高等数学 II 2020–2021 学年下学期期末测试题

高老师提醒，注意今年和去年的不同:

去年因为开学三周都是在家线上学习的第五、六章，回校后组织了统一的阶段性考试，故期末时这两章的占比较小，与今年不同；另外，去年因为放假的原因，课时比今年少了 9 节课，所以只考了第十二章一、二节的内容，仅仅为一个选择题，而今年是第十二章的前四节。

一、单选题（每题 4 分，共 20 分）

1、下列定积分值不为 0 的是（　　）

A. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^3}{2+\cos 2x}dx$　　B. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\cos 3x dx$

C. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x^3+1}{1+x^2}dx$　　D. $\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$

2、设 $|\overrightarrow{a}|=6, |\overrightarrow{b}|=8, |\overrightarrow{c}|=10$，且满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则 $|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|=$（　　）

A. 36　　B. 48　　C.72　　D.144

3、下列级数发散的是（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{6^n}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$

4、当 $0\le\theta\le 2\pi$，对数螺线 $\rho=e^{2\theta}$ 的弧长为(　　)

A. $\sqrt{5}e^{4\pi}$　　B. $\sqrt{5}(e^{4\pi}-1)$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}e^{4\pi}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi}-1)$

5、交换积分次序，则 $\int_0^2 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy=$（　　）

A. $\int_0^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$　　B. $\int_{-2}^2 dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$　　C. $2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$　　D. $\int_{-2}^2 dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

二、计算题（每题 5 分，共 60 分）

1、求星型线$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$所围成的图形的面积。

2、求由曲线 $y = e^x$与x轴、y轴和$x = 1$ 所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积。

3、求直线$\begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$与平面 $x - 2y - z + 1 = 0$ 的夹角。

4、求直线$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$在平面 $2x - y - z + 1 = 0$ 上的投影直线的方程。

5、设 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 6z$，求全微分 $df(x, y, z)$ 和梯度 $gradf\ (x, y, z)$。

6、求曲线$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$在点(1,1,1)处的切线方程和法平面方程。

7、由方程 $e^z - xyz = e$ 确定函数 $z = z(x, y)$，求 z 在点(0,1)处沿从点(0,1)到点(1,2)的方向的方向导数。

8、设 $z = f(x + y, x^2 y)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

9、计算 $\iint\limits_D \frac{\sin y}{y} dxdy$，其中 D 由曲线 $x = y^2$和$y = x$ 所围成的闭区域。

10、计算 $\iint\limits_D (x + y)^2 dxdy$，其中 D 是圆周 $x^2 + y^2 = 2y$ 所围成的闭区域。

11、计算 $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$ ，其中Ω由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的闭区域。

12、求上半球面 $z=\sqrt{12-x^2-y^2}$ 与 $x^2+y^2=4z$ 所围立体的表面积。

三、证明题（每题 10 分，共 20 分）

1、在第一卦限作椭球面 $x^2+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=1$ 的切平面，证明：该切平面与三坐标面所围成的四面体最小体积为 3。

2、证明：$\int_0^a dy\int_0^y e^{a-x} f(x)dx=\int_0^a xe^x f(a-x)dx$ 。

一、单选题（每题4分，共20分）

1、C　　2、D　　3、A　　4、D　　5、B

二、计算题（每题5分，共60分）$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$

1、解：所求面积为 $A=4\int_0^2 ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}2\sin^3 td2\cos^3 t=48\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos^2 tdt=\frac{3}{2}\pi$.

