

Sprawozdanie z laboratorium: Interpolacja wielomianowa populacji USA

Patryk Blacha, Radosław Szepielak

22 marca 2025

Spis treści

1	Wprowadzenie	2
2	Metodologia	2
2.1	Dane wejściowe	2
2.2	Etapy realizacji	2
3	Wyniki	2
3.1	Współczynniki uwarunkowania	2
3.2	Ekstrapolacja na rok 1990	2
4	Wizualizacja	3
5	Wnioski	4

1 Wprowadzenie

Celem laboratorium było przeprowadzenie interpolacji danych o populacji USA w latach 1900-1980 z wykorzystaniem różnych baz wielomianowych oraz ekstrapolacji do roku 1990. Zastosowano metody Hornera, Lagrange’a oraz Newtona. Przeprowadzono także analizę wpływu zaokrąglenia danych na wyniki interpolacji i ekstrapolacji.

2 Metodologia

2.1 Dane wejściowe

Dane historyczne populacji USA w latach 1900-1980:

- Lata: 1900, 1910, ..., 1980
- Populacja: od 76, 212, 168 do 226, 542, 199

2.2 Etapy realizacji

1. Tworzenie macierzy Vandermonde’a dla różnych baz:

- $j(t) = t^{j-1}$
- $j(t) = (t - 1900)^{j-1}$
- $j(t) = (t - 1940)^{j-1}$
- $j(t) = \left(\frac{t-1940}{40}\right)^{j-1}$

2. Obliczenie współczynników uwarunkowania.

3. Rozwiązanie układu równań dla najlepiej uwarunkowanej bazy.

4. Implementacja wielomianu w metodach Hornera, Lagrange’a oraz Newtona.

5. Analiza wyników ekstrapolacji dla roku 1990.

6. Analiza wpływu zaokrąglenia danych.

3 Wyniki

3.1 Współczynniki uwarunkowania

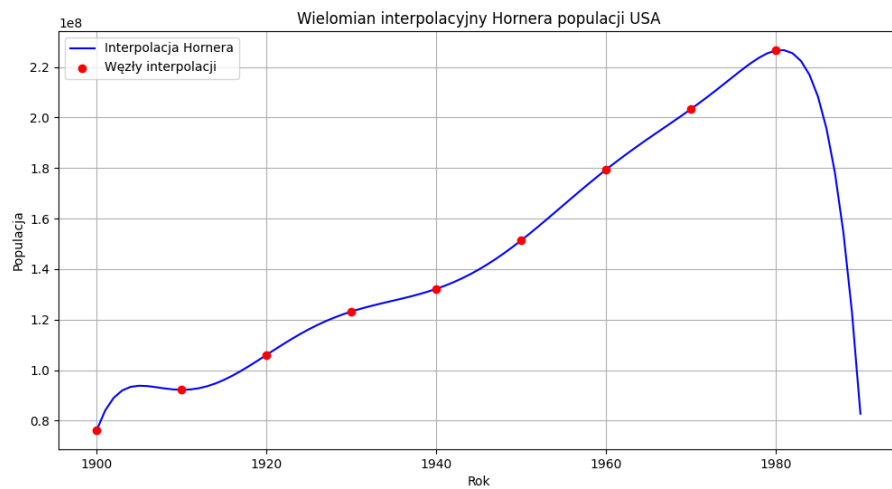
```
1 Wsp  czynniki uwarunkowania macierzy Vandermondea dla r  nych baz:
2 j(t) = t^(j-1): 5.11e+26
3 j(t) = (t - 1900)^(j-1): 6.31e+15
4 j(t) = (t - 1940)^(j-1): 9.32e+12
5 j(t) = ((t - 1940) / 40)^(j-1): 1.61e+03
6 Najlepiej uwarunkowana baza: j(t) = ((t - 1940) / 40)^(j-1) (Wsp  czynnik: 1.61e+03)
```

