TEMA 3: VARIABLES ALEATORIAS

DISCRETAS

Introducción

Variable aleatoria → f(x) q asocia un resultado a un número

$$X = \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

conjunto a nº

Número de caras en tres lanzamientos:

$X(\{H,H,H\}) = 3$

$X(HHT) = X(HTH) = X(THH) = 2$

$X(TTT) = 0$

¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 caras?

$P(x=2) = P(HHT, HTH, THH)$

$= 3/8$ ✓✓

Ventajas Variables Aleatorias

+ Ocultar espacio muestral
+ Permiten eventos más comunes, más raros, ... ⇒ distribución de probabilidades
+ Permiten movernos en espacio muestrales no numerables
  $P(\text{"medir } 1'84\text{"}) = P(184) = \frac{1}{\infty} \rightarrow$ ✗✗
+ Resolver problemas → re-usando conocimiento

distribución de X $\begin{cases} P(x) \\ F(x) \end{cases}$

F(x) de distribución ≠ ⚠

Función de probabilidad o función de masa de probabilidad $P(X=x) = p(x) = f(x)$ $\begin{cases} \bullet\ P(X=x) \geq 0 \\ \bullet\ \sum_x P(X=x) = 1 \end{cases}$

Ejercicio: Función de probabilidad

Sea la VA X: "nº de caras en n lanzamientos de una moneda cuya probabilidad de cara es p". Estudia su distribución para el caso $p = 1/2$, $n = 100$ mediante la función de probabilidad.

Ejemplo:

$n = 5$
$p = 0'3$
$x = 2$ caras

→ ¿$P(X=2)$? → $= P(\underbrace{\{HHTTT, HTHTT, \dots\}}_{\text{eventos compatibles}})$

$P(HHTTT) = P(HTHTT) = 0'3^2 \cdot 0'7^2$

⇒ Sumar tantas veces como nº eventos compatibles $(0'3)^2 \cdot (0'7)^3$

¿Cómo cuento el nº elem en ese conjunto?

• imp el orden
• hay repetición

versión 1: Mississipi $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \binom{5}{2}$

Versión 2:
1) elijo posiciones H
2) Relleno con T

1) 5 nº → elijo 2 ≠ → $\binom{5}{2}$ asignación en posición q nos da igual el orden

2) Relleno con T's $\frac{T}{1} \cdot \frac{T}{1} \cdot \frac{T}{1}$

H H T T T

$P(\{HHTTT\}) = P(H) \cdot P(H) \cdot P(T) \cdot P(T) \cdot P(T)$

$= (0'3)^2 \cdot (0'7)^2$

no imp el orden

$P(X=2) = \binom{5}{2} \cdot (0'3)^2 \cdot (0'7)^3 \longrightarrow \boxed{P(X=x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}}$

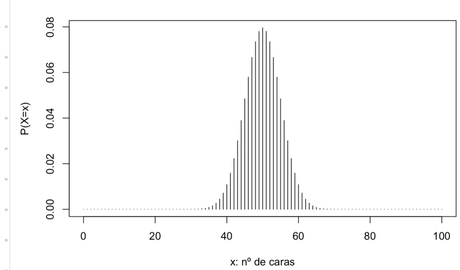
```
Sea la VA X: "nº de caras en n lanzamientos de una moneda
cuya probabilidad de cara es p". Estudia su distribución para el caso
$p=1/2$, $n=100$ mediante la función de probabilidad.

$$P(X=x) = nCx\cdot p^x \cdot (1-p)^(n-x)$$
```

$$P(X = x) = nCx \cdot p^x \cdot (1-p)^(n-x)$$

```r
p_heads = function(x , n, p){
  choose(n , x) * p ^ x * (1-p)^(n-x)
}

#calcular todas las probabilidades desde x = 0 hasta x = 100
  all_probs = p_heads(0:100 , 100, 0.5)
  plot(0:100, all_probs) #dibujar gráfica
  plot(0:100, all_probs, type = "h", xlab = "x: nº de caras" , ylab = "P(X=x)")
```



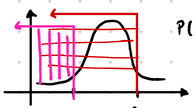
TEMA 3: VARIABLES ALEATORIAS

Distribuciones de variables aleatorias discretas

Distribución acumulada de probabilidad (o f(x) de distrib.)