2、解：所求旋转体体积为

$$V_y=\pi\times1^2\times e-\int_1^e\pi(\ln y)^2dy=\pi e-\pi y(\ln y)^2\Big|_1^e+2\pi\int_1^e\ln ydy$$

$$=\pi e-\pi e+2\pi y\ln y\Big|_1^e-2\pi\int_1^e dy=2\pi$$

3、解：直线的方向向向量为,

设直线与平面的夹角为θ，则 $\sin\theta=|\cos(\vec{s},\vec{n})|=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}=\frac{|(2,4,-2)\cdot(1,-2,-1)|}{\sqrt{24}\times\sqrt{6}}=\frac{1}{3}$，

所求夹角为 $\theta=\arcsin\frac{1}{3}$。

4、解：过直线的平面束为 $x-y-z-1+\lambda(2x+y+z-4)=0$，

即 $(1+2\lambda)x+(-1+\lambda)y+(-1+\lambda)z-1-4\lambda=0$，

由题意：$2(1+2\lambda)-(-1+\lambda)-(-1+\lambda)=0$，解得 $\lambda=-2$，

代入平面束方程得投影平面为 $-3x-3y-3z+7=0$，

所求投影直线为：$\begin{cases}3x+3y+3z-7=0\\ 2x-y-z+1=0\end{cases}$。

5、解：$f_x(x,y,z)=2x+2y$, $f_y(x,y,z)=4y+2x$, $f_z(x,y,z)=6z-6$，

$\therefore df(x,y,z)=(2x+2y)dx+(4y+2x)dy+(6z-6)dz$

$gradf(x,y,z)=(2x+2y)\vec{i}+(4y+2x)\vec{j}+(6z-6)\vec{k}$

或 $gradf(x,y,z)=(2x+2y,4y+2x,6z-6)$

6、解：对方程组两边求关于 y 的导数 $\begin{cases}2x\frac{dx}{dy}+2y+2z\frac{dz}{dy}=0\\ 2\frac{dx}{dy}+1+\frac{dz}{dy}=0\end{cases}$，

将点(1,1,1)代入上述方程组并整理得

$$\begin{cases} \left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{(1,1,1)} + \left.\dfrac{dz}{dy}\right|_{(1,1,1)} = -1 \\ 2\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{(1,1,1)} + \left.\dfrac{dz}{dy}\right|_{(1,1,1)} = -1 \end{cases}$$，解得 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{(1,1,1)} = 0, \left.\dfrac{dz}{dy}\right|_{(1,1,1)} = -1$，

所以曲线在点(1,1,1)处的切向量为(0,1,−1),

切线方程为：$\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y+z-2=0 \end{cases}$,

法平面方程为：$0(x-1)+(y-1)-(z-1)=0$, 即 $y-z=0$。

7、解：令 $F(x,y,z) = e^z - xyz - e$, $\therefore F_x = -yz, F_y = -xz, F_z = e^z - xy$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{e^z - xy}$$

将点(0,1)代入原方程解得 $z=1$，

$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)} = \left.\frac{yz}{e^z - xy}\right|_{(0,1,1)} = \frac{1}{e}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} = \left.\frac{xz}{e^z - xy}\right|_{(0,1,1)} = 0,$$

从点(0,1)到点(1,2)的向量为(1,1),所以方向余弦为 $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ,

所求方向导数为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,1)} = \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)} \cos\alpha + \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} \cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2e}$。

8、解：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_1' + 2xyf_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (f_1' + 2xyf_2')_y' = f_{11}'' + x^2 f_{12}'' + 2xf_2' + 2xy(f_{21}'' + x^2 f_{22}'')$$
$$= f_{11}'' + (x^2 + 2xy) f_{12}'' + 2x^3 y f_{22}'' + 2xf_2'$$

9、解：$\displaystyle\iint_D \frac{\sin y}{y} dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y} dx$

$$= \int_0^1 (\sin y - y\sin y)\, dy = -\cos y\Big|_0^1 + \int_0^1 yd\cos y$$
$$= 1 - \cos 1 + (y\cos y - \sin y)\Big|_0^1 = 1 - \sin 1$$

10、解：因为积分区域 D 关于 y 轴对称，函数 $2xy$ 关于 x 是奇函数,所以 $\displaystyle\iint_D 2xydxdy = 0$,

函数 x^2+y^2 关于 x 是偶函数，所以 $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy = 2\iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy$，(其中 D_1 为 D 在第一象限部分),

$$\iint_D (x+y)^2 dxdy = \iint_D (x^2+y^2+2xy)dxdy = 2\iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2\cdot rdr=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta=8\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$$

