第五章
定积分

习题 5-1　定积分的概念与性质

*1. 利用定积分定义计算由抛物线 $y=x^2+1$,两直线 $x=a$、$x=b(b>a)$ 及 x 轴所围成的图形的面积.

解　由于函数 $f(x)=x^2+1$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,因此可积,为计算方便,不妨把 $[a,b]$ 分成 n 等份,则分点为 $x_i=a+\dfrac{i(b-a)}{n}(i=0,1,2,\cdots,n)$,每个小区间长度为 $\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$,取 ξ_i 为小区间的右端点 x_i,则

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\\
&=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)^2+1\right]\frac{b-a}{n}\\
&=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(a^2+1)+2\frac{a(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i+\frac{(b-a)^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2\\
&=(b-a)(a^2+1)+a(b-a)^2\frac{(n+1)}{n}+(b-a)^3\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.
\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时,上式极限为

$$(b-a)(a^2+1)+a(b-a)^2+\frac{1}{3}(b-a)^3=\frac{b^3-a^3}{3}+b-a,$$

即为所求图形的面积.

*2. 利用定积分定义计算下列积分:

(1) $\int_a^b x\mathrm{d}x(a<b)$;　　(2) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解　由于被积函数在积分区间上连续,因此把积分区间分成 n 等份,并取 ξ_i 为小区间的右端点,得到

$$\begin{aligned}
(1)\ \int_a^b x\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[a+\frac{i(b-a)}{n}\right]\frac{b-a}{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]\\
&=a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}.
\end{aligned}$$

(2) $\int_0^1 e^x dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{i}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(e^{\frac{1}{n}})^{n+1}-1}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(e^{\frac{n+1}{n}}-1)}{\lim\limits_{n\to\infty}n(e^{\frac{1}{n}}-1)}=e-1.$$

3. 利用定积分的几何意义,证明下列等式:

(1) $\int_0^1 2x dx = 1$; (2) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx = 0$; (4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$.

证 (1) 根据定积分的几何意义,定积分$\int_0^1 2x dx$ 表示由直线 $y=2x$、$x=1$ 及 x 轴围成的图形的面积,该图形是三角形,底边长为 1,高为 2,因此面积为 1,即$\int_0^1 2x dx = 1$.

(2) 根据定积分的几何意义,定积分$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ 表示的是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 以及 x 轴、y 轴围成的在第 Ⅰ 象限内的图形面积,即单位圆的四分之一的图形,因此有$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

(3) 由于函数 $y=\sin x$ 在区间$[0,\pi]$上非负,在区间$[-\pi,0]$上非正. 根据定积分的几何意义,定积分$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx$ 表示曲线 $y=\sin x(x\in[0,\pi])$ 与 x 轴所围成的图形 D_1 的面积减去曲线 $y=\sin x(x\in[-\pi,0])$ 与 x 轴所围成的图形 D_2 的面积,显然图形 D_1 与 D_2 的面积是相等的,因此有$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx = 0$.

(4) 由于函数 $y=\cos x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上非负. 根据定积分的几何意义,定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$ 表示曲线 $y=\cos x\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$与 x 轴和 y 轴所围成的图形 D_1 的面积加上曲线 $y=\cos x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\right)$与 x 轴和 y 轴所围成的图形 D_2 的面积,而图形 D_1 的面积和图形 D_2 的面积显然相等,因此有$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$.

4. 利用定积分的几何意义,求下列积分:

(1) $\int_0^t x dx(t>0)$; (2) $\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx$;

(3) $\int_{-1}^{2}|x|dx$; (4) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$.

解 (1) 根据定积分的几何意义,$\int_0^t x dx$ 表示的是由直线 $y=x$, $x=t$ 以及 x 轴所

围成的直角三角形面积,该直角三角形的两条直角边的长均为 t,因此面积为$\frac{t^2}{2}$,故有$\int_0^t x\mathrm{d}x = \frac{t^2}{2}$.

(2) 根据定积分的几何意义,$\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x$ 表示的是由直线 $y = \frac{x}{2}+3, x = -2, x = 4$ 以及 x 轴所围成的梯形的面积,该梯形的两底长分别为$\frac{-2}{2}+3 = 2$ 和$\frac{4}{2}+3 = 5$,梯形的高为$4-(-2) = 6$,因此面积为21. 故有$\int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x = 21$.

(3) 根据定积分的几何意义,$\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x$ 表示的是由折线 $y = |x|$ 和直线 $x = -1, x = 2$ 以及 x 轴所围成的图形的面积. 该图形由两个等腰直角三角形组成,一个由直线$y = -x, x = -1$ 和 x 轴所围成,其直角边长为 1,面积为$\frac{1}{2}$;另一个由直线 $y = x, x = 2$ 和 x 轴所围成,其直角边长为 2,面积为 2. 因此$\int_{-1}^{2}|x|\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$.

(4) 根据定积分的几何意义,$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$ 表示的是由上半圆周 $y = \sqrt{9-x^2}$ 以及 x 轴所围成的半圆的面积,因此有$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\pi$.

5. 设 $a < b$,问 a、b 取什么值时,积分$\int_a^b (x-x^2)\mathrm{d}x$ 取得最大值?

解 根据定积分几何意义,$\int_a^b (x-x^2)\mathrm{d}x$ 表示的是由 $y = x-x^2, x = a, x = b$,以及 x 轴所围成的图形在 x 轴上方部分的面积减去 x 轴下方部分面积. 因此如果下方部分面积为 0,上方部分面积为最大时,$\int_a^b (x-x^2)\mathrm{d}x$ 的值最大,即当 $a = 0, b = 1$ 时,积分$\int_a^b (x-x^2)\mathrm{d}x$ 取得最大值.

6. 已知 $\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$,试用抛物线法公式(1-6)求出 ln2 的近似值(取 $n = 10$,计算时取 4 位小数).

解 计算 y_i 并列表

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.000 0	0.100 0	0.200 0	0.300 0	0.400 0	0.500 0	0.600 0	0.700 0	0.800 0	0.900 0	1.000 0
y_i	1.000 0	0.909 1	0.833 3	0.769 2	0.714 3	0.666 7	0.625 0	0.588 2	0.555 6	0.526 3	0.500 0

按抛物线法公式(1-6),求得

$$s = \frac{1}{30}[(y_0+y_{10})+2(y_2+y_4+y_6+y_8)+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)]$$

≈ 0.6931.

7. 设$\int_{-1}^{1}3f(x)\,\mathrm{d}x = 18$，$\int_{-1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x = 4$，$\int_{-1}^{3}g(x)\,\mathrm{d}x = 3$. 求

(1) $\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$；　(2) $\int_{1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{3}^{-1}g(x)\,\mathrm{d}x$；　(4) $\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}3f(x)\,\mathrm{d}x = 6$.

(2) $\int_{1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x = -2$.

(3) $\int_{3}^{-1}g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{3}g(x)\,\mathrm{d}x = -3$.

(4) $\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}\int_{-1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{3}{5}\int_{-1}^{3}g(x)\,\mathrm{d}x = 5$.

8. 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力. 已知闸门上水的压强p与水深h存在函数关系，且有$p = 9.8h(\mathrm{kN/m^2})$. 若闸门高$H = 3\,\mathrm{m}$，宽$L = 2\,\mathrm{m}$，求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力$P$.

