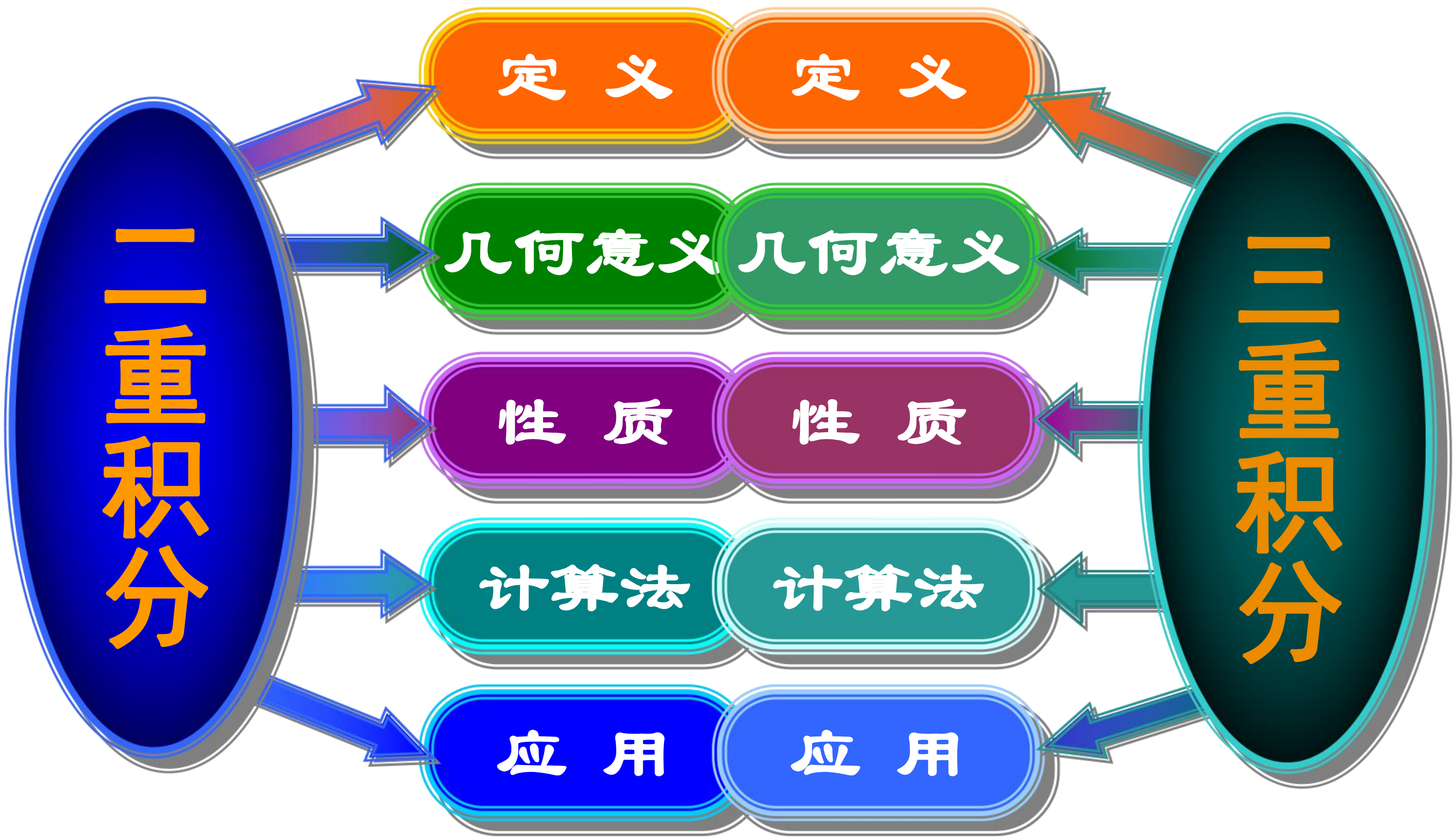
一、主要内容



1、二重积分的定义

定义 设$f(x,y)$是有界闭区域 D 上的有界函数，将闭区域 D 任意分成n个小闭区域$\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$，其中$\Delta\sigma_i$表示第i个小闭区域，也表示它的面积，在每个$\Delta\sigma_i$上任取一点(ξ_i,η_i)，

作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$， $(i=1,2,\cdots,n)$，

并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，

如果当各小闭区域的直径中的最大值λ趋近于零时，这和式的极限存在，则称此极限为函数$f(x,y)$在闭区域 D 上的二重积分，

记为$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，

即$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

２、二重积分的几何意义

当被积函数大于零时，二重积分是柱体的体积.

