

Sprawozdanie z równań różniczkowych zwyczajnych

Autorzy: Patryk Blacha, Radosław Szepielak

Zadanie 1

W tym zadaniu celem było przekształcenie trzech równań różniczkowych wyższego rzędu do postaci układów równań pierwszego rzędu. Jest to standardowa procedura pozwalająca zastosować metody numeryczne takie jak np. metoda Eulera czy Rungego-Kutty.

(a) Równanie Van der Pola

Dana postać:

$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

Wprowadzamy nowe zmienne:

$$y_1 = y, \quad y_2 = y'$$

Wówczas układ równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_2(1 - y_1^2) - y_1 \end{cases}$$

(b) Równanie Blasiusa

Dana postać:

$$y''' = -yy''$$

Wprowadzamy nowe zmienne:

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y''$$

Układ równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -y_1 y_3 \end{cases}$$

(c) Problem dwóch ciał (II zasada dynamiki Newtona)

Dana postać:

$$\begin{cases} y_1'' = -\frac{GM y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}} \\ y_2'' = -\frac{GM y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Wprowadzamy nowe zmienne:

$$y_3 = y'_1, \quad y_4 = y'_2$$

Układ równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} y'_1 = y_3 \\ y'_2 = y_4 \\ y'_3 = -\frac{GM y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}} \\ y'_4 = -\frac{GM y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Zadanie 2

Cel zadania

Przekształcenie nieautonomicznego problemu początkowego do postaci autonomicznej poprzez eliminację jawnej zależności od zmiennej t .

Dane wejściowe

$$\begin{cases} y'_1 = \frac{y_1}{t} + y_2 t \\ y'_2 = \frac{t(y_2^2 - 1)}{y_1} \\ y_1(t_0) = y_{10} \\ y_2(t_0) = y_{20} \end{cases}$$

Rozwiązanie

1. Wprowadzamy nową zmienną $y_3 = t$ z pochodną $y'_3 = 1$.
2. Rozszerzony układ autonomiczny:

$$\begin{cases} y'_1 = \frac{y_1}{y_3} + y_2 y_3 \\ y'_2 = \frac{y_3(y_2^2 - 1)}{y_1} \\ y'_3 = 1 \end{cases}$$

3. Pełne warunki początkowe:

$$\begin{cases} y_1(t_0) = y_{10} \\ y_2(t_0) = y_{20} \\ y_3(t_0) = t_0 \end{cases}$$

Wnioski i podsumowanie

- **Przekształcenie:** Wprowadzenie dodatkowej zmiennej $y_3 = t$ pozwoliło skutecznie wyeliminować jawną zależność od czasu, przekształcając problem nieautonomiczny w autonomiczny, tę technikę stosuje się standardowo w analizie układów dynamicznych. Układ, który otrzymaliśmy jest teraz autonomiczny - prawe strony zależą tylko od y_1, y_2, y_3
Główną zaletą postaci autonomicznej jest to, że upraszcza implementację numeryczną (jednolita struktura równań)
- **Warunki początkowe:** Zachowanie zgodności wymagało rozszerzenia warunków początkowych o $y_3(t_0) = t_0$. Pełny wektor początkowy ma teraz postać (y_{10}, y_{20}, t_0) .
- **Ograniczenia i konsekwencje takiego podejścia:**
 - Zwiększenie wymiaru układu (z 2D na 3D) podnosi koszt obliczeniowy
 - Dla metod numerycznych krok całkowania h musi uwzględniać dynamikę wszystkich trzech zmiennych
 - Analiza stabilności musi brać pod uwagę nową postać Jacobianu

Zadanie 3

Rozważmy problem początkowy:

$$y' = \sqrt{1 - y}, \quad y(0) = 0$$

Podana funkcja:

$$y(t) = \frac{t(4 - t)}{4}$$

Sprawdźmy, czy spełnia dane równanie różniczkowe oraz warunek początkowy.

Sprawdzenie warunku początkowego

Podstawiamy $t = 0$ do $y(t)$:

$$y(0) = \frac{0 \cdot (4 - 0)}{4} = 0$$

Zatem warunek początkowy jest spełniony.