解　在区间$[0,3]$上插入$n-1$个分点$0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_n = 3$，取$\xi_i \in [h_{i-1}, h_i]$，并记$\Delta h_i = h_i - h_{i-1}$，得到闸门所受水压力的近似值为$\sum_{i=1}^{n}p(\xi_i)2\Delta h_i$，根据定积分的定义可知闸门所受的水压力为

$$P = \int_0^3 2p(h)\,\mathrm{d}h = 19.6\int_0^3 h\,\mathrm{d}h,$$

由于被积函数连续，而连续函数是可积的，因此积分值与积分区间的分法和ξ_i的取法无关. 为方便计算，对区间$[0,3]$进行n等分，并取ξ_i为小区间的端点$h_i = \frac{3i}{n}$，于是

$$\int_0^3 h\,\mathrm{d}h = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{9i}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{9(n+1)}{2n} = \frac{9}{2},$$

故

$$P = 19.6\int_0^3 h\,\mathrm{d}h = 88.2\ (\mathrm{kN}).$$

9. 证明定积分性质：

(1) $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$（$k$是常数）；　(2) $\int_a^b 1\cdot\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a$.

证　根据定积分的定义，在区间$[a,b]$中插入$n-1$个点$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，记$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，任取$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，则

(1) $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}kf(\xi_i)\Delta x_i = k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2) $\int_a^b 1 \cdot dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0}(b-a) = b-a.$

10. 估计下列各积分的值:

(1) $\int_1^4 (x^2+1)dx$;　　(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2 x)dx$;

(3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x dx$;　　(4) $\int_2^0 e^{x^2-x}dx$.

解 (1) 在区间$[1,4]$上,$2 \leqslant x^2+1 \leqslant 17$,因此有

$$6 = \int_1^4 2dx \leqslant \int_1^4 (x^2+1)dx \leqslant \int_1^4 17dx = 51.$$

(2) 在区间$\left[\frac{1}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi\right]$上,$1 = 1+0 \leqslant 1+\sin^2 x \leqslant 1+1 = 2$,因此有

$$\pi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} dx \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2 x)dx \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} 2dx = 2\pi.$$

(3) 在区间$\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right]$上,函数$f(x) = x\arctan x$是单调增加的,因此$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(\sqrt{3})$,即$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \leqslant x\arctan x \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{3}}$,故有

$$\frac{\pi}{9} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6\sqrt{3}}dx \leqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x\arctan x dx \leqslant \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\pi}{\sqrt{3}}dx = \frac{2}{3}\pi.$$

(4) 设$f(x) = x^2-x, x \in [0,2]$,则$f'(x) = 2x-1$,$f(x)$在$[0,2]$上的最大值、最小值必为$f(0)$,$f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f(2)$中的最大值和最小值,即最大值和最小值分别为$f(2) = 2$和$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$,因此有

$$2e^{-\frac{1}{4}} = \int_0^2 e^{-\frac{1}{4}}dx \leqslant \int_0^2 e^{x^2-x}dx \leqslant \int_0^2 e^2 dx = 2e^2,$$

而$\int_2^0 e^{x^2-x}dx = -\int_0^2 e^{x^2-x}dx$,故$-2e^2 \leqslant \int_2^0 e^{x^2-x}dx \leqslant -2e^{-\frac{1}{4}}$.

11. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,证明$\int_0^1 f^2(x)dx \geqslant \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$.

证 记$a = \int_0^1 f(x)dx$,则由定积分性质5,得

$$\int_0^1 [f(x)-a]^2 dx \geqslant 0,$$

即

$$\int_0^1 [f(x)-a]^2 dx = \int_0^1 f^2(x)dx - 2a\int_0^1 f(x)dx + a^2$$
$$= \int_0^1 f^2(x)dx - \left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 \geqslant 0,$$

由此结论成立.

12. 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明

(1) 若在 $[a,b]$ 上,$f(x) \geqslant 0$,且 $f(x) \not\equiv 0$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$;

(2) 若在 $[a,b]$ 上,$f(x) \geqslant 0$,且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$,则在 $[a,b]$ 上,$f(x) \equiv 0$;

(3) 若在 $[a,b]$ 上,$f(x) \leqslant g(x)$,且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,则在 $[a,b]$ 上,$f(x) \equiv g(x)$.

证　(1) 根据条件必定存在 $x_0 \in [a,b]$,使得 $f(x_0) > 0$. 由函数 $f(x)$ 在 x_0 连续可知,存在 $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$,使得当 $x \in [\alpha,\beta]$ 时 $f(x) \geqslant \dfrac{f(x_0)}{2}$. 因此有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x + \int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x,$$

由定积分性质得到:

$$\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0,\quad \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{f(x_0)}{2}\mathrm{d}x = \frac{\beta-\alpha}{2}f(x_0) > 0,\quad \int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

故得到结论 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

(2) 用反证法. 如果 $f(x) \not\equiv 0$,则由(1)得到 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$,与假设条件矛盾,因此结论成立.

(3) 因为 $h(x) = g(x) - f(x) \geqslant 0$,且

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

由(2)可得在 $[a,b]$ 上

$$h(x) \equiv 0,$$

从而结论成立.

13. 根据定积分的性质及第 12 题的结论,说明下列各对积分哪一个的值较大:

(1) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$?

(2) $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$ 还是 $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$?

(3) $\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x$?

(4) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$?

(5) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 还是 $\int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$?

解　(1) 在区间 $[0,1]$ 上 $x^2 \geqslant x^3$, 因此 $\int_0^1 x^2 dx$ 比 $\int_0^1 x^3 dx$ 大.

(2) 在区间 $[1,2]$ 上 $x^2 \leqslant x^3$, 因此 $\int_1^2 x^3 dx$ 比 $\int_1^2 x^2 dx$ 大.

(3) 在区间 $[1,2]$ 上由于 $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$, 得 $\ln x \geqslant (\ln x)^2$, 因此 $\int_1^2 \ln x dx$ 比 $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$ 大.

(4) 由教材第三章第一节例 1 可知, 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) < x$, 因此 $\int_0^1 x dx$ 比 $\int_0^1 \ln(1+x)\, dx$ 大.

(5) 由于当 $x > 0$ 时 $\ln(1+x) < x$, 故此时有 $1 + x < e^x$, 因此 $\int_0^1 e^x dx$ 比 $\int_0^1 (1+x) dx$ 大.

习题 5-2　微积分基本公式

1. 试求函数 $y = \int_0^x \sin t dt$ 当 $x = 0$ 及 $x = \frac{\pi}{4}$ 时的导数.

解　$\frac{dy}{dx} = \sin x$, 因此 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 求由参数表达式 $x = \int_0^t \sin u du$, $y = \int_0^t \cos u du$ 所确定的函数对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解　$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t$.

3. 求由 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$ 所决定的隐函数对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解　方程两端分别对 x 求导, 得 $e^y \frac{dy}{dx} + \cos x = 0$, 故 $\frac{dy}{dx} = -e^{-y}\cos x$.

4. 当 x 为何值时, 函数 $I(x) = \int_0^x te^{-t^2} dt$ 有极值?

解　容易知道 $I(x)$ 可导, 而 $I'(x) = xe^{-x^2} = 0$ 只有惟一解 $x = 0$. 当 $x < 0$ 时 $I'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时 $I'(x) > 0$, 故 $x = 0$ 为函数 $I(x)$ 的惟一的极值点(极小值点).

5. 计算下列各导数:

(1) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$;　　(2) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$;

(3) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt$.