当被积函数小于零时，二重积分是柱体的体积的负值.

３、二重积分的性质

性质１　当 k 为常数时,

$$\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma.$$

性质２　$$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma$$

$$=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

性质３　对区域具有可加性($D=D_1+D_2$)

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

性质４　若σ为D的面积 $\sigma=\iint_D 1\cdot d\sigma=\iint_D d\sigma.$

性质５　若在D上，$f(x,y)\le g(x,y)$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma\le\iint_D g(x,y)d\sigma.$$

特殊地　$$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right|\le\iint_D |f(x,y)|d\sigma.$$

性质６　设M、m分别是$f(x,y)$在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ为 D 的面积，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma$$

（二重积分估值不等式）

性质７　设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续，σ为D的面积，则在 D 上至少存在一点(ξ,η)使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma.$$

（二重积分中值定理）

4、二重积分的计算

（1）直角坐标系下

[X—型]　D：　$a \le x \le b, \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x).$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

X-型区域的特点： 穿过区域且平行于y轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

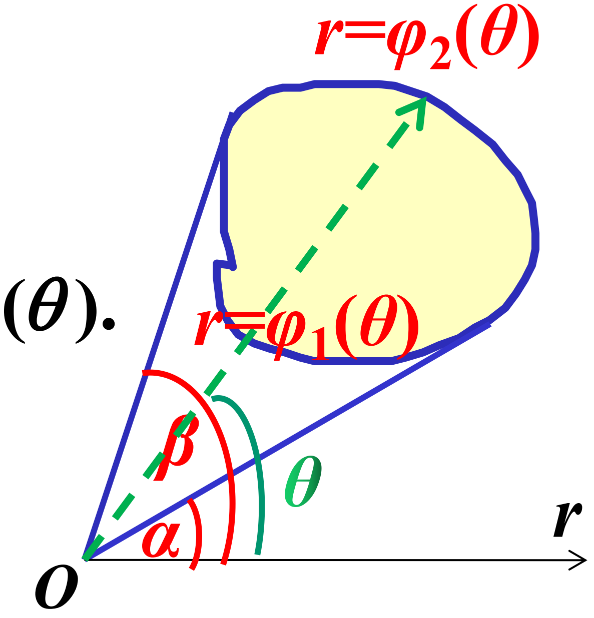
［Y—型］ $D: \quad c \le y \le d, \quad \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y).$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Y型区域的特点：穿过区域且平行于x轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

（2）极坐标系下

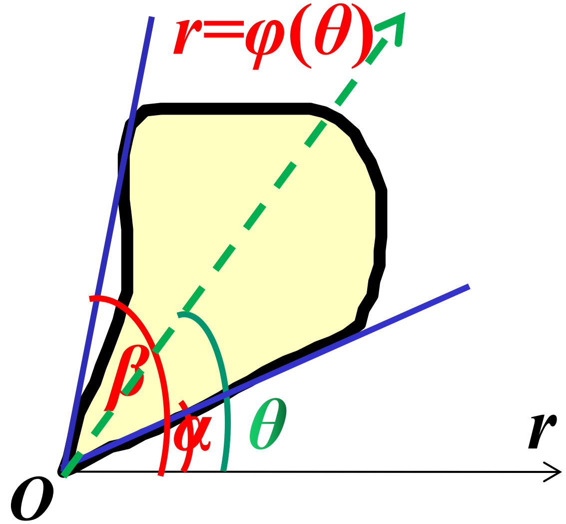
$$D_1: \quad \alpha \le \theta \le \beta, \qquad \varphi_1(\theta) \le r \le \varphi_2(\theta).$$



