คณิตศาสตร์ A-LEVEL

by พี่ภีม พีรวัส พิบูลย์วรกุล

บทที่ 1 เซต

1.1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเซต

เซต (Set) หมายถึงกลุ่มของสิ่งต่าง ๆ ที่แน่นอนและเป็นจริงเสมอ เช่น กลุ่มของจำนวนนับที่ไม่เกิน 4 ถือว่าเป็นเซต เพราะสามารถระบุได้แน่นอนว่ากลุ่มนั้นประกอบด้วย 1, 2, 3 และ 4 แต่กลุ่มของคนหล่อไม่ถือว่าเป็นเซต เพราะไม่มีความแน่นอน คนหนึ่งบอกว่าหล่อ อีกคนอาจจะบอกว่าไม่หล่อก็เป็นได้

เราจะเรียกสิ่งที่อยู่ในเซตว่า "สมาชิก" และเรียกเซตที่ไม่มีสมาชิกเรียกว่า "เซตว่าง" ($\varnothing$) และ เรามักจะใช้ตัวอักษรพิมพ์ใหญ่ เช่น $A, B, \ldots$ แทนเซต, ตัวอักษรพิมพ์เล็ก เช่น $a, b, \ldots$ แทนสมาชิก และใช้สัญลักษณ์ $\in$ บอกความเป็นสมาชิก

- $x \in A$ หมายความว่า " x เป็นสมาชิกของเซต A "
- $x \notin A$ หมายความว่า " x ไม่เป็นสมาชิกของเซต A "

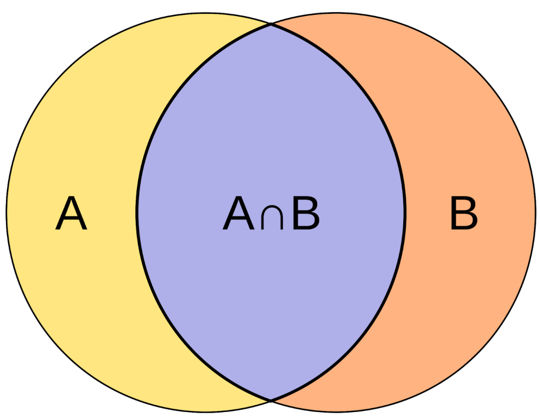


Figure 1.1: แผนภาพเวนน์ (Venn Diagram)

1.1.1. สัญลักษณ์แทนเซต

โดยทั่วไปนิยมเขียนสัญลักษณ์แทนเซตด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษพิมพ์ใหญ่ $A, B, C, \ldots$ และสัญลักษณ์ ต่อไปนี้เป็นสัญลักษณ์แทนเซตบางเซต

- $\mathbb{R}$ คือ เซตของจำนวนจริง
- $\mathbb{N}$ คือ เซตของจำนวนนับ
- $\mathbb{I}$ คือ เซตของจำนวนเต็ม
- $\mathbb{I}^+$ คือ เซตของจำนวนเต็มบวก
- $\mathbb{I}^-$ คือ เซตของจำนวนเต็มลบ
- $\mathbb{Q}$ คือ เซตของจำนวนตรรกยะ
- $\varnothing$ คือ เซตว่าง
- u คือ เซตของเอกภพสัมพัทธ์

****บางตำราใช้สัญลักษณ์ $\mathbb{Z}$ แทน $\mathbb{I}$ แสดงเซ็ตของจำนวนเต็ม**

1.2. การเขียนแทนเซต

วิธีเขียนเซตมี 2 วิธีคือ **เขียนแบบแจกแจงสมาชิก** และ **เขียนแบบบอกเงื่อนไข**

1.2.1. การเขียนแบบแจกแจงสมาชิก

การเขียนแบบแจกแจงสมาชิก เป็นวิธีการเขียนเซตโดยการเขียนสมาชิกทุกตัวลงในเครื่องหมายวงเล็บปีกกาและใช้เครื่องหมายจุลภาค “,” คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว

ตัวอย่าง 1. จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิก

1. ให้ A แทน เซตของจำนวนเต็มตั้งแต่ $1 - 10$

2. ให้ B แทน เซตของวันในหนึ่งสัปดาห์

ในกรณีเซตนั้นมีสมาชิกหลายตัวจนไม่สะดวกที่เขียนให้ครบทุกตัว เราจะใช้สัญลักษณ์ “...” เพื่อแสดง ว่ามี สมาชิกตัวอื่นๆ ในเซตนั้นต่อไปอีก เช่น

ตัวอย่าง 2. ให้ B เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หารด้วย 3 ลงตัว

การเขียนแจกแจงสมาชิกมีข้อตกลงว่า

- ในกรณีที่มีสมาชิกในเซตซ้ำกัน เราจะเขียนสมาชิกที่ซ้ำกันเพียงครั้งเดียว เช่น

$$\{1,2,3\},\{1,2,3,3\},\{1,1,2,3\},\{1,1,2,2,3,3\}$$

  ถือเป็นเซตเดียวกัน

- ลำดับของสมาชิกจะไม่มีความสำคัญ เช่น

$$\{1,2,3\},\{3,2,1\},\{2,3,1\}$$

  ถือเป็นเซตเดียวกัน

- คำว่า “เป็นสมาชิกของ” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ “$\in$” เช่น ถ้ากำหนดให้ $A=\{1,2\}$ จะได้ว่า $1 \in A$ และ $2 \in A$

- คำว่า “ไม่เป็นสมาชิกของ” เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ “$\notin$” เช่น $3 \notin A$

1.2.2. การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก

การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก เป็นวิธีการเขียนเซตโดยการใช้ตัวแปรสมาชิกแทนสมาชิกแล้วบรรยายคุณสมบัติหรือเงื่อนไขของตัวแปร โดยจะมีการกำหนด เอกภพสัมพัทธ์ (Universe) ขึ้นมาเพื่อกำหนดขอบเขตของสิ่งที่เรากล่าวถึง

เช่น ให้เอกสัมพัทธ์คือ จะเขียนแทนเซต A ซึ่งเป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า 10 ได้ดังนี้

$$A=\{x \in N | x<10\}$$

อ่านว่า เซตของ x ที่เป็นจำนวนนับ โดยที่ x เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า 10

ตัวอย่าง 3. จงเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกของเซต A เมื่อ $A = \{x|x^2 - 4x + 3 = 0\}$

1.3. ชนิดของเซต

1. **เซตจำกัด** คือ เซตที่สามารถบอกจำนวนสมาชิกได้แน่นอน เช่น เซตของพยัญชนะไทย เซตของจังหวัดใน ประเทศไทย เซตของจำนวนนับที่ไม่เกินหนึ่งล้าน เซตคำตอบของสมการ

   ****เซตว่าง ถือเป็นเซตจำกัด เพราะ สามารถบอกได้ว่ามีสมาชิกอยู่ศูนย์ตัว**

2. **เซตอนันต์** คือ เซตที่ไม่สามารถระบุจำนวนสมาชิกได้ เช่น เซตของจำนวนเต็มที่มากกว่า 2 เซตของ จำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง 3 กับ 5 เป็นต้น