解　(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2x\sqrt{1+x^4}$.

(2) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} - \int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}\right) = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}.$$

(3) $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t\right]\\ &= -\sin x\cos(\pi\cos^2 x) - \cos x\cos(\pi\sin^2 x)\\ &= -\sin x\cos(\pi - \pi\sin^2 x) - \cos x\cos(\pi\sin^2 x)\\ &= (\sin x - \cos x)\cos(\pi\sin^2 x).\end{aligned}$$

6. 证明 $f(x) = \displaystyle\int_1^x\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ 在 $[-1,+\infty)$ 上是单调增加函数，并求 $(f^{-1})'(0)$.

证　显然 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上可导，且当 $x>-1$ 时，$f'(x)=\sqrt{1+x^3}>0$，因此 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 是单调增加函数.

注意到 $f(1)=0$，故 $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7. 设 $f(x)$ 具有三阶连续导数，$y=f(x)$ 的图形如图 5－1 所示. 问下列积分中的哪一个积分值为负？

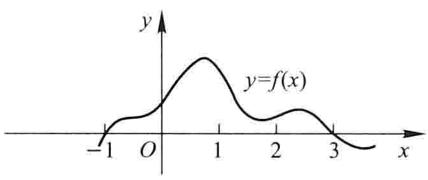

图 5－1

(A) $\displaystyle\int_{-1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x$　　(B) $\displaystyle\int_{-1}^{3}f'(x)\,\mathrm{d}x$

(C) $\displaystyle\int_{-1}^{3}f''(x)\,\mathrm{d}x$　　(D) $\displaystyle\int_{-1}^{3}f'''(x)\,\mathrm{d}x$

解　根据 $y=f(x)$ 的图形可知，在区间 $[-1,3]$ 上 $f(x)\geqslant 0$，且 $f(-1)=f(3)=0$，$f'(-1)>0$，$f''(-1)<0$，$f'(3)<0$，$f''(3)>0$. 因此

$$\int_{-1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x>0,\quad \int_{-1}^{3}f'(x)\,\mathrm{d}x=f(3)-f(-1)=0,$$

$$\int_{-1}^{3}f''(x)\,\mathrm{d}x=f'(3)-f'(-1)<0,\ \int_{-1}^{3}f'''(x)\,\mathrm{d}x=f''(3)-f''(-1)>0.$$ 故选(C).

8. 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^a(3x^2-x+1)\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x$;

(3) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\,dx$; (4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$;

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; (6) $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{dx}{a^2+x^2}$;

(7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; (8) $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$;

(9) $\int_{-e-1}^{-2} \frac{dx}{1+x}$; (10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta d\theta$;

(11) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$;

(12) $\int_0^2 f(x)\,dx$,其中 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant 1,\\ \frac{1}{2}x^2, & x>1. \end{cases}$

解 (1) $\int_0^a (3x^2-x+1)\,dx = \left[x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^a$

$$= a^3-\frac{1}{2}a^2+a = a\left(a^2-\frac{1}{2}a+1\right).$$

(2) $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3x^3}\right]_1^2 = \frac{21}{8}.$

(3) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\,dx = \int_4^9 (\sqrt{x}+x)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right]_4^9 = \frac{271}{6}.$

(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3}.$

(6) $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{\sqrt{3}a} = \frac{\pi}{3a}.$

(7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$

(8) $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx = \int_{-1}^0 \left(3x^2+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$$= [x^3+\arctan x]_{-1}^0 = 1+\frac{\pi}{4}.$$

(9) $\int_{-e-1}^{-2} \frac{dx}{1+x} = [\ln|1+x|]_{-e-1}^{-2} = -1.$

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta-1)\,d\theta = [\tan\theta-\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1-\frac{\pi}{4}.$

(11) $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx$

$= [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 4.$

(12) $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (x+1) dx + \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{6}\right]_1^2 = \frac{8}{3}.$

9. 设 $k \in \mathbf{N}_+$,试证下列各题:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0$;　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi$;　　(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi$.

解 (1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \left[\frac{1}{k}\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = \left[-\frac{1}{k}\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi$, 其中由(1)得到$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2kx dx = 0$.

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx) dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi$, 其中由(1)得到$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2kx dx = 0$.

10. 设 $k, l \in \mathbf{N}_+$,且 $k \neq l$. 证明:

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx dx = 0$;　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx = 0$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx = 0$.

解 (1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(k+l)x - \sin(k-l)x] dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k+l)x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k-l)x dx$

$= 0,$

其中由上一题$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k+l)x dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k-l)x dx = 0$.

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+l)x + \cos(k-l)x] dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+l)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-l)x dx$

$$= 0,$$

其中由上一题$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\ (k+l)x\mathrm{d}x = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi}\cos\ (k-l)x\mathrm{d}x = 0$.

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+l)x-\cos(k-l)x]\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\ (k+l)x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\ (k-l)x\mathrm{d}x$$

$$= 0,$$

其中由上一题$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\ (k+l)x\mathrm{d}x = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi}\cos\ (k-l)x\mathrm{d}x = 0$.

11. 求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t}{x}$;　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

解　(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1} = 1$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{2x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{1} = 2$.

12. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x\in[0,1), \\ x, & x\in[1,2]. \end{cases}$$

求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[0,2]$上的表达式,并讨论 $\Phi(x)$ 在$(0,2)$内的连续性.

解　当 $x\in[0,1)$ 时,$\Phi(x) = \int_0^x t^2\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3}$;当 $x\in[1,2]$ 时,$\Phi(x) = \int_0^1 t^2\mathrm{d}t + \int_1^x t\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}$,即

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, & x\in[0,1), \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}, & x\in[1,2]. \end{cases}$$

由于$\lim\limits_{x\to 1^-}\Phi(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}$,$\lim\limits_{x\to 1^+}\Phi(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$,且 $\Phi(1) = \frac{1}{3}$,故函数 $\Phi(x)$ 在 $x=1$ 处连续,而在其他点处显然连续,因此函数 $\Phi(x)$ 在区间$(0,2)$内连续.

注　事实上,由于$f(x)$ 在$(0,2)$内连续,故 $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$(0,2)$内可导,

因此 $\Phi(x)$ 必在$(0,2)$内连续.我们甚至有以下更强的结论:

若$f(x)$在$[a,b]$上有界并可积,则 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上连续.按照连续函数定义不难证明这一结论.作为练习,请读者自己证明之.

13. 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ 0, & x<0 \text{ 或 } x>\pi.\end{cases}$$

求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$(-\infty,+\infty)$内的表达式.

解　当 $x<0$ 时,$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$;

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时,$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x \frac{1}{2}\sin t\mathrm{d}t=\frac{1-\cos x}{2}$;

当 $x>\pi$ 时,$\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t+\int_\pi^x f(t)\mathrm{d}t$

$$=\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin t\mathrm{d}t=1.$$

即

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1-\cos x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

14. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导且$f'(x)\leqslant 0$,

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

证明在(a,b)内有 $F'(x)\leqslant 0$.

证　$$F'(x)=\frac{1}{(x-a)^2}\left[(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{(x-a)^2}[(x-a)f(x)-(x-a)f(\xi)]\quad(\xi\in(a,x)\subset[a,b])$$

$$=\frac{x-\xi}{x-a}f'(\eta)\quad(\eta\in(\xi,x)\subset(a,b)),$$

由条件可知结论成立.

15. 设 $F(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,求 $F'(0)$.

