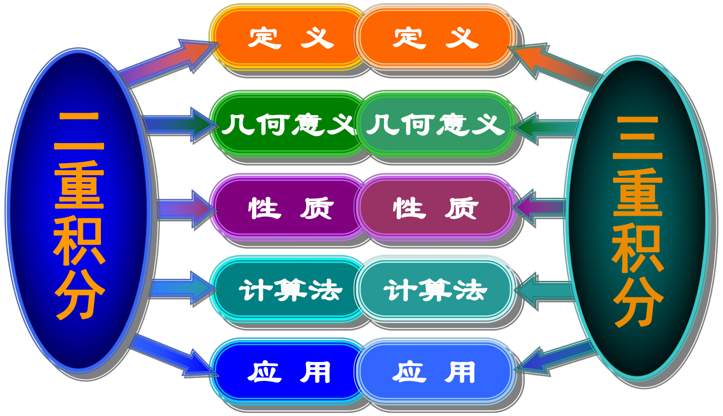
一、主要内容



1、二重积分的定义

定义 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积，在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，

作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$， $(i=1,2,\cdots,n)$，

并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，

如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋近于零时，这和式的极限存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分，

记为 $\iint_D f(x,y)d\sigma$，

即 $\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

2、二重积分的几何意义

当被积函数大于零时，二重积分是柱体的体积.

当被积函数小于零时，二重积分是柱体的体积的负值.

3、二重积分的性质

性质 1 当 k 为常数时，

$$\iint_D kf(x,y)d\sigma = k\iint_D f(x,y)d\sigma.$$

性质 2 $\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma$

$$= \iint_D f(x,y)d\sigma \pm \iint_D g(x,y)d\sigma.$$

性质３　对区域具有可加性($D = D_1 + D_2$)

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

性质４　若σ为D的面积 $\sigma = \iint_D 1\cdot d\sigma = \iint_D d\sigma.$

性质５　若在D上，$f(x,y) \le g(x,y)$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma.$$

特殊地 $\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma.$

性质６　设M、m分别是$f(x,y)$在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ为 D 的面积，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma$$

（二重积分估值不等式）

性质７　设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续，σ为D的面积，则在 D 上至少存在一点(ξ,η)使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma.$$

（二重积分中值定理）

４、二重积分的计算

（１）直角坐标系下

［X一型］ D： $a \le x \le b,\quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x).$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

X-型区域的特点： 穿过区域且平行于y轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

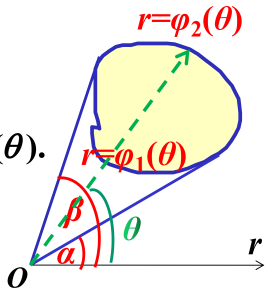
［Y一型］ D： $c \le y \le d,\quad \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y).$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Y型区域的特点： 穿过区域且平行于x轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

（2）极坐标系下

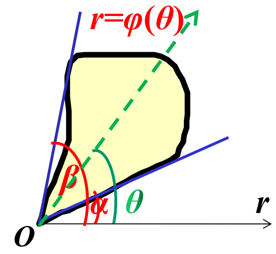
D_1： $\alpha \le \theta \le \beta$， $\varphi_1(\theta) \le r \le \varphi_2(\theta)$.



$$\iint_{D_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

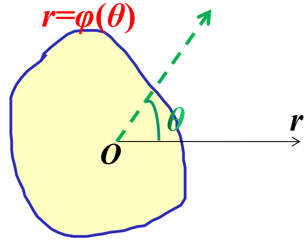
D_2： $\alpha \le \theta \le \beta$， $0 \le r \le \varphi(\theta)$.



$$\iint_{D_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

D_3： $0 \le \theta \le 2\pi$， $0 \le r \le \varphi(\theta)$.



$$\iint_{D_3} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

5、二重积分的应用

(1) 体积

在曲面 $z = f(x, y)$ 与区域 D 之间直柱体的体积为

$$V = \iint_D f(x, y) dxdy.$$

(2) 曲面积

设S曲面的方程为：$z = f(x, y)$.