11、解：$\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr=2\pi\times\frac{(\sqrt{2})^4}{4}\times\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}$。

12、解：Σ_1：$z=\sqrt{12-x^2-y^2}$，$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{12-x^2-y^2}}$；

Σ_2：$z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$, $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}(x^2+y^2)}=\frac{1}{2}\sqrt{4+x^2+y^2}$。

联立$\begin{cases}z=\sqrt{12-x^2-y^2}\\x^2+y^2=4z\end{cases}$，消掉 z 得 $x^2+y^2=8$,

所以曲面Σ_1和Σ_2在 xoy 面投影区域为 $D: x^2+y^2\le 8$，
所求曲面面积为

$$A=\iint\limits_D\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{12-x^2-y^2}}dxdy+\iint\limits_D\frac{1}{2}\sqrt{4+x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{12-r^2}}rdr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{1}{2}\sqrt{4+r^2}rdr$$

$$=-4\sqrt{3}\pi\sqrt{12-r^2}\Big|_0^{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3}(4+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\sqrt{2}}=\frac{64}{3}\pi$$。

三、证明题（每题 10 分，共 20 分）

1、证明：任取第一卦限椭球面上一点$M(x_0,y_0,z_0)$, 则$x_0^2+\frac{y_0^2}{3}+\frac{z_0^2}{4}=1$,

点M处的法向量为$\vec{n}=(2x_0,\frac{2}{3}y_0,\frac{1}{2}z_0)$，

M点处的切平面为$2x_0(x-x_0)+\frac{2}{3}y_0(y-y_0)+\frac{1}{2}z_0(z-z_0)=0$，

即$x_0x+\frac{1}{3}y_0y+\frac{1}{4}z_0z=1$。

所以切平面在三坐标轴上的截距为：$\frac{1}{x_0}$、$\frac{3}{y_0}$、$\frac{4}{z_0}$,

切平面与三坐标面所围四面体的体积为$V=\frac{1}{6}\frac{1}{x_0}\cdot\frac{3}{y_0}\cdot\frac{4}{z_0}=\frac{2}{x_0y_0z_0}$,

作辅助函数$L(x_0,y_0,z_0)=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0+\lambda(x_0^2+\frac{y_0^2}{3}+\frac{z_0^2}{4}-1)$，

$$\therefore \begin{cases} L_{x_0} = \dfrac{1}{x_0} + 2\lambda x_0 = 0 \\ L_{y_0} = \dfrac{3}{y_0} + \dfrac{2\lambda}{3} y_0 = 0 \\ L_{z_0} = \dfrac{4}{z_0} + \dfrac{2\lambda}{4} z_0 = 0 \\ x_0^{\ 2} + \dfrac{y_0^{\ 2}}{3} + \dfrac{z_0^{\ 2}}{4} = 1 \end{cases}，解得 \begin{cases} x_0 = \sqrt{\dfrac{1}{3}} \\ y_0 = 1 \\ z_0 = \sqrt{\dfrac{4}{3}} \end{cases}$$

根据题意可知所求四面体有最小体积，所以当切点M取$\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}},1,\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right)$时，所求四面体有最小体积$V_{\min} = \dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{3}} \times 1 \times \sqrt{\dfrac{4}{3}}} = 3$。

2、证明：交换积分次序$\int_0^a dy \int_0^y e^{a-x} f(x)\,dx = \int_0^a dx \int_x^a e^{a-x} f(x)\,dy = \int_0^a e^{a-x} f(x)\cdot(a-x)\,dx$，

令 $a-x=t$，即$x=a-t$, $dx=-dt$，当$x=a$时，$t=0$，当$x=0$时，$t=a$.

$\therefore \int_0^a e^{a-x} f(x)\cdot(a-x)\,dx = \int_a^0 e^t f(a-t)\cdot t(-dt) = \int_0^a te^t f(a-t)\,dt = \int_0^a xe^x f(a-x)\,dx$，

$\therefore \int_0^a dy \int_0^y e^{a-x} f(x)\,dx = \int_0^a xe^x f(a-x)\,dx$.