1.3.1. จำนวนสมาชิกในเซต

$n(A)$ แทนด้วย "จำนวนสมาชิกของเซต A" เช่น $A = \{1, 2, 3\}$ จะได้ว่า $n(A) = 3$

ตัวอย่าง 4. จงหาจำนวนสมาชิกของเซต $\{1, 2, 2, 3, 4\}$

1.3.2. เซตที่เท่ากัน

บทนิยามการเท่ากันของเซต

เซต A และเซต B จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ เซตทั้งสองมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน และสมาชิกทุกตัวเหมือนกัน

ตัวอย่าง. $\{1, 2, 2, 3\}$ *และ* $\{1, 2, 3\}$ *เป็นเซตที่เท่ากันเพราะเซ็ตทั้งสองมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน และสมาชิกทุกตัวเหมือนกัน*

1.4. สับเซต

ถ้ากำหนดเซต $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{0, 1, 2, 3\}$ จะพบว่าเซต A ไม่เท่ากับ B แต่ถ้าพิจารณาสมาชิกในเซต A จะพบว่า สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B ด้วย ซึ่งลักษณะเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า A เป็นสับเซตของ B หรือ $A \subset B$

บทนิยาม

เซต A จะเป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B

นั่นคือ เซต A จะไม่เป็นสับเซตของเซต B ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกในเซต A อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ไม่เป็นสมาชิกในเซต B

ตัวอย่าง. ถ้ากำหนดเซต $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{0, 1, 2, 3\}$ จะพบว่าเซต A ไม่เท่ากับ B แต่ถ้าพิจารณาสมาชิกในเซต A จะพบว่า สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B ด้วย ซึ่งลักษณะเช่นนี้ เราจะกล่าวว่า A เป็นสับเซตของ B

สัญลักษณ์ เซต A เป็นสับเซตของเซต B เขียนแทนด้วย $A \subset B$ ถ้าเซต A ไม่เป็นสับเซตของเซต B เขียนแทนด้วย $A \not\subset B$

ตัวอย่าง 5. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $C = \{0, 1, 2\}$, $D = \{2, 1, 4\}$ จงพิจารณาเติมเครื่องหมาย $\subset$ หรือ $\not\subset$ เพื่อทำให้แต่ละข้อถูกต้อง

1. $A \quad B$
2. $A \quad C$
3. $C \quad B$
4. $D \quad B$

คุณสมบัติของสับเซตบางประการที่น่าสนใจ

1. $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$
2. เซตทุกเซตเป็นสับเซตของตัวเอง นั่นคือ ถ้า A เป็นเซตใด ๆ แล้ว $A \subset A$
3. เซตว่างเป็นสับเซตของเซตทุกเซต นั่นคือ ถ้า A เป็นเซตใด ๆ แล้ว $\varnothing \subset A$
4. เซตทุกเซตเป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ นั่นคือ ถ้า A เป็นเซตใด ๆ แล้ว $A \subset u$
5. สับเซตมีคุณสมบัติการถ่ายทอด
6. นั่นคือ ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$
7. A เป็นสับเซ็ตแท้ของ B เมื่อ $A \subset B$ แต่ $A \neq B$

1.5. เพาเวอร์เซต

ให้ $A = \{1, 2\}$ เราสามารถหาสับเซตทั้งหมดของ A ได้ คือเราจะสร้างเซตใหม่ขึ้นมา 1 เซต โดยการนำสับเซตเหล่านี้ไปเป็นสมาชิกของเซตใหม่ ดังนั้นเซตที่เกิดขึ้นใหม่จะมีลักษณะดังนี้

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

เราเรียกเซตดังกล่าวว่า **เพาเวอร์เซตของเซต** A หรือ $P(A)$

บทนิยามการเท่ากันของเซต

กำหนดให้ A เป็นเซตใด ๆ เพาเวอร์เซตของเซต A คือ เซตของสับเซตทั้งหมดของเซต A เขียนแทนด้วย $P(A)$

ดังนั้น จากบทนิยามของเพาเวอร์เซต เราสามารถเขียน $P(A)$ ในรูปแบบบอกเงื่อนไขได้ ดังนี้

$$P(A) = \{x | x \subset A\}$$

หรืออาจกล่าวได้ว่า $x \in P(A) \leftrightarrow x \subset A$

ตัวอย่าง 6. จงหาเพาเวอร์เซตของเซตที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $A = \{a, b\}$

2. $B = \{3, 3, 4, 5\}$

3. $D = \{4\}$

คุณสมบัติของเพาเวอร์เซตบางประการที่น่าสนใจ

1. เซ็ตว่างเป็นสมาชิกของทุกเพาเวอร์เซ็ต หรือ $\varnothing \in P(A)$ เมื่อ A คือเซตใดๆ
2. เซตทุกเซตเป็นสมาชิกของเพาเวอร์เซ็ตของตัวมันเอง หรือ $A \in P(A)$
3. จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซ็ตของ A คือ $n(P(A)) = 2^{n(A)}$

1.6. การดำเนินการของเซ็ต

- $A \cup B$:“A ยูเนียน B” คือการรวมสมาชิกของเซต A และ B
- $A \cap B$:“A อินเตอร์เซก B” คือการเลือกเฉพาะส่วนที่ซ้ำกันในเซต A และ B
- $A - B$:“A ลบ B” คือการเอาเฉพาะส่วนที่มีใน A แต่ไม่มีใน B
- A': “A คอมพลีเมนต์” คือการเอาสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ทั้งหมดที่ไม่อยู่ใน A

ตัวอย่าง 7. ให้เอกภพสัมพัทธ์ $u = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{4, 5\}$ จงหา

1. $A \cup B$:
2. $A \cap B$:
3. $A - B$:
4. A':

1.6.1. การจัดรูปนิพจน์เซต

การสลับที่และเปลี่ยนหมู่ของการยูเนียนและอินเตอร์เซก

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

การแจกแจงของการยูเนียนและอินเตอร์เซก

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

คอมพลีเมนต์ (กฎของเดอมอร์แกน)

- $(A')' = A$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$ **คอมพลีเมนต์อย่าลืมกลับเครื่องหมาย $\cap$, $\cup$ นะคับน้องๆ

สูตรการลบที่ควรค่าแก่การจำ

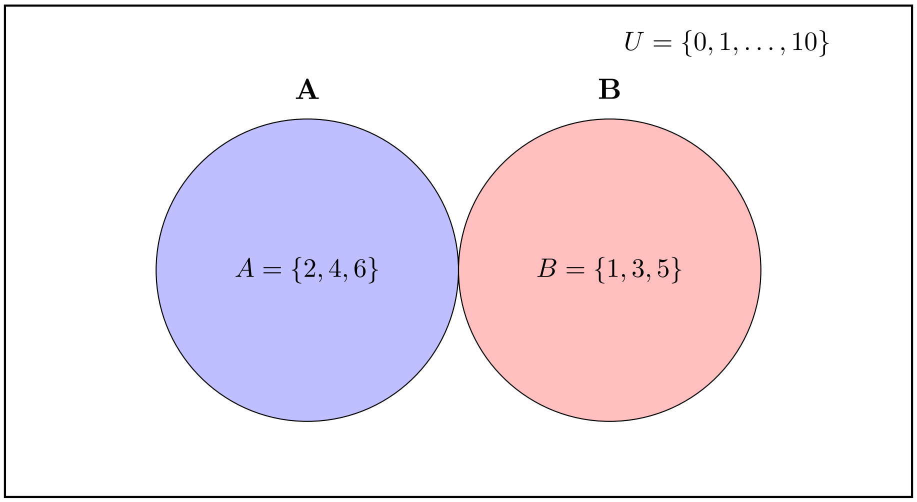
- $A - B = A \cap B'$

1.6.2. แผนภาพ Venn Euler

แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ คือแผนภาพที่ใช้เขียนแทนเซตโดยใช้รูปปิดอะไรก็ได้ เช่น รูปสามเหลี่ยม รูปวงกลม รูปวงรี แต่จะนิยมเขียนแทนเอกภพสัมพัทธ์ด้วยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แล้วเขียนแทนเซตในเอกภพสัมพัทธ์ด้วยรูปวงกลม