曲面S的面积为 $A = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy$;

6、三重积分的定义

设 $f(x, y, z)$ 是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数，将闭区域 Ω 任意分成 n 个小闭区域 Δv_1，Δv_2，$\cdots$，Δv_n，其中 Δv_n 表示第 i 个小闭区域，也表示它的体积，在每个 Δv_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta v_i$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$，并作和，如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋近于零时，这和式的极限存在，则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分，记为

$$\iiint_\Omega f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i.$$

7、三重积分的几何意义

当 $f(x,y,z)=1$ 时，

$\iiint\limits_{\Omega} dv = V$ 表示空间区域的体积.

8、三重积分的性质

类似于二重积分的性质.

9、三重积分的计算

（1） 直角坐标

$\Omega: z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y);\ y_1(x) \le y \le y_2(x);\ a \le x \le b.$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

$\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D_z,\ c_1 \le z \le c_2\}.$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy.$$

（2） 柱面坐标

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases} \qquad dv = rdrd\theta dz,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$$
$$= \iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) rdrd\theta dz.$$

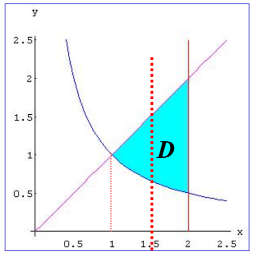
（3） 球面坐标

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases} \qquad dv = r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz =$$
$$\iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta.$$

二、典型例题

例1 计算 $\iint_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma$. 其中 D 由 $y=x,\ y=\frac{1}{x},\ x=2$ 围成.



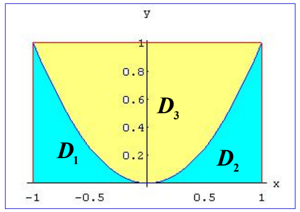
解 X-型 $D: \frac{1}{x}\le y\le x, 1\le x\le 2.$

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy$$

$$=\int_1^2\left(-\frac{x^2}{y}\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}dx=\int_1^2(x^3-x)dx=\frac{9}{4}.$$

例2 计算 $\iint_D |y-x^2|d\sigma$. 其中 $D: -1\le x\le 1, 0\le y\le 1.$

解 先去掉绝对值符号，如图



$$\iint_D |y-x^2|d\sigma$$

$$=\iint_{D_1+D_2}(x^2-y)d\sigma+\iint_{D_3}(y-x^2)d\sigma$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}(y-x^2)dy=\frac{11}{15}.$$

例3 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}dx.$

解 $$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}dy.$$

$$=\int_0^1(1-x)\sin x dx=\int_0^1(1-x)d(-\cos x)$$

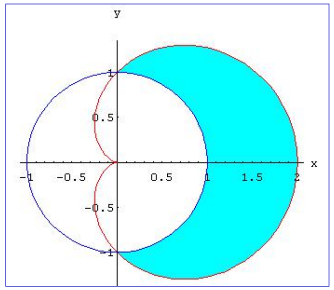
$$=(x-1)\cos x\big|_0^1-\int_0^1(-\cos x)d(1-x)$$

$$=1-\int_0^1\cos x dx=1-\sin 1$$

$$\boxed{\int_a^b u dv=uv\big|_a^b-\int_a^b v du}$$

例4 计算 $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$. 其中 D 是由心脏线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 和圆 $\rho=a$ 所围的面积（取圆外部）.

