#### 第七章 微分方程习题课

#### 一、基本概念

微分方程 凡含有未知函数的导数或微分的方程 叫微分方程.

微分方程的阶 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.

微分方程的解 代入微分方程能使方程成为恒等 式的函数称为微分方程的解.







# 通解 如果微分方程的解中含有任意常数,并且任意常数的个数与微分方程的阶数相同,这样的解叫做微分方程的通解.

**特解** 确定了通解中的任意常数以后得到的解,叫做微分方程的特解.

初始条件 用来确定任意常数的条件.

初值问题 求微分方程满足初始条件的解的问题, 叫初值问题.







#### 2、一阶微分方程的解法

(1) 可分离变量的微分方程

形如 
$$g(y)dy = f(x)dx$$

分离变量法

解法  $\int g(y)dy = \int f(x)dx$ 

(2) 齐次方程 形如  $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ 

解法 作变量代换  $u = \frac{y}{x}$ 







(3) 可化为齐次的方程

形如 
$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1})$$

当 $c = c_1 = 0$ 时,齐次方程. 否则为非齐次方程.

解法 令 
$$x = X + h$$
,  $y = Y + k$ , 化为齐次方程.

(其中h和k是待定的常数)







#### (4) 一阶线性微分方程

形如 
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

当 $Q(x) \equiv 0$ , 上方程称为齐次的.

当 $Q(x) \ge 0$ , 上方程称为非齐次的.

解法 齐次方程的通解为  $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ .

(使用分离变量法)







#### 非齐次微分方程的通解为

$$y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]e^{-\int P(x)dx}$$

(常数变易法)

#### (5) 伯努利(Bernoulli)方程

形如 
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$
  $(n \neq 0,1)$ 

当 n = 0,1时, 方程为线性微分方程.

当n ≠ 0,1时,方程为非线性微分方程.







#### 解法 需经过变量代换化为线性微分方程.

$$\diamondsuit z = y^{1-n},$$

$$y^{1-n} = z$$

$$= e^{-\int (1-n)P(x)dx} (\int Q(x)(1-n)e^{\int (1-n)P(x)dx}dx + C).$$

#### 3、可降阶的高阶微分方程的解法

(1) 
$$y^{(n)} = f(x)$$
 型

解法 接连积分n次,得通解.

(2) 
$$y'' = f(x, y')$$
 型

特点 不显含未知函数 y.

解法 
$$\diamondsuit y' = P(x)$$
,  $y'' = P'$ ,

代入原方程, 得 P' = f(x, P(x)).













#### (3) y'' = f(y, y') 型

特点 不显含自变量 x.

解法 
$$\diamondsuit y' = P(x), \quad y'' = P\frac{dp}{dy},$$

代入原方程, 得  $P\frac{dp}{dy} = f(y, P)$ .

#### 4、线性微分方程解的结构

(1) 二阶齐次方程解的结构:

形如 
$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$
 (1)

上页





定理 1 如果函数  $y_1(x)$ 与  $y_2(x)$ 是方程 (1) 的两个解, 那末  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 也是 (1) 的解. ( $C_1, C_2$ 是常数)

定理 2: 如果  $y_1(x)$ 与  $y_2(x)$ 是方程 (1) 的两个线性 无关的特解,那么  $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 就是方程 (1) 的通 解.

(2) 二阶非齐次线性方程的解的结构:

形如 
$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$
 (2)







定理 3 设 $y^*$ 是(2)的一个特解, Y是与(2)对应的齐次方程(1)的通解, 那么 $y = Y + y^*$ 是二阶非齐次线性微分方程(2)的通解.

定理 4 设非齐次方程 (2) 的右端 f(x) 是几个函数之和,如 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$  而 $y_1^*$ 与 $y_2^*$ 分别是方程,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$
  
 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$ 

的特解,那么 $y_1^* + y_2^*$ 就是原方程的特解.







#### 5、二阶常系数齐次线性方程解法

形如 
$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = f(x)$$

n阶常系数线性微分方程

$$v'' + pv' + qv = 0$$
 二阶常系数齐次线性方程

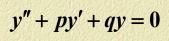
$$y'' + py' + qy = f(x)$$
 二阶常系数非齐次线性方程

解法 由常系数齐次线性方程的特征方程的根确 定其通解的方法称为特征方程法.









