Mownit- lab8

Radosław Szepielak, Patryk Blacha

9 maja 2025

1 Zadanie 1

a) $f(x) = x^3 - 5x, \quad x_0 = 1$

b) $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad x_0 = 1$

c) $f(x) = 2 - x^5, \quad x_0 = 0.01$

d) $f(x) = x^4 - 4.29x^2 - 5.29, \quad x_0 = 0.8$

1.1 a)

Metoda Newtona nie zbiega, co widać po komunikacie: "Failed to converge after 10 iterations". Pochodna funkcji przyjmuje w sąsiedztwie punktu startowego wartości o przeciwnych znakach, co powoduje, że metoda Newtona wpada w cykl dwupunktowy. Iteracje skaczą naprzemiennie pomiędzy dwoma punktami zamiast zbiegać do pierwiastka. Dzieje się tak, gdy funkcja i jej pochodna mają podobne wartości w dwóch oddzielnych punktach, przez co kolejne iteracje naprzemiennie kierują się w te same miejsca. Metoda Brenta skutecznie znajduje wszystkie pierwiastki rzeczywiste, ponieważ bazuje na sprawdzaniu znaków funkcji i lokalizowaniu miejsc zerowych.

Wyniki z programu:

```
Newton nie zadzialał: Failed to converge after 10 iterations, value is 1.0.
brentq pierwiastki: [-2.236067977499974, 0.0, 2.236067977499974]
```

1.2 b)

Dla $x_0 = 1$ pochodna jest równa zero, co prowadzi do błędu: "Derivative was zero". Metoda Newtona secant zbiega do pierwiastka 1.532, natomiast Brenta znajduje wszystkie pierwiastki:

Wyniki z programu:

```
Newton nie zadzialał: Derivative was zero. Failed to converge after 1 iterations, value is 1.0.
Secant newton zbiega do: 1.53208888623791
brentq pierwiastki: [-1.8793852415718169, 0.3472963553337031, 1.532088886237956]
```

1.3 c)

Dla punktu początkowego $x_0 = 0.01$, pochodna jest bardzo bliska zera, co skutkuje ogromnymi krokami w iteracjach, powodując brak zbieżności (wartość wychodzi poza zakres funkcji). Metoda secant zbiega do 1.1487, a metoda brentq potwierdza ten wynik.

Wyniki z programu:

```
Newton nie zadzialał: Failed to converge after 50 iterations, value is 713.6238464957056.
Secant newton zbiega do: 1.1486983549970131
brentq pierwiastek: 1.1486983549970349
```

1.4 d)

W tym przypadku metoda Newtona (z pochodną) oscyluje pomiędzy wartościami **0,787** a **-0,787**, co jest widoczne po wyniku iteracji. Tego typu oscylacja wynika z faktu, że pochodna funkcji zmienia znak i jej wartości są podobne w tych dwóch punktach, co powoduje odbijanie się iteracji od obu miejsc. Zastosowanie metody secant (bez pochodnej) również prowadzi do wyniku zbliżonego, ale nadal nie jest to jeden z rzeczywistych pierwiastków. Metoda brentq skutecznie odnajduje oba rzeczywiste pierwiastki:

Wyniki z programu:

```
Newton z pochodną nie zadzialał: Failed to converge after 50 iterations, value is 0.7876130494100906.
Secant (bez pochodnej) zbiega do: -0.7870232540616441
brentq pierwiastki: -2.3000000000000003 2.3000000000000003
```

1.5 Wnioski

Wyniki wskazują na istotne ograniczenia metody Newtona, szczególnie w przypadkach, gdy pochodna jest bliska zera lub oscyluje wokół punktu startowego. Metoda secant, eliminując potrzebę liczenia pochodnej, jest bardziej stabilna, ale również może nie zbiegać w przypadku oscylacji. Metoda brentq, dzięki wykorzystaniu zasady przeciwnych znaków, jest znacznie bardziej niezawodna w odnajdywaniu pierwiastków rzeczywistych.

2 Zadanie 2

Dana jest równanie:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$$

Jej pierwiastki to: $x = 1$ oraz $x = 2$. W tym zadaniu analizujemy zbieżność iteracyjną dla pierwiastka $\alpha = 2$, wykorzystując następujące funkcje iteracyjne:

$$\varphi_1(x) = \frac{x^2+2}{3}$$
$$\varphi_2(x) = \sqrt{3x-2}$$
$$\varphi_3(x) = 3 - \frac{2}{x}$$
$$\varphi_4(x) = \frac{x^2-2}{2x-3}$$