Sprawdzenie równania różniczkowego

Liczymy pochodną funkcji:

$$y(t) = \frac{4t - t^2}{4} \Rightarrow y'(t) = \frac{4 - 2t}{4} = 1 - \frac{t}{2}$$

Obliczmy prawą stronę równania:

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - y(t)} &= \sqrt{1 - \frac{t(4 - t)}{4}} = \sqrt{1 - \left(\frac{4t - t^2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4 - 4t + t^2}{4}} = \sqrt{\left(1 - \frac{t}{2}\right)^2} \\ &= \left|1 - \frac{t}{2}\right|\end{aligned}$$

Zatem:

$$y'(t) = 1 - \frac{t}{2} = \sqrt{1 - y(t)} \quad \text{gdy} \quad 1 - \frac{t}{2} \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 2$$

Wnioski

- Funkcja $y(t) = \frac{t(4-t)}{4}$ spełnia zarówno równanie różniczkowe jak i warunek początkowy dla $t \in [0, 2]$.
- Dla $t > 2$ prawa strona równania różniczkowego daje wartość ujemną pod pierwiastkiem, co powoduje rozbieżność z wyrażeniem $y'(t)$.

Dziedzina rozwiązania: Rozwiązanie jest poprawne dla $t \in [0, 2]$. W tym przedziale pochodna $y'(t)$ jest równa $\sqrt{1 - y(t)}$, ponieważ $1 - \frac{t}{2} \geq 0$, co zapewnia zgodność ze znakiem pierwiastka.

Zadanie 4

Dane jest równanie różniczkowe:

$$y' = -5y, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.5 \tag{1}$$

(a) Analityczna stabilność

Rozwiązanie ogólne:

$$y(t) = Ce^{-5t}, \quad C = 1 \Rightarrow y(t) = e^{-5t} \tag{2}$$

Funkcja $y(t)$ maleje wykładniczo do zera, więc rozwiązanie jest stabilne — perturbacje w danych początkowych zanikają z czasem.

Wniosek: Równanie jest analitycznie stabilne.

(b) Zbieżność metody Eulera

Metoda Eulera:

$$y_{n+1} = y_n + h(-5y_n) = y_n(1 - 5h) \quad (3)$$

Zatem:

$$y_n = y_0(1 - 5h)^n \quad (4)$$

Porównujemy z dokładnym rozwiązaniem $y(t) = e^{-5t}$, przy $t = nh$:

$$\lim_{h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, nh=t} (1 - 5h)^n = e^{-5t} \quad (5)$$

co wynika z granicy:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 - 5h)^{\frac{1}{5h}} = e^{-1} \quad (6)$$

Wniosek: Metoda Eulera jest zbieżna.

(c) Numeryczna stabilność

Metoda Eulera dla $y' = \lambda y$ jest stabilna, gdy:

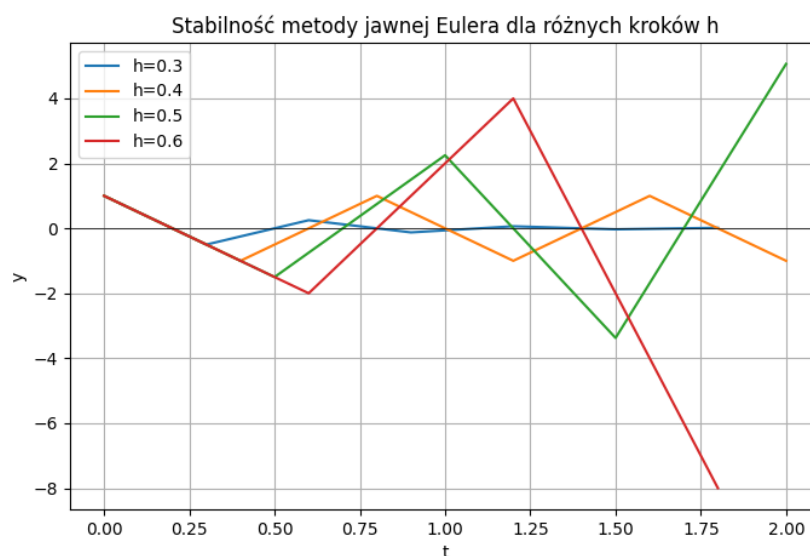
$$|1 + h\lambda| < 1 \quad (7)$$

Dla $\lambda = -5$:

$$|1 - 5h| < 1 \Rightarrow h < 0.4 \quad (8)$$

Dla $h = 0.5 > 0.4$ metoda jest niestabilna.

