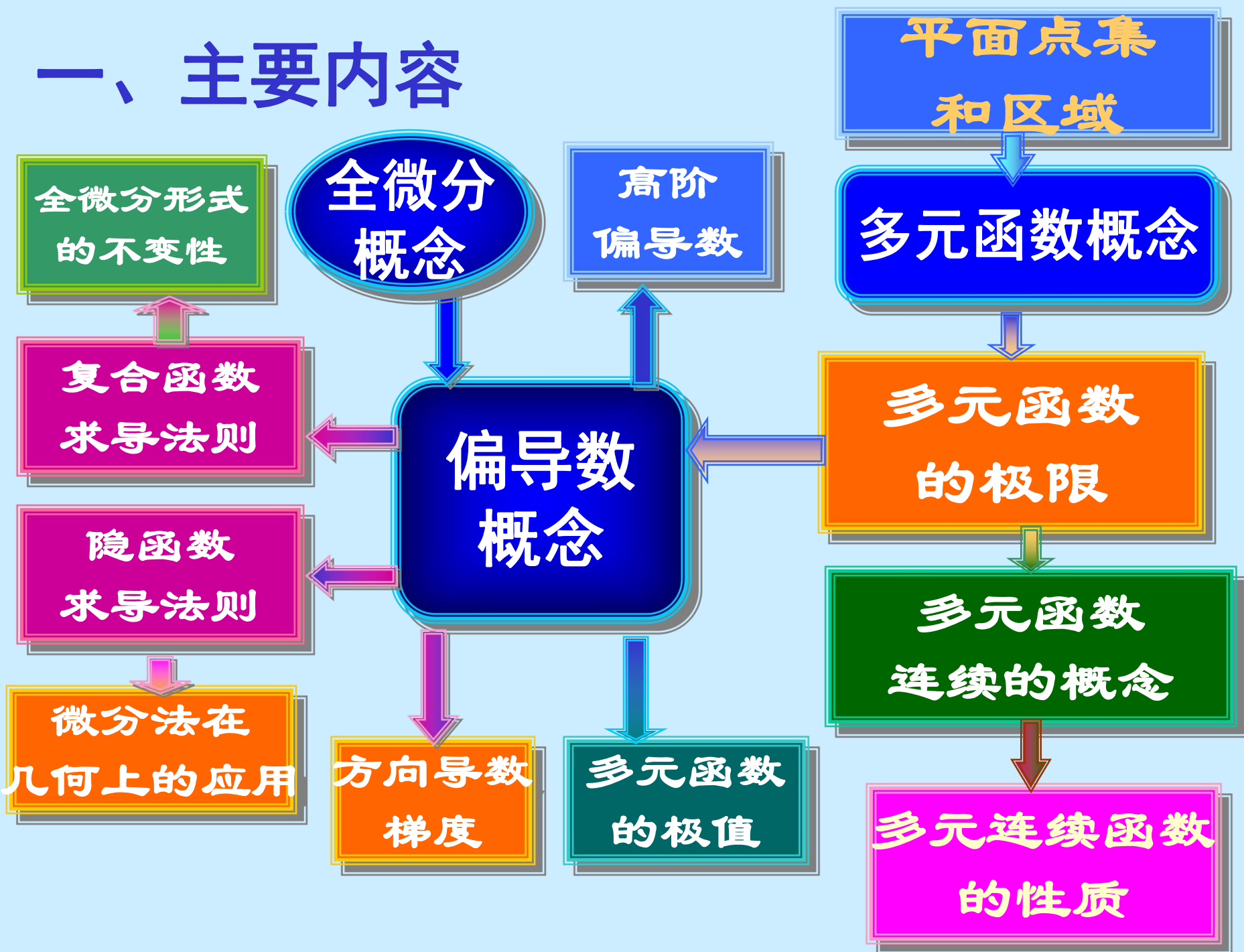


一、主要内容



1、多元函数概念

定义 设 D 是平面上的一个点集，如果对于每个点 $P(x,y) \in D$ ，变量 z 按照一定的法则总有确定的值和它对应，则称 z 是变量 x,y 的二元函数，记为 $z = f(x,y)$ （或记为 $z = f(P)$ ）。

类似地可定义三元及三元以上函数。

当 $n \geq 2$ 时， n 元函数统称为多元函数。



2、多元函数的极限

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 是其聚点, 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 δ , 使得对于适合不等式 $0 < |PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ 的一切点, 都有 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ 成立, 则称 A 为函数 $z = f(x, y)$ 当 $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$

(或 $f(x, y) \rightarrow A \quad (\rho \rightarrow 0)$ 这里 $\rho = |PP_0|$).