ตัวอย่างการเขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์

กำหนด $U = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ และ $B = \{1, 3, 5\}$
เขียนเป็นแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ได้ดังนี้:

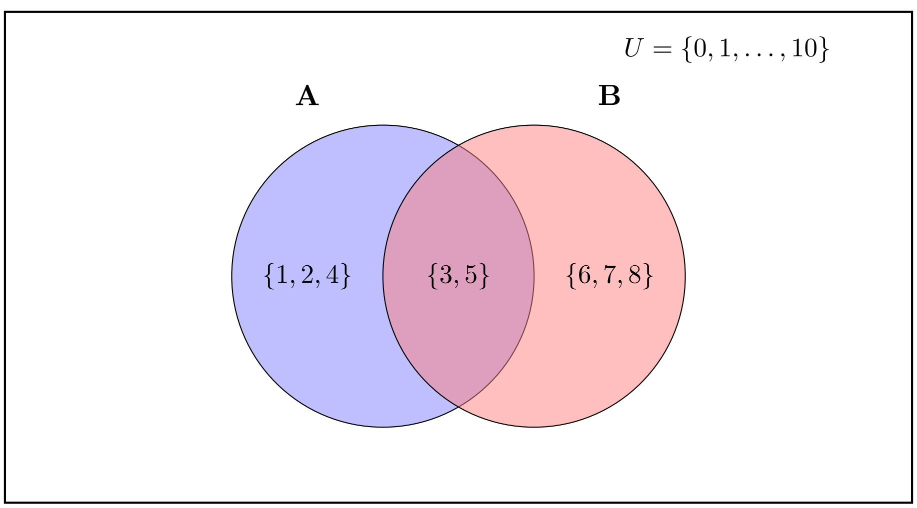


เซต A และ B ไม่มีสมาชิกที่เหมือนกันเลย แสดงว่าทั้ง 2 วง แยกออกจากกันชัดเจน

เราใส่ตัวเลขที่เป็นสมาชิกของ A และ B ลงในวงกลมทั้ง 2 เซตและตัวเลขที่เหลือในเอกภพสัมพัทธ์ที่ไม่ได้อยู่ทั้งใน เซต A และ B เราต้องเขียนแสดงไว้ในกรอบสี่เหลี่ยมผืนผ้านอกวงกลม

ตัวอย่างการเขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ เมื่อ $A \cap B \neq \varnothing$ (วงรี)

กำหนด $U = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{3, 5, 6, 7, 8\}$
เขียนเป็นแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ได้ดังนี้:



เซต A และ B มีสมาชิกบางตัวที่เหมือนกัน คือ $\{3, 5\}$ ซึ่งอยู่ในบริเวณที่วงรีทั้งสองทับซ้อนกัน

1.6.3. สูตรการหาสมาชิกในเซตที่ควรรู้

- $n(A') = n(U) - n(A)$
- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

แบบฝึกหัด

1. ในการสำรวจความคิดเห็นของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายจำนวน 880 คน เพื่อสอบถามข้อมูลเกี่ยวกับการศึกษาต่อ ผลปรากฏดังนี้

- มีผู้ศึกษาต่อ 725 คน
- มีผู้ต้องการทำงาน 160 คน
- มีผู้ต้องการศึกษาต่อหรือทำงาน 813 คน

ผู้ที่ต้องการศึกษาต่อและทำงานด้วยมีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
ตัวเลือก:

1. 67 คน
2. 72 คน
3. 85 คน
4. 90 คน

2. กำหนดเซตและจำนวนสมาชิกของเซตตามตารางต่อไปนี้

เซต	A	B	C	$A \cup B$	$B \cup C$	$A \cup C$	$(A \cap B) \cup C$
จำนวนสมาชิก	15	17	22	23	29	32	28

จำนวนสมาชิกในเซต $A \cup B \cup C$ เท่ากับเท่าใด

1.6.4. ผลคูณคาร์ทีเซียน

เป็นการกระทำกันระหว่างเซต 2 เซต โดยผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ คือ เซตของคู่อันดับ

$$(a, b)$$

ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ B เป็นสมาชิกของเซต B เขียนอยู่ในรูปแบบดังนี้

บทนิยามผลคูณคาร์ทีเซียน

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

สมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ และ $n(A)$ คือ จำนวนสมาชิกของเซต A

- $A \times \varnothing = \varnothing$
- $\varnothing \times A = \varnothing$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
- $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

ตัวอย่าง 8. ถ้า $A = \{1, 2, (1, 2), \{1, 2\}\}$ จงหา

1. $(A \times A) - A =$
2. $A = (A \times A)$
3. $n(A \times A)$
4. $n(P(A))$
5. $n(P(A - (A \times A)))$

แบบฝึกหัด

1. กำหนด $A = \{a, b, c, d, e, f\}, B = \{a, b, c\}$ จงหาจำนวนของเซต x ที่มีเงื่อนไขต่อไปนี้

    1. x เป็นสมาชิกของ $P(A \cup B)$ แต่ x ไม่เป็นสมาชิกของ $P(A \cap B)$

    2. $x \subset A$ หรือ $x \subset B$ แต่ $x \not\subset A \cap B$

2. กำหนดให้ $S = \{x \mid x \in \mathbb{I}$ และ $x^3 - x = 0\}$ เซตในข้อใดต่อไปนี้เท่ากับเซต S

    1. $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ และ $x^2 - x^4 = 0\}$
    2. $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ และ $x^3 - x = -2x\}$
    3. $\{x \mid x \in \mathbb{I}$ และ $x^2 - 1 = 0\}$
    4. $\{x \mid x \in \mathbb{I}$ และ $x^2 + 1 = -2x\}$

3. กำหนดให้

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ และ } x < 100\}$$
$$B = \{x \mid x \in A \text{ และ } 5 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$$

จำนวนสมาชิกของเซต $P(B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2^5
2. 2^{19}
3. 2^{20}
4. 2^{99}

4. กำหนดให้ $A = \{\varnothing, 1, \{1\}\}$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

   1. $\varnothing \subset A$
   2. $\{\varnothing\} \not\subset A$
   3. $\{1, \{1\}\} \subset A$
   4. $\{\{1\}, \{1, \{1\}\}\} \not\subset A$

5. กำหนดให้

$$A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนคู่บวก และ } x \leq 100\}$$
$$B = \{x \mid x \in A \text{ และ } 3 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$$

