第七章 微分方程习题课

一、基本概念

微分方程 凡含有未知函数的导数或微分的方程叫微分方程.

微分方程的阶 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.

微分方程的解 代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称为微分方程的解.

通解　**如果**微分方程的解中含有任意常数，并且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫做微分方程的通解.

特解　确定了通解中的任意常数以后得到的解，叫做微分方程的特解.

初始条件　用来确定任意常数的条件.

初值问题　求微分方程满足初始条件的解的问题，叫初值问题.

上页　下页　返回

2、一阶微分方程的解法

(1) 可分离变量的微分方程

形如 $g(y)dy = f(x)dx$

分离变量法

解法 $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

(2) 齐次方程 形如 $\dfrac{dy}{dx} = f(\dfrac{y}{x})$

解法 作变量代换 $u = \dfrac{y}{x}$

上页 下页 返回

(3) 可化为齐次的方程

形如 $$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

当$c=c_1=0$时，齐次方程．否则为非齐次方程．

解法 令 $x=X+h,$

$y=Y+k,$ 化为齐次方程．

（其中h和k是待定的常数）

上页 下页 返回

(4) 一阶线性微分方程

形如 $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

当$Q(x)\equiv 0$, 上方程称为齐次的.

当$Q(x)\not\equiv 0$, 上方程称为非齐次的.

解法 齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$.

（使用分离变量法）

非齐次微分方程的通解为

$$y=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]e^{-\int P(x)dx}$$

（常数变易法）

(5) 伯努利(Bernoulli)方程

形如 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (n\neq 0,1)$

当$n=0,1$时， 方程为线性微分方程.

当$n\neq 0,1$时， 方程为非线性微分方程.

解法　需经过变量代换化为线性微分方程.

令 $z = y^{1-n}$,

$$y^{1-n} = z$$

$$= e^{-\int (1-n)P(x)dx}\left(\int Q(x)(1-n)e^{\int (1-n)P(x)dx}dx + C\right).$$

3、可降阶的高阶微分方程的解法

(1) $y^{(n)}=f(x)$ 型

解法 接连积分n次，得通解.

(2) $y''=f(x,y')$ 型

特点 不显含未知函数 y.

解法 令 $y'=P(x)$, $y''=P'$,

代入原方程, 得 $P'=f(x,P(x))$.

(3) $y'' = f(y, y')$ 型

特点　不显含自变量 x.

解法　令 $y' = P(x)$, $\quad y'' = P\dfrac{dp}{dy}$,

代入原方程, 得 $P\dfrac{dp}{dy} = f(y, P)$.

4、线性微分方程解的结构

（1） 二阶齐次方程解的结构:

形如 $\quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$

定理 1 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1) 的两个解, 那末 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 也是(1) 的解. （C_1, C_2 是常数）

定理 2：如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1) 的两个线性无关的特解，那么 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 就是方程(1) 的通解.

（2）二阶非齐次线性方程的解的结构：

形如 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ (2)

定理 3　设y^*是(2)的一个特解，Y是与(2)对应的齐次方程(1)的通解，那么$y=Y+y^*$是二阶非齐次线性微分方程(2)的通解.

定理 4　设非齐次方程(2)的右端$f(x)$是几个函数之和，如$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$

而y_1^*与y_2^*分别是方程,

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$$

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的特解，那么$y_1^*+y_2^*$就是原方程的特解.

上页　下页　返回

5、二阶常系数齐次线性方程解法

形如 $y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=f(x)$

n阶常系数线性微分方程

$y''+py'+qy=0$ 二阶常系数齐次线性方程

$y''+py'+qy=f(x)$ 二阶常系数非齐次线性方程

解法 由常系数齐次线性方程的特征方程的根确定其通解的方法称为特征方程法.

$$y'' + py' + qy = 0$$

特征方程为 $r^2 + pr + q = 0$

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

推广：n 阶常系数齐次线性方程解法

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = 0$$

特征方程为 $r^n + P_1 r^{n-1} + \cdots + P_{n-1} r + P_n = 0$

特征方程的根	通解中的对应项
若是k重根r	$(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1} x^{k-1}) e^{rx}$
若是k重共轭复根$\alpha \pm i\beta$	$[(C_0 + C_1 x + \cdots + C_{k-1} x^{k-1}) \cos \beta x$ $+ (D_0 + D_1 x + \cdots + D_{k-1} x^{k-1}) \sin \beta x] e^{\alpha x}$

6、二阶常系数非齐次线性微分方程解法

$y'' + py' + qy = f(x)$ 二阶常系数非齐次线性方程

解法 待定系数法.

(1) $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

设 $\bar{y} = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$， $k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根} \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$ ，

上页 下页 返回

(2) $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

设 $\overline{y}=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$,

其中 $R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$是$m$次多项式, $m=\max\{l,n\}$

$$k=\begin{cases}0 & \lambda\pm i\omega\text{不是特征方程的根时};\\ 1 & \lambda\pm i\omega\text{是特征方程的单根时}.\end{cases}$$

上页 下页 返回

二、典型例题

例1 求通解

$$y\left(x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x}\right)dx=x\left(y\sin\frac{y}{x}-x\cos\frac{y}{x}\right)dy.$$

解 原方程可化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left(\frac{\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{y}{x}}\right),$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$, $y=ux,\ y'=u+xu'$. 代入原方程得

$$u+xu'=u\left(\frac{\cos u+u\sin u}{u\sin u-\cos u}\right),$$ 分离变量

$$\frac{u\sin u-\cos u}{2u\cos u}du=\frac{dx}{x},$$ 两边积分

$$\ln(u\cos u)=\ln x^{-2}+\ln C,\qquad \therefore u\cos u=\frac{C}{x^2},$$

$\therefore \dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x}=\dfrac{C}{x^2}$, 所求通解为 $xy\cos\dfrac{y}{x}=C$.