说明:

- (1) 定义中 $P \rightarrow P_0$ 的方式是任意的;
- (2) 二元函数的极限也叫二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$;
- (3) 二元函数的极限运算法则与一元函数类似.



3、多元函数的连续性

定义 设 n 元函数 $f(P)$ 的定义域为点集 D , P_0 是其聚点且 $P_0 \in D$, 如果 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$ 则称 n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 处连续.

设 P_0 是函数 $f(P)$ 的定义域的聚点, 如果 $f(P)$ 在点 P_0 处不连续, 则称 P_0 是函数 $f(P)$ 的间断点.



4、多元连续函数的性质

(1) 最大值和最小值定理

在有界闭区域 D 上的多元连续函数，在 D 上至少取得它的最大值和最小值各一次。

(2) 介值定理

在有界闭区域 D 上的多元连续函数，如果在 D 上取得两个不同的函数值，则它在 D 上取得介于这两值之间的任何值至少一次。



5、偏导数概念

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

如果 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称

此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数，记为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad z_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } f_x(x_0, y_0).$$

同理可定义函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数，为

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$\text{记为 } \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \quad z_y \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \text{ 或 } f_y(x_0, y_0).$$

如果函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内任一点 (x, y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x 、 y 的函数，它就称为函数 $z = f(x, y)$ 对自变量 x 的偏导数，

记作 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, z_x 或 $f_x(x, y)$.

同理可以定义函数 $z = f(x, y)$ 对自变量 y 的偏导数，记作 $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, z_y 或 $f_y(x, y)$.



6、高阶偏导数

函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y),$$

纯偏导

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y).$$

混合偏导

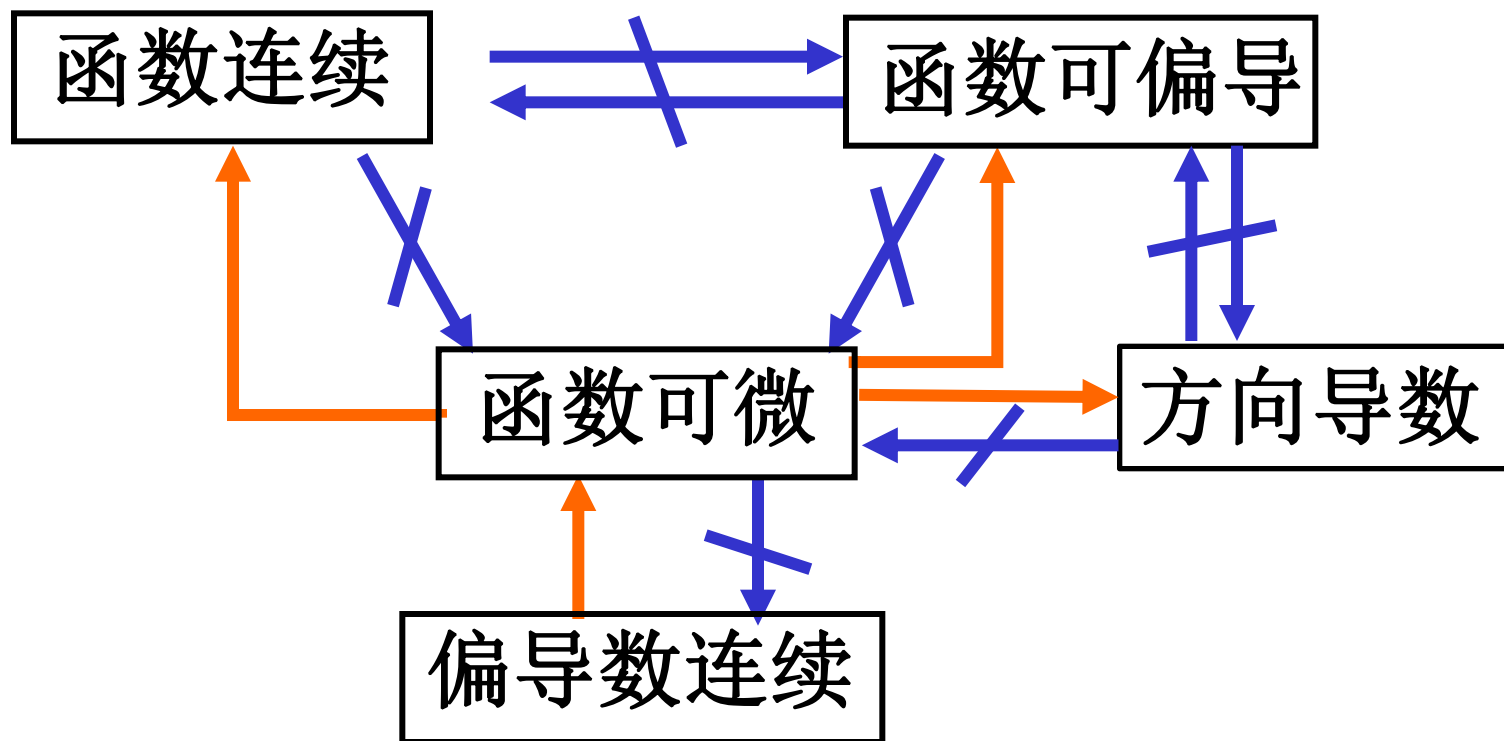
定义 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.