解　$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{1} = 1.$$

16. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = 1$. 证明函数

$$y = e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt$$

满足微分方程 $\frac{dy}{dx} + y = f(x)$,并求 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$.

证
$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt + e^{-x}\cdot e^x f(x)$$
$$= -y + f(x),$$

因此 $y(x)$ 满足微分方程 $\frac{dy}{dx} + y = f(x)$.

由条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = 1$,从而存在 $X_0 > 0$,当 $x > X_0$ 时,有

$$f(x) > \frac{1}{2}.$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_0^x e^t f(t)\,dt &= \int_0^{X_0} e^t f(t)\,dt + \int_{X_0}^x e^t f(t)\,dt \\ &\geqslant \int_0^{X_0} e^t f(t)\,dt + \int_{X_0}^x \frac{1}{2}e^{X_0}\,dt \\ &= \int_0^{X_0} e^t f(t)\,dt + \frac{1}{2}e^{X_0}(x - X_0),\end{aligned}$$

故,当 $x\to+\infty$ 时,$\int_0^x e^t f(t)\,dt \to +\infty$,从而利用洛必达法则,有

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^t f(t)\,dt}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x} = 1.$$

习题 5-3 定积分的换元法和分部积分法

1. 计算下列定积分:

(1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)dx$;　　(2) $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{(11 + 5x)^3}$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi$;　　(4) $\int_0^{\pi}(1 - \sin^3\theta)\,d\theta$;

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,du$;　　(6) $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2 - x^2}\,dx$;

(7) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}\,\mathrm{d}y$;　(8) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$;

(9) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,(a>0)$;　(10) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

(11) $\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}}$;　(12) $\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$;

(13) $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1}$;　(14) $\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}}\,(a>0)$;

(15) $\int_0^1 t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$;　(16) $\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

(17) $\int_{-2}^{0}\frac{(x+2)\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$;　(18) $\int_0^2\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-2x+2)^2}$;

(19) $\int_{-\pi}^{\pi}x^4\sin x\mathrm{d}x$;　(20) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$;

(21) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;　(22) $\int_{-5}^{5}\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$;

(23) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x\mathrm{d}x$;　(24) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$;

(25) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$;　(26) $\int_0^{2\pi}|\sin(x+1)|\,\mathrm{d}x$.

解　(1) $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=0.$$

(2) $$\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3}=\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}(11+5x)}{5(11+5x)^3}=\left[-\frac{1}{10(11+5x)^2}\right]_{-2}^{1}=\frac{51}{512}.$$

(3) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\mathrm{d}(\cos\varphi)=\left[-\frac{1}{4}\cos^4\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}.$$

(4) $$\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta=\pi+\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}(\cos\theta)\xlongequal{u=\cos\theta}\pi+\int_1^{-1}(1-u^2)\mathrm{d}u=\pi-\frac{4}{3}.$$

(5) $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

(6) $$\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sqrt{2}\sin u}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 u\mathrm{d}u=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

(7) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}\mathrm{d}y \xlongequal{y=2\sin u} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}4\sqrt{2}\cos^2 u\mathrm{d}u$

$$= 2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2u)\mathrm{d}u$$

$$= 2\sqrt{2}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\pi+2).$$

(8) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin u} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}\mathrm{d}u = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2 u-1)\mathrm{d}u$

$$= [-\cot u-u]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1-\frac{\pi}{4}.$$

(9) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=a\sin u} \int_0^{\frac{\pi}{2}}a^4\sin^2 u\cos^2 u\mathrm{d}u = \frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2u)^2\mathrm{d}(2u)$

$$\xlongequal{t=2u} \frac{a^4}{8}\int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^4}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}a^4.$$

(10) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}} \xlongequal{x=\frac{1}{u}} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{-u}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u = \left[-\sqrt{1+u^2}\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$$= \sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(11) 令$u=\sqrt{5-4x}$,即 $x=\frac{5-u^2}{4}$,得

$$\int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5-4x}} = \int_3^1\frac{u^2-5}{8}\mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{24}-\frac{5}{8}u\right]_3^1 = \frac{1}{6}.$$

(12) 令 $u=\sqrt{x}$,即 $x=u^2$,得

$$\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} = \int_1^2\frac{2u\mathrm{d}u}{1+u} = [2u-2\ln(1+u)]_1^2 = 2+2\ln\frac{2}{3}.$$

(13) 令 $u=\sqrt{1-x}$,即 $x=1-u^2$,得

$$\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}-1} = \int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-2u\mathrm{d}u}{u-1} = -2[u+\ln(1-u)]_{\frac{1}{2}}^{0} = 1-2\ln 2.$$

(14) $\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{\mathrm{d}(3a^2-x^2)}{\sqrt{3a^2-x^2}}$

$$= -\left[\sqrt{3a^2-x^2}\right]_0^{\sqrt{2}a} = (\sqrt{3}-1)a.$$

(15) $\int_0^1 t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = -\int_0^1\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^1 = 1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$

(16) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} \xlongequal{x=e^u} \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{1+u}} = [2\sqrt{1+u}]_0^2 = 2\sqrt{3}-2.$

(17) $\int_{-2}^0 \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2} = \int_{-2}^0 \frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+1}dx$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+\arctan(x+1)\right]_{-2}^0$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

(18) 令 $x = 1+\tan u$,则 $dx = \sec^2 u du$,因此

$$\int_0^2 \frac{xdx}{(x^2-2x+2)^2} = \int_0^2 \frac{xdx}{[(x-1)^2+1]^2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\tan u)du}{\sec^2 u}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2u)du$$

$$= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

(19) 由于被积函数为奇函数,因此$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx = 0.$

(20) 由于被积函数为偶函数,因此

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta d\theta = 8\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi.$$

(21) 由于被积函数为偶函数,因此有

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 d(\arcsin x)$$

$$= \frac{2}{3}[(\arcsin x)^3]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^3}{324}.$$

(22) 由于被积函数为奇函数,因此

$$\int_{-5}^5 \frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}dx = 0.$$

(23) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos 2x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x(1-2\sin^2 x)dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-2\sin^2 x)d(\sin x)$$

$$= \left[\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

或者

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3x+\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin 3x+\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}.$$

(24) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\sin x\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{u=\cos x}-2\int_1^0\sqrt{u}\mathrm{d}u=\frac{4}{3}.$$

(25) $\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin x\mathrm{d}x=\sqrt{2}[-\cos x]_0^{\pi}=2\sqrt{2}.$

(26) $\int_0^{2\pi}|\sin(x+1)|\mathrm{d}x\xlongequal{x=u-1}\int_1^{2\pi+1}|\sin u|\mathrm{d}u,$

由于 $|\sin x|$ 是以 π 为周期的周期函数,因此

$$\text{上式}=2\int_0^{\pi}|\sin u|\mathrm{d}u=4.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

证 令 $x=a+b-u$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(a+b-u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(a+b-u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

3. 证明:$\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\quad(x>0).$

证 $\int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\xlongequal{t=\frac{1}{u}}-\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$

4. 证明:$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x(m,n\in\mathbf{N}).$

证 令 $x=1-u$,则

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_1^0-(1-u)^m u^n\mathrm{d}u=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x.$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$n\in\mathbf{Z}$,证明

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi}f(|\sin x|)\mathrm{d}x=\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

证 令 $x=u+\frac{n}{2}\pi$,则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$,因此

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi}f(|\sin x|)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\left|\sin\left(u+\frac{n}{2}\pi\right)\right|\right)\mathrm{d}u$$

$$=\begin{cases}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)\mathrm{d}u, & n \text{ 为偶数}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u)\mathrm{d}u, & n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\left|\cos\left(u+\frac{n}{2}\pi\right)\right|\right)\mathrm{d}u$$

$$=\begin{cases}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u)\mathrm{d}u, & n \text{ 为偶数}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)\mathrm{d}u, & n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

由于$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$,因此结论成立.

