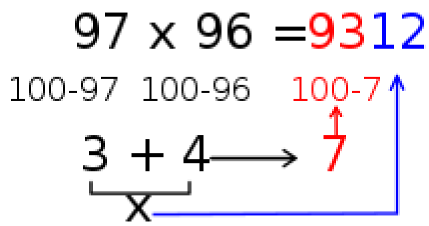
WIKIPEDIA

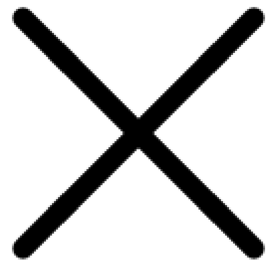
Multiplicación

La **multiplicación** es una operación binaria y derivada de la suma que se establece en un conjunto numérico.[2] En aritmética, es una de las cuatro operaciones elementales, junto con la suma, la resta y la división, y es la operación inversa de esta última. Esto significa que para toda multiplicación hay una división, por ejemplo para «5 por 2 igual a 10» la división equivalente es «10 dividido entre 2 igual a 5», o «10 dividido entre 5 igual a 2».



Multiplicación de números largos de forma mental

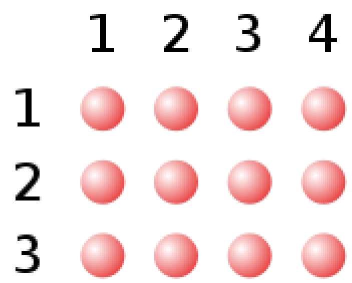
Existen dos signos para indicar esta operación entre números naturales: el aspa "×" y el punto gordo a media altura (•). En el caso de variables representadas por letras (solo letras o mezcla) se usa el punto (no el aspa) pero se puede prescindir de él por ejemplo 3ab (se lee «tres a b») xy + 2y (se lee «equis i más dos i»)



El signo "×" (la cruz de San Andrés)[1] que se utiliza en aritmética para indicar la multiplicación

Multiplicar una cantidad por un número consiste en sumar dicha cantidad tantas veces como indica el número.[3] Así, *4×3* (léase «cuatro multiplicado por tres» o, simplemente, «cuatro por tres») es igual a sumar tres veces el número *4* (*4+4+4*)[4] (nota[5]) También se puede interpretar como 3 filas de 4 objetos, o 4 filas de 3 (véase el dibujo). 4 y 3 son los factores, y 12, el resultado de la operación, es el producto.[6] La multiplicación está asociada al concepto de área geométrica: es fácil ver que el área de un rectángulo se obtiene multiplicando la longitud de ambos lados, basta con imaginarnos la superficie cubierta con baldosas cuadradas.[7] Podemos multiplicar dos números o más, y da igual en qué orden efectuemos la operación o cómo agrupemos los números; siempre se obtendrá el mismo resultado:

3 • 4 • 5 = 5 • 3 • 4 = 4 • 5 • 3 = 12 • 5 = 15 • 4 = 20 • 3 = 60



Propiedad conmutativa:
3×4 = 12 = 4×3
doce elementos pueden ser ordenados en tres filas de cuatro, o cuatro columnas de tres.

El resultado de la multiplicación de dos o más números se llama **producto**. Los números que se multiplican se llaman *factores* o *coeficientes*, e individualmente: *multiplicando* (número a sumar o número que se está multiplicando) y *multiplicador* (veces que se suma el multiplicando). Esta diferenciación tiene poco sentido cuando, en el conjunto donde esté definido el producto, se da la propiedad conmutativa de la multiplicación (por ejemplo, en los conjuntos numéricos: *3×7 = 7×3, es decir, el orden de los factores no altera el producto*). Sin embargo puede ser útil si se usa para referirse al multiplicador de una expresión algebraica (ej: en

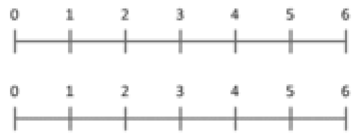
$a^2b + a^2b + a^2b$ o $3a^2b$,

3 es el multiplicador o coeficiente, mientras que el monomio a^2b es el multiplicando).

La **potenciación** es un caso particular de la multiplicación donde el exponente indica las veces que debe multiplicarse un número por sí mismo. Ejemplo: 2 • 2 • 2 • 2 • 2 • 2 • = 2^6 = 64

Aquí, 6 es el exponente, y 2 la base.

En álgebra moderna se suele usar la denominación «cociente» o «multiplicación» con su notación habitual «·» para designar la operación externa en un módulo, para designar también la segunda operación que se define en un anillo (aquella para la que no está definido el elemento inverso del 0), o para designar la operación que dota a un conjunto de estructura de grupo. La operación inversa de la multiplicación es la división.[8]



Animación para representar la multiplicación 2 × 3 = 6.