$$\iint_{D_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

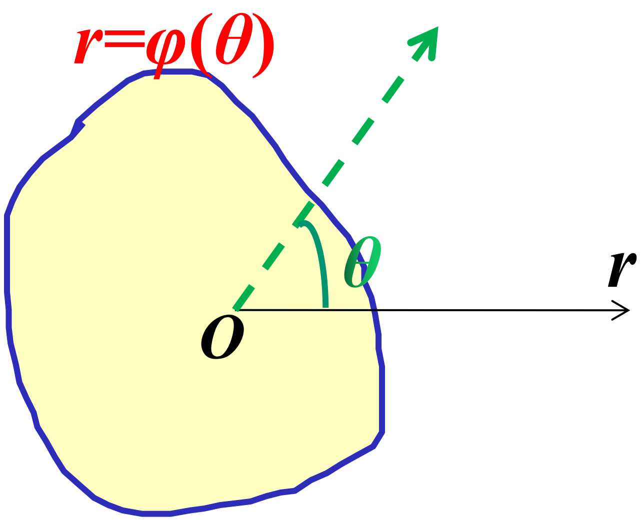
$$D_2: \quad \alpha \le \theta \le \beta, \quad 0 \le r \le \varphi(\theta).$$



$$\iint_{D_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

$$D_3: \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le \varphi(\theta).$$



$$\iint_{D_3} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

5、二重积分的应用

(1) 体积

在曲面 $z=f(x,y)$ 与区域 D 之间直柱体的体积为

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy.$$

(2) 曲面积

设S曲面的方程为：$z=f(x,y)$.

曲面S的面积为 $A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy;$

6、三重积分的定义

设$f(x,y,z)$是空间有界闭区域Ω上的有界函数，将闭区域Ω任意分成n个小闭区域Δv_1，Δv_2，$\cdots,\Delta v_n$，其中Δv_n表示第i个小闭区域，也表示它的体积, 在每个Δv_i上任取一点(ξ_i,η_i,ζ_i)作乘积$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta v_i$，$(i=1,2,\cdots,n)$，并作和, 如果当各小闭区域的直径中的最大值$\lambda$趋近于零时，这和式的极限存在，则称此极限为函数$f(x,y,z)$在闭区域$\Omega$上的三重积分，记为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i .$$

7、三重积分的几何意义

当 $f(x,y,z)=1$ 时,

$\iiint\limits_{\Omega} dv = V$ 表示空间区域的体积.

8、三重积分的性质

类似于二重积分的性质.

9、三重积分的计算

（1）直角坐标

$$\Omega : z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y);\ y_1(x) \le y \le y_2(x);\ a \le x \le b.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D_z,\ c_1 \le z \le c_2\}.$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy.$$

（2） 柱面坐标

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases} \qquad dv = r\,dr\,d\theta\,dz,$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv$$

$$= \iiint_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz.$$

（3） 球面坐标

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases} \qquad dv = r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta,$$

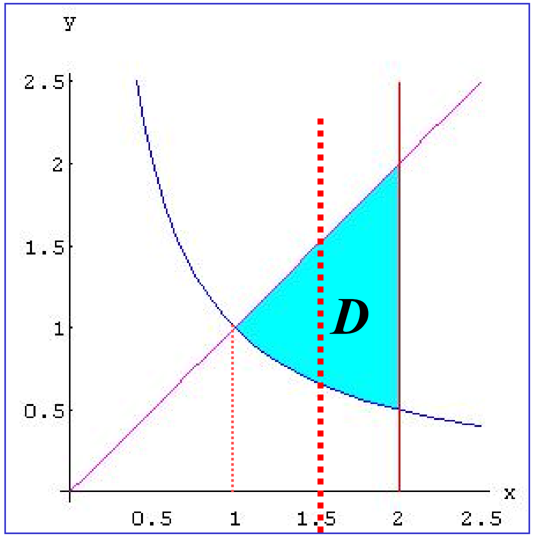
$$\iiint_\Omega f(x, y, z)dxdydz =$$

$$\iiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta.$$

二、典型例题

例1 计算 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma$. 其中 D 由 $y=x, y=\frac{1}{x}, x=2$

围成.



