

ROB312 - TP2 :Filtrage de Kalman

Dajing GU

Décembre 2020

1 Introduction

Le **modèle physique** peut nous donner une estimation de la condition de mouvement et le **modèle des capteurs** peut la mesurer. N'importe dans l'estimation ou dans la mesure, il y a toujours du bruit.

Afin d'avoir une estimation plus propre, on utilise le **Filtrage de Kalman** pour combiner l'estimation physique et la mesure des capteurs, dont les bruit et les erreurs sont aussi combinées par la probabilité de Bayes. Un simple filtre de Kalman doit être utilisé dans un système conforme à la distribution gaussienne.

Dans l'algorithme de **Filtrage de Kalman**, on fait tout d'abord une prédiction du mouvement en fonction du modèle physique. Ensuite l'estimation combinée est calculée en faisant une correction sur la prédiction en fonction des capteurs.

2 Partie 1: cas linéaire

2.1 Q1 - La structure du code

Le code de partie 1 est facile à comprendre, dont le logic est présenté ci-dessous:

- On fait tout d'abord l'initialisation des variables.
 - L'état $X = [x, y, z, v_x, v_y, v_z]$.
- Et puis on a créé deux boucles pour obtenir la simulation physique de la trajectoire **Xv_sim** et la boucle physique des capteurs **Y_sim**.
 - **Y_sim** présente seulement les 3 premiers variables (x, y, z)
 - **X_sim** présente toutes les 6 premiers variables (x, y, z , et v_x, v_y, v_z)
- Ensuite on fait la boucle de simulation du filtre de Kalma.
 - On fait l'initialisation les paramètres:
 - La matrice de covariance: **P_hat**
 - L'estimation: **X_hat**
 - La matrice de covariance de bruit de dynamique **Qf**

- La matrice de dynamique \mathbf{F}
- La matrice d'observation \mathbf{H}
- La matrice de covariance du bruit de mesure \mathbf{R}
- La différence entre \mathbf{Y} et $\mathbf{X}[1:3]$: l'innovation `inno`
- Les coefficients de gain k du filtre pour passer la valeur de l'état estimé à la valeur suivante \mathbf{K}
- En fonction de l'équation de prédiction, on fait tout d'abord la prédiction dans la boucle.
- Ensuite en fonction de l'équation d'observation, on fait la correction.
- Enfin on plot les résultats.

2.2 Q2 - Commentaire des résultats

Dans cette section, on a complété le code en fonction de l'équation de prédiction et l'équation de correction dans le cas linéaire ci-dessous.

L'équation de prédiction :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k \\ \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} &= \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k \end{aligned}$$

L'équation de correction :

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})) \\ \hat{\mathbf{P}}_k &= (\mathbf{I}_d - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \\ \mathbf{K}_k &= \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T)^{-1} \\ \mathbf{H}_k &= \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k} \in \mathbb{R}^{d_m \times d} \end{aligned}$$

Après avoir complété le code, les résultats obtenus sont présentés dans la figure 2.1. On trouve que même si il y a du bruit et il y a des erreurs, les valeurs estimées sont toujours cohérentes avec les valeurs vraies, n'importe à quelle direction. Le fonctionnement de **filtrage de Kalman** a été bien vérifié.