Índice

Notación

La multiplicación se indica con un aspa (×) o con un punto (·). En ausencia de estos caracteres se suele emplear el asterisco (*), sobre todo en computación (este uso tiene su origen en FORTRAN), pero está desaconsejado en otros ámbitos y solo debe utilizarse cuando no hay otra alternativa. A veces se utiliza la letra **equis** (X x), pero esto es desaconsejable porque crea una confusión innecesaria con la letra que normalmente se asigna a una incógnita en una ecuación. Por último, se puede omitir el signo de multiplicación a menos que se multipliquen números o se pueda generar confusión sobre los nombres de las incógnitas, constantes o funciones (por ejemplo, cuando el nombre de alguna incógnita tiene más de una letra y podría confundirse con el producto de otras dos). También suelen utilizarse signos de agrupación como paréntesis ( ), corchetes [ ], llaves { } o barra | |. Esto mayormente se utiliza para multiplicar números negativos entre sí o por números positivos.[9]

Si los factores no se escriben de forma individual pero pertenecen a una lista de elementos con cierta regularidad se puede escribir el producto mediante una elipsis, es decir, escribir explícitamente los primeros términos y los últimos, (o en caso de un producto de infinitos términos solo los primeros), y sustituir los demás por unos puntos suspensivos. Esto es análogo a lo que se hace con otras operaciones aplicadas a infinitos números (como las sumas).

Así, el producto de todos los números naturales desde el 1 hasta el 100 se puede escribir:

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$$

mientras que el producto de los números pares del entre 1 y 100 se escribiría:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100.$$

Esto también se puede denotar escribiendo los puntos suspensivos en la parte media de la línea de texto:

$$1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 99 \cdot 100$$

En cualquier caso, deben estar claros cuáles son los términos omitidos.

Por último, se puede denotar el producto mediante el símbolo productorio, que proviene de la letra griega Π (Pi mayúscula).

Esto se define así:

$$\prod_{i=m}^{n} x_i = x_m \cdot x_{m+1} \cdot x_{m+2} \cdot \cdots \cdot x_{n-1} \cdot x_n.$$

El subíndice i indica una variable que recorre los números enteros desde un valor mínimo (m, indicado en el subíndice) y un valor máximo. (n, indicado en el superíndice).

Definición

La multiplicación de dos números enteros *n* y *m* se expresa como:

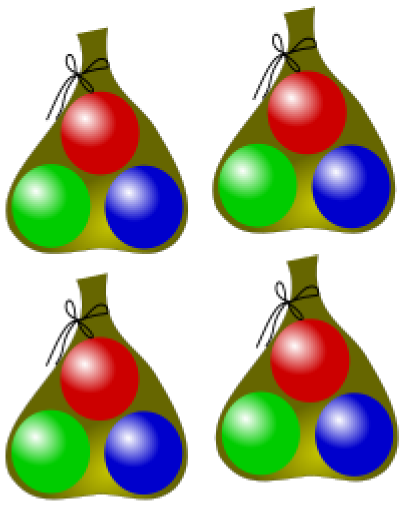
$$\sum_{k=1}^{n} m = mn$$

Esta no es más que una forma de simbolizar la expresión «sumar *m* a sí mismo *n* veces». Puede facilitar la comprensión al expandir la expresión anterior:

$$mn = \underbrace{m + \cdots + m}_{n},$$

tal que hay *n* sumandos. Así, por ejemplo:

- $5 \times 2 = 5 + 5 = 10$
- $2 \times 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$
- $4 \times 3 = 4 + 4 + 4 = 12$
- $m \times 6 = m + m + m + m + m + m = 6m$
- $m \times 5 = m + m + m + m + m = 5m$



Cuatro bolsas de tres globos da un total de doce globos (3×4=12).

El producto de infinitos términos se define como el límite del producto de los *n* primeros términos cuando *n* crece indefinidamente.

Definición recursiva

En el caso de la multiplicación de números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3...., n, \dots\}$ puede aplicarse la definición recursiva de la multiplicación , que comprende estos dos pasos:

$m \times 0 = 0$
$m(n+1) = (mn) + m$

Donde m y n son números naturales, el principio de inducción se aplica sobre el número *n*, que inicialmente es *n* = 0, luego asumiendo que es cierto para *n*, se infiere que también se cumple para *n+1*.[10]

Se deducen las siguientes proposiciones básicas:

Existencia del elemento identidad, $n \cdot 1 = n$ todo número natural n.
Propiedad asociativa, $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$ para cualesquier m, n, p números naturales
Propiedad conmutativa: $m \cdot n = n \cdot m$, para n y n cualesquier número natural.
Propiedad distributiva respecto a la adición: $m \cdot (l + n) = m \cdot l + m \cdot n = (l + n) \cdot m$
No hay divisores de cero: $m \cdot n = 0$ implica que por lo menos uno de los factores es igual a cero.[11]