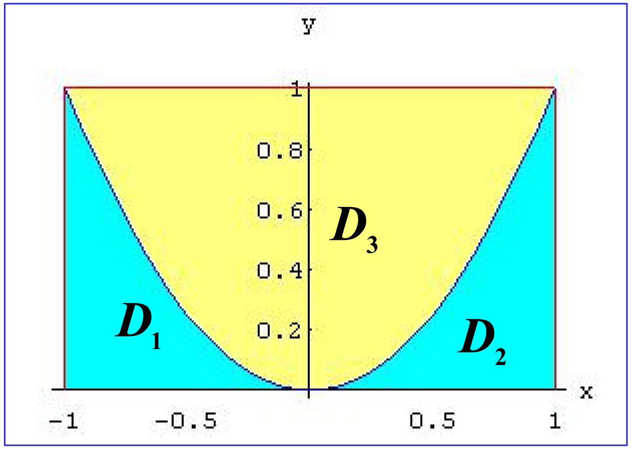
解 X-型 $D: \frac{1}{x} \le y \le x, 1 \le x \le 2.$

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy$$

$$= \int_1^2 \left(-\frac{x^2}{y}\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x} dx = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \frac{9}{4}.$$

例2 计算 $\iint\limits_D |y-x^2| d\sigma$. 其中 $D: -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1.$

解 先去掉绝对值符号，如图



$$\iint\limits_D |y-x^2| d\sigma$$

$$= \iint\limits_{D_1+D_2} (x^2-y) d\sigma + \iint\limits_{D_3} (y-x^2) d\sigma$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{x^2} (x^2-y) dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (y-x^2) dy = \frac{11}{15}.$$

例3 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx.$

解 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} \frac{\sin x}{x} dy.$

$$= \int_0^1 (1-x)\sin x dx \quad = \int_0^1 (1-x) d(-\cos x)$$

$$= (x-1)\cos x\Big|_0^1 - \int_0^1 (-\cos x) d(1-x)$$

$$= 1 - \int_0^1 \cos x dx = 1 - \sin 1$$

$$\boxed{\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du}$$

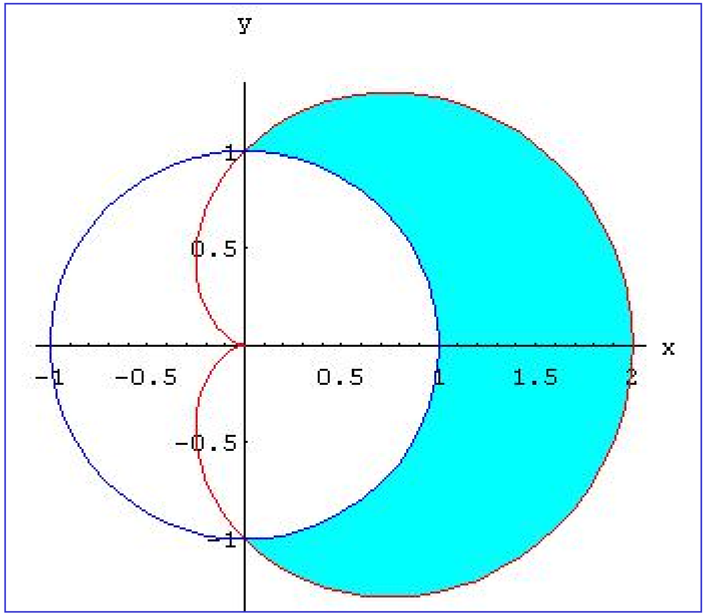
例4 计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$. 其中 D 是由心脏线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 和圆 $\rho=a$ 所围的面积（取圆外部）.

解 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{a(1+\cos\theta)} \rho\cdot\rho d\rho$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^3[(1+\cos\theta)^3-1]d\theta$$

$$=a^3\left(\frac{22}{9}+\frac{\pi}{2}\right).$$



例5 证明

$$\int_a^b dx\int_a^x (x-y)^{n-2} f(y)dy = \frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1} f(y)dy.$$