$F(x) = P(X \leq x)$

a) $P(40 \leq x \leq 6)$



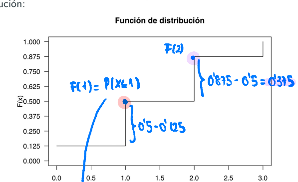
$P(40 \leq x \leq 60) = P(x \leq 60) - P(x \leq 40)$

$F(60) - F(39)$ ⚠

distribución de X $\begin{cases} P(x) \\ F(x) \end{cases}$

$\neq$ F(x) de distribución ⚠

Ejercicio: Función de distribución
Halla la función de probabilidad de X: "nº de caras en 3 lanzamientos de una moneda cuya probabilidad de cara es 0.5" a partir de la siguiente función de distribución:



$P(X \leq 1) = P(1) - P(0) = 0'5 - 0'125 = 0'375$

Hallar P(x) a partir F(x)

$P(X = x)$

$P(X=0) = 0'125$

$P(X=1) = 0'375$

$P(X=2) = 0'375$

$P(X=3) = 0'125$

+ 1 (comprobación)

Escribe una función de R para la función de distribución de la VA aleatoria X: ''nº de caras en 100 lanzamientos de una moneda cuya probabilidad de cara es 0.5". Dibújala y úsala para responder a las siguientes preguntas:

* $$ P(40 \leq X \leq 60) $$
* $$ P(40 < X < 60) $$
* $$ P(40 \leq X < 60)$$

```
```{r}
#P(40<= x <= 60) ==>>  Print(F(60)-F(39))

F_heads = function(x , n , p){
  #F(x) = P(X <= x )= sum(all P(X = x) X <= x)
  sum(p_heads(0:x,n,p))      #calcular probabildades del cero al x >>>> 0:x
}

#FUNCION NO ESTÁ BIEN VECTORIZADA
  # x = 1:2 ----> error!!
  # solución --> Vectorize::= recibe funciones y devuleve una nueva funcion vectorizada
  F_heads = Vectorize(F_heads)

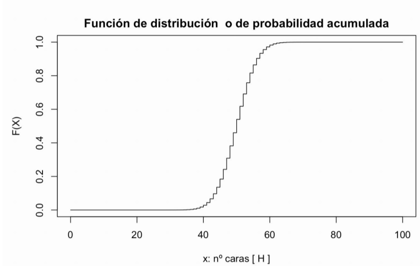
#P(40<= x <= 60)
print(F_heads(60, 100, 0.5)-F_heads(39, 100, 0.5))

#P(40 < x < 60) = F(59) - F(40)
print(F_heads(59, 100, 0.5)- F_heads(40, 100, 0.5))

#P(40<= x < 60) = F(59)-F(39)
print(F_heads(59, 100, 0.5)- F_heads(39, 100, 0.5))

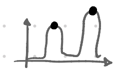
#P(X>20) = 1 - P(X <= 20) = 1 - F(20)
```

```
#GRÁFICO DE LA FUNCIÓN (solo se puede hacer si se vectoriza la f(x))
  F_values = F_heads(0:100, 100, 0.5)
  plot(0:100, F_values, )
  plot(0:100, F_values, type = "s", xlab= " x: nº caras [ H ] ", ylab = "F(X)",
      main = "Función de distribución  o de probabilidad acumulada")
```

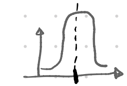


Medidas de Tendencia Central

moda: punto probabilidad máx.



Mediana: valor q separa la mitad superior de la mitad inferior



Cuantiles: generalización de la mediana ⇒ α-cuantil

valor más pequeño q deja una P(α) a su izq

Media y Mediana → resultados de nuestro experimento

moda → (puede) valores inobservables

Esperanza Matemática

$$\boxed{E[X] = \mu = \sum x_i \cdot P(X = x_i)}$$

⇒ media cuando se repite mucho un experimento

Calcula la esperanza de la variable aleatoria X:''nº de caras en 100 lanzamientos de una moneda sin trucar'' usando 1) la definición y 2) simulaciones. ¿Cuadra con tu intuición?