Para indicar el producto de dos números naturales se usa un punto entre los dos factores, un aspa entre ellos, la simple yuxtaposición de los factores literales o, un factor y el otro en paréntesis o los dos factores en paréntesis

Producto de números enteros

Es un número entero m que se calcula tal como sigue:

Si $n > 0$ y $p > 0$ entonces $m = n \cdot p$, factores positivos.
Si $n < 0$ y $p < 0$ entonces *m* = |*n*| |*p*|, factores negativos.
Si $n > 0$ y $p < 0$ *o* $n < 0$ y $p > 0$ entonces *m* = -|*n*| |*p*| , un factor positivo y el otro negativo.
Si $n = 0$ y $p = 0$ entonces $m = 0 = n \cdot p$. Al menos un factor cero.

El producto de los enteros se basa en el producto de los números naturales y se toma en cuenta el valor absoluto.[12]

Producto de fracciones

La fracción $\frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$ es el producto de las fracciones $\frac{p_1}{q_1}$ y $\frac{p_2}{q_2}$ que cumplen la igualdad

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$$

. Se asume que $q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$.[13]

Producto de raíces

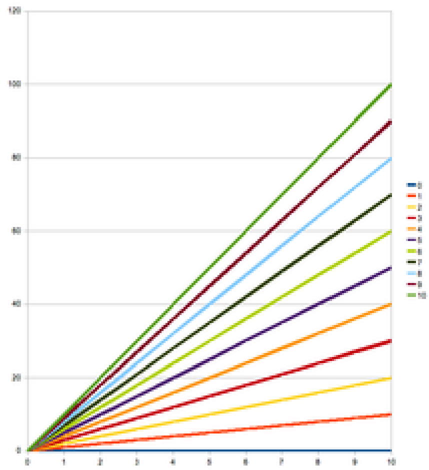
Se cumple la siguiente propiedad de producto de raíces:

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores nombrados anteriormente.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Propiedades

Para los números naturales, enteros, fracciones y números reales y complejos, la multiplicación tiene ciertas propiedades:



Multiplicación de números del 0 al 10. Cada línea trazada representa un multiplicando. Eje x = multipliadores. Eje y = productos.

Propiedad de cerradura

La multiplicación de dos o más números naturales nos da como resultado otro número natural ejemplo: 33*2=66

Propiedad conmutativa

El orden de los factores no altera el producto.

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Propiedad asociativa

Únicamente expresiones de multiplicación o adición son invariantes con respecto al orden de las operaciones.

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

Propiedad distributiva

El total de la suma de dos números multiplicado por un tercer número es igual a la suma de los productos entre el tercer número y cada sumando.

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

Elemento identidad (neutro)

La identidad multiplicativa es 1; el producto de todo número multiplicado por 1 es sí mismo. Esto se conoce como la propiedad de identidad.

$$x \cdot 1 = x$$

Elemento cero (absorbente)

Cualquier número multiplicado por cero da como producto cero. Esto se conoce como la *propiedad cero* de la multiplicación.

$$x \cdot 0 = 0$$
$$0 \cdot x = 0$$

Negación

Menos uno multiplicado por cualquier número es igual al opuesto de ese número.

$$(-1) \cdot x = (-x)$$

Menos uno multiplicado por menos uno es uno.

$$(-1)\cdot(-1)=1$$

El producto de números naturales no incluye números negativos.

Elemento inverso

Todo número *x*, excepto cero, tiene un **inverso multiplicativo**, $\frac{1}{x}$, tal que $x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=1$.

Producto de números negativos

El producto de números negativos también requiere reflexionar un poco. Primero, considérese el número —1. Para cualquier entero positivo *m*:

$$(-1)m=(-1)+(-1)+\ldots+(-1)=-m$$

Este es un resultado interesante que muestra que cualquier número negativo no es más que un número positivo multiplicado por –1. Así que la multiplicación de enteros cualesquiera se puede representar por la multiplicación de enteros positivos y factores –1. Lo único que queda por definir es el producto de (–1)(–1):

$$(-1)(-1)=-(-1)=1$$

De esta forma, se define la multiplicación de dos enteros. Las definiciones pueden extenderse a conjuntos cada vez mayores de números: primero el conjunto de las fracciones o números racionales, después a todos los números reales y finalmente a los números complejos y otras extensiones de los números reales.

Conexión con la geometría

Desde un punto de vista puramente geométrico, la multiplicación entre 2 valores produce un área que es representable. Del mismo modo el producto de 3 valores produce un volumen igualmente representable.

Extensiones

En matemáticas, **producto** es sinónimo de **multiplicación**.

Se denominan también *producto* ciertas operaciones binarias realizadas en contextos especializados.

