

第六章 定积分的应用

习 题 课



主要内容

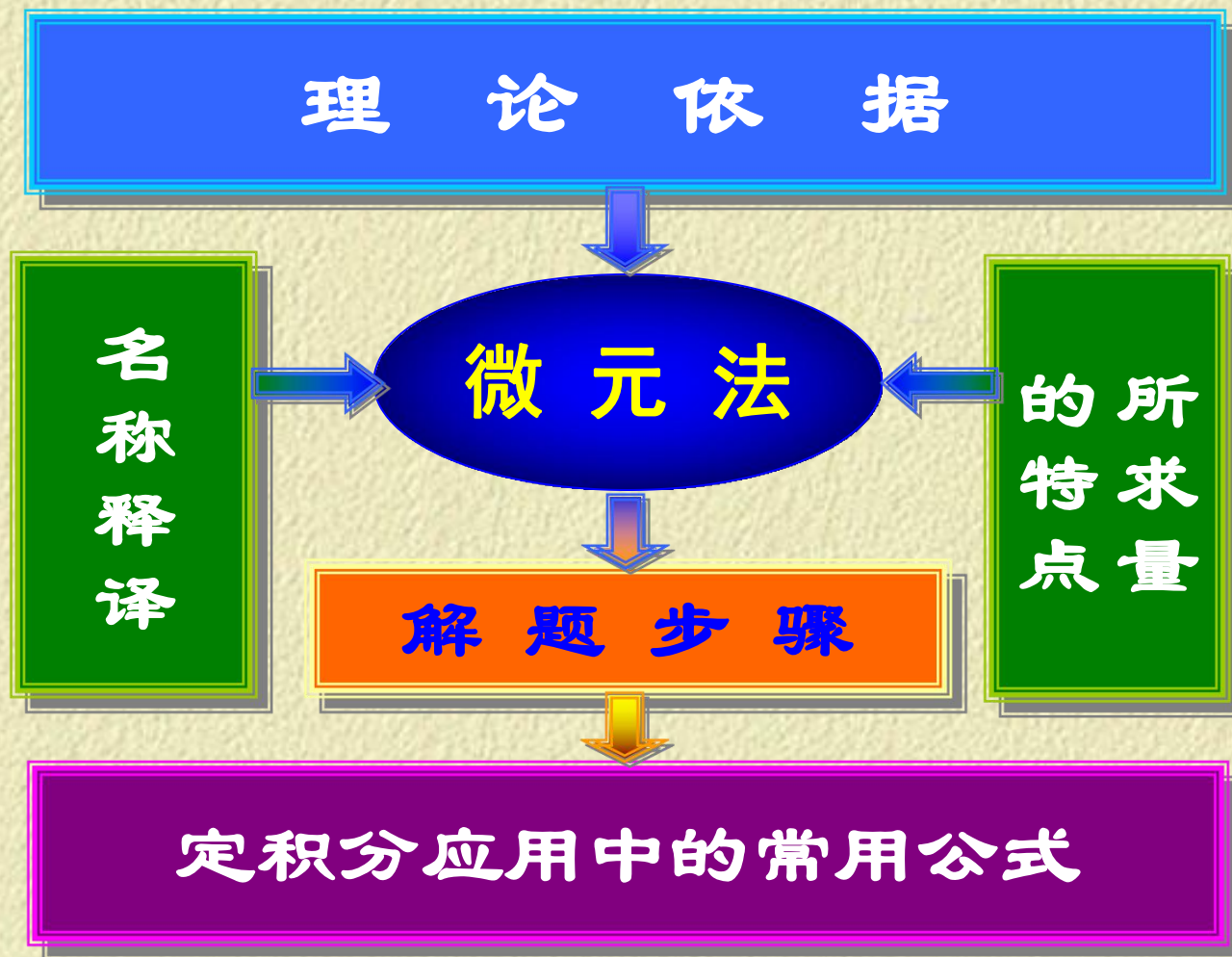


典型例题

帮助

返回

一、主要内容



1、理论依据

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则它的变上限积分

$$U(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1)$$

是 $f(x)$ 的一个原函数, 即 $dU(x) = f(x)dx$,
于是

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b dU = U \quad (2)$$

这表明连续函数的定积分就是 (1) 的微分的定积分.