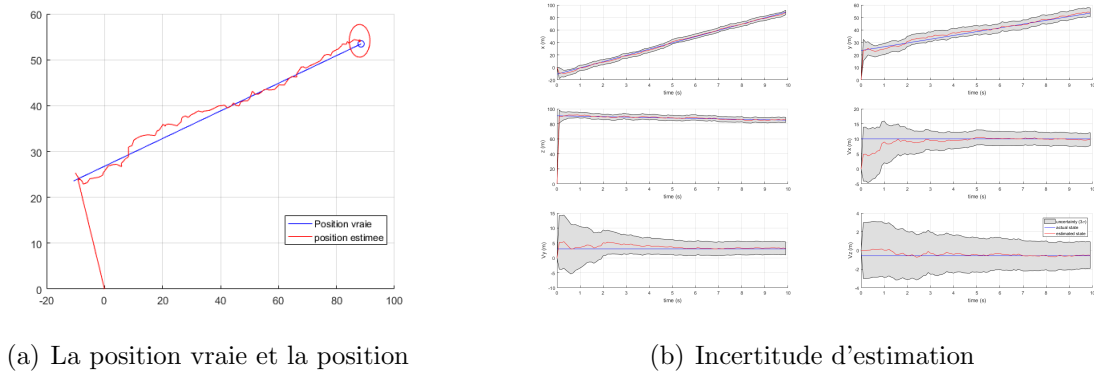


Figure 2.1: Résultat du cas linéaire

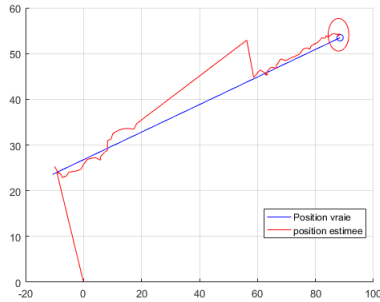
2.3 Q3 - Un trou de mesures entre $t = 3s$ et $t = 7s$

```

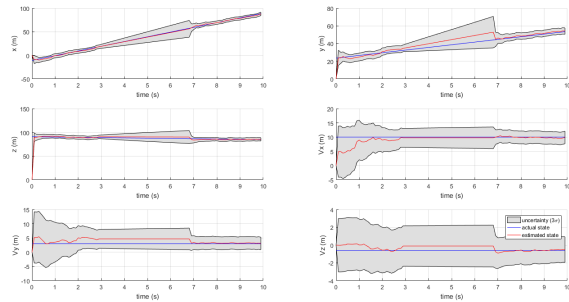
1 if tk*dt > 3 && tk*dt < 7
2     isMeasurementValid = false;
3 else
4     isMeasurementValid = true;
5 end

```

En utilisant le code présenté ci-dessus, on a réussi à simuler un trou de mesures entre $t = 3s$ et $t = 7s$.



(a) La position vraie et la position

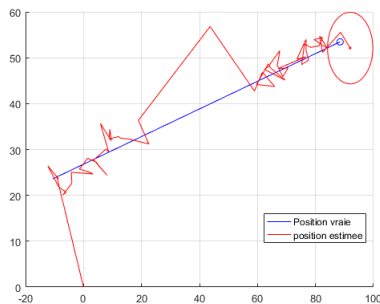


(b) Incertitude d'estimation

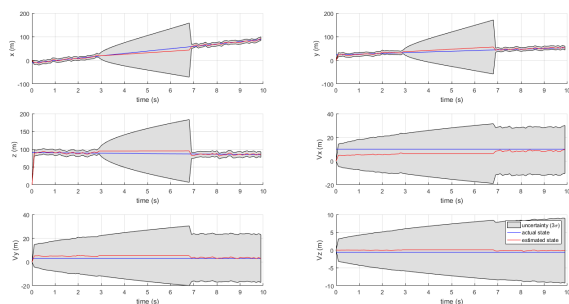
Figure 2.2: Résultat du cas linéaire

Selon la figure 2.2, on peut trouver que pendant le trou de mesure, la position vraie et la position estimée ne sont plus cohérentes. L'incertitude devient aussi plus grande. Ce phénomène provient du fait que le `isMeasurementValid` est *false* entre $t = 3s$ et $t = 7s$, c'est à dire que il n'y pas de correction pendant ce trou. Même s'il y a grande différence entre la position vraie et la position estimée à $t = 7s$, la correction a réussi à nous ramener la correspondance. Le fonctionnement de la correction est bien vérifié dans cette section.