6. 若$f(x)$是连续的奇函数,证明$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是偶函数;若$f(x)$是连续的偶函数,证明$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是奇函数.

证 记$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则有

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} -\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u,$$

当$f(x)$为奇函数时,$F(-x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u = F(x)$,故$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是偶函数.

当$f(x)$为偶函数时,$F(-x) = -\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = -F(x)$,故$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是奇函数.

7. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin\omega t\mathrm{d}t$($\omega$为常数);　　(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x$;　　(8) $\int_1^2 x\log_2 x\mathrm{d}x$;

(9) $\int_0^{\pi} (x\sin x)^2\mathrm{d}x$;　　(10) $\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\mathrm{d}x$;

(11) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\mathrm{d}x$;　　(12) $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{d}x(m\in\mathbf{N}_+)$;

(13) $J_m = \int_0^{\pi} x\sin^m x\mathrm{d}x(m\in\mathbf{N}_+)$.

解　(1) $\int_0^1 xe^{-x}dx = -\int_0^1 xd(e^{-x}) = -[xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx$

$$= -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

(2) $\int_1^e x\ln x dx = \int_1^e \frac{\ln x}{2}d(x^2) = [\frac{1}{2}x^2\ln x]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{e^2+1}{4}.$

(3) $\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t\sin\omega t dt = -\frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} td(\cos\omega t) = -\frac{1}{\omega}[t\cos\omega t]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} + \frac{1}{\omega}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos\omega t dt$

$$= -\frac{2\pi}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}[\sin\omega t]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = -\frac{2\pi}{\omega^2}.$$

(4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} xd(\cot x) = [-x\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cot x dx$

$$= -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + [\ln\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

(5) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \int_1^4 2\ln x d\sqrt{x} = [2\sqrt{x}\ln x]_1^4 - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$

$$= 8\ln 2 - [4\sqrt{x}]_1^4 = 4(2\ln 2 - 1).$$

(6) $\int_0^1 x\arctan x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \arctan x d(x^2)$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[x - \arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x d(e^{2x})$

$$= \frac{1}{2}[e^{2x}\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x d(e^{2x})$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}[e^{2x}\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx,$$

因此有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 2).$$

(8) $\int_1^2 x\log_2 x dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \log_2 x d(x^2)$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2\log_2 x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x}{\ln 2}\mathrm{d}x$$

$$= 2 - \frac{1}{4\ln 2}\left[x^2\right]_1^2 = 2 - \frac{3}{4\ln 2}.$$

(9) $\int_0^\pi (x\sin x)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2(1-\cos 2x)\mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\int_0^\pi x^2\mathrm{d}(\sin 2x)$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\left[x^2\sin 2x\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi x\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\int_0^\pi x\mathrm{d}(\cos 2x)$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\left[x\cos 2x\right]_0^\pi + \frac{1}{4}\int_0^\pi \cos 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

(10) $\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\mathrm{e}^u} \int_0^1 \mathrm{e}^u\sin u\mathrm{d}u = \left[\mathrm{e}^u\sin u\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^u\cos u\mathrm{d}u$

$$= \mathrm{e}\sin 1 - \left[\mathrm{e}^u\cos u\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^u\sin u\mathrm{d}u$$

$$= \mathrm{e}(\sin 1 - \cos 1) + 1 - \int_0^1 \mathrm{e}^u\sin u\mathrm{d}u,$$

所以，$\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{2}(\sin 1 - \cos 1) + \frac{1}{2}.$

(11) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\mathrm{d}x = -\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 \ln x\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x$

$$= -\left[x\ln x\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 + \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 \mathrm{d}x + \left[x\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x$$

$$= 2 - \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

(12) $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin u} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1}u\mathrm{d}u$

$$= \begin{cases} \dfrac{m}{m+1}\cdot\dfrac{m-2}{m-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m\text{ 为奇数}, \\ \dfrac{m}{m+1}\cdot\dfrac{m-2}{m-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}, & m\text{ 为偶数}, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot m}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(m+1)}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m\text{ 为奇数}, \\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot m}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(m+1)}, & m\text{ 为偶数}. \end{cases}$$

(13) 由教材本节的例6,可得

$$J_m = \int_0^{\pi} x\sin^m x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^m x dx.$$

而

$$\int_0^{\pi}\sin^m x dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}+t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x dx,$$

故

$$J_m = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x dx.$$

从而有

$$J_m = \begin{cases} \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(m-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot m}\cdot\pi, & m\text{ 为大于 1 的奇数}, \\ \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot m}\cdot\dfrac{\pi^2}{2}, & m\text{ 为偶数}, \end{cases}$$

$J_1 = \pi$.

习题 5-4　反常积分

1. 判定下列各反常积分的收敛性,如果收敛,计算反常积分的值:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$;　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx\,(a>0)$;　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$;

(5) $\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin\omega t dt\,(p>0,\omega>0)$;　(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$;

(7) $\int_0^1\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$;　(8) $\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$;

(9) $\int_1^2\frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$;　(10) $\int_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

解　(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4} = \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{3}$.

(2) $\int_1^t\frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_1^t = 2\sqrt{t}-2$,当 $t\to+\infty$ 时,该极限不存在,故该反常积分发散.

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx = \left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}.$

(4) $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)} = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{1+x^2}\right)dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x^2}+\frac{1}{2}\arctan x\right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{\pi}{4}.$$

(5) $$\int e^{-pt}\sin\omega t\,d\,t = -\frac{1}{p}\int\sin\omega t\,d(e^{-pt})$$
$$= -\frac{1}{p}e^{-pt}\sin\omega t+\frac{\omega}{p}\int e^{-pt}\cos\omega t\,dt$$
$$= -\frac{1}{p}e^{-pt}\sin\omega t-\frac{\omega}{p^2}\int\cos\omega t\,d(e^{-pt})$$
$$= -\frac{1}{p}e^{-pt}\sin\omega t-\frac{\omega}{p^2}e^{-pt}\cos\omega t-\frac{\omega^2}{p^2}\int e^{-pt}\sin\omega t\,dt,$$

因此,
$$\int e^{-pt}\sin\omega t\,d\,t = \frac{-pe^{-pt}\sin\omega t-\omega e^{-pt}\cos\omega t}{p^2+\omega^2}+C,$$
故
$$\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega t\,d\,t = \left[\frac{-pe^{-pt}\sin\omega t-\omega e^{-pt}\cos\omega t}{p^2+\omega^2}\right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

(6) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}+\int_0^{+\infty}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}$$
$$= [\arctan(x+1)]_{-\infty}^{0}+[\arctan(x+1)]_0^{+\infty} = \pi.$$

(7) $\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = [-\sqrt{1-x^2}]_0^1 = 1.$

(8) $\int_0^t\frac{dx}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{1-x}\right]_0^t = \frac{1}{1-t}-1$，当 $t\to1$ 时极限不存在,故原反常积分发散.