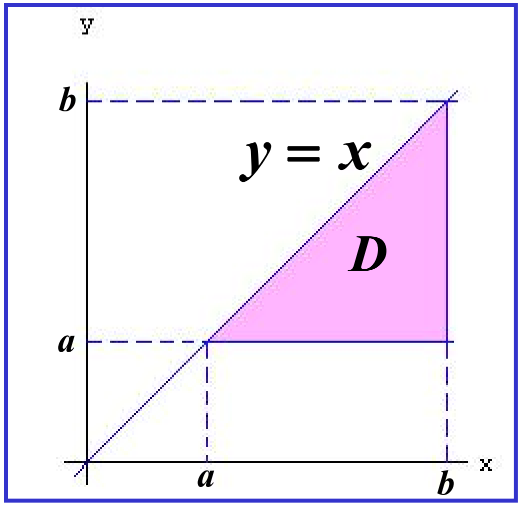
证

$$\int_a^b dx\int_a^x (x-y)^{n-2} f(y)dy$$

$$= \int_a^b dy\int_y^b (x-y)^{n-2} f(y)dx$$

$$= \int_a^b f(y)dy\left[\frac{1}{n-1}(x-y)^{n-1}\right]_y^b$$

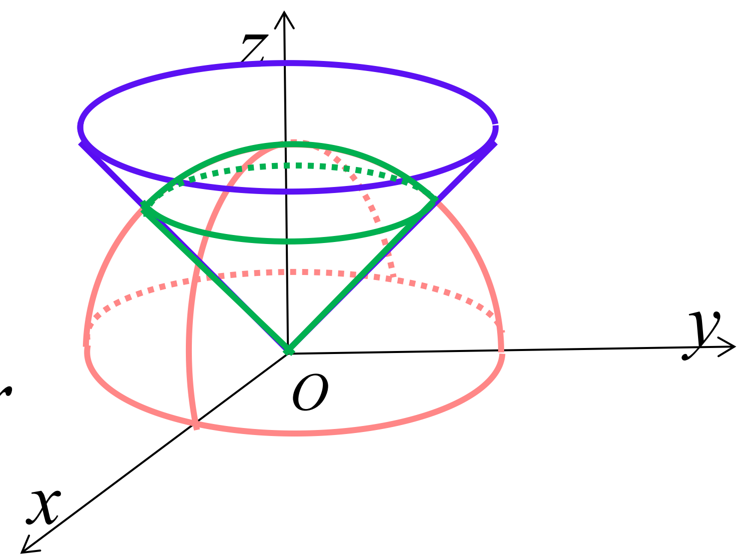
$$= \frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1} f(y)dy.$$



例6 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$，其中 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的.

解 $\because \Omega$ 关于 yoz 面为对称，$f(x,y,z)=x$ 为 x 的奇函数，有 $\iiint\limits_{\Omega} x dv = 0.$ 利用球面坐标

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv=\iiint\limits_{\Omega} z dv$$



$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr$$

$$=\frac{\pi}{8}.$$

例7　计算 $\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}dv,\ \ \Omega: x^2+y^2+z^2\le 1.$

解　$\because$ 被积函数仅为 z 的函数，截面 $D(z)$ 为圆域

$x^2+y^2\le 1-z^2$，故采用 " 先二后一 " 法.

$$\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}dv = 2\iiint\limits_{\Omega_{上}} e^{z}dv$$

$$= 2\int_0^1 [\iint\limits_{D(z)} dxdy]e^{z}dz$$

$$= 2\int_0^1 \pi(1-z^2)e^{z}dz = 2\pi.$$

例8 证明

$$\int_0^x\left[\int_0^v\left(\int_0^u f(t)dt\right)du\right]dv=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2 f(t)dt.$$

证 思路：从改变积分次序入手.

$$\because \int_0^v du\int_0^u f(t)dt=\int_0^v dt\int_t^v f(t)du=\int_0^v(v-t)f(t)dt,$$

$$\therefore \int_0^x\left[\int_0^v\left(\int_0^u f(t)dt\right)du\right]dv=\int_0^x dv\int_0^v(v-t)f(t)dt$$

$$=\int_0^x dt\underline{\int_t^x(v-t)f(t)dv}=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2 f(t)dt.$$

测 验 题

一、选择题:

1、$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy=$(　　)

(A) $\int_0^{1-x} dy\int_0^1 f(x,y)dx$;　　(B) $\int_0^1 dy\int_0^{1-x} f(x,y)dx$;

(C) $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$;　　(D) $\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx$.

2、设D为$x^2+y^2\le a^2$, 当$a=$(　　)时,

$$\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\pi.$$

(A) 1;　　(B) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$;

(C) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$;　　(D) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$.

3、当 D 是(　　　)围成的区域时, 二重积分 $\iint\limits_D dxdy=1$.

(A) x轴, y轴及$2x+y-2=0$；(B) $|x|=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$ ；

(C) x轴, y轴及$x=4, y=3$；(D) $|x+y|=1, |x-y|=1$.