2、名称释译

由理论依据 (2) 知,所求总量 A 就是其微分 $dU = f(x)dx$ 从 a 到 b 的无限积累(积分):

$$U = \int_a^b f(x)dx$$

这种取微元 $f(x)dx$ 计算积分或原函数的方法称微元法.

3、所求量的特点

- (1) U 是与一个变量 x 的变化区间 $[a, b]$ 有关的量；
- (2) U 对于区间 $[a, b]$ 具有可加性，就是说，如果把区间 $[a, b]$ 分成许多部分区间，则 U 相应地分成许多部分量，而 U 等于所有部分量之和；
- (3) 部分量 ΔU_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i)\Delta x_i$ ；
就可以考虑用定积分来表达这个量 U 。

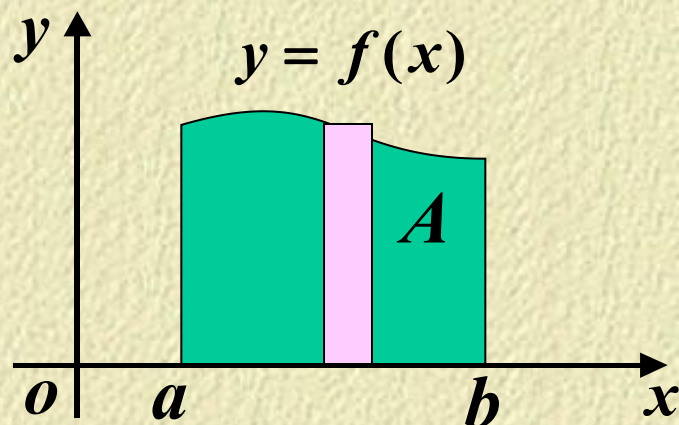
4、解题步骤

- 1) 根据问题的具体情况，选取一个变量例如 x 为积分变量，并确定它的变化区间 $[a, b]$ ；
- 2) 设想把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间，取其中任一小区间并记为 $[x, x + dx]$ ，求出相应于这小区间的部分量 ΔU 的近似值．如果 ΔU 能近似地表示为 $[a, b]$ 上的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 dx 的乘积，就把 $f(x)dx$ 称为量 U 的元素且记作 dU ，即 $dU = f(x)dx$ ；
- 3) 以所求量 U 的元素 $f(x)dx$ 为被积表达式，在区间 $[a, b]$ 上作定积分，得 $U = \int_a^b f(x)dx$ ，即为所求量 U ．