(9) $\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}} \xlongequal{x=u^2+1} 2\int_0^1(u^2+1)du = \frac{8}{3}.$

(10) $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int_1^e\frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = [\arcsin\ln x]_1^e = \frac{\pi}{2}.$

2. 当 k 为何值时,反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$收敛?当 k 为何值时,这反常积分发散?又当

k 为何值时,这反常积分取得最小值?

解 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^k}=\begin{cases}\ln\ln x+C, & k=1,\\ -\dfrac{1}{(k-1)\ln^{k-1}x}+C, & k\neq 1,\end{cases}$

因此当$k\leqslant 1$时,反常积分发散;当$k>1$时,该反常积分收敛,此时

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\left[-\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}x}\right]_2^{+\infty}=\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}.$$

记$f(k)=\dfrac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$,则

$$\begin{aligned}f'(k)&=-\frac{1}{(k-1)^2(\ln 2)^{2k-2}}\left[(\ln 2)^{k-1}+(k-1)(\ln 2)^{k-1}\ln\ln 2\right]\\&=-\frac{1+(k-1)\ln\ln 2}{(k-1)^2(\ln 2)^{k-1}},\end{aligned}$$

令$f'(k)=0$,得$k=1-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$.当$1<k<1-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$时,$f'(k)<0$,当$k>1-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$时,$f'(k)>0$,故$k=1-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$为函数$f(k)$的最小值点,即当$k=1-\dfrac{1}{\ln\ln 2}$时所给反常积分取得最小值.

3. 利用递推公式计算反常积分 $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x(n\in\mathbf{N})$.

解 $I_0=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty}=1.$

当 $n\geqslant 1$ 时,

$$I_n=-\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-\left[x^n\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=nI_{n-1},$$

故有$I_n=n!$.

4. 计算反常积分 $\displaystyle\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$.

解 $$\int\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x\ln x-x+C,$$

因此

$$\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=\left[x\ln x-x\right]_0^1=-1-\lim_{x\to 0^+}(x\ln x-x)=-1.$$

* 习题 5-5 反常积分的审敛法 Γ函数

1. 判定下列反常积分的收敛性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;

(3) $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}\,dx$; (4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x\,|\sin x|}$;

(5) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$; (6) $\int_1^2\frac{dx}{(\ln x)^3}$;

(7) $\int_0^1\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^4}}$; (8) $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$.

解 (1) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=1$,因此 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$ 收敛.

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}=1$,因此 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$收敛.

(3) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\sin\frac{1}{x^2}=1$,因此 $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x^2}dx$ 收敛.

(4) 由于当 $x\geqslant 0$ 时,$\frac{1}{1+x\,|\sin x|}\geqslant\frac{1}{1+x}$,且 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x}$ 发散,因此 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x\,|\sin x|}$ 发散.

(5) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{x\arctan x}{1+x^3}=\frac{\pi}{2}$,因此 $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^3}dx$ 收敛.

(6) $x=1$ 是被积函数的瑕点. 由于 $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)\cdot\frac{1}{(\ln x)^3}=+\infty$,因此 $\int_1^2\frac{dx}{(\ln x)^3}$ 发散.

(7) $x=1$ 是被积函数的瑕点. 由于 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{2}$,因此 $\int_0^1\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^4}}$ 收敛.

(8) 被积函数有两个瑕点:$x=1$,$x=2$. 由于 $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=-1$,因此 $\int_1^{1.5}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$收敛;又因为 $\lim\limits_{x\to2^-}(x-2)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=1$,因此 $\int_{1.5}^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$收敛,故 $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$收敛.

2. 设反常积分 $\int_1^{+\infty}f^2(x)\,dx$ 收敛,证明反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 绝对收敛.

解 因为 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{f^2(x)+\frac{1}{x^2}}{2}$,由于 $\int_1^{+\infty}f^2(x)\,dx$ 收敛,$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 也收敛,因此

$\int_1^{+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\mathrm{d}x$ 收敛. 即 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

3. 用 Γ 函数表示下列积分,并指出这些积分的收敛范围:

(1) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x(n>0)$; (2) $\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x(n\neq 0)$.

解 (1) 令 $u=x^n$,即 $x=u^{\frac{1}{n}}$,

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right),$$

在 $n>0$ 时都收敛.

(2) 令 $u=\ln\frac{1}{x}$,即 $x=\mathrm{e}^{-u}$,

$$\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x=\int_{+\infty}^0-u^p\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}u^p\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\Gamma(p+1),$$

当 $p>-1$ 时收敛.

(3) 令 $u=x^n$,即 $x=u^{\frac{1}{n}}$.

当 $n>0$ 时,$\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{n}u^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$,

当 $n<0$ 时,$\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\int_{+\infty}^0\frac{1}{n}u^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=-\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$,

故 $\int_0^{+\infty}x^m\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$,当 $\frac{m+1}{n}>0$ 时收敛.

4. 证明 $\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k}$,其中 $k\in\mathbf{N}_+$.

证
$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{2k-1}{2}\Gamma\left(\frac{2k-1}{2}\right)=\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-3}{2}\Gamma\left(\frac{2k-3}{2}\right)$$
$$=\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2k-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2^k}\sqrt{\pi}.$$

5. 证明以下各式(其中 $n\in\mathbf{N}_+$):

(1) $2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)=2^n\Gamma(n+1)$;

(2) $1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$;

(3) $\sqrt{\pi}\Gamma(2n)=2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$.

证 (1) $2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)=2^n n!=2^n\Gamma(n+1)$.

(2) $1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\frac{(2n-1)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}=\frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}(n-1)!}=\frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$.

（3）因为$\sqrt{\pi}\Gamma(2n)=(2n-1)!\sqrt{\pi}$,

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=(n-1)!\ \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}$$

$$=\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n-2)}{2^{n-1}}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}$$

$$=\frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}}\sqrt{\pi},$$

因此结论成立.

总习题五

1. 填空：

（1）函数$f(x)$在$[a,b]$上有界是$f(x)$在$[a,b]$上可积的__________条件，而$f(x)$在$[a,b]$上连续是$f(x)$在$[a,b]$上可积的__________条件；

（2）对$[a,+\infty)$上非负、连续的函数$f(x)$，它的变上限积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,+\infty)$上有界是反常积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛的__________条件；

*（3）绝对收敛的反常积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$一定__________；

（4）函数$f(x)$在$[a,b]$上有定义且$|f(x)|$在$[a,b]$上可积，此时积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$__________存在.

（5）设函数$f(x)$连续，则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(t^2-x^2)\mathrm{d}t=$__________.

解 （1）必要，充分. （2）充分必要. （3）收敛.

（4）不一定. 例如$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ -1, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$则$|f(x)|=1$在$[a,b]$上可积，而$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$不存在.

（5）$xf(-x^2)$. 作换元$u=t^2-x^2$，则

$$\int_0^x tf(t^2-x^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^x f(t^2-x^2)\mathrm{d}(t^2-x^2)=\frac{1}{2}\int_{-x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{-x^2}f(u)\mathrm{d}u,$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(t^2-x^2)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}f(-x^2)\cdot(-2x)=xf(-x^2).$$

2. 以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

(1) 设 $I=\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$,则估计 I 值的大致范围为(　　).

(A) $0\leqslant I\leqslant\frac{\sqrt{2}}{10}$　　(B) $\frac{\sqrt{2}}{10}\leqslant I\leqslant\frac{1}{5}$

(C) $\frac{1}{5}<I<1$　　(D) $I\geqslant 1$

(2) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,则必有(　　).