Wniosek: Metoda Eulera jest niestabilna numerycznie dla $h = 0.5$, co potwierdzają wyniki numeryczne.



Rysunek 1: Wykres stabilności metody jawnej Eulera dla różnych kroków h . Dla $h \geq 0.5$ widoczne są oscylacje i niestabilność.

(d) Obliczenie numeryczne dla $t = 0.5$ metodą Eulera jawnego

Obliczenia:

$$y_1 = y_0(1 - 5h) = 1 \times (1 - 2.5) = -1.5 \quad (9)$$

Wynik numeryczny: $y(0.5) \approx -1.5$ **Wynik analityczny:** $y(0.5) = e^{-2.5} \approx 0.0821$

Metoda jawna daje wartość ujemną, znacznie odbiegającą od rozwiązania analitycznego — co jest skutkiem niestabilności metody dla tak dużego kroku.

(e) Stabilność niejawnej metody Eulera

Niejawna metoda Eulera:

$$y_{n+1} = y_n + h(-5y_{n+1}) \Rightarrow y_{n+1}(1 + 5h) = y_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + 5h} \quad (10)$$

Ponieważ $\left| \frac{1}{1+5h} \right| < 1$ dla dowolnego $h > 0$,

Wniosek: Metoda niejawna Eulera jest zawsze stabilna numerycznie, nawet dla dużych kroków. Daje to znaczącą przewagę nad metodą jawną w problemach sztywnych.

(f) Obliczenie numeryczne dla $t = 0.5$ metodą Eulera niejawnego

Obliczenia:

$$y_1 = \frac{1}{1 + 2.5} = \frac{1}{3.5} \approx 0.2857 \quad (11)$$

Wynik numeryczny: $y(0.5) \approx 0.2857$

Wynik ten jest zbliżony do rozwiązania analitycznego, potwierdzając stabilność metody niejawnej.

(g) Maksymalny krok h dla tolerancji błędu 0.001

Dane:

$$y(0.5) = e^{-2.5} \approx 0.0821 \quad (12)$$

Numerycznie wyznaczono, że:

$$h_{\max} \approx 0.000977, \quad n = \frac{0.5}{h_{\max}} = 512 \quad (13)$$

Dla takiego kroku błąd numeryczny w punkcie $t = 0.5$ wynosi poniżej zadanego progu 0.001. To typowa cecha prostych metod jawnych – wymagana dokładność często wymaga małych kroków.

(h) Iteracja bezpośrednia (Picard) i metoda Newtona w metodzie niejawnej

Funkcja iteracyjna Picarda:

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n - 5hy_{n+1}^{(k)} \quad (14)$$

Warunek zbieżności iteracji Picarda:

$$|-5h| < 1 \Rightarrow h < 0.2 \quad (15)$$

Dla $h = 0.5$ iteracja nie jest zbieżna, co potwierdzają wyniki numeryczne:

- **Iteracje Picarda:** brak zbieżności,
- **Metoda Newtona:** zbieżność uzyskana,
- **Wynik Newtona dla $t = 0.5$:** $y(0.5) \approx 0.2857$.

Wniosek: Dla większych kroków h sensowne jest stosowanie metody Newtona do wyznaczenia y_{n+1} , szczególnie gdy iteracje Picarda nie zbiegałyby szybko.

Wnioski dotyczące kroku całkowania h :

- Dla metody jawnej Eulera stabilność jest zachowana tylko wtedy, gdy $h < \frac{2}{|\lambda|} = 0,4$. Dla $h = 0,5$ pojawia się niestabilność i wynik znacznie odbiega od rozwiązania analitycznego. Metoda niejawna Eulera jest stabilna dla dowolnego $h > 0$.
- Uzyskanie błędu mniejszego niż 0.001 dla metody jawnej wymaga bardzo małego kroku $h \approx 0,000977$, co skutkuje dużą liczbą iteracji i wysokim kosztem obliczeniowym.
- Zwiększanie kroku h zmniejsza liczbę iteracji, ale obniża dokładność i może prowadzić do niestabilności. Dlatego dobór h powinien uwzględniać charakterystykę równania, ale również dokładność jaką chcemy otrzymać.