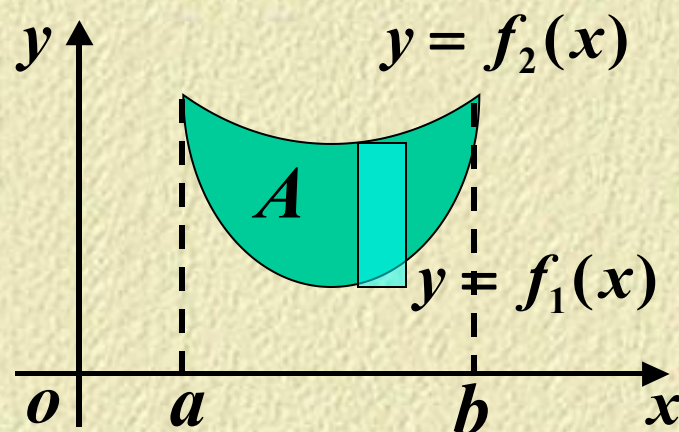
5、定积分应用的常用公式

(1) 平面图形的面积

直角坐标情形



$$A = \int_a^b f(x) dx$$



$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

参数方程所表示的函数

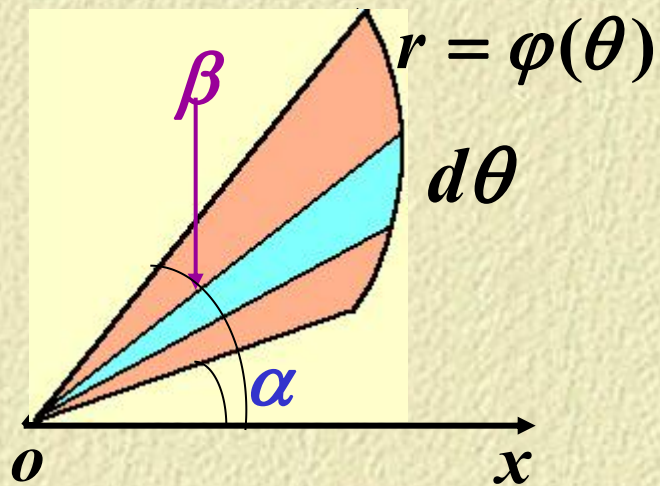
如果曲边梯形的曲边为参数方程
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

曲边梯形的面积
$$A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt$$

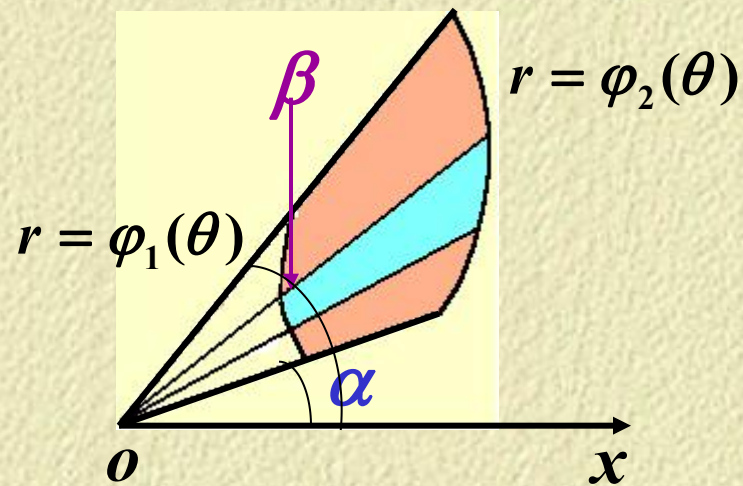
(其中 t_1 和 t_2 对应曲线起点与终点的参数值)

在 $[t_1, t_2]$ (或 $[t_2, t_1]$) 上 $x = \varphi(t)$ 具有连续导数,
 $y = \psi(t)$ 连续.