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

解　(1) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$\frac{1}{\sqrt{2}}x^4\leqslant\frac{x^4}{\sqrt{1+x}}\leqslant x^4$,因此

$$\frac{\sqrt{2}}{10}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2}}x^4\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{5},$$

故选(B).

(2) 记 $G(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,且

$$G(x)\text{是奇(偶)函数}\Leftrightarrow f(x)\text{是偶(奇)函数},$$

又 $F(x)=G(x)+C$,其中 C 是一常数,而常数是偶函数,故由奇、偶函数的性质知应选(A).

取周期函数 $f(x)=\cos x+1$,则 $F(x)=\sin x+x+C$ 不是周期函数,故(C)不成立;取单调增加函数 $f(x)=2x,x\in\mathbf{R}$,则 $F(x)=x^2+C$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调函数,故(D)不成立.

3. 回答下列问题:

(1) 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)\geqslant g(x)$,那么 $\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ 在几何上表示什么?

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)\geqslant 0$,那么 $\int_a^b\pi f^2(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示什么?

(3) 如果在时刻 t 以 $\varphi(t)$ 的流量(单位时间内流过的流体的体积或质量)向一水池注水,那么 $\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)\mathrm{d}t$ 表示什么?

(4) 如果某国人口增长的速率为 $u(t)$,那么 $\int_{T_1}^{T_2}u(t)\mathrm{d}t$ 表示什么?

（5）如果一公司经营某种产品的边际利润函数为 $P'(x)$，那么 $\int_{1\,000}^{2\,000} P'(x)\mathrm{d}x$ 表示什么？

解　（1）$\int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 以及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的图形的面积.

（2）$\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x$ 表示 xOy 面上，由曲线 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 以及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周而得到的旋转体的体积.

（3）$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\mathrm{d}t$ 表示在时间段 $[t_1, t_2]$ 内向水池注入的水的总量.

（4）$\int_{T_1}^{T_2} u(t)\mathrm{d}t$ 表示该国在 $[T_1, T_2]$ 时间段内增加的人口总量.

（5）$\int_{1\,000}^{2\,000} P'(x)\mathrm{d}x$ 表示从经营第 1 000 个产品起一直到第 2 000 个产品的利润总量.

*4. 利用定积分的定义计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ (p>0)$.

解　（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p\mathrm{d}x = \dfrac{1}{p+1}$.

5. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 连续；　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$.

解　（1）记 $F(x) = x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，

$$\lim_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = F'(a) = af(a).$$

（2）先证明所求极限为未定式 $\dfrac{\infty}{\infty}$. 由于当 $x > \tan 1$ 时，$\arctan x > 1$，记 $c = \int_0^{\tan 1}(\arctan t)^2\mathrm{d}t$，则当 $x > \tan 1$ 时，有

$$\int_0^x (\arctan t)^2\mathrm{d}t = c + \int_{\tan 1}^x (\arctan t)^2\mathrm{d}t > c + \int_{\tan 1}^x \mathrm{d}t = c + x - \tan 1;$$

故有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x (\arctan t)^2\mathrm{d}t = +\infty$，从而利用洛必达法则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

6. 下列计算是否正确,试说明理由:

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\left[-\arctan\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-\frac{\pi}{2}$;

(2) 因为

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\xlongequal{x=\frac{1}{t}}-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1},$$

所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=0.$$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0.$

解 (1) 不对. 因为 $u=\frac{1}{x}$ 在 $[-1,1]$ 上有间断点 $x=0$,不符合换元法的要求. 而由习题 5-1 的第 12 题可知该积分一定为正,因此该积分计算不对. 事实上,

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=[\arctan x]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}.$$

(2) 不对. 原因与(1)相同. 事实上,

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

(3) 不对. 因为 $\int_0^A\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+A^2)$,当 $A\to+\infty$ 时极限不存在,故 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散,也就得到 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散.

7. 设 $x>0$,证明 $\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.

证 记 $f(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$,则当 $x>0$ 时,有

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0,$$

由拉格朗日中值定理的推论,得

$$f(x)\equiv C \quad (x>0).$$

而$f(1)=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$,故 $C=\frac{\pi}{2}$,从而结论成立.

8. 设 $p>0$,证明

$$\frac{p}{1+p}<\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}<1.$$

证 由于当 $p>0,0<x<1$ 时,$0<\frac{1}{1+x^p}<1$,因此有 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}<1$. 又

$$1-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}=\int_0^1\frac{x^p\mathrm{d}x}{1+x^p}<\int_0^1 x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{1+p},$$

故有 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^p}>\frac{p}{1+p}$,原题得证.

9. 设 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上均连续,证明:

(1) $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$(柯西 - 施瓦茨不等式);

(2) $\left(\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$(闵可夫斯基不等式).

证 (1) 对任意实数 λ,有 $\int_a^b[f(x)+\lambda g(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant 0$,即

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\lambda^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

上式左边是一个关于 λ 的二次三项式,它非负的条件是其系数判别式非正,即有

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2-4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

从而本题得证.

(2) $$\begin{aligned}\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x&=\int_a^b[f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\\&=\left[\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,\end{aligned}$$

从而本题得证.

10. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,且$f(x)>0$. 证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2.$$

证 根据上一题所证的柯西-施瓦茨不等式,有

$$\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b(\sqrt{f(x)})^2\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)^2\mathrm{d}x,$$

即得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2.$$

11. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$;　　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2x}$;　　(6) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sqrt{\cos^2x-\cos^4x}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi}x^2|\cos x|\,\mathrm{d}x$;　　(8) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{3-x}}$;

(9) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2-x|}}$;　　(10) $\displaystyle\int_0^x\max\{t^3,t^2,1\}\mathrm{d}t$.

解 (1) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}(1+\cos x)$$

$$=\left[x\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x-[\ln(1+\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\left[2\ln\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\ln 2=\frac{\pi}{2}.$$

(2) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x,$$

而

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=\frac{\pi}{4}-u} -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}(\ln\sqrt{2}+\ln\cos u)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\pi\ln 2}{8}+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=\frac{\pi\ln 2}{8}.$$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\xlongequal{x=a\sin u}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u\mathrm{d}u}{\sin u+\cos u}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\mathrm{d}u}{\cos u+\sin u}$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u\mathrm{d}u}{\sin u+\cos u}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\mathrm{d}u}{\cos u+\sin u}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{4}.$$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=[\sin x+\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{4}}+[-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2(\sqrt{2}-1).$$

(5) 注意到$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2}$,因此有

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2x}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2x\mathrm{d}x}{\sec^2x+1}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2x+2}$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(6) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}x\sqrt{\cos^2x-\cos^4x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi}x\,|\cos x|\sin x\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}|\cos x|\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\sin x\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin^2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin^2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

(7) $\int_0^{\pi} x^2 \mid \cos x \mid \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos x \mathrm{d}x$

$$= [x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4.$$

(8) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1} + \mathrm{e}^{3-x}} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x-1})}{\mathrm{e}^{2x-2} + 1} = \frac{1}{\mathrm{e}^2}[\arctan(\mathrm{e}^{x-1})]_0^{+\infty}$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}^2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