特征方程为  $r^2 + pr + q = 0$ 

	特征根的情况	┃   通解的表达式   ┃
	实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
100		
	实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_2 x}$
	$     复根 r_{1,2} = \alpha \pm i \beta $	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
	$r_{1,2}  \omega = \iota \rho$	
77.11		







#### 推广: n 阶常系数齐次线性方程解法

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1} y' + P_n y = 0$$

特征方程为  $r'' + P_1 r''^{-1} + \cdots + P_{n-1} r + P_n = 0$ 

特征方程的根	通解中的对应项
若是k重根r	$(C_0 + C_1 x + \dots + C_{k-1} x^{k-1})e^{rx}$
若是k重共轭 复根α±iβ	$[(C_0 + C_1 x + \dots + C_{k-1} x^{k-1}) \cos \beta x + (D_0 + D_1 x + \dots + D_{k-1} x^{k-1}) \sin \beta x]e^{\alpha x}$







#### 6、二阶常系数非齐次线性微分方程解法

y'' + py' + qy = f(x) 二阶常系数非齐次线性方程 解法 待定系数法.

(1)  $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

设
$$\bar{y} = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$$
,  $k = \begin{cases} 0 & \lambda$ 不是根 1  $\lambda$ 是单根 , 2  $\lambda$ 是重根







#### (2) $f(x) = e^{\lambda x} [P_{t}(x)\cos \omega x + P_{t}(x)\sin \omega x]$ 型

设  $\overline{y} = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x],$ 

其中  $R_m^{(1)}(x)$ ,  $R_m^{(2)}(x)$ 是m次多项式,  $m = \max\{l, n\}$ 

$$k = \begin{cases} 0 & \lambda \pm i\omega$$
不是特征方程的根时  $1 & \lambda \pm i\omega$ 是特征方程的单根时







### 二、典型例题

#### 例1 求通解

$$y(x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x})dx = x(y\sin\frac{y}{x} - x\cos\frac{y}{x})dy.$$

解 原方程可化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \left( \frac{\cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x}}{x} \right),$$







# 令 $u = \frac{y}{x}$ , y = ux, y' = u + xu'. 代入原方程得 $u + xu' = u(\frac{\cos u + u \sin u}{u \sin u - \cos u})$ , 分离变量

$$\frac{u\sin u - \cos u}{2u\cos u}du = \frac{dx}{x},$$
 两边积分

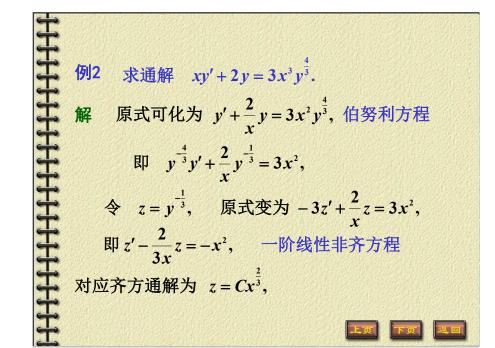
$$\ln(u\cos u) = \ln x^{-2} + \ln C, \quad \therefore u\cos u = \frac{C}{x^2},$$

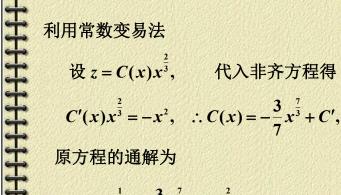
$$\therefore \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} = \frac{C}{x^2}, \quad \text{所求通解为 } xy \cos \frac{y}{x} = C.$$











$$y^{-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C'x^{\frac{2}{3}}.$$







令 
$$y' = P$$
,  $y'' = P \frac{dP}{dy}$ , 代入方程, 得

$$P\frac{dP}{dy} = \frac{1+P^2}{2y}$$
, 解得,  $1+P^2 = C_1 y$ ,

$$\therefore P = \pm \sqrt{C_1 y - 1}, \qquad \text{If } \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{C_1 y - 1},$$