极坐标情形

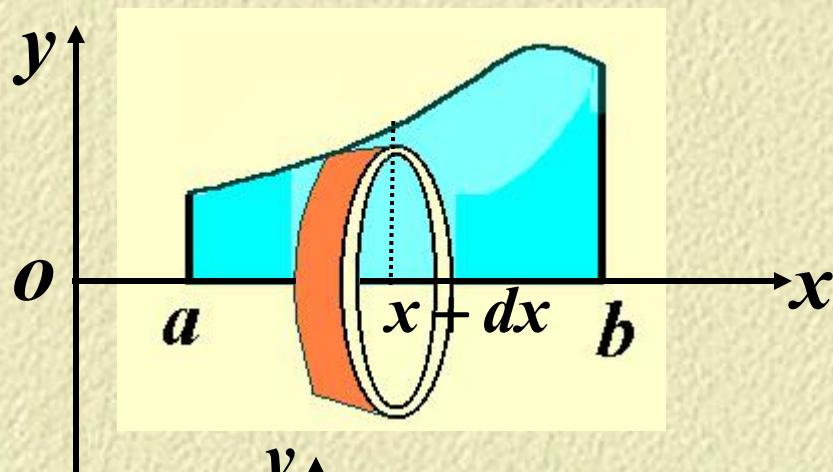


$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi(\theta)]^2 d\theta$$

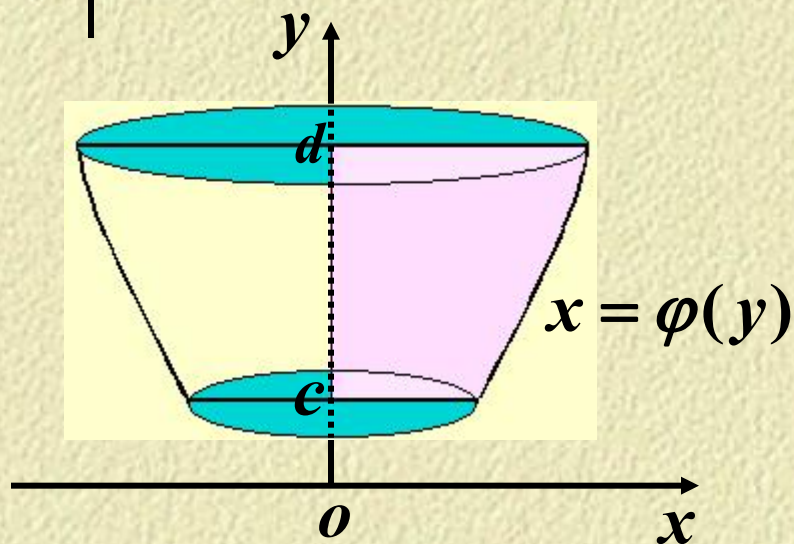


$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi_2^2(\theta) - \varphi_1^2(\theta)] d\theta$$