解 $$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$$



$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_a^{a(1+\cos\theta)}\rho\cdot\rho d\rho$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^3[(1+\cos\theta)^3-1]d\theta$$

$$=a^3\left(\frac{22}{9}+\frac{\pi}{2}\right).$$

例5 证明

$$\int_a^b dx\int_a^x (x-y)^{n-2} f(y)dy = \frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1} f(y)dy.$$

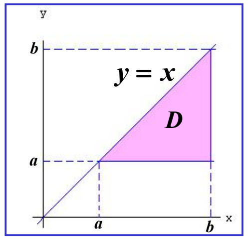
证

$$\int_a^b dx\int_a^x (x-y)^{n-2} f(y)dy$$

$$= \int_a^b dy\int_y^b (x-y)^{n-2} f(y)dx$$

$$= \int_a^b f(y)dy\left[\frac{1}{n-1}(x-y)^{n-1}\right]_y^b$$

$$= \frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1} f(y)dy.$$



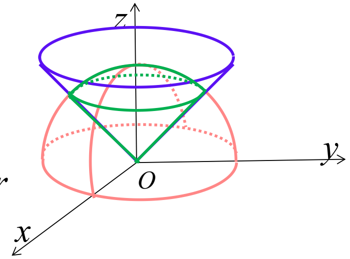
例6 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$, 其中 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的.

解 $\because \Omega$ 关于 yoz 面为对称，$f(x,y,z)=x$ 为 x 的奇函数，有 $\iiint\limits_{\Omega} xdv = 0.$ 利用球面坐标

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv = \iiint\limits_{\Omega} zdv$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$= \frac{\pi}{8}.$$



例7 计算 $\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}dv,\ \ \Omega: x^2+y^2+z^2 \le 1.$

解 $\because$ 被积函数仅为 z 的函数，截面 $D(z)$ 为圆域 $x^2+y^2\le 1-z^2$，故采用 " 先二后一 " 法.

$$\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}dv = 2\iiint\limits_{\Omega_{上}} e^{z}dv$$

$$= 2\int_0^1 \left[\iint\limits_{D(z)} dxdy\right]e^{z}dz$$

$$= 2\int_0^1 \pi(1-z^2)e^{z}dz = 2\pi.$$

例8 证明

$$\int_0^x\left[\int_0^v\left(\int_0^u f(t)dt\right)du\right]dv = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt.$$

证 思路：从改变积分次序入手.

$$\because \int_0^v du\int_0^u f(t)dt = \int_0^v dt\int_t^v f(t)du = \int_0^v (v-t)f(t)dt,$$

$$\therefore \int_0^x\left[\int_0^v\left(\int_0^u f(t)dt\right)du\right]dv = \int_0^x dv\int_0^v (v-t)f(t)dt$$

$$= \int_0^x dt\underline{\int_t^x (v-t)f(t)dv} = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt.$$

测 验 题

一、选择题：

1、$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$=(　　)

(A) $\int_0^{1-x} dy\int_0^1 f(x,y)dx$；　(B) $\int_0^1 dy\int_0^{1-x} f(x,y)dx$；

(C) $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$；　(D) $\int_0^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y)dx$.

2、设D为$x^2+y^2\le a^2$，当$a=$(　　)时，

$$\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy=\pi.$$

(A) 1；　(B) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$；

(C) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$；　(D) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

3、当D是(　　)围成的区域时，二重积分$\iint\limits_D dxdy$=1.

(A) x轴，y轴及$2x+y-2=0$；(B) $|x|=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$；

(C) x轴，y轴及$x=4, y=3$；(D) $|x+y|=1, |x-y|=1$.

4、$\iint\limits_D xe^{xy}dxdy$的值为(　　)．其中区域为$D$

$0\le x\le 1, -1\le y\le 0$.

(A) $\frac{1}{e}$；　(B) e；

(C) $-\frac{1}{e}$；　(D) 1.

5、设$I=\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，其中$D$由$x^2+y^2=a^2$所围成，则$I$=(　　).

(A) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a a^2 rdr=\pi a^4$；(B) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\cdot rdr=\frac{1}{2}\pi a^4$；

(C) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2dr=\frac{2}{3}\pi a^3$；(D) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a a^2\cdot adr=2\pi a^4$.