Zadanie 5. Stabilność metody Eulera

Problem

Dany układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Dla jakich wartości kroku h metoda Eulera jest stabilna?

Rozwiązanie krok po kroku

1. **Postać macierzowa:**

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. **Wartości własne:**

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = -2 \pm i$$

3. Warunek stabilności:

$$|1 + h\lambda| < 1 \Rightarrow |1 + h(-2 \pm i)| < 1$$

$$\sqrt{(1 - 2h)^2 + h^2} < 1$$

4. Rozwiązanie:

$$(1 - 2h)^2 + h^2 < 1 \Rightarrow 5h^2 - 4h < 0 \Rightarrow h(5h - 4) < 0$$

$$h \in \left(0, \frac{4}{5}\right)$$

Odpowiedź

Metoda Eulera jest stabilna dla:

$$h \in \left(0, \frac{4}{5}\right)$$

Wnioski

- Metoda Eulera jest numerycznie stabilna dla wartości kroku $h \in \left(0, \frac{4}{5}\right)$.
- Dla $h \geq 0.8$, metoda staje się niestabilna – błędy numeryczne rosną wykładniczo, co może prowadzić do rozbieżności rozwiązania.
- Należy jednak odróżniać **stabilność metody numerycznej** od **zbieżności rozwiązania do zera** – w przypadku zespolonych wartości własnych (tak jak tutaj), nawet stabilna metoda może generować oscylacyjne rozwiązania spiralnie zbiegające do punktu równowagi (punkt $y=(0,0)$, w którym pochodne znikają, czyli układ pozostaje w stanie spoczynku, jeśli się w nim znajdzie).
- Dokładne rozwiązanie tego układu zbiega do zera, ponieważ rzeczywista część wartości własnych macierzy A jest ujemna: $\text{Re}(\lambda) = -2 < 0$.

Zadanie 6. Metoda Eulera dla równania różniczkowego

Problem początkowy

Dane równanie różniczkowe:

$$y' = \alpha t^{\alpha-1}, \quad y(0) = 0$$

Rozwiązanie dokładne:

$$y(t) = t^\alpha$$

Metoda rozwiązania

1. Dla $\alpha \in \{2.5, 1.5, 1.1\}$ i kroków $h \in \{0.2, 0.1, 0.05\}$:

- Zastosować metodę Eulera
- Obliczyć błąd globalny w węzłach
- Wyznaczyć empiryczny rząd zbieżności

2. Metoda Eulera:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$$

gdzie $f(t, y) = \alpha t^{\alpha-1}$

Teoria błędów i rzędu zbieżności

Błąd globalny metody określamy jako:

$$e_h = \max_{0 \leq t \leq T} |y_{\text{num}}(t) - y_{\text{dok}}(t)| \quad (16)$$

Empiryczny rząd zbieżności obliczamy z:

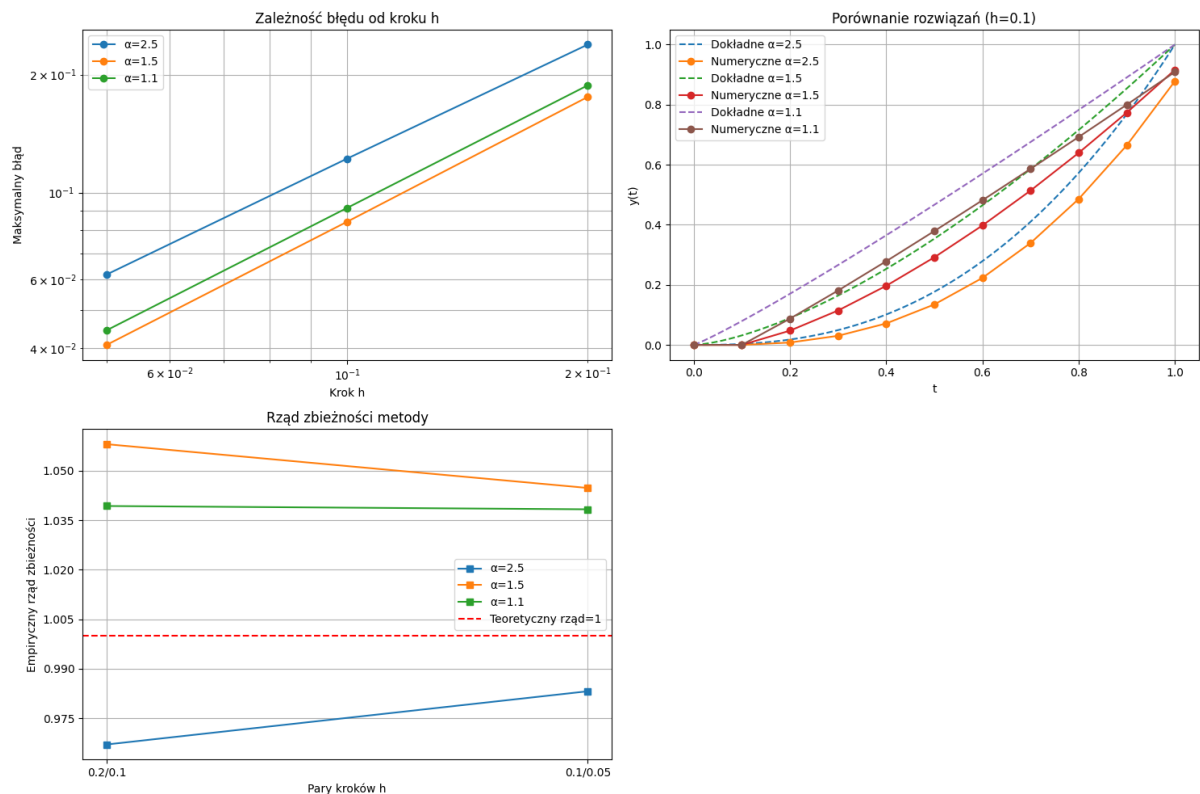
$$p = \frac{\log(e_{h_1}/e_{h_2})}{\log(h_1/h_2)} \quad (17)$$

Błędy i rzędy zbieżności

α	h	Błąd	Rząd zbieżności
2.5	0.200	0.238638	-
2.5	0.100	0.122076	0.9670
2.5	0.050	0.061754	0.9832
1.5	0.200	0.175392	-
1.5	0.100	0.084236	1.0581
1.5	0.050	0.040830	1.0448
1.1	0.200	0.187778	-
1.1	0.100	0.091364	1.0393
1.1	0.050	0.044484	1.0383

Tabela 1: Błędy metody Eulera i empiryczne rzędy zbieżności

Wizualizacja wyników



Interpretacja wyników

- Najmniejsze błędy zaobserwowaliśmy dla $\alpha = 1.5$, największe natomiast dla $\alpha = 2.5$, co wynika z:
 - Charakteru pochodnej:** Dla $\alpha = 2.5$ funkcja $y(t) = t^{2.5}$ ma większą krzywiznę, co zwiększa lokalny błąd obcięcia metody Eulera
 - Wartości współczynnika:** Człon $\alpha t^{\alpha-1}$ rośnie szybciej dla większych α , wzmacniając propagację błędów
- Wykres 'Zależność błędów od kroku h ' pokazuje liniową zależność błędów od kroku h w skali logarytmicznej

$$\log(e_h) \approx p \cdot \log(h) + C \quad (18)$$

gdzie:

- Nachylenie prostej odpowiada rzędowi zbieżności ($p \approx 1$)
- Linie dla różnych α są równoległe, co potwierdza ten sam rząd metody
- Odległości między liniami obrazują różnice w stałej C dla różnych α
- Wykres 'Porównanie rozwiązań ($h=0.1$)' demonstruje, jak rozwiązania numeryczne aproksymują rozwiązania dokładne. Największe rozbieżności występują w końcowym przedziale (kumulacja błędów).

- Wykres '**Rząd zbieżności metody**' potwierdza, że empiryczny rząd zbieżności jest bliski teoretycznej wartości 1 dla różnych wartości parametrów α .