(2) 体积

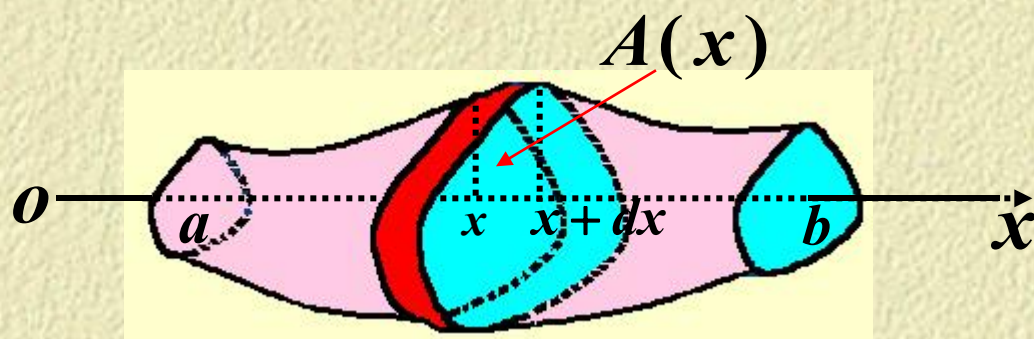


$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$



$$V = \int_c^d \pi [\varphi(y)]^2 dy$$

平行截面面积为已知的立体的体积

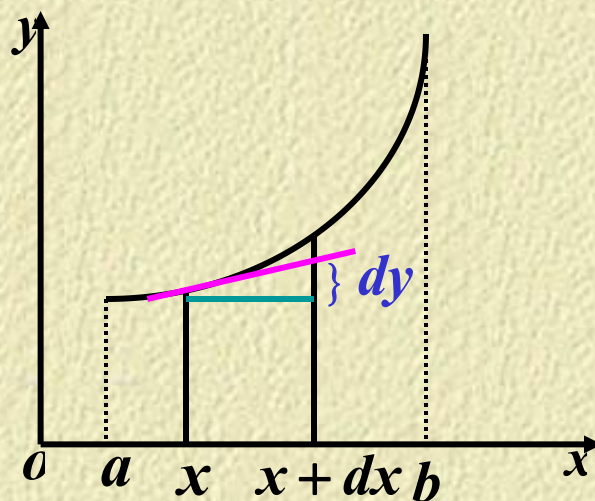


$$V = \int_a^b A(x) dx$$

(3) 平面曲线的弧长

A. 曲线弧为 $y = f(x)$

弧长 $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$



B. 曲线弧为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$

其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数

弧长 $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$

C. 曲线弧为 $r = r(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$)

弧长 $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$

二、典型例题

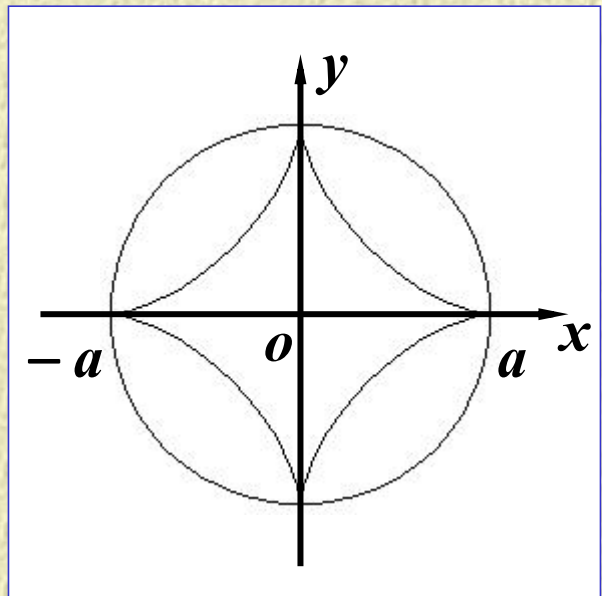
例1 已知

星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (a > 0)$

求 1⁰ 它所围成的面积;

2⁰ 它的弧长;

3⁰ 它绕轴旋转而成的旋转体
体积.



解 1° 设面积为 A . 由对称性,有

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^a y dx \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 [\sin^4 t - \sin^6 t] dt = \frac{3}{8} \pi a^2. \end{aligned}$$

2° 设弧长为 L . 由对称性,有

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \cos t \sin t dt = 6a.$$

3° 体积为 V .

由对称性,有

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^a \pi y^2 dx = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi a^2 \sin^6 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt \\ &= 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t (1 - \sin^2 t) dt = \frac{32}{105} \pi a^3. \end{aligned}$$

测验题

一、选择题:

1、曲线 $y = |\ln x|$ 与直线 $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ 及 $y = 0$ 所围成的区域的面积 $S = (\quad)$;

(A) $2(1 - \frac{1}{e})$;

(B) $e - \frac{1}{e}$;

(C) $e + \frac{1}{e}$;

(D) $\frac{1}{e} + 1$.

2、曲线 $r = \sqrt{2} \sin \theta$ 与 $r^2 = \cos 2\theta$ 所围图形公共部分的面积 $S = (\quad)$;

(A) $\frac{\pi}{12} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$;

(B) $\frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$;

(C) $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$;

(D) $\frac{\pi}{6} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

3、曲线 $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$ 所围图形的面积
 $S = (\quad)$;

(A) $\frac{3}{32} \pi a^2$;

(B) $\frac{3}{8} \pi a^2$;

(C) $\frac{1}{2} a^2$;

(D) $\frac{1}{16} \pi a^2$.

4、由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 与旋转锥面 $x^2 + y^2 = 8z^2$ 之间包含 z 轴的部分的体积 $V = (\quad)$;

(A) 144π ;

(B) 36π ;

(C) 72π ;

(D) 24π .

5、用一平面截半径为 r 的球，设截得的部分球体高为 h ($0 < h < 2r$) 体积为 V ，则 $V =$ ()；

(A) $\frac{\pi h^2}{3}(2r - h)$;

(B) $\frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$;

(C) $\pi h^2(2r - h)$;

(D) $\frac{\pi h^2}{4}(3r - h)$.

6、曲线 $y = x^2 - 2x + 4$ 上点 $M_0(0, 4)$ 处的切线 M_0T 与曲线 $y^2 = 2(x - 1)$ 所围图形的面积 $S =$ ()；

(A) $\frac{9}{4}$;

(B) $\frac{4}{9}$;

(C) $\frac{13}{12}$;

(D) $\frac{21}{4}$.