จำนวนสมาชิกของเซต $P(B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 2^{16}
   2. 2^{17}
   3. 2^{18}
   4. 2^{19}

6. กำหนดให้ $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

   1. $\{1, 2\} \in A$
   2. $\{1, 2, 3\} \in A$
   3. $\{1, 2\} \subset A$
   4. $\{1, 2, 3\} \subset A$

7. ในการสอบวิชาภาษาไทย วิชาภาษาอังกฤษ และวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนในโรงเรียนแห่งหนึ่ง มีนักเรียนเข้าสอบทั้งหมด 66 คน ปรากฏว่า:

- นักเรียนที่สอบตกทั้งสามวิชาจำนวน 13 คน
- นักเรียนที่สอบผ่านทั้งสามวิชาจำนวน 17 คน
- นักเรียนที่สอบผ่านวิชาภาษาไทยและวิชาภาษาอังกฤษแต่สอบตกคณิตศาสตร์จำนวน 10 คน
- นักเรียนที่สอบผ่านวิชาภาษาไทยและวิชาคณิตศาสตร์แต่สอบตกวิชาภาษาอังกฤษจำนวน 11 คน
- นักเรียนที่สอบผ่านเพียงวิชาเดียวจำนวน 6 คน

จำนวนนักเรียนที่สอบผ่านวิชาภาษาอังกฤษและวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับเท่าใด

8. กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, \{0, 1, 2\}\}$ และ $P(A)$ แทนเซตกำลังของ A พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $A \cap P(A) = \{0, 1, 2\}$

ข. $n(A - P(A)) < n(P(A) - A)$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

9. กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม และ $P(S)$ แทนเพาเวอร์เซตของ S

ให้

$$A = \{x \in I \mid |x^2 - 1| < 8\}$$

และ

$$B = \{x \in I \mid 3x^2 + x - 2 \geq 0\}$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. จำนวนสมาชิกของ $P(A - B)$ เท่ากับ 4
2. จำนวนสมาชิกของ $P(I - (A \cup B))$ เท่ากับ 2
3. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
4. $P(A - B) - P(A \cap B) = \{\{0\}\}$

10. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$,$C = \{2, 4, 8, 9, 10\}$
แล้ว $n(A \cup B) + n(B \cup C)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8
2. 10
3. 12
4. 14

11. กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ โดยที่ $n(A) + n(B) + n(C) = 301$ และ $n(A \cup B \cup C) = 102$
จงหาค่าที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ของ $n(A \cap B \cap C)$

12. สำหรับเซต S ใดๆ ให้ S' แทนคอมพลีเมนต์ของเซต S กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตในเอกภพสัมพัทธ์ U โดยที่ $A \cap B = B$, $C \subset A$ และ $B \cap C \neq \varnothing$ ถ้าเซต U มีสมาชิก 12 ตัว เซต $A' \cup B'$ มีสมาชิก 10 ตัว และเซต $A \cap B'$ มีสมาชิก 4 ตัว แล้วจะมีเซต C ที่เป็นไปได้ทั้งหมดกี่เซต

1. 60 เซต
2. 48 เซต
3. 16 เซต
4. 8 เซต

13. กำหนดให้เซต A, B, C เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U โดยที่ $A, B, C \neq U$ และ $n(U) = 44$, $n(B) = 19$, $n(A \cap B \cap C) = 2$, $n[(A \cap C) - B] = 3$, $n[A \cap (B \cup C')] = 6$, $n(A' \cap B' \cap C') = 9$
จงหาค่าของ $n[(A \cup C) - B]$

14. จากการสำรวจนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 80 คน เกี่ยวกับการเป็นสมาชิกของชมรม 3 ชมรม คือ ชมรมคณิตศาสตร์ ชมรมการแสดง และชมรมกีฬา ปรากฏว่า มี 30 คน เป็นสมาชิกของชมรมคณิตศาสตร์ โดยในจำนวนนี้มีนักเรียน 20 คน เท่านั้นที่เป็นสมาชิกของชมรมคณิตศาสตร์เพียงชมรมเดียว มี 5 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมการแสดงและชมรมกีฬา แต่ไม่เป็นสมาชิกของชมรมคณิตศาสตร์ มี 10 คน ที่ไม่เป็นสมาชิกของชมรมใดเลย

พิจารณาข้อความต่อไปนี้:

(ก) มี 15 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมอย่างน้อย 2 ชมรม

(ข) มี 55 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมใดชมรมหนึ่งเพียง 1 ชมรมเท่านั้น

(ค) มี 50 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมการแสดงหรือชมรมกีฬา

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

15. กำหนดให้ A, B เป็นเซตจำกัด โดยที่

- จำนวนสมาชิกของ $P(A)$ เป็นสองเท่าของจำนวนสมาชิก $\mathcal{P}(B)$
- จำนวนสมาชิกของ $P(A \cap B) = 8$
- จำนวนสมาชิกของ $P(A \cup B) = 256$

จำนวนสมาชิกของ $P(A - B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2
2. 4
3. 8
4. 16

16. จากการสำรวจนักเรียน 300 คน ในจำนวนนี้เป็นชาย 200 คน พบว่านักเรียนชั้น ม.6 จำนวน 100 เป็นชายและหญิงจำนวนเท่ากัน มีนักเรียนที่เป็นนักกีฬาโรงเรียน 32 คน ในจำนวนนี้เป็นชาย 25 คน มีนักเรียน ม.6 และเป็นนักกีฬา 15 คน ในจำนวนนี้เป็นชาย 10 คนแล้วจำนวนนักเรียนหญิงที่ไม่ได้อยู่ชั้น ม.6 และไม่ได้เป็นนักกีฬาเท่ากับข้อใด

1. 35
2. 40
3. 48
4. 135

บทที่ 2 ตรรกศาสตร์

2.1. ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับตรรกศาสตร์

2.1.1. ประพจน์และค่าความจริง

ประพจน์ (statement , proposition) คือ ประโยคหรือข้อความที่เป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น มักแทนด้วย $p, q, r, s, t, \ldots$

ค่าความจริง (truth value) ความเป็น "จริง ($True : T$)" หรือ " เท็จ ($False : F$)" ของประพจน์ เช่นถ้าโจทย์ให้หา "ค่าความจริงของ p" ก็คือ ถามว่า "p เป็นจริงหรือไม่" นั่นเอง

ตัวอย่างประพจน์

1. $7 > 3 \equiv T$
2. ชัยภูมิเป็นจังหวัดในภาคตะวันออกเฉียงเหนือ $\equiv T$
3. เดือนสิงหาคมมี 30 วัน $\equiv F$

ตัวอย่างข้อความที่ไม่เป็นประพจน์

1. กินข้าวยัง
2. ขออภัยในความไม่สะดวก
3. ห้ามเดินลัดสนาม
4. จำนวนใดเป็นคำตอบของ $5x = 1$

ตัวอย่าง 9. จงพิจารณาประโยคต่อไปนี้ว่าเป็นประพจน์หรือไม่ ถ้าเป็นประพจน์จงบอกค่าความจริงของประพจน์