- **Producto escalar** es una operación binaria entre elementos de un espacio vectorial que tiene por resultado un elemento del campo subyacente. El caso más relevante es el de **producto punto**.
- **Producto vectorial** o **producto cruz** es una operación entre vectores de un espacio euclidiano tridimensional que tiene como resultado otro vector.
- **Producto mixto** o **triple producto escalar** es un producto que combina el producto vectorial y el escalar.
- **Producto matricial** es una operación binaria entre matrices.
- **Producto cartesiano** es una operación entre conjuntos cuyo resultado son pares ordenados de elementos respectivos.
- **Topología producto** es una topología construida en un producto cartesiano de espacios topológicos.
  - **Topología caja** es otra topología construida en un producto cartesiano de espacios topológicos que coincide con la anterior en productos finitos.

- **Producto exterior** es una generalización del producto vectorial.
- **Producto directo** es un abstracción que permite definir estructuras algebraicas en productos de otros algebraicos (usualmente productos cartesianos)
- **Productoria** Notación para denotar un producto arbitrario de términos.
- **Producto (teoría de categorías)** es una generalización abstracta de los productos encontrados en diversas estructuras algebraicas.

El término **producto** también se relaciona con

- **Regla del producto**, un método para calcular la derivada de un producto de funciones.
- **Principio del producto**, uno de los principios fundamentales de conteo.
- **Producto vacío** es el producto de cero factores.

Véase también

- Suma
- Inverso multiplicativo
- Tabla de multiplicar
- Pitatoria
- Algoritmo de Booth
- Producto de matrices
- Potenciación
- Factorización

Referencias

1. ¿Sabes por qué se usa la Cruz de San Andrés para multiplicar? El origen de los signos (https://www.elconfidencial.com/tecnologia/2015-05-11/origen-signos-matematicos_791273/)
2. Cotlar- Ratto de Sadosky. «Introducción al álgebra/ Nociones de álgebra lineal»
3. «Qué significa multiplicación en Matemáticas» (https://www.superprof.es/diccionario/matematicas/aritmetica/multiplicacion.html). *Diccionario superprof*. Consultado el 17 de mayo de 2021.
4. Castro Miguez, Luis Alexander; Olcata Ojeta, Luz Alexandra (2013). Corpoeducación, ed. *Secuencias Didácticas en Matemáticas* (https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-329722_archivo_pdf_matematicas_primaria.pdf). Ministerio de Educación de Colombia. ISBN 978-958-691-546-5.
5. En otros idiomas, y concretamente en inglés, 4×3 se lee *four times three* y se interpreta como 4 veces 3 en lugar de 3 veces 4. Dado que en aritmética la multiplicación es conmutativa, en este ámbito ambas operaciones son equivalentes, pero esta discrepancia puede ser problemática para los niños que aprenden a multiplicar si los profesores no son consecuentes con la manera de explicarlo.
6. «Términos de la multiplicación» (https://www.superprof.es/diccionario/matematicas/aritmetica/multiplicacion.html/). *aaamatematicas.com*. Consultado el 21 de mayo de 2021. «El producto es el resultado o respuesta de multiplicar el multiplicando por el multiplicador».
7. Llorente, Analía (22 de noviembre de 2017). «3 sencillos métodos para aprender a multiplicar sin calculadora» (https://www.bbc.com/mundo/noticias-42020116). *BBC*. Consultado el 17 de mayo de 2021. «Entre los numerosos y variados métodos de multiplicación que existen al menos tres de ellos requieren líneas, puntos y cuadrados».

8. Itzcovich, Horacio; Broitman, Claudia (2001). Subsecretaría de Educación, ed. *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la multiplicacion en los tres ciclos de EGB* (https://uruguayeduca.anep.edu.uy/sites/default/files/2017-05/Orientaciones%20did%C3%A1cticas%20para%20la%20ense%C3%B1anza%20de%20la%20multiplicaci%C3%B3n%20en%20la%20EGB.pdf). Provincia de Buenos Aires.
9. Romero, Geovanna (2011). «Multiplicación y división de números expresados en notación matemática» (https://www.studocu.com/ec/document/universidad-nacional-de-loja/matematica/practica/multiplicacion-y-division-de-numeros-expresados-en-notacion-matematica/3956648/view). *Universidad Nacional de Loja*. Consultado el 21 de mayo de 2021.
10. Ediciones Schaumm. «Álgebra moderna»
11. A. Adrian Albert. «Álgebra superior»
12. Tsipkin. «Manual de Matemáticas»
13. César Trejo. «El concepto de número (https://www.etapainfantil.com/ensenar-tablas-multiplicar)». Edición de OEA.

Enlaces externos

- Wikcionario tiene definiciones y otra información sobre **multiplicación**.
- Generador de multiplicaciones (http://calculomates.com/generador-de-multiplicaciones/) en PDF para practicar con ellas.