Listing 1: Wyniki współczynników uwarunkowania

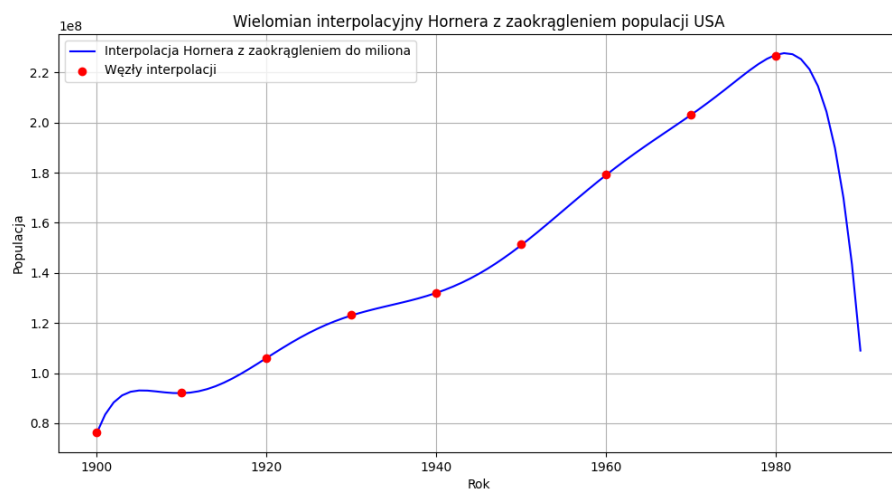
3.2 Ekstrapolacja na rok 1990

- Przewidywana populacja (Horner): 82, 749, 141
- Błąd względny: 66.73%
- Przewidywana populacja (zaokrąglone dane): 109, 000, 000
- Błąd względny: 56.17%
- Wartość rzeczywista: 248, 709, 873