2.4 Q4 - Changement du bruit de dynamique du filtre (Q_f)



(a) La position vraie et la position avec $10 \cdot Q_f$



(b) Incertitude d'estimation avec $10 \cdot Q_f$

Figure 2.3: Résultat du cas linéaire

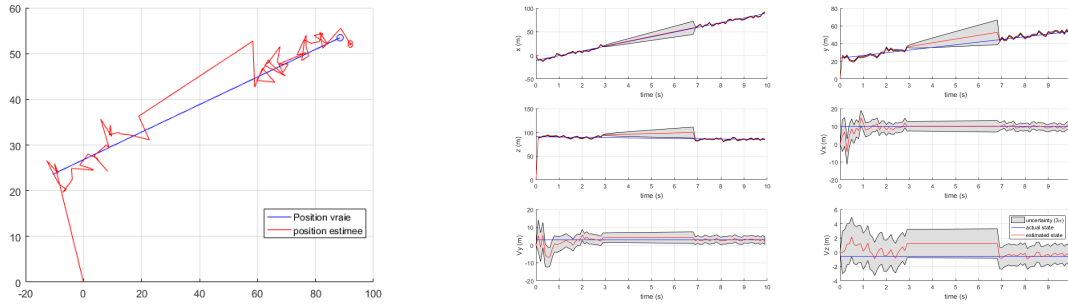
Dans cette section, on a changé le Qf à $100 \cdot Qf$. En comparant la figure 2.2 et la figure 2.3, on trouve que la variation du bruit de dynamique influence l'incertitude, qui devient beaucoup plus grande que dans le cas précédant. Mais à la fin le **filtre de Kalman** a réussi de nous amener la correspondance entre la position vraie et la position estimée, qui a vérifié son fonctionnement.

En plus, on peut déduire que l'incertitude de chaque état (x, y, z, v_x, v_y, v_z) est associé la variation du bruit de dynamique dans cet état, puisque la variation d'incertitude est homogène pour tout état avec variation homogène de Qf .

2.5 Q5 - Changement du bruit de mesure du filtre (Rf)

Dans cette section, on a simulé l'estimation d'états du système en variant le bruit pour avoir une connaissance claire de l'influence de la qualité de capteur sur la qualité d'estimation.

On peut facilement déduire selon la figure 2.4 que un petit bruit de mesure nous amène des incertitudes petites. Donc un bon capteur est capable d'améliorer la qualité d'estimation.



(a) La position vraie et la position avec $10 \cdot Qf$

(b) Incertitude d'estimation avec $10 \cdot Qf$

Figure 2.4: Résultat du cas linéaire

3 Partie 2: cas non-linéaire

Dans cette section, on va étudier l'application du filtre de Kalman dans le cas non-linéaire: **Kalman étendu**. Ce filtre permet de linéariser localement le problème et appliquer les équations de filtre de Kalman classique.

3.1 Q1 - Commentaire des résultats

Dans cette section, on a complété le code en fonction de l'équation de prédiction et l'équation de correction dans le cas non-linéaire ci-dessous.

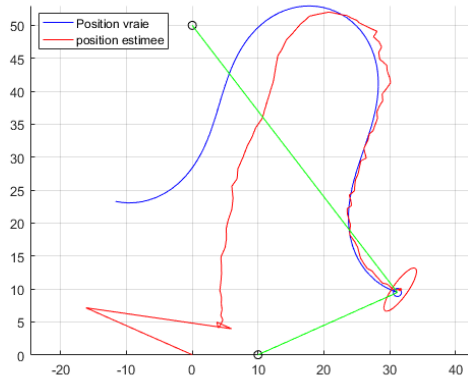
L'équation de prédiction :

$$\begin{aligned}
(3.1) \quad & \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_k) \\
& \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k \\
& \mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k} \in \mathbb{R}^{d \times d}
\end{aligned}$$

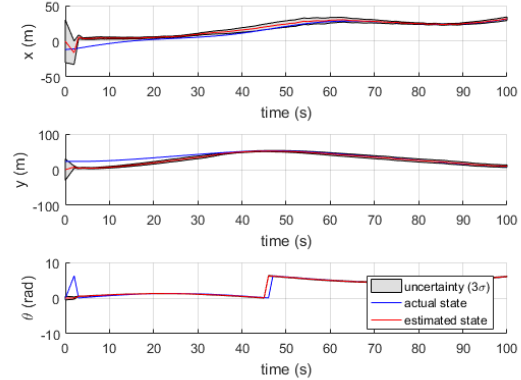
L'équation de correction :

$$\begin{aligned}
(3.2) \quad & \hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})) \\
& \hat{\mathbf{P}}_k = (\mathbf{I}_d - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \\
& \mathbf{K}_k = \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T)^{-1} \\
& \mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k} \in \mathbb{R}^{d_m \times d}
\end{aligned}$$

Après avoir complété le code, on obtient les résultats présentés dans la figure 3.1. On trouve qu'au début, la position estimée est très loin de la position vraie, et il prend plus de temps pour que les deux positions soient cohérentes. Mais cette fois l'incertitude est beaucoup plus petite que dans le cas linéaire.