ประโยค	**เป็นประพจน์**	**ค่าความจริง**
ช้างเป็นสัตว์สีขาว		
ข้าวเป็นอาหารหลักของคนไทย		
ห้ามส่งเสียงดัง		
เขาเป็นนักเรียนที่เก่งที่สุด		
ช่วยด้วยครับ		
$x - 2 = 10$		
เดือนมกราคมมี 30 วัน		

2.2. การเชื่อมประพจน์

เราสามารถเชื่อมประพจน์ต่างๆ เข้าด้วยกันโดยใช้ตัวเชื่อมประพจน์

และ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\wedge$

หรือ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vee$

ถ้า ... แล้ว ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\rightarrow$

ก็ต่อเมื่อ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\leftrightarrow$

นิเสธ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\neg$ หรือ $\sim$

**เรียกประพจน์ที่นำมาเชื่อมประพจน์ต่างๆว่าประพจน์ย่อยหรือประพจน์เชิงเดี่ยว

2.2.1. ประพจน์เชิงเดี่ยว (simple proposition)

เป็นประพจน์ที่มีประธานและกริยาอย่างละเพียง ตัวเดียว เช่น

1. นกมีปีก
2. ดวงอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก
3. Z เป็นพยัญชนะตัวสุดท้ายในภาษาอังกฤษ
4. นายก้องเกียรติเรียนอยู่ที่มหาวิทยาลัย

**เรียกประพจน์ที่เกิดจากการเชื่อมของประพจน์ย่อยว่า ประพจน์เชิงประกอบ

2.2.2. ประพจน์เชิงประกอบ (compound proposition)

เป็นประพจน์ที่เกิดจากการนำประพจน์เชิงเดี่ยวมาเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อม ต่าง ๆ เพื่อให้เกิดประพจน์ใหม่ที่มีความหมายต่อเนื่องกันหรือมีความหมาย แตกต่างกันไปเช่น

1. ดวงอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออกและตกทางทิศตะวันตก
2. สมชายจะไปดูภาพยนตร์หรือไปเล่นกีฬา

ค่าความจริงของประพจน์ที่เกิดจากการเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อมต่างๆ กำหนดให้ p และ q แทน ประพจน์ใดๆ ให้ T แทนค่าความจริงของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง , F แทนค่าความจริงของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ จะได้

ตารางแสดงค่าความจริงของการเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อมต่าง ๆ

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T

ข้อสังเกตจากตาราง

1. จริง และ จริงจะได้จริง (กรณีอื่นเท็จหมด)
2. เท็จ หรือ เท็จจะได้เท็จ (กรณีอื่นจริงหมด)
3. ถ้าจริง แล้วเท็จจะได้เท็จ (กรณีอื่นจริงหมด)
4. ก็ต่อเมื่อ ค่าความจริงเหมือนกันจะได้จริง ค่าความจริงต่างกันจะได้เท็จ

นิเสธของประพจน์

นิเสธของประพจน์ หมายถึง ประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับประพจน์เดิม บทนิยาม ถ้า p เป็นประพจน์ใด ๆ นิเสธของประพจน์ p เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sim p$

2.3. การหาค่าความจริงของประพจน์

จากตารางค่าความจริงในหัวข้อก่อนหน้านี้ ที่มีตัวเชื่อมแบบต่าง ๆ ที่เราเคยกล่าวมาแล้ว เมื่อโจทย์กำหนดค่าความจริงของประพจน์หนึ่งมา น้อง ๆ จะใช้ความรู้นี้เพื่อหาค่าความจริงของประพจน์ย่อยได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 10. กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น T และ F ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของ $(\sim p \vee q) \to p$

วิธีทำ $(\sim p \vee q) \to p \equiv (\sim T \vee F) \to T \equiv (F \vee F) \to T \equiv F \to T \equiv T$

2.4. การสร้างตารางค่าความจริง

ถ้ามีประพจน์ย่อยจำนวน n ประพจน์ การพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ย่อยต้องพิจารณาค่าความจริงทุกกรณี ซึ่งจำนวนกรณีที่พิจารณา หาได้จาก

$$\text{จำนวนกรณีที่พิจารณา} = 2^n \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง. ถ้ารูปแบบมีประพจน์ย่อยประพจน์เดียว ตารางค่าความจริง มี $2^1 = 2$ กรณี ดังนี้

p
T
F

ตัวอย่าง. ถ้ารูปแบบมีประพจน์ย่อย 2 ประพจน์ ตารางค่าความจริง มี $2^2 = 4$ กรณี ดังนี้

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

ตัวอย่าง. ถ้ารูปแบบมีประพจน์ย่อย 2 ประพจน์ ตารางค่าความจริงมี $2^2 = 4$ กรณี ดังนี้

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

แบบฝึกหัด

จงสร้างตารางค่าความจริงของรูปแบบประพจน์ $(p \wedge (p \to q)) \to q$

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$

จงวิเคราะห์ ถ้า $p \to \sim q \to r$ เป็นเท็จ $r \leftrightarrow s$ เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ $p \vee (\sim r \wedge q) \to \sim q$

2.5. ลำดับของ operation ทางตรรกศาสตร์ (Operator Precedence for Logical Operators)

Highest
$()$
$\sim$
$\wedge$
$\vee$
$\to$
$\leftrightarrow$
Lowest

2.6. รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน

ในทางตรรกศาสตร์ ถ้ารูปแบบของประพจน์ 2 รูปแบบใดมีค่าความจริงตรงกันกรณีต่อกรณี แล้วสามารถนำไปใช้แทนกันได้ จะเรียกรูปแบบของประพจน์ทั้ง 2 ว่า “รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน” และใช้สัญลักษณ์ $\equiv$ แทนการสมมูลกัน

1. Commutative Laws:
   - $p \wedge q \equiv q \wedge p$
   - $p \vee q \equiv q \vee p$
2. Associative Laws:
   - $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
   - $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
3. Distributive Laws:
   - $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   - $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. **Implication Laws:
   - $p \to q \equiv \sim p \vee q$
   - $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$ (Contrapositive)
5. Biconditional Law:
   - $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
6. Double Negation Law:
   - $\sim (\sim p) \equiv p$
7. De Morgan's Laws:
   - $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
   - $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
8. Negation of Implication:
   - $\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q$
9. Negation of Biconditional:
   - $\sim (p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$

ข้อควรรู้

- $p \wedge F \equiv F$
- $p \wedge T \equiv p$
- $p \vee T \equiv T$
- $p \vee F \equiv p$
- $p \leftrightarrow T \equiv p$
- $p \leftrightarrow F \equiv \sim p$
- $p \wedge p \equiv p$
- $p \vee p \equiv p$
- $p \wedge \sim p \equiv F$
- $p \vee \sim p \equiv T$

2.7. สัจนิรันดร์

รูปแบบของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี เรียกว่า “สัจนิรันดร์” หัวข้อสัจนิรันดร์เป็นเรื่องที่ออกข้อสอบบ่อยมาก ๆ โดยข้อสอบส่วนมากจะกำหนดประพจน์มาให้ และให้เราตรวจสอบว่าประพจน์ที่กำหนดมาให้นั้นเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ ซึ่งวิธีการตรวจสอบทำได้ 2 วิธี คือ