7、全微分概念

如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全增量 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 可以表示为 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, 其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$ 而仅与 x, y 有关, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分, $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分, 记为 dz , 即 $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

多元函数连续、可导、可微的关系



8、复合函数求导法则

如果 $u = \phi(x, y)$ 及 $v = \psi(x, y)$ 都在点 (x, y) 具有对 x 和 y 的偏导数，且函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z = \underline{f[\phi(x, y), \psi(x, y)]}$ 在对应点 (x, y) 的两个偏导数存在，且可用下列公式计算

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$



9、隐函数的求导法则

(1) $F(x, y) = 0$

隐函数存在定理 1 设函数 $F(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0, y_0) = 0$ ， $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ，则方程 $F(x, y) = 0$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续导数的函数 $y = f(x)$ ，它满足条件 $y_0 = f(x_0)$ ，并

有 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$

隐函数的求导公式

(2) $F(x, y, z) = 0$

隐函数存在定理 2 设函数 $F(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域内有连续的偏导数, 且 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, 则方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z = f(x, y)$, 它满足条件 $z_0 = f(x_0, y_0)$,

并有
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

(3) 方程组的情形

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u = (x, y) \\ v = (x, y) \end{cases}$$

隐函数存在定理 3 设 $F(x, y, u, v)$ 、 $G(x, y, u, v)$ 在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某一邻域内有对各个变量的连续偏导数，且 $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ ， $G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ ，且偏导数所组成的函数行列式（或称雅可比式）

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 不等于零, 则方程组

$$F(x, y, u, v) = 0, \quad G(x, y, u, v) = 0$$

在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数

$u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, 它们满足条件

$u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$, 并有

$$J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}.$$



10、微分法在几何上的应用

(1) 空间曲线的切线与法平面

$$\Gamma: \underline{x = \phi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)}.$$

$$\text{切向量: } \vec{T} = (\phi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$$

$$\text{切线方程为 } \frac{x - x_0}{\phi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}.$$

法平面方程为

$$\phi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

空间曲线方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = x \\ y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$$

切线的切向量为

$$\vec{T} = \left(1, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_0, y_0, z_0)}, \left. \frac{dz}{dx} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} \right)$$

$$\vec{T}_1 = \left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_0, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_0, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_0 \right)$$

切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_0} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_0} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_0},$$

法平面方程为

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_0 (x - x_0) + \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_0 (y - y_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_0 (z - z_0) = 0.$$

(2) 曲面的切平面与法线

$$\pi : \underline{F(x, y, z) = 0}.$$

切平面的法向量为

$$\vec{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$$

切平面方程为

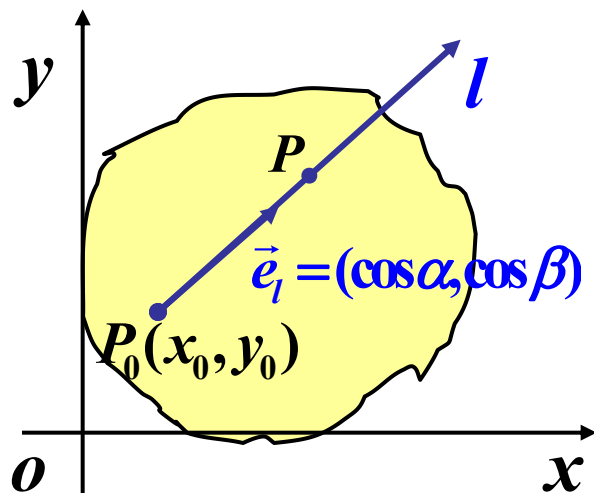
$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) \\ + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$