7、抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 自点 $(0, 0)$ 至点 $(\frac{p}{2}, p)$

的一段曲线弧长 $L = (\quad)$;

(A) $\frac{p}{2} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] + p \ln p$;

(B) $\frac{1}{p} \left[\frac{p}{2} \sqrt{2} + \frac{p^2}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \right]$;

(C) $\frac{p}{2} [\sqrt{2} + \ln p(1 + \sqrt{2})]$;

(D) $\frac{p}{2} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$.

8、曲线 $y = \frac{r}{h}x$, $0 \leq x \leq h$, 绕 x 轴旋转所得旋转体的侧面积 $S = (\quad)$;

- (A) $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$; (B) $\pi h \sqrt{r^2 + h^2}$;
(C) $\frac{\pi r}{h} \sqrt{r^2 + h^2}$; (D) $2\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.

二、在区间 $[1, e]$ 内求一点 x_0 , 使 $y = \sqrt{\ln x}$, $y = 0$, $y = 1$ 及 $x = x_0$ 所围成两块面积之和为最小.

三、设曲边梯形是由连续曲线 $y = f(x)$ ($f(x) > 0$), x 轴与两直线 $x = a$, $x = b$ 所围成的, 求证: 存在直线 $x = \xi$ ($\xi \in (a, b)$) 将曲边梯形的面积平分.

四、求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, (0 \leq t \leq 2\pi)$

1、绕 x 轴旋转一周所成曲面的面积；

2、绕 y 轴旋转一周所成曲面的面积。

五、有一旋转体，它由曲线 $y = \frac{1}{1+x^2}$ ， y 轴， x 轴

以及直线 $x = 1$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转而成，已知其上任一点的体密度等于该点到旋转轴的距离，求它的质量。

六、以每秒 a 的流量往半径为 R 的半球形水池内注水

1、求在水池中水深 h ($0 < h < R$) 时水面上升的速度；

2、若再将满池水全部抽出，至少需做功多少？

测验题答案

一、 1、 A; 2、 D; 3、 B; 4、 D;
 5、 B; 6、 D; 7、 A; 8、 A .

二、 $x_0 = e^{\frac{1}{4}}$. 四、 1、 $\frac{64}{3}\pi a^2$; 2、 $16\pi^2 a^2$.

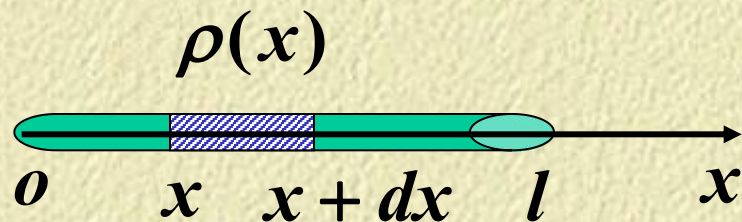
五、 $2\pi(1 - \frac{\pi}{4})$.

六、 1、 $\frac{dh}{dt} = \frac{a}{\pi(2Rh - h^2)}$; 2、 $w = \frac{\pi}{4}R^4$.

一、定积分在物理学上应用的常用公式

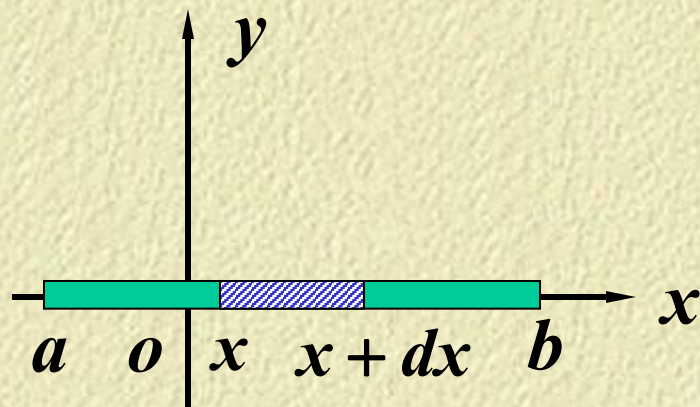
1、细棒的质量 ($\rho(x)$ 为线密度)

$$\begin{aligned} m &= \int_0^l dm \\ &= \int_0^l \rho(x) dx \end{aligned}$$



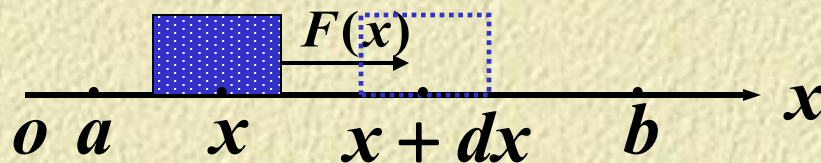
2、转动惯量

$$\begin{aligned} I_y &= \int_a^b dI_y \\ &= \int_a^b x^2 \rho(x) dx \end{aligned}$$