1. **สร้างตารางค่าความจริง**

   ถ้าค่าความจริงของประพจน์นั้นเป็นจริงทุกกรณี (ทุกบรรทัดในตาราง) จะสรุปได้ว่าประพจน์นั้นเป็นสัจนิรันดร์ แต่ถ้ามีบางกรณีในตารางมีค่าความจริงเป็นเท็จ ประพจน์นั้นจะไม่เป็นสัจนิรันดร์

2. **วิธีการหาข้อขัดแย้ง**

   ทำโดยสมมุติให้รูปแบบของประพจน์ที่ต้องการตรวจสอบเป็น “เท็จ” แล้วจึงหาค่าความจริงของประพจน์ย่อย จากนั้นดูว่ามีข้อขัดแย้งเกิดขึ้นหรือไม่ ถ้ามีข้อขัดแย้ง แสดงว่ารูปแบบของประพจน์นั้นเป็นสัจนิรันดร์ แต่ถ้าไม่มีข้อขัดแย้ง แสดงว่ารูปแบบของประพจน์นั้นไม่เป็นสัจนิรันดร์

วิธีที่ 1 สร้างตารางค่าความจริง

จงตรวจสอบว่ารูปแบบของประพจน์ $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

วิธีที่ 2 หาข้อขัดแย้ง

กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่ารูปแบบของประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

1. $(p \wedge \sim q) \rightarrow (p \vee q)$

   สมมติให้ประพจน์นี้เป็น**เท็จ**

   ดังนั้น$(p \wedge \sim q) \equiv T$ และ $(p \vee q) \equiv F$

   หาก $(p \wedge \sim q) \equiv T, p \equiv T, \sim q \equiv T$ ดังนั้น $q \equiv F$

   แต่การที่ประพจน์ $(p \vee q) \equiv F$ ได้นั้น $p \equiv F, q \equiv F$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้งขึ้น

   ดังนั้นประพจน์ $(p \wedge \sim q) \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

2. $p \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow q]$

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ p, q, r, s เป็นประพจน์ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ประพจน์ $(\sim p \vee q) \rightarrow (r \wedge \sim s)$ สมมูลกับ $(s \vee \sim r) \rightarrow (p \wedge \sim q)$

ข. ประพจน์ $(p \vee r) \vee \big[(p \wedge r) \rightarrow (q \ \vee r \vee \sim s)\big]$ เป็นสัจนิรันดร์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

2. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ที่

ประพจน์ $(p \vee q) \rightarrow ((r \vee s))$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ประพจน์ $p \leftrightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ประพจน์ในข้อใดมีค่าความจริงเป็นจริง

1. $(q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow r)$
2. $q \rightarrow [p \vee (q \wedge \sim r)]$
3. $(q \rightarrow s) \rightarrow (r \leftrightarrow q)$
4. $(r \rightarrow s) \wedge [q \rightarrow (p \wedge r)]$

3. กำหนดให้ A, B และ C เป็นประพจน์ใดๆ
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. ถ้า $A \leftrightarrow B$ มีค่าความจริงเป็นจริงแล้ว $(B \wedge C) \rightarrow (\sim A \rightarrow C)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
   2. ประพจน์ $A \rightarrow \big[(A \wedge B) \vee (B \vee C)\big]$ เป็นสัจนิรันดร์
   3. ประพจน์ $\Big[\big[(A \wedge B) \rightarrow C\big] \rightarrow \big[(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\big]\Big]$ เป็นสัจนิรันดร์
   4. ประพจน์ $\big[(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)\big]$ สมมูลกับ $(A \vee B) \rightarrow C$

4. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์
โดยที่ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$, $r \vee \sim p$ และ p มีค่าความจริงเป็นจริง
ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

   1. $\big[p \rightarrow (q \rightarrow \sim r)\big] \leftrightarrow \sim (q \wedge r)$
   2. $\big[p \rightarrow (r \rightarrow q)\big] \leftrightarrow \big[(r \rightarrow p) \rightarrow q\big]$
   3. $\big[p \rightarrow \sim (r \wedge q)\big] \leftrightarrow \big[r \rightarrow (p \wedge q)\big]$
   4. $\big[p \vee \sim (q \rightarrow r)\big] \leftrightarrow \big[r \rightarrow (p \rightarrow q)\big]$

5. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใดๆ
โดยที่ $\sim p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   ก. $(p \leftrightarrow r) \rightarrow \big[(p \vee r) \rightarrow q\big]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

   ข. $(p \rightarrow r) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. ก. ถูก และ ข. ถูก
   2. ก. ถูก แต่ ข. ผิด
   3. ก. ผิด แต่ ข. ถูก
   4. ก. ผิด และ ข. ผิด

2.8. การให้เหตุผล (Reasoning)

หากเราพิจารณารูปแบบของประพจน์ $A \to B$ จะประกอบด้วยส่วนสองส่วน คือ เหตุ ได้แก่ A และ ผล ได้แก่ B เราจะอาศัยความรู้นี้มาศึกษาเรื่องการอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผล หมายถึง การกล่าวอ้างว่า **ถ้า**มีข้อความ $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ **แล้ว**สามารถสรุป ข้อความ C ได้

ดังนั้น การอ้างเหตุผล จะมีส่วนประกอบ 2 ส่วน คือ

ส่วนที่หนึ่ง : เรียกว่า **เหตุ** หรือ **สิ่งที่กำหนดให้** ได้แก่ข้อความ $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$

ส่วนที่สอง : เรียกว่า **ผล** ได้แก่ ข้อความ C

การอ้างเหตุผล **จะสมเหตุสมผล (valid)** หรือ **ไม่สมเหตุสมผล (invalid)** ก็ได้ ซึ่งมีวิธีการตรวจสอบดังนี้

วิธีที่ 1 : ใช้การตรวจสอบรูปแบบประพจน์ $(P_1 \land P_2 \land P_3 \land \cdots \land P_n) \to C$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

1. ถ้ารูปแบบของประพจน์ $(P_1 \land P_2 \land P_3 \land \cdots \land P_n) \to C$ เป็นสัจนิรันดร์
   แล้วการอ้างเหตุผลนี้ **สมเหตุสมผล**
2. ถ้ารูปแบบของประพจน์ $(P_1 \land P_2 \land P_3 \land \cdots \land P_n) \to C$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์
   แล้วการอ้างเหตุผลนี้ **ไม่สมเหตุสมผล**

วิธีที่ 2 : ใช้การค้นหาค่าความจริงของเหตุ

เนื่องจาก $(P_1 \land P_2 \land P_3 \land \cdots \land P_n) \to C$ เป็นเท็จมีกรณีเดียว คือ $P_1 \land P_2 \land P_3 \land \cdots \land P_n$ มีค่าความจริงเป็นจริง และ C มีค่าความจริงเป็นเท็จ ดังนั้นในการอ้างเหตุผลเราอาจจะกาหนดให้เหตุแต่ละเหตุมีค่าความจริงเป็นจริง หลังจากนั้นก็ตรวจสอบค่าความจริงของประพจน์ที่เป็นผล

1. ถ้า $P_1 \land P_2 \land P_3 \land \cdots \land P_n$ ทั้งหมดเป็นจริง แล้วทำให้ C เป็นจริง
   จะได้ว่าการอ้างเหตุผลนั้น**สมเหตุสมผล**

