-1}} = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{-dt}{t\sqrt{\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{2}{t}-1}}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{-t^2-2t+3}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{d(t+1)}{\sqrt{2-(t+1)^2}}$$

$$=\left(\arcsin\frac{1+t}{2}\right)_{0.5}^{1}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{4}.$$

例10 求下列广义积分：

$$(1)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9};\quad (2)\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$$

解 (1) 原式 $=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+9}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x+2)^2+5}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+2)^2+5}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt5}\arctan\frac{x+2}{\sqrt5}\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt5}\arctan\frac{x+2}{\sqrt5}\Big|_0^b$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt5}.$$

(2) $\because \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = \infty,$

$\therefore x=1$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

$$\text{原式} = \lim_{t\to 1^+}\int_t^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$$

$$= \lim_{t\to 1^+}\left[-\int_t^2 \frac{d(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{2^2-(1+\frac{1}{x})^2}}\right]$$

$$= -\lim_{t\to 1^+}\arcsin\frac{1+\frac{1}{x}}{2}\Bigg|_t^2 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}.$$

测 验 题

一、选择题：

1、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)=$（　　）

（A）0；　　（B）$\dfrac{1}{2}$；

（C）$\dfrac{\pi}{4}$；　　（D）$\dfrac{\pi}{2}$.

2、$\dfrac{d}{dx}\int_0^x \ln(t^2+1)\,dt=$（　　）

（A）$\ln(x^2+1)$；　　（B）$\ln(t^2+1)$；

（C）$2x\ln(x^2+1)$；　　（D）$2t\ln(t^2+1)$.

3、$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$ =(　　)

（A）0；　　（B）1；

（C）$\frac{1}{3}$；　　（D）∞ .

4.、定积分$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$的值是（　　）

（A）e；　　（B）$\frac{1}{2}$；

（C）$e^{\frac{1}{2}}$；　　（D）2 .

5、下列积分中，使用变换正确的是（　）

（A）$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^3 x}$，令 $x=\arctan t$；

（B）$\int_0^{3} x\sqrt[3]{1-x^2}dx$，令 $x=\sin t$；

（C）$\int_{-1}^{2} \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$，令 $1+x^2=u$；

（D）$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$，令 $x=t^{\frac{1}{3}}$．

6、下列积分中，值为零的是（　）

（A）$\int_{-1}^{1} x^2 dx$；　（B）$\int_{-1}^{2} x^3 dx$；

（C）$\int_{-1}^{1} dx$；　（D）$\int_{-1}^{1} x^2\sin x dx$．

7、已知 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，

则 $\int_0^2 xf''(x)dx =$（ ）

（A）12；　　（B）8；

（C）7；　　（D）6.

8、设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+x}, x\ge 0 \\ \dfrac{1}{1+e^x}, x<0 \end{cases}$，则定积分 $\int_0^2 f(x-1)dx$

=（ ）

（A）$1+\ln(1+\frac{1}{e})$；　　（B）$2-\ln(1+e^2)+\ln 3$；

（C）$1+\ln(1+\frac{1}{e})+\ln 2$；　　（D）$1-\ln(1+\frac{1}{e})$.

上页 下页 返回

9、广义积分$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=$（　　）

（A）$\ln 4$；　（B）0；

（C）$\frac{1}{3}\ln 4$；　（D）发散.

10、广义积分$\int_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-4x+3}=$（　　）

（A）$1-\ln 3$；　（B）$\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$；

（C）$\ln 3$；　（D）发散.

二、证明不等式:

$$\frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \le \frac{\pi}{6}, \quad (n>2).$$

三、求下列函数的导数:

1、$F(x)=\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$;

2. 、由方程$\int_0^y e^{t^2}dt+\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=1$，确定 y 为 x 的函数，求$\frac{dy}{dx}$.

上页 下页 返回

四、求下列定积分:

1、$\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$;

2、$\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$;

3、$\displaystyle\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$;

4、$\displaystyle\int_{-2}^5 \left|x^2-2x-3\right|dx$;

5、$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;

6、$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$;

7、$\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$;

8、$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$.

五、设$f(x)$在$[\,0\,,1\,]$上有连续导数，$f(0)=0$，
且$0<f'(x)\le 1$，试证：

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 \ge \int_0^1 [f(x)]^3 dx.$$

六、设$f(x)$在$[0，1]$上有二阶连续导数，证明：

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx.$$

测验题答案

一、1、C；　2、A；　3、C；　4、D；　5、C；

6、D；　7、B；　8、A；　9、C；　10、D.

三、1、$\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$；　2、$\pm 2e^{-y^2}\sin x^2$.

四、1、$2\ln\dfrac{4}{3}$；　2、$\dfrac{\pi}{4}$；　3、$\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$；　4、$\dfrac{71}{3}$；

5、1；　6、$\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$；　7、$\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{3}{4}$；　8、$\pi$.

五、提示：做辅助函数$F(x)=\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2-\int_0^x f^3(t)dt$

六、提示：用分部积分