4、$\iint\limits_D xe^{xy}dxdy$ 的值为(　　　). 其中区域为 D

$0\le x\le 1, -1\le y\le 0$.

(A) $\frac{1}{e}$ ；　　　　(B) e ；

(C) $-\frac{1}{e}$ ；　　　　(D) 1 .

5、设$I=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, 其中$D$由$x^2+y^2=a^2$所围成, 则$I$=(　　).

(A) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a a^2 rdr=\pi a^4$; (B) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\cdot rdr=\frac{1}{2}\pi a^4$;

(C) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2 dr=\frac{2}{3}\pi a^3$; (D) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a a^2\cdot adr=2\pi a^4$.

6、设Ω是由三个坐标面与平面$x+2y-z=1$所围成的空间区域, 则$\iiint\limits_\Omega xdxdydz$=(　　).

(A) $\frac{1}{48}$; (B) $-\frac{1}{48}$;

(C) $\frac{1}{24}$; (D) $-\frac{1}{24}$.

7、设Ω是锥面$\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}(a>0,b>0,c>0)$与平面

$x=0,y=0,z=c$所围成的空间区域在第一卦限的

部分，则$\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}\frac{xy}{\sqrt{z}}dxdydz$=(　　).

(A) $\dfrac{1}{36}a^2b^2\sqrt{c}$；　　(B) $\dfrac{1}{36}a^2b^2\sqrt{b}$；

(C) $\dfrac{1}{36}b^2c^2\sqrt{a}$；　　(D) $\dfrac{1}{36}c\sqrt{ab}$.

8、计算$I=\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}zdv$，其中$\Omega$为$z^2=x^2+y^2,z=1$围成的

立体，则正确的解法为(　　)和(　　).

(A) $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^1 zdz$； (B) $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^1 zdz$；

(C) $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dz\int_r^1 rdr$； (D) $I=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z zrdr$.

9、曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$包含在圆柱$x^2+y^2=2x$内部的那部分面积$s=$(　　).

(A) $\sqrt{3}\pi$； (B) $\sqrt{2}\pi$；

(C) $\sqrt{5}\pi$； (D) $2\sqrt{2}\pi$.

二、计算下列二重积分：

1、$\iint\limits_D (x^2 - y^2) d\sigma$，其中 D 是闭区域：

$0 \le y \le \sin x, 0 \le x \le \pi$.

2、$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x} d\sigma$，其中$D$是由直线$y = 0$及圆周

$x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 1$, $y = x$所围成的在第一象限内的闭区域 .

3、$\iint\limits_D (y^2 + 3x - 6y + 9) d\sigma$，其中 D 是闭区域：$x^2 + y^2 \le R^2$

4、$\iint\limits_D \left| x^2 + y^2 - 2 \right| d\sigma$，其中$D$：$x^2 + y^2 \le 3$.

三、作出积分区域图形并交换下列二次积分的次序:

1、$\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx$;

2、$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$;

3、$\int_0^a d\theta\int_0^{\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.

四、将三次积分$\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x,y,z)dz$改换积分次序为

$x\to y\to z$.

五、计算下列三重积分:

1、$\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)dxdydz,\Omega$:抛物柱面$y=\sqrt{x}$

及平面 $y=o,z=o,x+z=\dfrac{\pi}{2}$所围成的区域 .

2、$\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)dv$,其中$\Omega$是由$xoy$平面上曲线

$y^2=2x$绕 x 轴旋转而成的曲面与平面$x=5$所围成的闭区域．

3、$\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dv$,其中$\Omega$是由球面

$x^2+y^2+z^2=1$所围成的闭区域．

六、求平面$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$被三坐标面所割出的有限部分的面积．

测验题答案

一、1、D;　2、C;　3、A;　4、A;　5、B;

6、A;　7、A;　8、B, D;　9、B;

二、1、$\pi^2-\frac{40}{9}$; 2、$\frac{3}{64}\pi^2$; 3、$\frac{\pi}{4}R^4+9\pi R^2$; 4、$\frac{5}{2}\pi$.

三、1、$\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)dy$;

2、$\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$;

3、$\int_0^a rdr\int_r^a f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$.

四、$\int_0^1 dz\int_z^1 dy\int_0^z f(x,y,z)dx$.

五、1、$\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$;　2、$\frac{250}{3}\pi$;　3、0.

六、$\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.