

1、当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k = \underline{C}$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2、 $f(x) = 1 - e^{\tan x}$ 是 $\arcsin \frac{x}{2}$ ($x \rightarrow 0$ 时) 的 ().

A. 等价无穷小 B. 同阶但非等价无穷小 C. 低阶无穷小 D. 高阶无穷小

3. $x = 0$ 是 $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ 的 A 间断点.

A. 可去 B. 跳跃 C. 振荡 D. 无穷

4. 曲线 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 在点 $(0,1)$ 的切线方程为 $y = x + 1$

5. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{xy} + y^3 - 5x = 0$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.

6、求由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

7. 已知 $f(x) = \begin{cases} (1+3x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ B, & x = 0 \\ \frac{A \sin 3x}{x}, & x < 0 \end{cases}$, 问 A, B 取何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续。

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{x}} = e^3$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{A \sin 3x}{x} = 3A$, 所以 $f(x)$ 在

$x = 0$ 连续等价于 $e^3 = 3A = B$, 即 $A = \frac{1}{3}e^3, B = e^3$ 。

8. 证明: 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续, 但不可导.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 点处连续.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}+1)} = \infty$$

故 $x = 0$ 处不可导

} 值相等 \rightarrow 连续.

\rightarrow 导数不相等 \rightarrow 不可导.

9. 求函数 $y = (\sin x)^{\ln x}$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$

$$\ln y = \ln x \ln \sin x \quad \frac{1}{y} y' = \frac{1}{x} \ln \sin x + \frac{\cos x}{\sin x} \ln x$$

$$y' = (\sin x)^{\ln x} \left[\frac{\ln \sin x}{x} + \frac{\cos x \ln x}{\sin x} \right]$$

10. 求函数 $y = e^{\sin^2 x}$ 的微分 $y' = e^{\sin^2 x} \cdot (\sin^2 x)' = e^{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cos x$

11. 设 $y = x^2 \sin 2x$, 求 $y^{(50)}(0)$.

$$\text{解: } y^{(50)}(0) = \sum_{k=0}^{50} C_{50}^k (x^2)^{(k)} \big|_{x=0} \cdot (\sin 2x)^{(50-k)} \big|_{x=0} = C_{50}^2 (x^2)'' \big|_{x=0} \cdot (\sin 2x)^{(48)} \big|_{x=0}$$

$$= \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 2 \cdot 2^{48} \sin(2x + 48 \cdot \frac{\pi}{2}) \big|_{x=0} = 0.$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \quad C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$