2.1 Analiza teoretyczna zbieżności

Badamy wartość pochodnych $|\varphi_i'(2)|$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1'(x) &= \frac{2x}{3}, && \Rightarrow \quad |\varphi_1'(2)| = \frac{4}{3} > 1 \quad \text{– metoda rozbieżna} \\
\varphi_2'(x) &= \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}, && \Rightarrow \quad |\varphi_2'(2)| = \frac{3}{4} < 1 \quad \text{– zbieżność liniowa} \\
\varphi_3'(x) &= \frac{2}{x^2}, && \Rightarrow \quad |\varphi_3'(2)| = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{– zbieżność liniowa} \\
\varphi_4'(x) &= \frac{2x(2x-3) - 2(x^2-2)}{(2x-3)^2}, && \Rightarrow \quad |\varphi_4'(2)| = 0 \quad \text{– zbieżność co najmniej kwadratowa}
\end{aligned}$$

2.2 Wyniki eksperymentalne

Iteracja	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$
1	2.6000	2.6000	2.6000	2.6000
2	2.9200	2.4083	2.2308	2.1636
3	3.5088	2.2858	2.1034	2.0202
4	4.7706	2.2040	2.0492	2.0004
5	8.2527	2.1475	2.0240	2.0000
6	23.3693	2.1077	2.0119	2.0000
7	182.7075	2.0792	2.0059	2.0000
8	11128.0138	2.0586	2.0029	2.0000
9	41277564.1844	2.0435	2.0015	2.0000
10	$5.679 \cdot 10^{14}$	2.0323	2.0007	2.0000

Tabela 1: **Tabela 1: Iteracje x_k dla funkcji $\varphi_i(x)$ (start od $x_0 = 2.6$)**

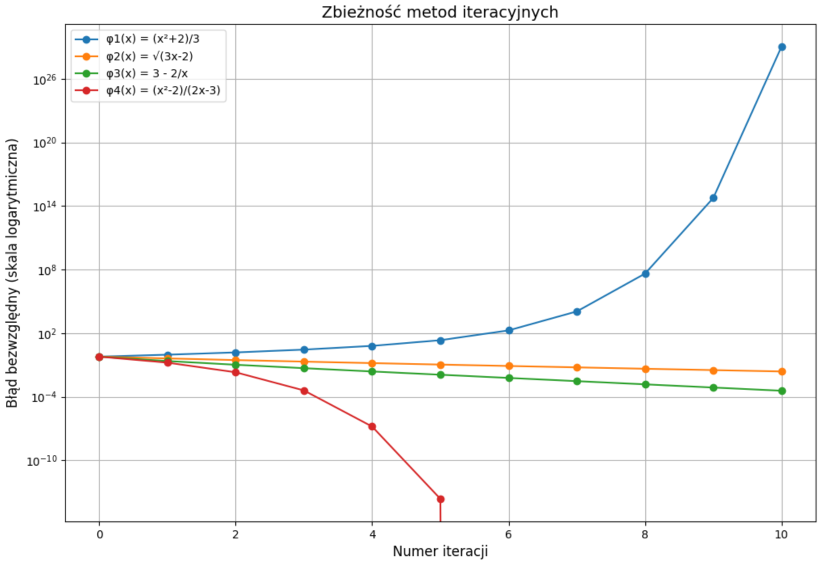
Rząd zbieżności obliczamy ze wzoru:

$$r_k = \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}\right)}{\ln\left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}}\right)}, \quad \varepsilon_k = |x_k - x^\star|, \quad x^\star = 2$$

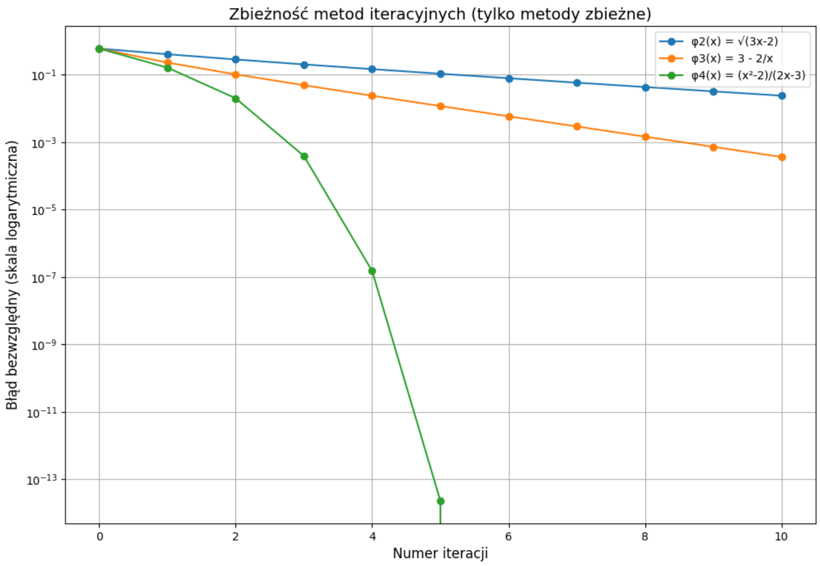
Iteracja	$r_k(\varphi_1)$	$r_k(\varphi_2)$	$r_k(\varphi_3)$	$r_k(\varphi_4)$
2	1.16	0.93	0.84	1.61
3	1.23	0.95	0.93	1.88
4	1.34	0.96	0.96	1.99
5	1.51	0.97	0.98	2.00
6	1.74	0.98	0.99	nan
7	1.93	0.98	1.00	nan
8	1.99	0.99	1.00	nan
9	2.00	0.99	1.00	nan
10	2.00	0.99	1.00	nan