(a) La position vraie et la position estimée



(b) Incertitude d'estimation

Figure 3.1: Résultat du cas non-linéaire

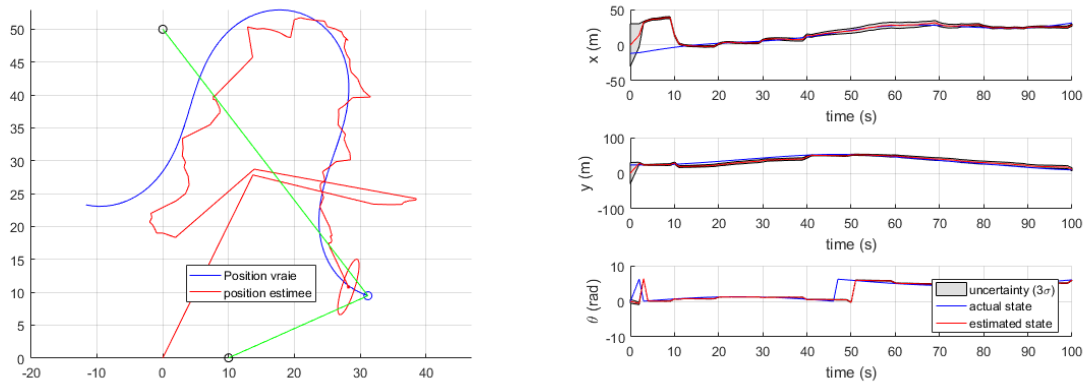
3.2 Q2 - Changement de fréquence

Dans cette section, on a modifié la fréquence des mesures (passer à 1 Hz) en utilisant la variable `dt_mesure = 1`, les résultats sont présentés dans la figure 3.2. Cette fois il y a plus d'oscillations sur la courbe de la position estimée puisque la correction de la mesure est mise à jour après avoir déjà eu 10 prédictions.

```

1 if mod(tk, dt_mesure/dt) == 0
2     X_reel = X_reel_sim(:,tk);
3 end

```

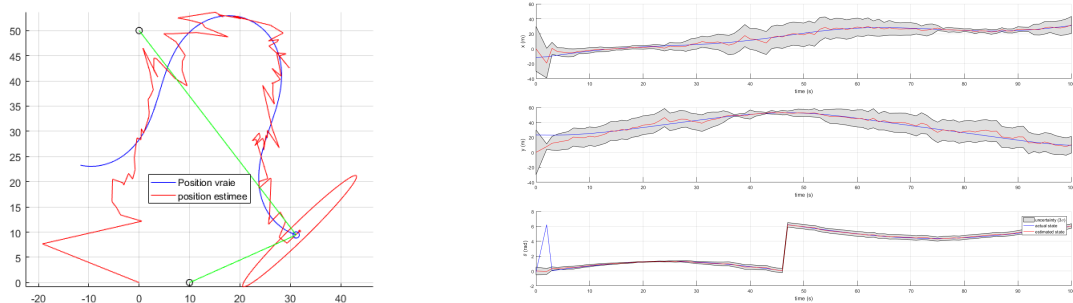


(a) La position vraie et la position estimée avec la fréquence des mesures = 1 Hz (b) Incertitude d'estimation avec la fréquence des mesures = 1 Hz

Figure 3.2: Résultat du cas non-linéaire

3.3 Q3 - Changement du bruit de dynamique du filtre (Qf)

Dans cette section, on a tout d'abord changé le Qf à $10 \cdot Qf$ dans le cas où la fréquence de mesure est 10 Hz (par défaut). Selon la figure 3.3, on trouve que l'incertitude devient plus grande à cause du bruit dynamique plus grand, mais la cohérence des deux courbes commence plus tôt qu'avant.

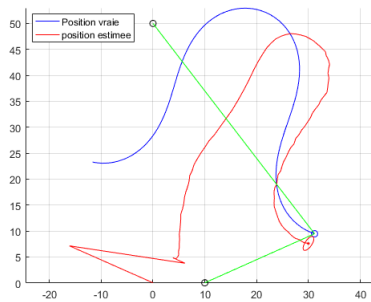


(a) La position vraie et la position estimée avec $10 \cdot Qf$

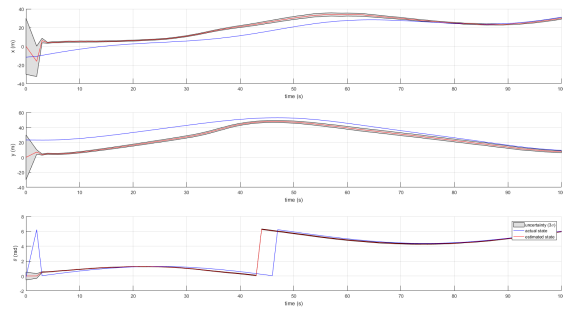
(b) Incertitude d'estimation avec $10 \cdot Qf$

Figure 3.3: Résultat du cas non-linéaire

Ensuite on a changé le Qf à $0.1 \cdot Qf$ dans le cas où la fréquence de mesure est 10 Hz. Selon la figure 3.4, on trouve que la courbe de la position estimée devient beaucoup plus lissée et il y a moins d'oscillations et moins d'incertitude, mais la cohérence des deux courbes commence beaucoup plus tard qu'avant. Ce phénomène peut être expliqué par le fait que plus le bruit de dynamique est grand, plus il est possible de trouver la position vraie en temps court.



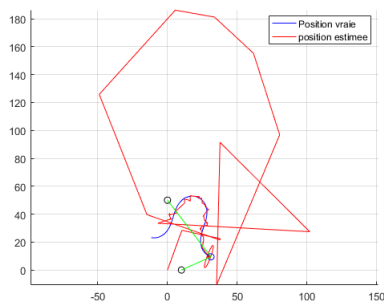
(a) La position vraie et la position estimée avec $10 \cdot Q_f$



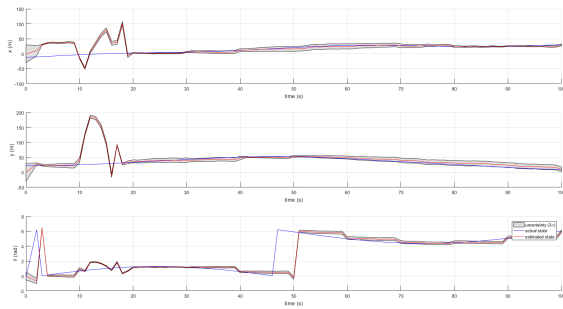
(b) Incertitude d'estimation avec $10 \cdot Q_f$

Figure 3.4: Résultat du cas non-linéaire

Enfin on a changé le Q_f à $10 \cdot Q_f$ dans le cas où la fréquence de mesure est 1 Hz. Selon la figure 3.5, on trouve que au début les deux courbes sont très loins. Mais ça prend beaucoup peu de temps pour que la position estimé soit cohérente avec la position vraie, la cohérence des deux courbes commence tout de suite. Plus le bruit de dynamique est grand, plus il est possible de trouver la position vraie en temps court.



(a) La position vraie et la position estimée avec $10 \cdot Q_f$



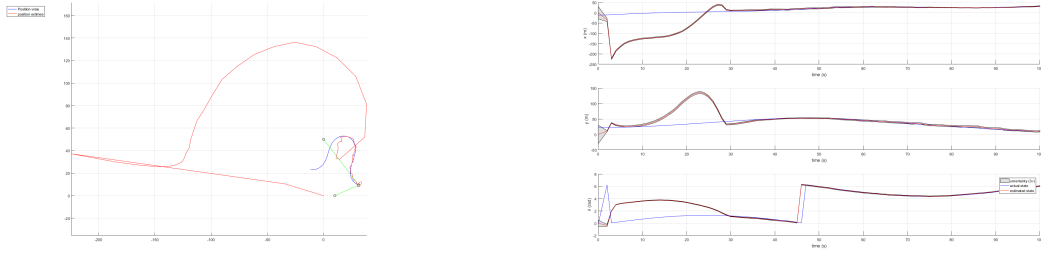
(b) Incertitude d'estimation avec $10 \cdot Q_f$