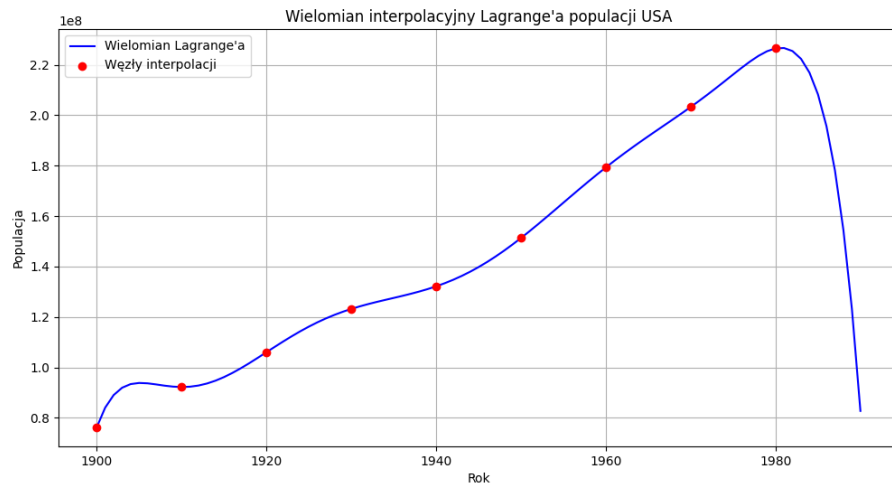
4 Wizualizacja



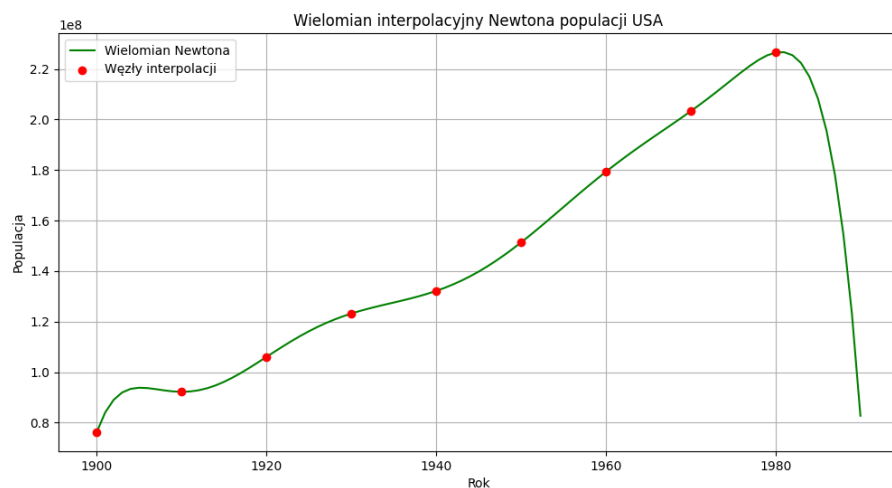
Rysunek 1: Interpolacja Hornera dla populacji USA



Rysunek 2: Interpolacja Hornera z zaokrągleniem



Rysunek 3: Interpolacja Lagrange'a dla populacji USA



Rysunek 4: Interpolacja Newtona dla populacji USA

5 Wnioski

- **Wybór odpowiedniej bazy** znacząco poprawia stabilność numeryczną. Baza $j(t) = \left(\frac{t-1940}{40}\right)^{j-1}$ skaluje lata do mniejszych wartości, co zmniejsza zakres liczbowy macierzy Vandermonde'a i poprawia jej uwarunkowanie.
- **Porównanie metod interpolacji:**
 - Wielomian Hornera, Lagrange'a i Newtona dają identyczne wyniki, ponieważ obie metody są matematycznie równoważne (ten sam wielomian, różne sposoby zapisu, ewentualne błędy operacji arytmetyki komputerowej i reprezentacji liczb zmiennoprzecinkowych).
 - Schemat Hornera jest efektywny numerycznie i pozwala na szybkie obliczanie wartości wielomianu.
 - Metoda Lagrange'a i Newtona są bardziej złożone, ale równie dokładne.
- **Ekstrapolacja do roku 1990:**

- Ekstrapolowana populacja w 1990 roku wyniosła **82 749 141**, podczas gdy prawdziwa wartość to **248 709 873**.
- Błąd względny ekstrapolacji wyniósł **66.73%**, co wskazuje na dużą niedokładność wynikającą z ekstrapolacji wielomianem wysokiego stopnia.

- **Zaokrąglenie danych do jednego miliona:**

- Po zaokrągleniu danych do jednego miliona ekstrapolowana populacja w 1990 roku wyniosła **109 000 000**.
- Błąd względny zmniejszył się do **56.17%**, ale nadal jest znaczny.
- Współczynniki wielomianu interpolacyjnego zmieniły się po zaokrągleniu danych, co wpłynęło na dokładność wyników (ze względu na lepszą stabilność numeryczną).

- **Problemy z ekstrapolacją:**

- Ekstrapolacja wielomianem wysokiego stopnia (8. stopnia) poza zakres danych (1900–1980) prowadzi do dużych błędów. Wynika to z faktu, że wielomiany wysokiego stopnia są bardzo wrażliwe na zmiany w danych, szczególnie poza zakresem interpolacji.

- **Wpływ zaokrąglenia danych:**

- Zaokrąglenie danych do jednego miliona wprowadziło dodatkowe błędy, ale jednocześnie nie wpłynęło na zmianę współczynnika uwarunkowania, ponieważ ten wyznaczany jest na podstawie macierzy Vandermonde'a, a ta zależy od funkcji bazowej i lat, a nie od populacji.
- Współczynniki wielomianu interpolacyjnego zmieniły się po zaokrągleniu danych, ale nieznacznie. Wynika to z faktu, że zaokrąglenie danych wprowadza niewielkie zmiany w wartościach węzłów interpolacji.