例3 求通解  $y'' = \frac{1+y'^2}{2y}$ . 解 方程不显含 x. 令 y' = P,  $y'' = P\frac{dP}{dy}$ , 代入方程,  $P\frac{dP}{dy} = \frac{1+P^2}{2y}$ , 解得,  $1+P^2 = C_1$ ∴  $P = \pm \sqrt{C_1 y - 1}$ ,  $\mathbb{P} \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{C_1 y - 1}$ 故方程的通解为  $\frac{2}{C_1} \sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2$ .







$$y'' - 2y' + y = xe^{x} - e^{x}, y(1) = y'(1) = 1.$$

解 特征方程  $r^2 - 2r + 1 = 0$ ,

特征根  $r_1 = r_2 = 1$ ,

对应的齐次方程的通解为  $Y = (C_1 + C_2 x)e^x$ .

设原方程的特解为  $v^* = x^2(ax + b)e^x$ ,

则
$$(y^*)' = [ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx]e^x$$
,

$$(y^*)'' = [ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b)x + 2b]e^x,$$







将 y\*,(y\*)',(y\*)"代入原方程比较系数得

$$a=\frac{1}{6}, b=-\frac{1}{2},$$

原方程的一个特解为  $y^* = \frac{x^3}{6}e^x - \frac{x^2}{2}e^x$ ,

故原方程的通解为  $y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{x^3}{6}e^x - \frac{x^2}{2}e^x$ .

$$y(1) = 1,$$
  $C_1 + C_2 - \frac{1}{3}e = 1,$ 

$$y' = [(C_1 + C_2) + (C_2 - 1)x + \frac{x^3}{6}]e^x,$$





$$y'(1) = 1, \quad \therefore (C_1 + 2C_2 - \frac{5}{6})e = 1,$$

曲 
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{e} + \frac{1}{3}, \\ C_1 + 2C_2 = \frac{1}{e} + \frac{5}{6}, \end{cases}$$
解得 
$$\begin{cases} C_1 = \frac{2}{e} - \frac{1}{6}, \\ C_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}, \end{cases}$$

所以原方程满足初始条件的特解为

$$y = \left[\frac{2}{e} - \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right)x\right]e^{x} + \frac{x^{3}}{6}e^{x} - \frac{x^{2}}{2}e^{x}.$$







**例5** 求解方程 
$$y'' + 4y = \frac{1}{2}(x + \cos 2x)$$
.

解 特征方程  $r^2 + 4 = 0$ , 特征根  $r_{1,2} = \pm 2i$ ,

对应的齐方的通解为  $Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ . 设原方程的特解为  $y^* = y_1^* + y_2^*$ .



自 
$$dd \cos 2x - 4c \sin 2x = \frac{1}{2}\cos 2x,$$

$$dd = \frac{1}{2},$$

$$dd = \frac{1}{2},$$

$$dd = \frac{1}{8},$$

$$dd = \frac{1}{8},$$

$$dd = \frac{1}{8},$$

$$dd = \frac{1}{8},$$

$$dd = \frac{1}{8}x \sin 2x;$$

$$dd = \frac{1}{8}x \sin 2x.$$

由 
$$\begin{cases} 4a = \frac{1}{2}, \\ 4b = 0, \end{cases}$$
 解得 
$$\begin{cases} a = \frac{1}{8}, \\ b = 0, \end{cases}$$
 
$$\therefore y_1^* = \frac{1}{8}x;$$
 
$$(2) \quad \ \ \, \forall y_2^* = x(c\cos 2x + d\sin 2x),$$
 
$$\ \, \mathbb{P}(y_2^*)' = (c + 2dx)\cos 2x + (d - 2cx)\sin 2x,$$

$$(y_2^*)'' = (4d - 4cx)\cos 2x - (4c + 4dx)\sin 2x,$$
  
代入  $y'' + 4y = \frac{1}{2}\cos 2x$ , 得







## **例6** 设 y'' + p(x)y' = f(x) 有一特解为 $\frac{1}{x}$ , 对应

的齐次方程有一特解为  $x^2$ , 试求:

- (1) p(x), f(x)的表达式;
- (2) 此方程的通解.

解 (1) 由题设可得:

$$\begin{cases} 2 + p(x)2x = 0, \\ \frac{2}{x^3} + p(x)(-\frac{1}{x^2}) = f(x), \end{cases}$$
解此方程组,得