2. ถ้า $P_1 \land P_2 \land P_3 \land \cdots \land P_n$ ทั้งหมดเป็นจริง แล้ว ทำให้ C เป็นเท็จ
   จะได้ว่าการอ้างเหตุผลนั้น**ไม่สมเหตุสมผล**

วิธีที่ 3 : ใช้รูปแบบการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลแล้ว ที่นิยมใช้ในทางคณิตศาสตร์ ได้แก่

(a) **Modus Ponens**

Premise 1.	$p \to q$
Premise 2.	p
Conclusion:	q

(b) **Modus Tollens**

Premise 1.	$p \to q$
Premise 2.	$\sim q$
Conclusion:	$\sim p$

(c) **Law of Syllogism**

Premise 1.	$p \to q$
Premise 2.	$q \to r$
Conclusion:	$p \to r$

(d) **Law of Contrapositive**

Premise:	$p \to q$
Conclusion:	$\sim q \to \sim p$

(e) **Disjunctive Syllogism**

Premise 1.	$p \vee q$
Premise 2.	$\sim q$
Conclusion:	p

(f) **Constructive Dilemma**

Premise 1.	$p \to r$
Premise 2.	$q \to s$
Premise 3.	$p \vee q$
Conclusion:	$r \vee s$

(g) **Law of Simplification**

Premise:	$p \wedge q$
Conclusion:	p

(h) **Law of Addition**

Premise:	p
Conclusion:	$p \vee q$

ตัวอย่าง 11. จงตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

1.) เหตุ

1. $p \to q$
2. p

ผล q

2.) เหตุ

1. $\sim p \to q$
2. $\sim q$

ผล p

3.) เหตุ

1. $p \to q$
2. $q \to r$
3. $r \to s$
4. $p \vee t$
5. $\sim s$

ผล t

4.) เหตุ

1. $\sim r \to (s \to \sim t)$
2. $\sim r \vee w$
3. $\sim p \to s$
4. $\sim w$
5. t

ผล $p \vee x \vee y$

5.) เหตุ

1. ถ้าฉันขยันเรียน แล้วฉันจะสอบผ่าน
2. ฉันขยันเรียน

ผล ฉันสอบผ่าน

6.) เหตุ

1. ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว 2 หาร a ลงตัว
2. a เป็นจำนวนคู่ หรือ จำนวนคี่
3. 2 หาร a ไม่ลงตัว

ผล a เป็นจำนวนคี่

2.9. ประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ

2.9.1. ประโยคเปิด

ประโยคเปิด คือ ประโยคหรือข้อความที่มีตัวแปร ซึ่งเมื่อแทนค่าของตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วจะเป็นประพจน์

เช่น กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริง จะเห็นว่าข้อความ "$x + 2 = 5$" เป็นประโยคเปิด เพราะมีตัวแปร x และเมื่อแทน x ด้วยจำนวนจริง ใด ๆ แล้วจะได้ประพจน์ โดยเมื่อแทน x เป็น 3 ก็จะได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง แต่ถ้าแทน x ด้วยตัวเลข อื่น ๆ ก็จะได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

แต่ข้อความบางข้อความที่มีตัวแปรอาจจะไม่เป็นประโยคเปิดก็ได้ เช่น "$x^2 + 2x - 6$" ไม่ถือว่าเป็นประโยคเปิด เพราะเมื่อแทน x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ ก็ไม่ทำให้ได้ประพจน์

ประโยคเปิดใด ๆ ที่มี x เป็นตัวแปร เขียนแทนด้วย $P(x)$ หรือถ้ามีตัวแปร 2 ตัว เช่น x กับ y ก็เขียนแทนด้วย $P(x, y)$

ประโยคเปิดสามารถใช้ตัวเชื่อม นิเสธ และการสมมูลได้เช่นเดียวกันกับประพจน์

ตัวอย่าง 12. ประโยคในข้อใดต่อไปนี้เป็น ประพจน์ หรือ ประโยคเปิด หรือไม่ใช่ทั้งสอง

1. เธอกำลังเรียนอยู่ในมหาวิทยาลัย

2. เขาเป็นนักเรียนที่ตั้งใจเรียนมากใช่หรือไม่

3. ถ้า 2 เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว 2 เป็นจำนวนคี่

4. $x \geq 0$ และ x เป็นจำนวนนับ

2.9.2. ตัวบ่งปริมาณ

ในวิชาคณิตศาสตร์ เรามักพบประโยคเปิด ที่มีลักษณะเป็นข้อความ เช่น

"สำหรับ (ตัวแปร) ทุกตัว (ประโยคเปิด)"

"สำหรับ (ตัวแปร) บางตัว (ประโยคเปิด)"

เช่น สำหรับ x ทุกตัวที่เป็นจำนวนจริงบวก $\sqrt{x}$ หาค่าได้

สำหรับ x บางตัวที่เป็นจำนวนเต็มบวก $x^2 - 2x - 8 = 0$ เป็นต้น

บทนิยาม

เรียกข้อความ **"สำหรับ ..... ทุกตัว"** และ **"สำหรับ ..... บางตัว"** ว่าเป็น **ตัวบ่งปริมาณ** โดยที่

- ข้อความ "สำหรับ ... ทุกตัว" แสดงให้เห็นว่าเรากำลังกล่าวถึงสมาชิกทุกตัวใน u และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\forall$
- ข้อความ "สำหรับ ... บางตัว" แสดงให้เห็นว่าเรากำลังกล่าวถึงสมาชิกบางตัวใน u และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\exists$

จากนิยามการเขียนตัวบ่งปริมาณ ที่มีตัวแปร 1 ตัว และตัวแปร 2 ตัวในประโยคเปิดมีดังนี้

ข้อความตัวบ่งปริมาณ	สัญลักษณ์
แบบที่ 1 : "สำหรับ x ทุกตัว"	$\forall x$
แบบที่ 2 : "สำหรับ x บางตัว" หรือ "มี x บางตัว"	$\exists x$
แบบที่ 3 : "สำหรับ x ทุกตัว y ทุกตัว"	$\forall x \forall y$
แบบที่ 4 : "สำหรับ x บางตัว y บางตัว"	$\exists x \exists y$
แบบที่ 5 : "สำหรับ x บางตัว สำหรับ y ทุกตัว" หรือ "มี x บางตัว สำหรับ y ทุกตัว"	$\exists x \forall y$
แบบที่ 6 : "สำหรับ x ทุกตัว สำหรับ y บางตัว" หรือ "สำหรับ x ทุกตัว มี y บางตัว"	$\forall x \exists y$

หมายเหตุ

1. ถ้าเป็นประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณที่เกี่ยวข้องกับเรื่องของจำนวน และ ไม่ได้กำหนดเอกภพสัมพัทธ์มาให้ถือว่าเอกภพสัมพัทธ์คือ เซตของจำนวนจริง

2. ตัวบ่งปริมาณ จะใช้เขียนนำหน้าประโยคเปิด เช่น $\forall x \exists y \Big[x + y = 0\Big]$

ตัวอย่าง 13. ถ้าให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง จงเขียนประโยคต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์

