Sprawozdanie z laboratorium MOwNiT - lab7

Radosław Szepielak, Patryk Blacha

3 maja 2025

1 Wprowadzenie

Celem laboratorium było porównanie efektywności sześciu metod numerycznego całkowania dla trzech różnych funkcji podcałkowych:

- $f_1(x) = \frac{4}{1+x^2}$ (całka równa π)
- $f_2(x) = \sqrt{x}\log(x)$ (całka równa $-\frac{4}{9}$)
- $f_3(x) = \frac{1}{(x-0.3)^2+0.001} + \frac{1}{(x-0.9)^2+0.004} - 6$ (całka bez rozwiązania analitycznego)

Badane metody obejmowały:

- Metody złożone: punkt środkowy, trapezowa, Simpsona
- Kwadraturę Gaussa-Legendre'a
- Metody adaptacyjne: trapezowa i Gauss-Kronrod (implementacja w `scipy.integrate.quad`)

2 Metodologia

2.1 Metody całkowania

- **Metoda punktu środkowego**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right)$$

- **Metoda trapezów**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\right]$$

- **Metoda Simpsona**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(a+(2i-1)h) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(a+2ih) + f(b)\right]$$

- **Kwadratura Gaussa-Legendre'a**:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

z transformacją do przedziału [0,1]

- **Metoda adaptacyjna trapezów** - rekurencyjne dzielenie przedziałów z kontrolą błędu

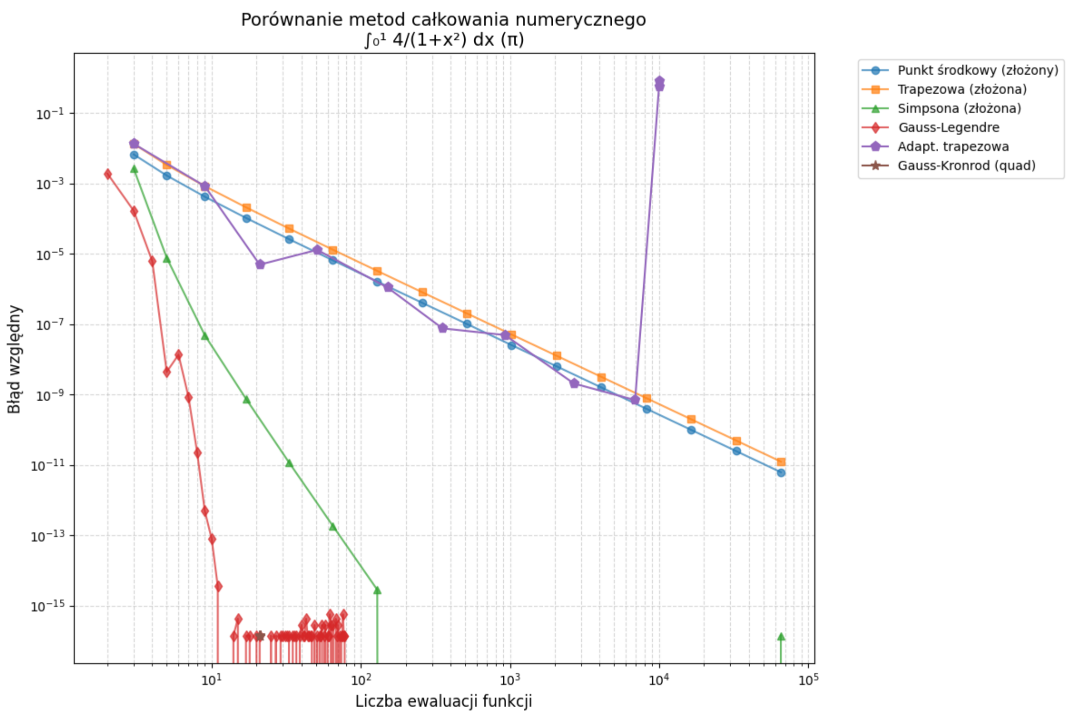
- **Metoda Gaussa-Kronroda** - użyta poprzez `scipy.integrate.quad`

2.2 Parametry obliczeń

- Dla metod złożonych: $m \in [1, 16]$, $n = 2^m + 1$ punktów
- Dla Gaussa-Legendre'a: $n \in [2, 79]$
- Tolerancje dla metod adaptacyjnych: 10^0 do 10^{-14} (12 wartości logarytmicznie rozłożonych)