11、(1)方向导数(沿 l 的变化率)



$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{P_0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

定理 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 是可微分的, 那末函数在该点沿任意方向 l 的方向导数都存在,

且有
$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta$ 是方向 l 的方向余弦.

推广可得三元函数方向导数的定义

对于三元函数 $u = f(x, y, z)$ ，它在空间一点 $P(x, y, z)$ 沿着方向 L 的方向导数，可定义为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{t}$$

设方向 L 的方向角为 α, β, γ

$$\Delta x = t \cos \alpha, \quad \Delta y = t \cos \beta, \quad \Delta z = t \cos \gamma,$$

同理：当函数在此点可微时，那末函数在该点沿任意方向 L 的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$$

(2) 梯度的概念

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $P(x, y) \in D$,

都可定出一个向量 $\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$ ，这向量称为函数

$z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的梯度，记为

$$\underline{\text{grad} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} .}$$

或

$$\underline{\text{grad} f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)}$$

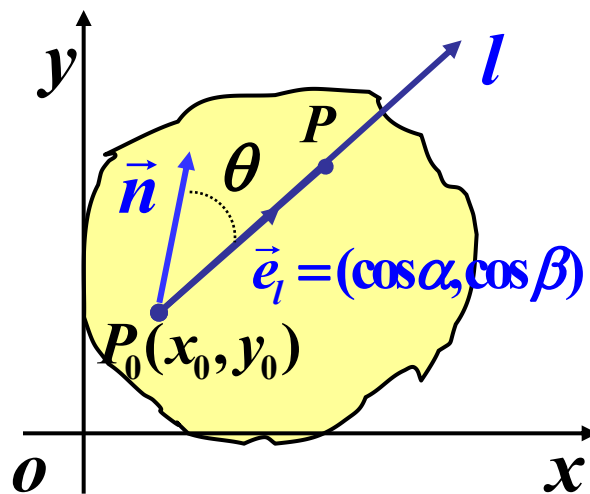
梯度的含义 $\vec{n} = \text{grad}f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta$$

$$= \text{grad}f(x, y) \cdot \vec{e}$$

$$= |\text{grad}f(x, y)| \cos \theta.$$

当 $\cos \theta = 1$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l}$ 有最大值.



函数在某点的梯度是这样一个向量，在它的方向上，函数取得最大方向导数，而它的模为方向导数的最大值。最大值就是梯度的模

$$|\text{grad}f(x, y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

梯度的概念可以推广到三元函数

三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在空间区域 G 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $P(x, y, z) \in G$ ，都可定义一个向量(梯度)

$$\text{grad} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}.$$

类似于二元函数，此梯度也是一个向量，其方向与取得最大方向导数的方向一致，其模为方向导数的最大值.



12、多元函数的极值

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义，对于该邻域内异于 (x_0, y_0) 的点 (x, y) ：若满足不等式 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ ，则称函数在 (x_0, y_0) 有极大值；若满足不等式 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ ，则称函数在 (x_0, y_0) 有极小值；

极大值、极小值统称为极值。


使函数取得极值的点称为极值点。

多元函数取得极值的条件

定理 1（必要条件）

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0, y_0) 处有极值，则它在该点的偏导数必然为零：
 $f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$

定义 一阶偏导数同时为零的点，称为多元函数的驻点.

注意 驻点  极值点

定理 2 (充分条件)

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续,
有一阶及二阶连续偏导数,

$$\text{又 } \underline{f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0,} \quad \text{令} \\ f_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad f_{yy}(x_0, y_0) = C,$$

则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处是否取得极值的条件如下:

(1) $AC - B^2 > 0$ 时有极值,

当 $A < 0$ 时有极大值, 当 $A > 0$ 时有极小值;

(2) $AC - B^2 < 0$ 时没有极值;

(3) $AC - B^2 = 0$ 时可能有极值.