1. สำหรับ x ทุกตัว $x^2 + x = 2$

2. สำหรับ x บางตัว $x^3 > 0$

3. สำหรับ x บางตัว x เป็นจำนวนคู่หรือ x เป็นจำนวนคี่

4. สำหรับ x ทุกตัว $x > 0 \leftrightarrow x^3 > 0$

2.9.3. ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ 1 ตัว

ให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปร และ u แทนเอกภพสัมพัทธ์

1. $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็น **จริง**
   ก็ต่อเมื่อนำสมาชิก**ทุกตัว**ใน u ไปแทนค่า x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

2. $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็น **เท็จ**
   ก็ต่อเมื่อมีสมาชิก**อย่างน้อยหนึ่งตัว**ใน u ไปแทนค่า x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ

3. $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็น **จริง**
   ก็ต่อเมื่อนำสมาชิก**อย่างน้อยหนึ่งตัว**ใน u ไปแทนค่า x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

4. $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็น **เท็จ**
   ก็ต่อเมื่อมีสมาชิก**ทุกตัว**ใน u ไปแทนค่า x ใน $P(x)$ แล้วทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ

ข้อสังเกต

1. ถ้า $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
2. ถ้า $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว เราไม่สามารถสรุปเกี่ยวกับค่าความจริงของ $\exists x[P(x)]$ ได้
3. ถ้า $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
4. ถ้า $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว เราไม่สามารถสรุปเกี่ยวกับค่าความจริงของ $\forall x[P(x)]$ ได้

ตัวอย่าง 14. จงหาค่าความจริงต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $u = \{-2, 1, 0, 1, 2\}$

1. $\forall x[x^3 + 6 \geq x]$
2. $\exists x[x^2 = 2x]$
3. $\forall x[x < 0 \rightarrow -x > 0]$
4. $\exists[x^2 - 1 = 0 \rightarrow x < 0]$

ตัวอย่าง 15. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ u และกำหนดประโยคเปิด $P(x), Q(x)$ และ $R(x)$ ประโยคต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่

1. $\exists x\left[P(x) \wedge \big(Q(x) \vee R(x)\big)\right]$ กับ $\exists x\left[\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \vee \big(P(x) \wedge R(x)\big)\right]$
2. $\forall x\left[P(x) \rightarrow \big(Q(x) \vee R(x)\big)\right]$ กับ $\forall x\left[\big({\sim}Q(x) \wedge {\sim}R(x)\big) \rightarrow {\sim}P(x)\right]$

2.9.4. นิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

ประโยคเปิด $Q(x)$ จะเรียกว่าเป็น นิเสธ ของประโยคเปิด $P(x)$ ก็ต่อเมื่อ เมื่อแทนค่า x ด้วยสมาชิกทุกตัวในเซตสากล u แล้วทำให้ $Q(x)$ เป็นนิเสธของประพจน์ $P(x)$ นั่นคือ สำหรับทุกค่า x ใน u ค่าความจริงของ $Q(x)$ และ $P(x)$ ต้อง ตรงกันข้ามกันเสมอ

นิเสธของประโยคเปิด $P(x)$ เขียนแทนด้วย $\sim P(x)$

ตัวอย่าง 16. จงหานิเสธของประโยคเปิดต่อไปนี้

$P(x)$	$\sim P(x)$
$x < x+1$	
$x = \lvert x \rvert$	
$x + y \neq 5$	
$x^2 + y^2 \geq 1$	
$x \mid y$	

1. นิเสธของ $\forall x\big(P(x)\big)$ คือ $\sim \forall x\big(P(x)\big)$
   แต่ $\sim \forall x\big(P(x)\big)$ มีความหมายเหมือนกับ $\exists x[\sim P(x)]$
   นั่นคือ $\quad \sim \forall x\big(P(x)\big) \equiv \exists x[\sim P(x)]$

2. นิเสธของ $\exists x\big(P(x)\big)$ คือ $\sim \exists x\big(P(x)\big)$
   แต่ $\sim \exists x\big(P(x)\big)$ มีความหมายเหมือนกับ $\forall x[\sim P(x)]$
   นั่นคือ $\quad \sim \exists x\big(P(x)\big) \equiv \forall x[\sim P(x)]$

แบบฝึกหัด

1. จงหาว่าประพจน์ $((p \to q) \to r) \to s$ เป็นจริงได้ที่กรณี

    1. 10 กรณี
    2. 11 กรณี
    3. 12 กรณี
    4. 13 กรณี

2. จงหาว่าประพจน์ $(p \vee q \to r) \leftrightarrow (s \to t)$ เป็นจริงได้กี่กรณี

    1. 17 กรณี
    2. 18 กรณี
    3. 19 กรณี
    4. 20 กรณี

3. จงหาว่าประพจน์ $(p \to q \wedge r) \to (s \vee t \leftrightarrow w)$ เป็นจริงได้กี่กรณี

    1. 34 กรณี
    2. 40 กรณี
    3. 44 กรณี
    4. 50 กรณี

4. ถ้า $p \wedge \sim q \rightarrow r$ เป็นเท็จ และ $r \leftrightarrow s$ เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ $p \vee (\sim r \wedge s) \rightarrow \sim q$

5. จงตรวจสอบสัจนิรันดร์ของประพจน์ $(\sim p \vee q) \wedge (\sim r \rightarrow \sim q) \wedge \sim r \rightarrow \sim p$

6. กำหนด $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ให้ $P(x)$ แทน $|x-1| < 4$ และ $Q(x)$ แทน $x^2 < 4$
   จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(\sim \exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]) \vee (\forall x[P(x)] \rightarrow \forall x[Q(x)])$

7. กำหนดให้ $U = \mathbb{R}$, $F(x, y) = [x^2 > y]$
   จงหาค่าความจริงของ:

   1. $\exists x \exists y\, F(x, y)$

   2. $\forall x \forall y\, F(x, y)$

   3. $\forall x \exists y\, F(x, y)$

   4. $\exists x \forall y\, F(x, y)$

   5. $\exists y \forall x\, F(x, y)$

   6. $\forall y \exists x\, F(x, y)$

8. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ กับ $\forall x[P(x)] \rightarrow \forall[Q(x)]$ เหมือนกันมั้ย? มีสมบัติการกระจายมั้ย?

9. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า p, q, r เป็นประพจน์ซึ่ง $p \rightarrow (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็นจริง
แล้ว $r \rightarrow \big[(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow r)\big]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2x + 3\}$ เมื่อ $\mathbb{R}$ คือเซตของจำนวนจริง
แล้ว $\exists x\big[3\lfloor x \rfloor + 6 = 3^{3-x}\big]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

10. กำหนดให้ P แทนประพจน์

"ถ้า $A \cup C \subset B \cup C$ แล้ว $A \subset B$ เมื่อ A, B และ C เป็นเซตใดๆ"

และให้ Q แทนประพจน์

"ถ้า $C \subset A \cup B$ แล้ว $C \subset A$ และ $C \subset B$ เมื่อ A, B และ C เป็นเซตใดๆ"

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ประพจน์ $\big[(P \vee Q) \wedge \ \sim Q\big] \leftrightarrow P$ มีค่าความจริงเป็น จริง

ข. ประพจน์ $\big[(P \rightarrow Q) \rightarrow (\sim P \wedge \neg Q)\big]$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด