TEMA 3: VARIABLES ALEATORIAS II

CONTINUAS

Variables Aleatorias Continuas: Introducción

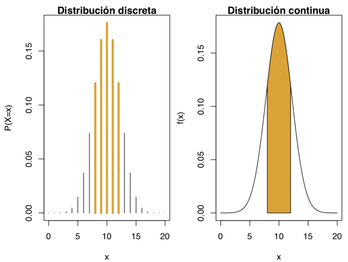
Todos nuestros preguntas deben de hacer ref. a Intervalos

$\Sigma \rightsquigarrow \int$

$$P(a \le X \le b) = \sum_{x_i: a \le x_i \le b} P(X = x_i) \Rightarrow P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

Prob de masa

densidad de masa



Función de Densidad de Probabilidad

F(x) de densidad acumulada = $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \cdot dt$

```r
  f= function(t){
    exp(-t/4.5)
  }
integral_result = integrate(f, 0, Inf) # 0 a infinito
print(integral_result)

integral_result$value #puedo averiguar muchos datos de la integral ($)
```

Un call-center recibe llamadas durante todo el día. El tiempo T (en minutos) entre llamadas se modela la siguiente función de densidad.

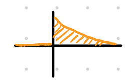
$$f(x) = \begin{cases} c \cdot e^{-t/4.5} & 0 \le t < \infty \\ 0 & \text{en otro caso (e.o.c.)} \end{cases}$$

1. Dibuja la función de densidad.

$P(X=x) \rightsquigarrow f(t)$

- $P(x) \ge 0 \rightsquigarrow$ • $f(t) \ge 0$
- $\sum P(X=x) = 1$ • $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot dt = 1$

$0 + \int_0^{\infty} c \cdot e^{-t/4'5} \cdot dt$



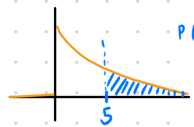
$6 = 1$

$c \cdot \int_0^{\infty} e^{-t/4'5} = 1 \rightsquigarrow c = 1/4'5$

Wolfram Alpha ⇒ Calcula Integrales

2. Acaba de llegar una llamada. ¿Cuál es la probabilidad de que no se reciba ninguna llamada en los próximos 5 minutos?

$P(T \ge 5) = P(T > 5)$



$P(T>5) = \int_5^{\infty} \frac{1}{4'5} \cdot e^{-t/4'5} \cdot dt$

Ejercicio: Función de distribución

Calcula la función de distribución de la VA T y dibújala. Usa la función de distribución para calcular la probabilidad de que el tiempo entre dos llamados sea entre 2 y 3 minutos.

```r
#Función de densidad
  f= function(t){
     (1/4.5) * exp(-t/4.5) # intregral c * f ==> c = 1/f
  }
#Función de Distribución
  FF = function(t) {
    integrate(f, 0, t)$value # -Inf a 0 --> es 0 // de 0 a t --> integral
  }
  FF(10000)
  #P(2<x<3) = integral (f, 2, 3) ==> (con la f(x) de densidad)
  #F(3) - F(2) ==> con la f(x) de distribución
  print(FF(3)-FF(2))
```

media $= \int t \cdot \boxed{}$

ejemplo

media $= \int_0^{\infty} t \cdot f(t)$

$c \cdot e^{-t/4,5}$

$Var[X] = E[X^2] \cdot mu^2$

mu$value ^ 2

$\int_0^{\infty} t^2 * f(t)$

TEMA 3: VARIABLES ALEATORIAS II

Probabilidades de dos o más dimensiones

Ejercicio: Distribuciones conjuntas
La distribución de X e Y viene dada por:

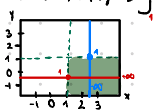
$$f(x) = \begin{cases} ce^{(-x^2)}e^{(-2y^2)} & -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

→ calculo constante $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx = 1$

Visualiza la función de densidad y calcula (a) $P(X > 1, Y < 1)$; (b) $P(X < Y)$

$P(X>1, Y<1) \rightarrow \int_1^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{1} f(x,y)\,dy\right]dx$

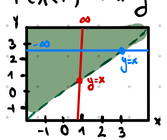
Fijo x Fijo Y



```
integrate2_dydx(
  f,
  from_x = , to_x,
  from_y = function(x), to_y = funtion(x)
  #los limites deben ser en función de x
)

#Función de Densidad
  fu = function(x,y){     #--> función sin la cte c
    exp(-x^2 - 2*y^2)
  }

  #integral c * fu = 1 ==> c = 1/integral fu
  almost_cte = integrate2_dydx(
    fu,
    from_x = -Inf , to_x= Inf,
    from_y = function(x) -Inf, to_y = function(x)Inf

  )
```