(9) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mid x^2 - x \mid}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x - x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}(2x-1)}{\sqrt{1 - (2x-1)^2}}$;

$$= [\arcsin(2x-1)]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mid x^2 - x \mid}} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - x}} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}(2x-1)}{\sqrt{(2x-1)^2 - 1}}$$

$$= \left[\ln(2x - 1 + \sqrt{(2x-1)^2 - 1})\right]_1^{\frac{3}{2}} = \ln(2+\sqrt{3}),$$

因此

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mid x^2 - x \mid}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mid x^2 - x \mid}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mid x^2 - x \mid}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}).$$

(10) 当 $x < -1$ 时,

$$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\}\mathrm{d}t = \int_0^{-1}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3};$$

当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时,

$$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\}\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{d}t = x;$$

当 $x > 1$ 时,

$$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\}\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t + \int_1^x t^3 \mathrm{d}t = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}.$$

因此

$$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\}\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{2}{3}, & x < -1, \\ x, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{3}{4}, & x > 1. \end{cases}$$

12. 设 $f(x)$ 为连续函数,证明

$$\int_0^x f(t)(x-t)\,dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(u)\,du\right)dt.$$

证 $\displaystyle\int_0^x \left(\int_0^t f(u)\,du\right)dt = \left[t\int_0^t f(u)\,du\right]_0^x - \int_0^x tf(t)\,dt$

$$= x\int_0^x f(u)\,du - \int_0^x tf(t)\,dt$$

$$= x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt = \int_0^x (x-t)f(t)\,dt.$$

本题也可利用原函数性质来证明,记等式左端的函数为 $F(x)$、右端的函数为 $G(x)$,则

$$F'(x) = \left(x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt\right)' = \int_0^x f(t)\,dt,$$

$$G'(x) = \int_0^x f(u)\,du = \int_0^x f(t)\,dt,$$

即 $F(x)$、$G(x)$ 都为函数 $\int_0^x f(t)\,dt$ 的原函数,因此它们至多只差一个常数,但由于 $F(0) = G(0) = 0$,因此必有 $F(x) = G(x)$.

13. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x) > 0$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}, x \in [a,b].$$

证明:(1) $F'(x) \geqslant 2$;(2) 方程 $F(x) = 0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

证 (1) $F'(x) = f(x) + \dfrac{1}{f(x)} \geqslant 2\sqrt{f(x) \cdot \dfrac{1}{f(x)}} = 2$.

(2) $F(a) = \displaystyle\int_b^a \frac{dt}{f(t)} = -\int_a^b \frac{dt}{f(t)} < 0$, $F(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt > 0$,由闭区间上连续函数性质可知 $F(x)$ 在区间 (a,b) 内必有零点,根据(1)可知函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调增加,从而零点惟一,即方程 $F(x) = 0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

14. 求 $\displaystyle\int_0^2 f(x-1)\,dx$,其中

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^x}, & x < 0, \\ \dfrac{1}{1+x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

解 $\int_0^2 f(x-1)\,dx \xlongequal{x=u+1} \int_{-1}^1 f(u)\,du = \int_{-1}^0 \frac{du}{1+e^u} + \int_0^1 \frac{du}{1+u}$

$$= \int_{-1}^0 \frac{e^{-u}\,du}{1+e^{-u}} + [\ln(1+u)]_0^1$$

$$= [-\ln(1+e^{-u})]_{-1}^0 + \ln 2 = \ln(1+e).$$

15. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,$g(x)$在区间$[a,b]$上连续不变号. 证明至少存在一点$\xi\in[a,b]$,使下式成立:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx \quad (\text{积分第一中值定理}).$$

证 不妨设$g(x)\geqslant 0$,由定积分性质可知$\int_a^b g(x)\,dx\geqslant 0$. 记$f(x)$在$[a,b]$上的最大值为$M$、最小值为$m$,则有

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),$$

故有

$$m\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b mg(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

$$\leqslant \int_a^b Mg(x)\,dx = M\int_a^b g(x)\,dx.$$

当$\int_a^b g(x)\,dx = 0$时,由上述不等式可知$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$,故结论成立.

当$\int_a^b g(x)\,dx > 0$时,有

$$m\leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}\leqslant M,$$

由闭区间上连续函数性质,知存在$\xi\in[a,b]$,使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx},$$

从而结论成立.

***16**. 证明:$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx = \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^2}\,dx\ (n>1)$,并用它证明:

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma(n+1) \quad (n\in\mathbf{N}).$$

证 当$n>1$时,

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}\,d(e^{-x^2})$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x^{n-1}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^2}dx$$

$$= \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^2}dx.$$

记 $I_n = \int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}dx$,则

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}dx = \frac{2n+1-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}dx$$

$$= n\int_0^{+\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}dx = nI_{n-1},$$

因此有

$$I_n = n!I_0 = n!\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = n!\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2}n! = \frac{1}{2}\Gamma(n+1).$$

*17. 判断下列反常积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$;　　(2) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$;

(3) $\int_2^{+\infty}\frac{\cos x}{\ln x}dx$;　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$.

解 (1) $x=0$ 为被积函数 $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}$的瑕点,而 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\cdot f(x)=1$,因此 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛;又由于 $|f(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^3}}$,而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$ 收敛,故 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛,因此 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$ 收敛.

(2) $x=2$ 为被积函数 $f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$的瑕点,而

$$\lim_{x\to2^+}(x-2)^{\frac{1}{3}}\cdot f(x)=\frac{1}{2},$$

因此 $\int_2^3 f(x)dx$ 收敛;又由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{5}{3}}\cdot f(x)=1$,因此 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$收敛,故 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$收敛.

(3) $\int_2^{+\infty}\frac{\cos x}{\ln x}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}d(\sin x)=\left[\frac{\sin x}{\ln x}\right]_2^{+\infty}+\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln^2 x}dx$

$$=\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln^2 x}dx-\frac{\sin 2}{\ln 2},$$

又由于 $\left|\frac{\sin x}{x\ln^2 x}\right| \leqslant \frac{1}{x\ln^2 x}$，而 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\int_2^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x\ln^2 x}\right|\mathrm{d}x$ 收敛，即 $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛，因此 $\int_2^{+\infty}\frac{\cos x}{\ln x}\mathrm{d}x$ 收敛.

(4) $x=0$，$x=1$，$x=2$ 为被积函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ 的瑕点，$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{2}{3}}f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$，$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{\frac{1}{3}}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)(x-2)^{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$，故 $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；又由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{4}{3}}\cdot f(x)=1$，因此 $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ 收敛，故 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ 收敛.

*18. 计算下列反常积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ $(\alpha\geqslant 0)$.

解 (1) $x=0$ 为被积函数 $f(x)=\ln\sin x$ 的瑕点，而

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cdot f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x^{\frac{3}{2}}}{\tan x}=0,$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$ 收敛.

又 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$，而

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-u}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}-\ln\cos u\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos u\mathrm{d}u,$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln\sin 2x-\ln 2)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\mathrm{d}x\\&\xlongequal{u=2x}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u\mathrm{d}u-\frac{\pi}{4}\ln 2,\end{aligned}$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

（2）记被积函数为 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$，则当 $\alpha=0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot f(x)=\dfrac{1}{2}$，当 $\alpha>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot f(x)=0$，因此当 $\alpha\geqslant0$ 时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ 收敛.

令 $x=\dfrac{1}{t}$，得到 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_{+\infty}^0\frac{-t^\alpha\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$，又

$$\int_{+\infty}^0\frac{-t^\alpha\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)},$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}&=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\\&=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\right]\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}[\arctan x]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$