1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的 充要条件

$f(x)$ 在点 $x_0$ 连续是 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导的 ~~必要~~ 条件.

可导必连续，连续不一定可导.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^2+2n}=\dfrac{1}{2}$. 直接除下去.

3、求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2021)^2(2x+1)^3}{x^5+3}$.

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+\frac{2021}{x})^2\cdot(2+\frac{1}{x})^3}{1+\frac{3}{x^5}}=\dfrac{8}{1}=8$

4、$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+1}=\frac{1}{2}$

有理化.

5、计算 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\cot x}$ $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{-2\sin x}\cdot\frac{-2\sin x\cos x}{\sin x}}=e^{-2}$

$\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{-\frac{1}{2\sin x}\cdot\frac{-2\sin x\cdot\cos x}{\sin x}}$

6、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)=\dfrac{1}{2}$.

$=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

等价无穷小只能在乘除式里面换！！

7、计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}$.

$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}x$,
$e^x-1\sim x$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$ $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+x-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x-1+e^{-x}}{x\cdot x}$ ⇒ 上下求导

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+1-e^{-x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+e^{-x}}{2}=\dfrac{3}{2}$

9. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\sec x-\tan x)$.

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sin x}{\cos x}$

$=\frac{1-0}{1}=1$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{(\arcsin x)^2}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{x^2}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x}{2}=\dfrac{1}{2}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(e^x-1)}{\sin^2 x}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot x}{x^2}=2$

# 复习极限.

例二 1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = A$ 是 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在的 充要 条件.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 都存在是 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在的 (还得相等). 必要(不充分) 条件

$f$ 在0点连续是 $f$ 在0点可导的 必要 条件.

2 $f'(0)=0$ 是0为$f$的极小值的 无关 条件.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 是 $f$ 在0点连续的 必要 条件.

例: 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ ax+b, & x>0 \end{cases}$ 在0点连续, 求 $a, b$.

解: $f(0) = e^0 = 1$

$x\to 0^+$ 时, $f(x) = ax+b = 1$

则 $b=1$. $a$找不出来具体值.(要求可导时可以)

例: 问 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ 在0点是否连续, 是否可导?

解: 由题意得 $f(0)=0$.

$x\to 0^+$ 时, $f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}+1)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{x}}} = 1$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}+1} = 0 \quad \therefore 连续.$$

可导 ⇒ 导数值不变

$y = \sin x^{\ln x}$, 求 $y'$

解: $\ln y = \ln x \ln \sin x$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln \sin x}{x} + \frac{\ln x \cos x}{\sin x}$$

$$y' = \left(\frac{\ln \sin x}{x} + \frac{\cos x \ln x}{\sin x}\right) \cdot \sin x^{\ln x}.$$

$e^{xy}+y^2=1+\cos x$，求 $dy$.

$(y+xy')e^{xy}+2yy'=-\sin x$

然后算出来.

不等式.

例：证明 $\tan x > x+\frac{1}{3}x^3$，$0<x<\frac{\pi}{2}$.

证：令 $f(x)=\tan x - x - \frac{1}{3}x^3$，$0<x<\frac{\pi}{2}$

$f'(x)=\sec^2 x - 1 - x^2$

$=\tan^2 x - x^2$

$=(\tan x + x)(\tan x - x)$

令 $g(x)=\tan x - x$，$0<x<\frac{\pi}{2}$

$g'(x)=\sec^2 x - 1$，$0<x<\frac{\pi}{2}$

$=\frac{1}{\cos^2 x}-1$，$\cos x\in(0,1)$.

则 $g'(x)>0$.

$g(x)$ 单增，又 $g(0)=0$

$\therefore g(x)>0$. $\therefore f'(x)>0$

$\therefore f(x)$ 单增，

又 $\because f(0)=0$

$\therefore f(x)>0$（得证）.

---

例：证明：$x^5-y^5>5y^4(x-y)$.

例：证明 $\frac{e^x+e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ （凹凸性）.

例：求 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点和凹凸区间.

解：$y'=12x^3-12x^2$，$x\in R$

$y''=36x^2-24x$，$x\in R$

令 $y''=0$，解得 $x=0$ 或 $\frac{2}{3}$.

| $x$ | $(-\infty,0)$ | $0$ | $(0,\frac{2}{3})$ | $\frac{2}{3}$ | $(\frac{2}{3},+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 凹 | $1$ | 凸 | $\frac{11}{27}$ | 凹 |
| $y''$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

则 $y$ 的凹区间为 $(-\infty,0)$ 与 $(\frac{2}{3},+\infty)$，

凸区间为 $(0,\frac{2}{3})$

拐点 $(0,1)$ 与 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$.

例：求 $y=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单区及极值.

$e^t$ $t=\sin\mu$ $\mu=\frac{1}{x}$

$-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\cdot e^{\sin\frac{1}{x}}$

$y=e^{\sin\frac{1}{x}}+(\arctan x^2)^2$

$\cancel{t^2 \quad \arctan\mu \quad \mu=x^2}$

$\cancel{2t\cdot\frac{1}{1+\mu^2}\cdot 2x = 2\arctan x^2\cdot\frac{2x}{1+x^4}}$

$-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}e^{\sin\frac{1}{x}}+2\arctan x^2\cdot\frac{2x}{1+x^4}$

$=\frac{-x^4\cos\frac{1}{x}\cdot\cancel{\sin\frac{1}{x}}e^{\sin\frac{1}{x}}-\cos\frac{1}{x}\cancel{\sin\frac{1}{x}}e^{\sin\frac{1}{x}}}{x^2(1+x^4)}+4x^3\arctan x^2$