6、设Ω是由三个坐标面与平面$x+2y-z$=1 所围成的空间区域，则$\iiint\limits_\Omega xdxdydz$=(　　).

(A) $\frac{1}{48}$；　(B) $-\frac{1}{48}$；

(C) $\frac{1}{24}$；　(D) $-\frac{1}{24}$.

7、设Ω是锥面$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}(a>0,b>0,c>0)$与平面$x=0, y=0, z=c$所围成的空间区域在第一卦限的部分，则$\iiint\limits_\Omega \frac{xy}{\sqrt{z}}dxdydz$=(　　).

(A) $\frac{1}{36}a^2b^2\sqrt{c}$；　(B) $\frac{1}{36}a^2b^2\sqrt{b}$；

(C) $\frac{1}{36}b^2c^2\sqrt{a}$；　(D) $\frac{1}{36}c\sqrt{ab}$.

8、计算$I=\iiint\limits_\Omega zdv$，其中$\Omega$为$z^2=x^2+y^2, z=1$围成的立体，则正确的解法为(　　)和(　　).

(A) $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^1 zdz$；(B) $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^1 zdz$；

(C) $I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dz\int_r^1 rdr$；(D) $I=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z zrdr$.

9、曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$包含在圆柱$x^2+y^2=2x$内部的那部分面积$s=$(　　).

(A) $\sqrt{3}\pi$；　　(B) $\sqrt{2}\pi$；

(C) $\sqrt{5}\pi$；　　(D) $2\sqrt{2}\pi$.

二、计算下列二重积分:

1、$\iint\limits_D(x^2-y^2)d\sigma$, 其中 D 是闭区域: $0\le y\le\sin x, 0\le x\le\pi$.

2、$\iint\limits_D\arctan\frac{y}{x}d\sigma$, 其中$D$是由直线$y=0$及圆周$x^2+y^2=4, x^2+y^2=1$, $y=x$所围成的在第一象限内的闭区域 .

3、$\iint\limits_D(y^2+3x-6y+9)d\sigma$, 其中 D 是闭区域: $x^2+y^2\le R^2$

4、$\iint\limits_D\left|x^2+y^2-2\right|d\sigma$, 其中$D: x^2+y^2\le 3$.

三、作出积分区域图形并交换下列二次积分的次序:

1、$\int_0^1 dy\int_0^{2y}f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y}f(x,y)dx$；

2、$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$；

3、$\int_0^a d\theta\int_0^\theta f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$.

四、将三次积分$\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x,y,z)dz$改换积分次序为 $x\to y\to z$.

五、计算下列三重积分:

1、$\iiint\limits_\Omega y\cos(x+z)dxdydz, \Omega$: 抛物柱面$y=\sqrt{x}$ 及平面 $y=o, z=o, x+z=\frac{\pi}{2}$所围成的区域 .

2、$\iiint\limits_\Omega(y^2+z^2)dv$,其中$\Omega$是由$xoy$平面上曲线 $y^2=2x$绕 x 轴旋转而成的曲面与平面$x=5$所围成的闭区域 .

3、$\iiint\limits_\Omega\frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}dv$,其中$\Omega$是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$所围成的闭区域 .

六、求平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$被三坐标面所割出的有限部分的面积 .

测验题答案

一、 1、D；　2、C；　3、A；　4、A；　5、B；
　　6、A；　7、A；　8、B,D；　9、B；

二、1、$\pi^2-\frac{40}{9}$； 2、$\frac{3}{64}\pi^2$； 3、$\frac{\pi}{4}R^4+9\pi R^2$； 4、$\frac{5}{2}\pi$.

三、1、$\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)dy$；

2、$\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$；

3、$\int_0^a rdr\int_r^a f(r\cos\theta,r\sin\theta)d\theta$.

四、$\int_0^1 dz\int_z^1 dy\int_0^z f(x,y,z)dx$.

五、1、$\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$；　2、$\frac{250}{3}\pi$；　3、0.

六、$\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.