求函数 $z = f(x, y)$ 极值的一般步骤:

第一步 解方程组 $f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0$
求出实数解, 得驻点.

第二步 对于每一个驻点 (x_0, y_0) ,
求出二阶偏导数的值 A 、 B 、 C .

第三步 定出 $AC - B^2$ 的符号, 再判定是否是极值.

条件极值：对自变量有附加条件的极值.

拉格朗日乘数法

要找函数 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点,

先构造函数 $F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$,
其中 λ 为某一常数, 可由

$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

解出 x, y, λ , 其中 x, y 就是可能的极值点的坐标.

二、典型例题

例1 设 $z = x^3 f(xy, \frac{y}{x})$, (f 具有二阶连续偏导数),

求 $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$f'_1 = f'_1(xy, \frac{y}{x})$$

$$f'_2 = f'_2(xy, \frac{y}{x})$$

解 $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 (f'_1 x + f'_2 \frac{1}{x}) = x^4 f'_1 + x^2 f'_2,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^4 (f''_{11} x + f''_{12} \frac{1}{x}) + x^2 (f''_{21} x + f''_{22} \frac{1}{x})$$

$$= x^5 f''_{11} + 2x^3 f''_{12} + x f''_{22},$$

$$f_1' = f_1'(xy, \frac{y}{x})$$

$$f_2' = f_2'(xy, \frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^4 f_1' + x^2 f_2')$$

$$= 4x^3 f_1' + x^4 \frac{\partial f_1'}{\partial x} + 2x f_2' + x^2 \frac{\partial f_2'}{\partial x}$$

$$= 4x^3 f_1' + x^4 [f_{11}'' y + f_{12}'' (-\frac{y}{x^2})] + 2x f_2' + x^2 [f_{21}'' y + f_{22}'' (-\frac{y}{x^2})]$$

$$= 4x^3 f_1' + 2x f_2' + x^4 y f_{11}'' - y f_{22}''.$$

例2 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $x + y - 2z = 2$ 之间的最短距离.

解 设 $P(x, y, z)$ 为抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上任一点, 则 P 到平面 $x + y - 2z - 2 = 0$ 的距离为 d ,

$$d = \frac{1}{\sqrt{6}} |x + y - 2z - 2|.$$

分析: 本题变为求一点 $P(x, y, z)$, 使得 x, y, z

满足 $x^2 + y^2 - z = 0$ 且使 $d = \frac{1}{\sqrt{6}} |x + y - 2z - 2|$

(即 $d^2 = \frac{1}{6} (x + y - 2z - 2)^2$) 最小.

令 $F(x, y, z) = \frac{1}{6}(x + y - 2z - 2)^2 + \lambda(z - x^2 - y^2)$, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} F'_x = \frac{1}{3}(x + y - 2z - 2) - 2\lambda x = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F'_y = \frac{1}{3}(x + y - 2z - 2) - 2\lambda y = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F'_z = \frac{1}{3}(x + y - 2z - 2)(-2) + \lambda = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = x^2 + y^2, \end{array} \right. \quad (4)$$

解此方程组得 $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{8}$.

即得唯一驻点 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$,

根据题意距离的最小值 一定存在, 且有唯一驻点, 故必在 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ 处取得最小值.

$$d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2 \right| = \frac{7}{4\sqrt{6}}.$$

测 验 题

一、选择题:

1、二元函数 $z = \sqrt{\ln \frac{4}{x^2 + y^2}} + \arcsin \frac{1}{x^2 + y^2}$ 的定义

域是().

- (A) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$; (B) $1 < x^2 + y^2 \leq 4$;
(C) $1 \leq x^2 + y^2 < 4$; (D) $1 < x^2 + y^2 < 4$.

2、设 $f(xy, \frac{x}{y}) = (x + y)^2$, 则 $f(x, y) = (\quad)$.

- (A) $x^2(y + \frac{1}{y})^2$; (B) $\frac{x}{y}(1 + y)^2$;
(C) $y^2(x + \frac{1}{x})^2$; (D) $\frac{y}{x}(1 + y)^2$.

3、 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = (\quad)$.

- (A) 0 ; (B) 1 ;
(C) 2 ; (D) e .

4、函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, 且两个偏导数 $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ 存在是 $f(x, y)$ 在该点可微的().