3、变力所作的功

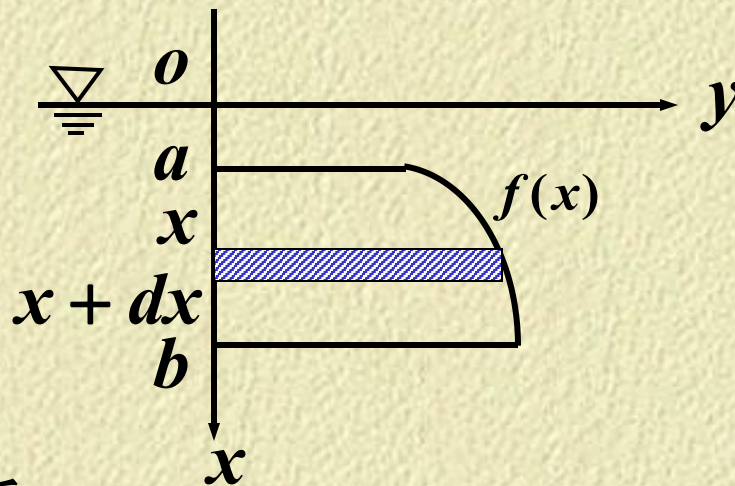
$$\begin{aligned} W &= \int_a^b dW \\ &= \int_a^b F(x) dx \end{aligned}$$



4、水压力

$$\begin{aligned} P &= \int_a^b dP \\ &= \int_a^b \mu x f(x) dx \end{aligned}$$

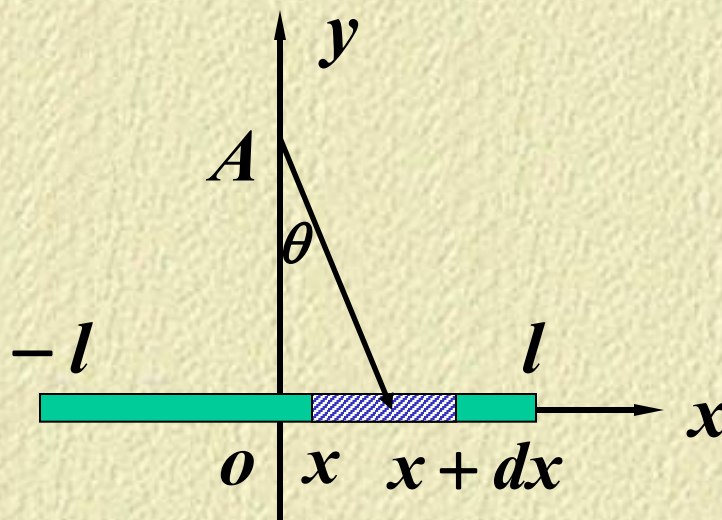
(μ 为比重)



5、 引力

$$F_y = \int_{-l}^l dF_y = \int_{-l}^l \frac{G a \rho dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_x = 0. \quad (G \text{ 为引力系数})$$



6、 函数的平均值

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

7、 均方根

$$\bar{y} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) dx}$$

二、典型例题

例2 以每秒 a 的流量往半径为 R 的半球形水池内注水. (1) 求在池中水深 h ($0 < h < R$) 时水面上升的速度; (2) 若再将满池水全部抽出, 至少需作功多少?