```
```{r}
# Resultado teórico
  #E[X] = mu = 0 * p(0) + 1*p(1) + 2*p(2) + ... +100*p(100) = sum xi * p(xi)
  #0 * p_heads (0, 100)-->  probabilidad de q salga 0 caras con 100 lanzamientos, P(cara) = 0.5
  #0*p_heads(0, 100, 0.5) + 1*p_heads(1, 100, 0.5)+...
   sum(0:100 * p_heads(0:100 , n = 100, p = 0.5))

# 2) Simulaciones
    #Opcion replicate
    replicate(100, sample(1:2, 1))
    #Opcion sample
    sample(1:2, 100, replace = "TRUE")
    #cuenta cuantos 1´s hay y cuantos 2´s
    sum(sample(0:1, 100, replace = "TRUE"))

   N = 5000
  sims =  replicate(N, {
     sum(sample(0:1, 100, replace = "TRUE"))
   })

#TEOREMA DE LOS NUMEROS GRANDES
  print(
    #sum(sims) / N
    mean(sims)  #mean implementa la media muestral
  )
```

cruces → 0's
caras → 1's
⇒ nº caras = suma

TEMA 3: VARIABLES ALEATORIAS

Medidas de Tendencia Central

Esperanza Matemática

Propiedades:

- $E[c\cdot X] = c\cdot E[X]$
- $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
- x e y son independientes:

  $E[X\cdot Y] = E[X]\cdot E[Y]$

Demostración $E[X] = n\cdot p$

nº de caras — nº caras esperado

$$E[X] = n\cdot p$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(X=x_i) = \sum x_i \cdot \binom{n}{x_i}\cdot p^{x_i}\cdot (1-p)^{n-x_i}$$

X = nº de caras en n lanzamientos

R_i = Resultado tirada nº i $\begin{cases} 0 \to T \text{ (Tail, Cruz)} \\ 1 \to H \text{ (Head, Cara)} \end{cases}$

$X = R_1 + R_2 + \dots R_n \rightarrow E[R_1] = 0\cdot p(T) + 1\cdot \underbrace{P(H)}_{p} = p$

$$E[X] = E[R_i] = E[R_1 + R_2 + \dots R_n]$$

$$= E[R_1] + E[R_2] + \dots E[R_n] = n\cdot p$$

Ley de Estadística del Inconsciente

$$E[g(x)] = \sum g(x)\cdot P(X=x)$$

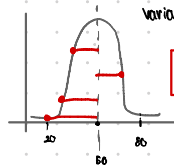
$P(-2) = 0'15$
$P(0) = 0'2$
$P(1) = 0'5$
$P(2) = 0'15$

$(-2)^2\cdot P(X=-2) + 0^2\cdot P(X=0) + 1^2\cdot P(X=1) + 2^2\cdot P(X=2)$

$\rightarrow = \sum \underbrace{x_i^2}_{g(x)}\cdot P(X=x_i)$

¿Esperanza $Y = X^2$?

Varianza



varianza: distancia de un punto al centro

$$\boxed{V[X] = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot P(X=x_i)}$$

$$V[X] = E[(X-\mu)^2]$$

revisar

σ^2

Propiedades

- $Var[X] = E[X^2] - \mu^2$
- $Var[c\cdot X] = c^2\, Var[X]$
- X e Y ⇒ son independientes:

  $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$

  $Var[X-Y] = Var[X] + Var[Y]$

Demostraciones!!

NO caen en el examen

$$Var[X+Y] = E[X+Y - E[X+Y]^2]$$

$V[X] = [(X - E[X])^2]$

$$= E[(X+Y - (E[X]+E[Y]))^2]$$

$$= E[(X+Y - E[X] - E[Y])^2]$$

$$= E[((X-E[X]) + (Y-E[Y]))^2]$$

desarrollamos $(\ \ )^2$

$$= E[(X-E[X])^2 + 2\cdot[X-E[X]]\cdot[Y-E[Y]] + (Y-E[Y])^2]$$

$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
$E[c\cdot X] = c\cdot E[X]$

$$= \underbrace{E[(X-E[X])^2]}_{Var[X]} + \underbrace{2\cdot E[[X-E[X]]\cdot[Y-E[Y]]]}_{\text{si X e Y son indep} = 0} + \underbrace{E[(Y-E[Y])^2]}_{Var[Y]}$$

$\hookrightarrow Var[X] + Var[Y]$ c.q.d

$$Var[X-Y]$$

$V[X] = [(X - E[X])^2]$

$$= E[(X-Y - (E[X-Y]))^2]$$

$$= E[(X-Y - (E[X] - E[Y]))^2]$$

$$= E[(X-Y - E[X] + E[Y])^2]$$

$$= E[((X-E[X]) + (-Y+E[Y]))^2]$$

desarrollamos $(\ \ )^2$

$$= E[(X-E[X])^2 + 2\cdot[X-E[X]]\cdot[-Y+E[Y]] + (-Y+E[Y])^2])$$

$$= E[(X-E[X])^2] + 2\cdot E[[X-E[X]]\cdot[-Y+E[Y]]] + E[(-Y+E[Y])^2]$$

Preguntar a Tino!!