3 Wyniki

3.1 Funkcja $f_1(x) = \frac{4}{1+x^2}$

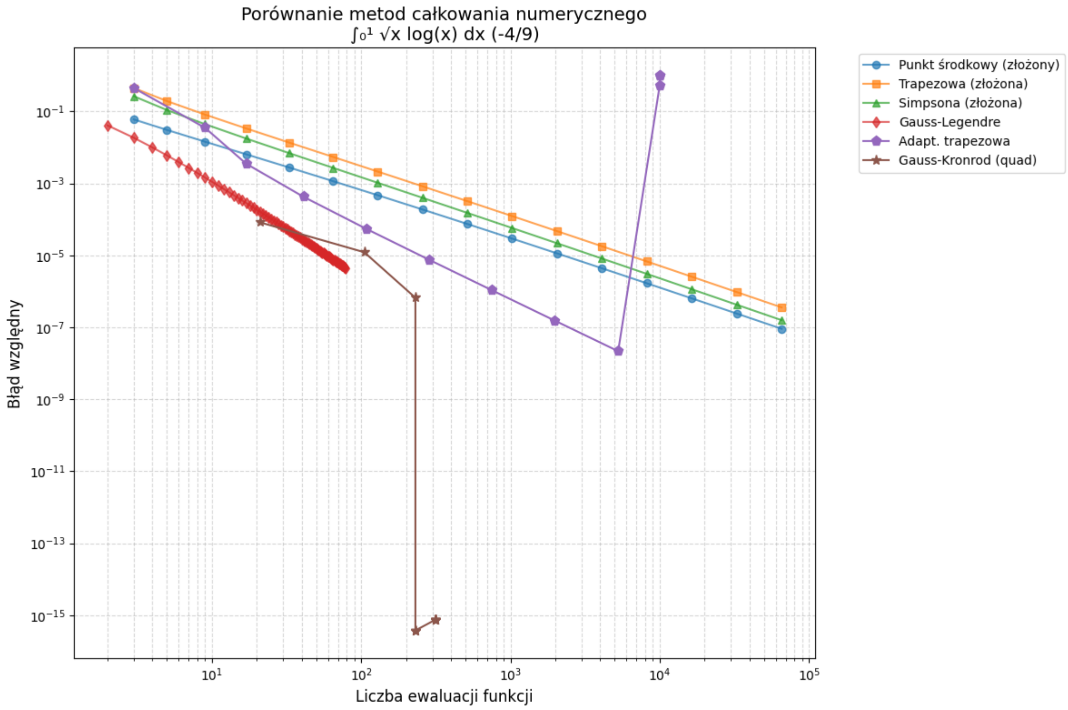


Rysunek 1: Błąd względny dla funkcji $f_1(x)$ (wartość dokładna π)

- Metoda Simpsona, Gauss-Legendre i Gauss-Kronrod osiągają największą dokładność

- Metoda adaptacyjna Gaussa-Kronroda (quad) osiąga
- Metody punktu środkowego i trapezów mają podobną zbieżność

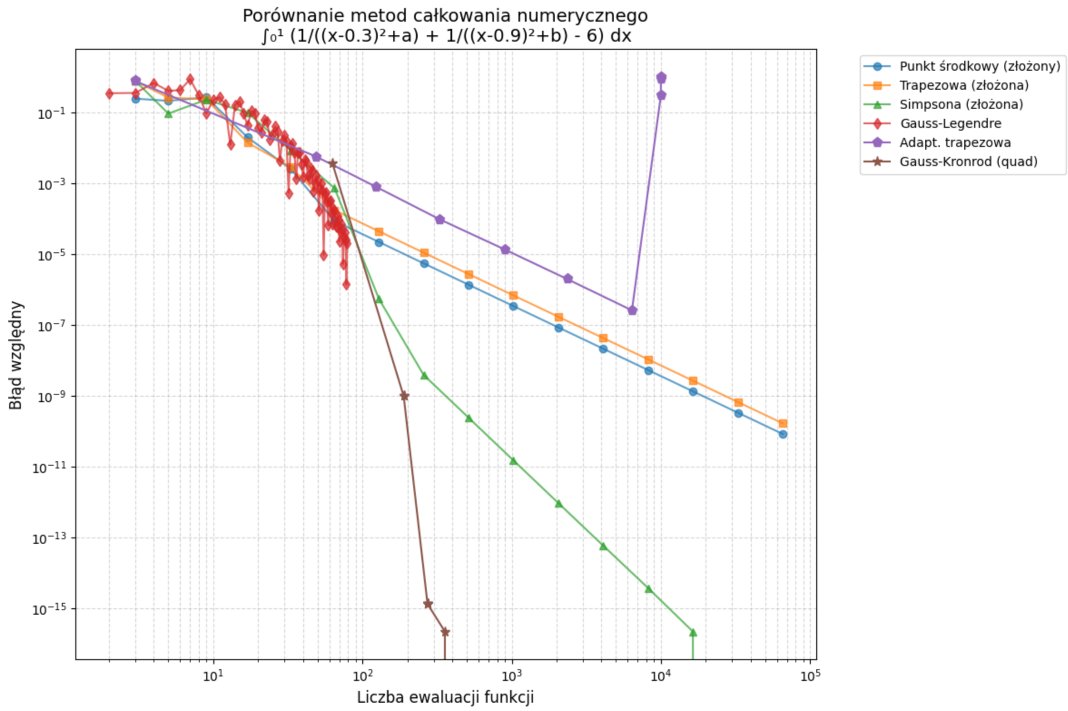
3.2 Funkcja $f_2(x) = \sqrt{x}\log(x)$



Rysunek 2: Błąd względny dla funkcji $f_2(x)$ (wartość dokładna $-\frac{4}{9}$)