Figure 3.5: Résultat du cas non-linéaire

3.4 Q4 - Changement du bruit de mesure du filtre (matrice R_f)

```
1 Rfi = diag([3,1*pi/180].^2);
```

En mettant tous les autres paramètres par défaut, on a changé le bruit de mesure à une nouvelle valeur. Selon la figure 3.6, on trouve que même si au début les deux courbes sont très loins, la cohérence des deux courbes apparaît à la fin et l'incertitude est vraiment petite. Donc un capteur de bonne qualité peut améliorer la qualité de contrôle, avec un très petite incertitude.



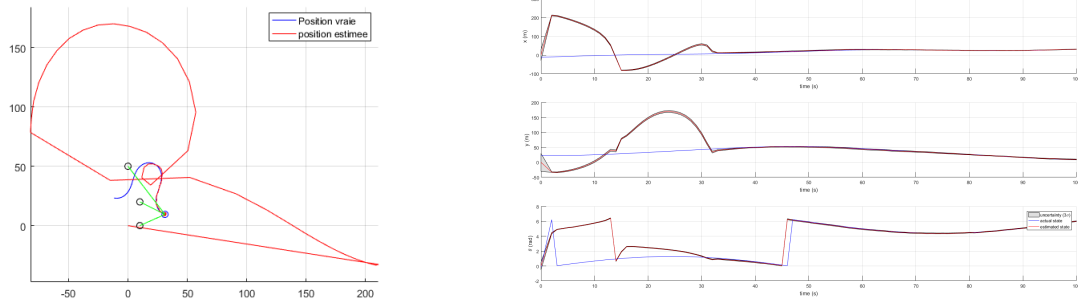
(a) La position vraie et la position estimée avec Rif (b) Incertitude d'estimation avec Rif plus petite plus petite

Figure 3.6: Résultat du cas non-linéaire

3.5 Q5 - Les performances du filtre en fonction du nombre d'amers

Dans cette section on a défini plus d'amers (3 et 6) et on va étudier l'influence du nombre d'amers, la position d'amer est respectivement $[10;0]$, $[00;50]$, $10;20]$, $[10;5]$, $[0;20]$ et $[0;0]$.

Avant d'analyser l'influence du nombre, on trouve que le nombre n'est pas le seul facteur qui influence l'estimation, la position d'amer aussi interfère. Si la position d'amer n'est pas assez proche à la courbe de la position vraie, c'est plus difficile de trouver la cohérence.

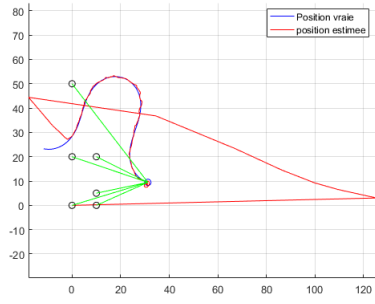


(a) La position vraie et la position estimée avec 3 amers

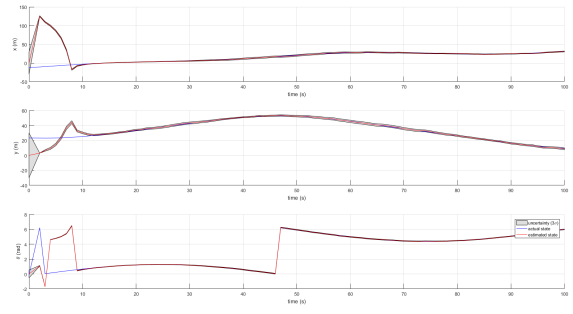
(b) Incertitude d'estimation avec 3 amers

Figure 3.7: Résultat du cas non-linéaire pour 3 amers

Sous l'hypothèse que tous les points d'amers sont aux bonnes positions, on trouve que plus le nombre d'amers est grand, plus rapidement que la cohérence entre la position vraie et la position estimé apparaît.



(a) La position vraie et la position estimée avec 6 amers



(b) Incertitude d'estimation avec 6 amers

Figure 3.8: Résultat du cas non-linéaire pour 6 amers