TEMA 3: VARIABLES ALEATORIAS

Medidas de Tendencia Central

Desviación Típica

Dispersión → $Var[X] = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2]$ cm²

Desv. Típica → $\sigma = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{E[(X-\mu)^2]}$ cm

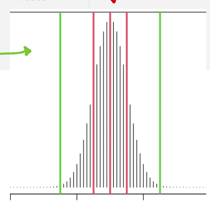
Calcula la varianza y la desviación típica de la variable aleatoria X: "nº de caras en 100 lanzamientos de una moneda sin trucar" usando 1) la definición y 2) simulaciones. Visualiza la desviación típica sobre la función de probabilidad

```r
#1) DEFINICIÓN:
  # Var[X] = sum (x_i - \mu)^2 * P(X=xi)
  # VAR[X] = (0 - mu)^2 * P(X = 0) + (1 -mu)^2 * P(X=1) + ... (mu = 50, calculado antes)
  # E[X] = sum(0:100 * p_heads(0:100 , n = 100, p = 0.5))
     var_heads = sum(
       (0:100 - 50)^2 * p_heads(0:100, 100, 0.5)
       )
      print(var_heads)        ----> [1] 25

  #desviación típica (√varianza)
      sd_heads = sqrt(var_heads)
      print(sd_heads)         ---> [1] 5

  #VISUALIZACIÓN
      plot(0:100 , p_heads(0:100, 100, 0.5), type = "h")  # f(x) de probabilidad
      #pintar desviación típica:
      abline(v = 50 , col = 2, lwd = 3) # dibuja linea vertical en el 50 (lwd = line width)
      abline( v = 50 - sd_heads , col = 2, lwd = 3)   #me muevo izq tantas veces como me diga la desviación
      abline( v = 50 + sd_heads , col = 2, lwd = 3)   # me muevo a la dcha

      #(3 a la izqe y 3 a la dcha cubre el 99% de los casos)
      abline( v = 50 - 3 *sd_heads , col = 3, lwd = 3)
      abline( v = 50 + 3 *sd_heads , col = 3, lwd = 3)
```




```r
# 2) SIMULACIONES
    N = 5000
    xs = replicate ( N , {
       sum(sample(0:1, replace = "TRUE", 100)) #sumila resultado aleatorio, lanzar 100 veces moneda
    })
    sum(xs)/N  #E[X]===> generar mazo xs, mean(xs)
    mean((xs -50)^2) #Var[x] ===> generar xs, generar la cantidad q m interesa((xs - mu)^2), hacer mean de eso
```

[1] 24'71

Distribuciones de Probabilidad Conjunta

$P(X=x, Y=y) = p(x,y) = f(x,y)$ $\begin{cases} \bullet\ p(x,y) \geq 0 \\ \bullet\ \sum_x \sum_y p(x,y) = 1 \end{cases}$

Ejercicio: Distribuciones conjuntas

Se lanza una moneda n veces (prob. de cara es p). Considera las VAs X: "nº de caras" e Y: "nº de caras iniciales (antes de la primera cruz o del fin del experimento)". Halla la distribución conjunta para cualquier n y p y luego particulariza para $n = 4, p = 0.5$.

X = nº Caras
Y = nº caras iniciales

→ HTHH $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

5 lanzamientos

$\underline{H}\ \underline{T}\ \underbrace{\_\ \_\ \_}_{2H}$ ⇒ ¿Cuántas formas puedo poner 2H en 3 huecos? ⇒ $\binom{3}{2}$

$P(HTHHT) = P(H) \cdot P(T) \cdot P(H) \cdot P(H) \cdot P(T) = P(H)^3 \cdot P(T)^2$

$P(HT\ HTH) =$

$P(HT\ THT) =$

$P(X=3, Y=1) = \binom{3}{2} \cdot p^3 \cdot (1-p)^2$ //

Fórmula General

$\underset{1}{\underline{H}}\ \underset{2}{\underline{H}}\ \underset{3}{\underline{T}} \ldots \underset{n}{\underline{\ \ }}$

X, $y+1$, $x-y$

$n-(y+1)$: Posiciones q me quedan

$(x-y)$: El resto de las H's

$$P(X=x, Y=y) = \underbrace{\binom{n-(y+1)}{(x-y)}}_{\text{nº casos}} \cdot \underbrace{p^x \cdot (1-p)^{n-x}}_{\text{probabilidad}}$$ si $y \neq n$