- (A) 充分条件, 但不是必要条件;
(B) 必要条件, 但不是充分条件;
(C) 充分必要条件;
(D) 既不是充分条件, 也不是必要条件.

5、 设 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

则在原点(0,0)处 $f(x, y)$ ().

- (A) 偏导数不存在; (B) 不可微;
(C) 偏导数存在且不连续; (D) 可微 .

6、 设 $z = f(x, v), v = v(x, y)$ 其中 f, v 具有二阶连续偏导数. 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ()$.

- (A) $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$; (B) $\frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$;
(C) $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$; (D) $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

7、曲面 $xyz = a^3 (a > 0)$ 的切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积 $V = (\quad)$.

(A) $\frac{3}{2}a^3$; (B) $3a^3$;

(C) $\frac{9}{2}a^3$; (D) $6a^3$.

8、二元函数 $z = 3(x + y) - x^3 - y^3$ 的极值点是().

(A) $(1, 2)$; (B) $(1, -2)$;

(C) $(-1, 2)$; (D) $(-1, -1)$.

9、函数 $u = \sin x \sin y \sin z$ 满足

$x + y + z = \frac{\pi}{2} (x > 0, y > 0, z > 0)$ 的条件极值是 ().

(A) 1 ; (B) 0 ;

(C) $\frac{1}{6}$; (D) $\frac{1}{8}$.

10、设函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 在点 (x, y) 的某邻域内可微分, 则 在点 (x, y) 处有

$$\text{grad}(uv) = (\quad).$$

(A) $\text{gradu} \cdot \text{grad}v;$

(B) $u \cdot \text{grad}v + v \cdot \text{gradu};$

(C) $u \cdot \text{grad}v;$

(D) $v \cdot \text{gradu}.$

二、讨论函数 $z = \frac{x+y}{x^3+y^3}$ 的连续性, 并指出间断点类型.

三、求下列函数的一阶偏导数：

1、 $z = x^{\ln y}$ ；

2、 $u = f(x, xy, xyz), z = \varphi(x, y)$ ；

3、 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} .$

四、设 $u = f(x, z)$, 而 $z(x, y)$ 是由方程 $z = x + y\varphi(z)$ 所
确的函数, 求 du .

五、设 $z = (u, x, y), u = xe^y$, 其中 f 具有连续的二阶偏导
数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

六、设 $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v, z = uv$, 试求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

七、设 x 轴正向到方向 l 的转角为 φ , 求函数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(1, 1)$ 沿方向 l 的方向导数, 并分别确定转角 φ , 使这导数有 (1) 最大值; (2) 最小值; (3) 等于零 .

八、求平面 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线上与 xoy 平面距离最短的点 .

九、在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面, 使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小, 求这切平面的切点, 并求此最小体积 .

测验题答案

一、 1、 A; 2、 B; 3、 B; 4、 B; 5、 D;
6、 C; 7、 C; 8、 D; 9、 D; 10、 B.

二、 (1) 当 $x + y \neq 0$ 时, 在点 (x, y) 函数连续;
(2) 当 $x + y = 0$ 时, 而 (x, y) 不是原点时,
则 (x, y) 为可去间断点, $(0, 0)$ 为无穷间断点.

三、 1、 $z_x = (\ln y)x^{\ln y - 1}$, $z_y = \frac{\ln x}{y} x^{\ln y}$;

2、 $u_x = f_1 + yf_2 + (yz + xyz_x)f_3$,
 $u_y = xf_2 + (xz + xyz_y)f_3$.

3、 $f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$,

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

四、 $(f_1 - \frac{f_2}{y\varphi'(z)-1})dx - \frac{f_2\varphi(z)}{y\varphi'(z)-1}dy.$

五、 $xe^{2y}f_{uuu}'' + e^yf_{uuy}'' + xe^yf_{xuu}'' + f_{xy}'' + e^yf_u'.$

六、 $\frac{\partial z}{\partial x} = (v \cos v - u \sin v)e^{-u}, \frac{\partial z}{\partial y} = (u \cos v + v \sin v)e^{-u}.$

七、 $\frac{\partial f}{\partial l} = \cos \varphi + \sin \varphi,$

(1) $\varphi = \frac{\pi}{4},$ (2) $\varphi = \frac{5\pi}{4},$ (3) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ 及 $\frac{7\pi}{4}.$

八、 $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{35}{12})$.

九、切点 $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$, $V_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}abc$.