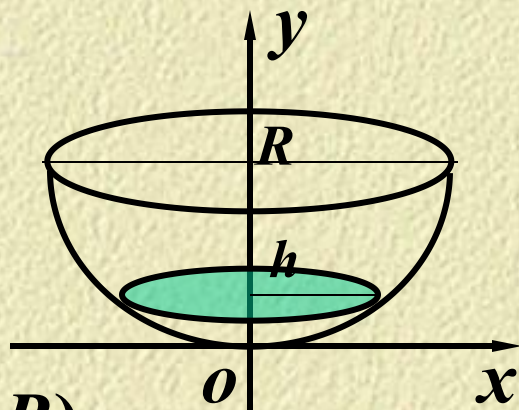
解 如图所示建立坐标系.

半圆的方程为

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2 \quad (0 \leq y \leq R).$$

于是对半圆上任一点, 有

$$x^2 = R^2 - (y - R)^2 = 2Ry - y^2 \quad (0 \leq y \leq R).$$



(1) 因已知半球可看作此半圆绕 y 轴旋转而成的立体, 故半球内高为 h 的球缺的体积即水深为 h 时水池内水的体积为

$$V(h) = \int_0^h \pi x^2 dy = \int_0^h \pi(2Ry - y^2) dy$$

又设水深 h 时已注水的时间为 t , 则有 $V(h) = at$,

$$\text{即 } \int_0^h \pi(2Ry - y^2) dy = at$$

两边对 t 求导, 得 $\pi(2Rh - h^2) \frac{dh}{dt} = a$,

故所求速度为 $\frac{dh}{dt} = \frac{a}{\pi(2Rh - h^2)}$.

(2) 将满池的水全部抽出所需的最小功即将池内水全部提升到池沿高度所需的功.

抽水时使水位从 y ($0 \leq y \leq R$) 降到 $y - dy$ 所需的功约为 $\rho\pi x^2 dy(R - y)$, ($\rho = 1$ 水的比重)

$$\text{又 } x^2 = 2Ry - y^2,$$

$$\text{即功元素 } dW = \rho\pi(2Ry - y^2)(R - y)dy.$$

故将满池水全部提升到池沿高度所需功为

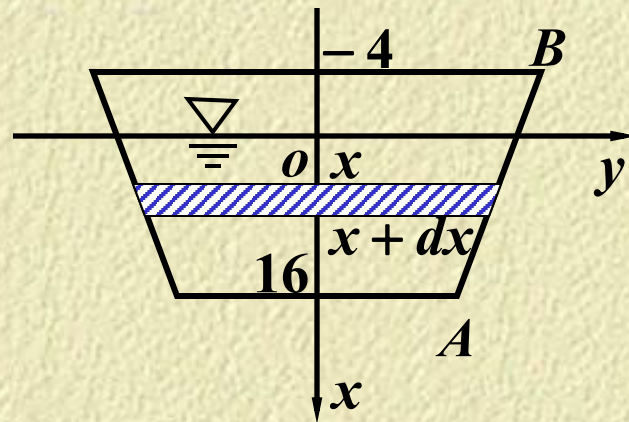
$$\begin{aligned} W &= \int_0^R \rho \pi (2Ry - y^2)(R - y) dy \\ &= \pi \int_0^R (2R^2y - 3Ry^2 + y^3) dy \\ &= \frac{\pi}{4} R^4. \end{aligned}$$

例3 一等腰梯形闸门,如图所示,梯形的上下底分别为 50 米和 30 米,高为 20 米,如果闸门顶部高出水面 4 米,求闸门一侧所受的水的静压力.

解 如图建立坐标系,
则梯形的腰 AB 的方程为

$$y = -\frac{1}{2}x + 23.$$

此闸门一侧受到静水压力为



$$P = 2 \int_0^{16} \rho g x \left(-\frac{1}{2}x + 23 \right) dx$$

$$= \rho g \left(-\frac{x^3}{3} + 23x^2 \right) \Big|_0^{16}$$

$$= \rho g \left(-\frac{1}{3} \times 4096 + 23 \times 256 \right)$$

$$= 4522.67 \rho g$$

$$\approx 4.43 \times 10^7 \text{ (牛)}.$$