$y = n$ → Probabilidad TODO H = p^n si $y = n$

TEMA 3: VARIABLES ALEATORIAS

Ejercicio: Distribuciones conjuntas

Se lanza una moneda n veces (prob. de cara es p). Considera las VAs X: "nº de caras" e Y: "nº de caras iniciales (antes de la primera cruz o del fin del experimento)". Halla la distribución conjunta para cualquier n y p y luego particulariza para $n = 4, p = 0.5$.

```r
#FÓRMULA EN R
p_xy = function(x, y, n, p){
  if(y != n){
  choose(n-(y+1), (x-y)) * p^x * (1-p)^(n-x)
  }else{
  p^n
  }
}
```

↳ x= 1:100 NO funciona

Necesitamos vectorizar la función ⇒ $\boxed{\text{Ifelse( )}}$

ifelse (c ("TRUE", "False", "TRUE") , c (1,2,3), c(-1,-2,-3))

- Si encuentra un true ⟶ 1,2 ó 3
- Si encuentra un False ⟶ -1,-2 ó -3

[1] 1 -2 3

- No tiene en cuenta que el "y" no tiene = longitud que "x" ⟶ cond: y = n y x = n

```r
  p_xy = function(x, y, n, p){
 ifelse( ((y == n) & (x==n)), p^n, choose(n-(y+1), (x-y)) * p^x * (1-p)^(n-x) )
}
```

```r
#genero una tabla de 5x5
   x = 0:4
   y = 0:4
   pv = outer(x, y, p_xy, n=4, p=0.5)
   rownames(pv) = paste("X =" , x, ">>") #nombre para filas
   colnames(pv) = paste("Y =" , y) #nombre columnas
   pv
   #comprobación: si sumo todas da uno
   sum(pv)
```

$\boxed{\text{outer}}$

genera la tabla

llama f(x) para todas las x's e y's

Distribución Marginal

$$P(X=x) = p(x) = \sum_y p(x,y)$$

	X = 0	X = 1	X = 2	X = 3	X = 4
Y = 0	0.0625	0.1875	0.1875	0.0625	0.0000
Y = 1	0.0000	0.0625	0.1250	0.0625	0.0000
Y = 2	0.0000	0.0000	0.0625	0.0625	0.0000
Y = 3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0625	0.0000
Y = 4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0625

$P(X=1) = 0'1875 + 0'0625$

```r
#DISTRIBUCIÓN MARGINAL
   #P(X=0), P(X=1),...
   pv_x = rowSums(pv)
   #P(Y=0), P(Y=1),...
   pv_y = colSums(pv)

   #Esperanza variable X: E[X] = sum(x * P(X=x))
  sum( pv_x * x)
```

Distribuciones CONDICIONALES

En una urna hay dos monedas trucadas con probabilidad de cara $p_0 = 0.4$ y $p_1 = 0.6$. Se elige una al azar y se tira 100 veces. Sea X: "nº de caras obtenidas" e Y: "moneda elegida". Obtener la función de probabilidad de X.

```r
#¿P(X = x)?
  #si tengo info. extra ==> probabilidad condicionada
    #si sé q moneda es p0 --> P(X=x | Y=0)
    p_head_cond_y0 = function(x) p_heads(x , 100, p=0.4)
    #P(X=x | Y=0¡1)
    p_head_cond_y1 = function(x) p_heads(x , 100, p=0.6)
```

¿P(X=x)? ⇒ Calculamos P(x,y) y luego Marginalizamos

$$P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} \Rightarrow P(X=x \mid Y=y) \cdot P(Y=y) = P(X=x, Y=y)$$

```r
p_xy = function(x,y){
 ifelse(( y==0) , p_head_cond_y0(x) * 0.5, p_head_cond_y1(x) * 0.5)
}
```

$P(X=x \mid Y=0) \cdot P(Y=0)$ $\quad$ $P(X=x \mid Y=0) \cdot P(Y=1)$

1) CREAMOS TABLA

```r
x = 0:100
y = 0:1
 pv_xy = outer(x, y, p_xy) #genera tabla
  rownames(pv_xy) = paste("X =" , x)
  colnames(pv_xy) = paste("Y =" , y)
  pv_xy
```

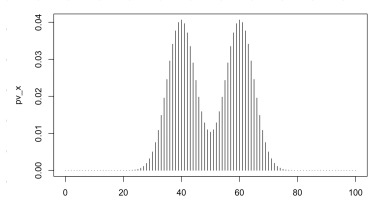
Estadístico Más adecuado para estudiar distribuciones bimodales ⇒ Moda