- Funkcja z osobliwością w $x = 0$ wymaga specjalnej obsługi
- Metoda adaptacyjna Gauss-Kronrod radzi sobie najlepiej z osobliwością
- Metoda Simpsona traci przewagę w dokładności wobec osobliwości - nie ma już takiej przewagi dokładności jak w przypadku funkcji f1

3.3 Funkcja $f_3(x)$



Rysunek 3: Błąd względny dla funkcji $f_3(x)$ (wartość dokładna obliczona numerycznie)

- Funkcja z ostrymi pikami wymaga dużej liczby punktów w ich okolicy
- Metody adaptacyjna Gauss-Kronrod najlepiej dostosowuje się do lokalnych zmian funkcji i osiąga najwyższą dokładność
- Metody złożone wymagają bardzo dużej liczby punktów dla dobrej dokładności

4 Wnioski

4.1 Hierarchia dokładności metod

- **Metoda Gaussa-Kronroda** (implementacja w `scipy.integrate.quad`):
  - Zawsze osiąga najwyższą dokładność ze wszystkich badanych metod
  - Dla funkcji gładkich błąd względny często osiąga poziom 10^{-14}–10^{-16} dla małej liczby ewaluacji funkcji podcałkowej, dla większej liczby ewaluacji ze względu na precyzję float32 nie widzimy tak małych błędów na wykresie
  - Jedyna metoda, która konsekwentnie radzi sobie z osobliwościami i ostrymi zmianami
  - Wymaga najmniejszej liczby ewaluacji funkcji dla zadanej dokładności
- **Kwadratura Gaussa-Legendre'a**:
  - Drugie miejsce pod względem dokładności dla funkcji gładkich

  - Dla $n > 100$ zachowuje się podobnie jak metoda poprzednia ze względu na precyzję float32
  - Radzi sobie nieco gorzej z funkcjami, które mają osobliwości
  - Optymalny wybór gdy potrzebna wysoka dokładność przy stałej liczbie punktów

- **Metoda Simpsona**:
  - Najlepsza wśród metod złożonych dla funkcji gładkich
  - Rząd zbieżności 4 gwarantuje szybką redukcję błędu
  - Mniej efektywna niż metody adaptacyjne dla funkcji z osobliwościami jak funkcja f2 w $x = 0$

4.2 Specyfika metod adaptacyjnych

- **Przewaga adaptacyjności**:
  - Automatyczne zagęszczanie siatki w newralgicznych obszarach
  - Wbudowana kontrola błędu poprzez porównanie różnych kwadratur
  - Nie wymaga a priori wiedzy o zachowaniu funkcji
- **Koszty obliczeniowe**:
  - 2-3 razy większa liczba ewaluacji funkcji niż metody nieadaptacyjne
  - Dodatkowy narzut pamięciowy dla struktur danych
  - Kompensowane przez wyższą dokładność wyników, jednak nie sprawdza się to w przypadku metody adaptacyjnej trapezowej ze względu na jej prymitywność

4.3 Interpretacja wyników graficznych

- **Niewidoczność metody Gaussa-Kronroda**:
  - Wynika z osiągania błędów poniżej precyzji `float32` ($\epsilon_{\text{machine}} \approx 1.19 \times 10^{-7}$)
  - W systemach `float64` błędy powinny być widoczne dla mniejszych wartości błędów względnych
  - Świadczy o osiąganiu maksymalnej możliwej dokładności
- **Metody nieadaptacyjne**:
  - Po osiągnięciu pewnego limitu dokładności związanego z precyzją float32 nie jest widoczny błąd względny
  - Dalsze zwiększanie liczby węzłów nie poprawia znacząco wyniku

5 Podsumowanie

- **Dla wymagających zastosowań**:
  - Najlepiej używać metody Gaussa-Kronroda (`quad`)
  - Gwarantuje najwyższą możliwą dokładność
  - Jedyna skuteczna dla funkcji z osobliwościami
- **Dla funkcji gładkich**:
  - Gauss-Legendre najlepsza wśród metod nieadaptacyjnych
  - Metoda Simpsona dobra alternatywa przy ograniczeniach pamięciowych lub prostych funkcji