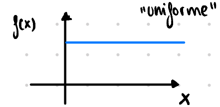
```
  cte = 1/almost_cte$value

  f = function(x,y) cte * fu(x,y)

# a) P(X>1, Y<1)
  integrate2_dydx(
  f,
  from_x = 1, to_x = Inf,
  from_y = function(x) -Inf , to_y = function(x) 1
)

# b) P(X<Y)
  integrate2_dydx(
  f,
  from_x = -Inf, to_x = Inf,
  from_y = function(x) x , to_y = function(x) Inf
)
```

$P(X<Y) \rightarrow x=y$



$\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{x}^{\infty} f(x,y)\cdot dy\right]dx$

Ejercicio: Probabilidad geométrica
Dos personas acuerdan encontrarse entre las 12:00 y las 12:30 con la condición de que nadie esperará más de 5 minutos por el otro. La probabilidad de que llegada para cada persona es ~~uniforme~~ entre las 12:00 y las 12:30. ¿Probabilidad de que se encuentren?

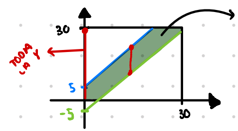


$f(x)\begin{cases} c & 0<x<y<30 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

Calcular c: $\int f(x)\cdot dx = 1$ $\int_0^{30} c\cdot dx = 1$; $c\cdot x\Big|_0^{30} = 30c$

$30\cdot c = 1 \rightsquigarrow \boxed{c = \frac{1}{30}}$

Asumiendo Indep
↓
$f(x,y) = f(x)\cdot f(y) = \begin{cases} \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{30} & 0<x<y<30 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$



$\int_0^{30}\int_{x-5}^{x+5} f(x,y)\,dy\,dx$

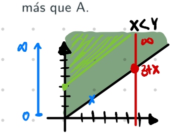
$P(|x-y|<5) = \begin{cases} x-y<5 \rightarrow x=5+y \\ y-x<5 \rightarrow x=-5+y \end{cases}$

```
f = function(x, y) {
  ifelse(
    (x > 0) & (x < 30) & (y > 0) & (y < 30),
    1 / 900,
    0
  )
}

integrate2_dydx(
  f,
  from_x=0, to_x=30,
  from_y = function(x) x - 5,
  to_y = function(x) x + 5
)
```

Ejercicio:
Supón que un ordenador depende de los componentes A y B, cuyas vidas respectivas X e Y se distribuyen conjuntamente con la función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

1. Calcula la probabilidad de que B dure al menos tres unidades de tiempo más que A.



$P(Y > 3+X)$

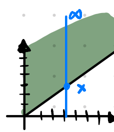
$\int_0^{\infty}\int_{3+x}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx$

```
#Función de densidad
  f = function(x,y){
    ifelse((y>x) & (x > 0) ,
          exp(-y),
          0)
  }
f(4,5)

#Integral
 integrate2_dydx(
    f,
    from_x= 0, to_x= Inf,
    from_y=function(x) 3 +x , to_y= function(x) Inf
  )$value
```

3. Calcula las funciones de densidad marginales.

$P(X,Y) \rightarrow P(X)$

	Y=0	Y=1
X=0	0'3	0'3
X=1	0'4	0



$\int_x^{\infty} f(x)\cdot dx$

```
#Función Marginal de X
  f_x = function(xv){
    #f(x,y)
    integrate(f , xv , Inf, x=xv)$value #Dejo fijo x para calcular integral de y
  }

  f_x = function(xv){
    exp(-xv-3) #si calculamos la integral con WA y sustituir
  }

#Visualizarlo
  f_x= Vectorize(f_x)
  eje_x = seq(1,10, by = 0.001)  #para q sea mas exacto
  plot(eje_x, f_x(eje_x), type="l")
```

TEMA 3: VARIABLES ALEATORIAS II

Ejercicio:
Supón que un ordenador depende de los componentes A y B, cuyas vidas respectivas X e Y se distribuyen conjuntamente con la función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

5. Calcula la función de densidad condicional para Y si sabemos que A ha durado 5 unidades de tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que B dure entre entre 4 y 7 unidades de tiempo si A ha durado 5 unidades de tiempo?

$$P(Y \mid X=5) = \frac{f(5,y)}{f_x(5)}$$

```
f_y_given_x5 = function(y){
  f(5,y)/f_x(5)
}

integrate(f_x(5), -Inf, Inf)
#integral doble debe dar f(5,y)  = 1
#integral simple f_x(5)= 1

eje_y = seq(0,10,by=0.1)
plot(eje_y, f_y_given_x5(eje_y))
#y>5 para que la probabilidad no sea nula
```

4. Calcula la función de densidad condicional para X si sabemos que B ha durado 5 unidades de tiempo.

2. Calcula la probabilidad de A y B duren ambos más de 2 unidades de tiempo.