2) MARGINALIZAMOS ⤳ P(X=x)

```r
pv_x = rowSums(pv_xy)
pv_y = colSums(pv_xy)
```

3) DIBUJAMOS GRÁFICA

```r
plot(x, pv_x, type="h")
```



TEMA 3: VARIABLES ALEATORIAS

Covarianza y Correlación

Teorema del Estadístico inconsciente:

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \sum_{x,y} g(x,y)p(x,y)$$

Ejercicio:
Sea X: "Cantidad mensual de lotes comprados por una empresa a su proveedor" e Y: "Precio por lote ofertado por el proveedor (en miles de euros)". La distribución conjunta de ambas variables se recoge en la siguiente tabla:

	x=1	x=2	x=3	x=4
y=1	0.00	0.00	0.03	0.18
y=1.5	0.00	0.04	0.24	0.02
y=2	0.02	0.23	0.04	0.00
y=2.5	0.16	0.04	0.00	0.00

¿Cuál es el coste esperado para la empresa en el siguiente mes de actividad?

$E[C] \rightarrow C = X \cdot Y$ $\rightarrow E[XY] = (X=1 \cdot Y=1) \cdot P(X=1, Y=1) + (X=1 \cdot Y=2) \cdot P(X=1, Y=1) + \dots$

X: compro x productos; Y: a y precio cada uno

$1 \cdot 0.00 \quad 2 \cdot 0.00$

```
# E[XY]
# 1) listar todos los posibles resultados x*y
  x=1:4
  y= c(1, 1.5, 2, 2.5)
# 2) Tabla--> x*y
```

prob

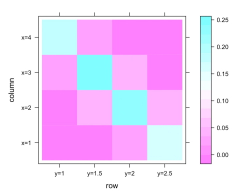
outer (x, y) → La X varía por fila

outer (y, x) → La Y varía por filas • nuestro caso

```
coste_esperado = sum(outer(y,x) * probs)
print(coste_esperado)
```

visualizar Matriz:

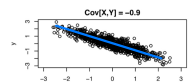
```
lattice::levelplot(probs)
```



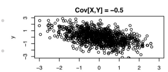
Covarianza: Estudia cómo varía X con Y

$$\boxed{\sigma_{xy} = Cov[X,Y] = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]}$$

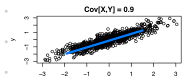
2 Problemas:
- Δ con la varianza de X e Y
- Sólo captura relaciones lineales



Relación Fuerte (≈ línea)
$\Delta x \rightarrow \nabla y$



Relación no fuerte (no se parece línea)



$\Delta x \rightarrow \Delta y$
Fuerte

Propiedades:

1.) $\sigma_{xy} = Cov[X,Y] = E[XY] - \mu_x \cdot \mu_y$

2.) X e Y son indep.:
$\sigma_{xy} = 0$ y $\rho = 0$

3.) $Var[X \pm Y] = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \pm 2\sigma_{xy}$

4.) $-1 < \rho < 1$

Correlación: $\rho = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \rightarrow -1 < \rho < 1$

- Si $\rho = 0 \Rightarrow$ INCORRELADAS
- Correlación ⇒ Medida de la dependencia lineal entre X e Y

- ρ no implica independencia

Calcula la correlación entre X e Y en el problema de la empresa y el proveedor.

```
#Queremos calcular la CORRELACIÓN

  E_xy = coste_esperado #(E[XY])
  p_x = colSums(probs)  #Marginalizamos --> P(X=x)
  mu_x = sum(x * p_x) #calculamos la media
  E_x2 = sum(x^2 * p_x) #E[X^2] --> T. del estad.inconsciente
  var_x = E_x2 - mu_x^2 #Varianzaza[X]
  sd_x = sqrt(var_x) #Desviación Típica

  #Estadísticos de Y
  p_y = rowSums(probs)
  mu_y = sum( y * p_y)
  E_y2 = sum(y^2 * p_y)
  var_y= E_y2 - mu_y^2
  sd_y = sqrt(var_y)

  sigma_xy = E_xy - mu_x * mu_y
  rho = sigma_xy / (sd_x * sd_y)
  print(rho) #rho negativo --> cuanto más compras, mejor precio
```

```
      x=1  x=2  x=3  x=4
y=1   0.00 0.00 0.03 0.18
y=1.5 0.00 0.04 0.24 0.02
y=2   0.02 0.23 0.04 0.00
y=2.5 0.16 0.04 0.00 0.00
[1] -0.9090299
```