例2　求通解　$xy'+2y=3x^3y^{\frac{4}{3}}.$

解　原式可化为 $y'+\dfrac{2}{x}y=3x^2y^{\frac{4}{3}}$, 伯努利方程

即 $y^{-\frac{4}{3}}y'+\dfrac{2}{x}y^{-\frac{1}{3}}=3x^2,$

令 $z=y^{-\frac{1}{3}},$　原式变为 $-3z'+\dfrac{2}{x}z=3x^2,$

即 $z'-\dfrac{2}{3x}z=-x^2,$　一阶线性非齐方程

对应齐方通解为 $z=Cx^{\frac{2}{3}},$

利用常数变易法

设 $z = C(x)x^{\frac{2}{3}}$，　代入非齐方程得

$$C'(x)x^{\frac{2}{3}} = -x^2, \quad \therefore C(x) = -\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C',$$

原方程的通解为

$$y^{-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + C'x^{\frac{2}{3}}.$$

例3　求通解 $y'' = \dfrac{1+y'^2}{2y}$.

解　方程不显含 x.

令 $y' = P$,　$y'' = P\dfrac{dP}{dy}$,　代入方程，得

$$P\frac{dP}{dy} = \frac{1+P^2}{2y},$$　解得，$1+P^2 = C_1 y$,

$\therefore$　$P = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$,　即 $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$,

故方程的通解为 $\dfrac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2$.

例4 求特解

$$y'' - 2y' + y = xe^x - e^x, y(1) = y'(1) = 1.$$

解 特征方程 $r^2 - 2r + 1 = 0,$

特征根 $r_1 = r_2 = 1,$

对应的齐次方程的通解为 $Y = (C_1 + C_2 x)e^x.$

设原方程的特解为 $y^* = x^2(ax + b)e^x,$

则 $(y^*)' = [ax^3 + (3a + b)x^2 + 2bx]e^x,$

$$(y^*)'' = [ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 4b)x + 2b]e^x,$$

将 $y^*,(y^*)',(y^*)''$ 代入原方程比较系数得

$$a=\frac{1}{6},\quad b=-\frac{1}{2},$$

原方程的一个特解为 $y^*=\dfrac{x^3}{6}e^x-\dfrac{x^2}{2}e^x,$

故原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+\dfrac{x^3}{6}e^x-\dfrac{x^2}{2}e^x.$

$$\because\ y(1)=1,\qquad \therefore (C_1+C_2-\frac{1}{3})e=1,$$

$$y'=[\,(C_1+C_2)+(C_2-1)x+\frac{x^3}{6}]e^x,$$

$$\because y'(1)=1, \qquad \therefore (C_1+2C_2-\frac{5}{6})e=1,$$

由 $\begin{cases} C_1+C_2=\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{3}, \\ C_1+2C_2=\dfrac{1}{e}+\dfrac{5}{6}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} C_1=\dfrac{2}{e}-\dfrac{1}{6}, \\ C_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e}, \end{cases}$

所以原方程满足初始条件的特解为

$$y=[\frac{2}{e}-\frac{1}{6}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{e})x]e^x+\frac{x^3}{6}e^x-\frac{x^2}{2}e^x.$$

例5　求解方程　$y'' + 4y = \frac{1}{2}(x + \cos 2x).$

解　特征方程　$r^2 + 4 = 0,$

特征根　$r_{1,2} = \pm 2i,$

对应的齐方的通解为　$Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$

设原方程的特解为　$y^* = y_1^* + y_2^*.$

(1)　设 $y_1^* = ax + b,$ 则 $(y_1^*)' = a,$　$(y_1^*)'' = 0,$

代入 $y'' + 4y = \frac{1}{2}x,$ 得　$4ax + 4b = \frac{1}{2}x,$

由 $\begin{cases} 4a = \dfrac{1}{2}, \\ 4b = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = \dfrac{1}{8}, \\ b = 0, \end{cases}$ $\therefore y_1^* = \dfrac{1}{8}x;$

(2) 设 $y_2^* = x(c\cos 2x + d\sin 2x),$

则 $(y_2^*)' = (c + 2dx)\cos 2x + (d - 2cx)\sin 2x,$

$$(y_2^*)'' = (4d - 4cx)\cos 2x - (4c + 4dx)\sin 2x,$$

代入 $y'' + 4y = \dfrac{1}{2}\cos 2x$，得

上页 下页 返回

$$4d\cos 2x - 4c\sin 2x = \frac{1}{2}\cos 2x,$$

由 $\begin{cases} 4d = \dfrac{1}{2}, \\ -4c = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} c = 0, \\ d = \dfrac{1}{8}, \end{cases}$ $\therefore\ y_2^* = \dfrac{1}{8}x\sin 2x;$

故原方程的通解为

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}x\sin 2x.$$

上页 下页 返回

例6 设 $y''+p(x)y'=f(x)$ 有一特解为 $\dfrac{1}{x}$，对应的齐次方程有一特解为 x^2，试求：

（1） $p(x), f(x)$ 的表达式；

（2） 此方程的通解.

解 （1） 由题设可得：

$$\begin{cases} 2+p(x)2x=0, \\ \dfrac{2}{x^3}+p(x)(-\dfrac{1}{x^2})=f(x), \end{cases}$$

解此方程组，得

上页 下页 返回