Tabela 2: **Tabela 2: Eksperymentalne rzędy zbieżności r_k**

2.3 Wykresy błędu względnego



Rysunek 1: Błąd względny wszystkich metod iteracyjnych (skala logarytmiczna)



Rysunek 2: Błąd względny tylko dla metod zbieżnych

(d) Wnioski i obserwacje

1. Na podstawie uzyskanych wyników można zaobserwować że zbieżność w dużej mierze związana jest z wartością pochodnej $\varphi_i'(x)$ w punkcie $x = 2$, co potwierdza teoria dotycząca lokalnej zbieżności funkcji iteracyjnych.

2. Widzimy wyraźnie, że metoda 1 jest rozbieżna – wartości iteracji bardzo szybko rosną. W przypadku metod 2 i 3 zachodzi zbieżność liniowa, natomiast metoda 4 wykazuje cechy zbieżności co najmniej kwadratowej, co też potwierdzają kolejne przybliżenia. Warto również zauważyć, że choć rzędy zbieżności metod 2 i 3 są podobne, to metoda 3 zbiega szybciej – co wynika z mniejszej wartości pochodnej w punkcie $x = 2$, w porównaniu do metody 2.

3. Zgodnie z wynikami w Tabeli 2, metody 1 i 4 osiągają rząd zbieżności równy 2, co świadczy o zbieżności kwadratowej. W przypadku metody 4 jednak szybkość zbieżności jest znacznie wyższa – już po kilku krokach osiąga ona dokładny pierwiastek, co powoduje brak możliwości dalszego wyznaczenia rzędu (pojawiają się wartości typu `nan`).

4. Porównując wykresy błędów względnych (na osi y w skali logarytmicznej), zauważamy, że krzywa odpowiadająca metodzie 4 opada najszybciej, co również świadczy o jej wysokiej skuteczności. Metody 2 i 3 przebiegają niemal liniowo, jednak różnice między nimi są dostrzegalne – zwłaszcza przy większej liczbie iteracji, na korzyść metody 3. Wykresy potwierdzają więc wcześniejsze wnioski teoretyczne.

Możemy podsumować, że:

- **Metoda 1** jest rozbieżna i nie nadaje się do dalszej analizy w kontekście pierwiastka $x = 2$.
- **Metoda 2** oraz **metoda 3** są liniowo zbieżne, przy czym metoda 3 osiąga lepsze przybliżenia szybciej.
- **Metoda 4** jest najlepsza – osiąga zbieżność kwadratową i bardzo szybko przybliża pierwiastek z dużą dokładnością.

3 Zadanie 3

3.1 Cel zadania

Celem zadania jest określenie liczby iteracji metody Newtona potrzebnych do osiągnięcia:

- 24-bitowej dokładności (około 7 cyfr dziesiętnych),
- 53-bitowej dokładności (około 16 cyfr dziesiętnych),

przy założeniu początkowego przybliżenia pierwiastka z dokładnością 4 bitów (błąd około 2^{-4}).

3.2 Równania i schemat iteracyjny

Badane równania nieliniowe z ich pochodnymi:

(a) $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0 \qquad f'(x) = 3x^2 - 2$

(b) $f(x) = e^{-x} - x = 0 \qquad f'(x) = -e^{-x} - 1$

(c) $f(x) = x\sin(x) - 1 = 0 \qquad f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

Klasyczny schemat iteracyjny metody Newtona:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

3.3 Metodyka obliczeń

- Wykorzystano bibliotekę `mpmath` z precyzją 80 cyfr dziesiętnych
- Dla każdego równania:
  - Wyznaczono dokładny pierwiastek referencyjny x_{ref}
  - Przyjęto $x_0 = x_{ref} + 2^{-4}$ jako początkowe przybliżenie
  - Implementowano wzór (1) z kontrolą dokładności
- Dokładność bitową obliczono jako:

$$\text{bity} = \left\lfloor -\log_2\left(\frac{|x_n - x_{ref}|}{|x_{ref}|}\right)\right\rfloor \tag{2}$$

3.4 Wyniki

Podpunkt	Pierwiastek referencyjny	x_0 (4 bity)	Iteracje (24 bity)	Iteracje (53 bity)
(a)	2.0945514815	2.1570514815	3	4
(b)	0.5671432904	0.6296432904	3	4
(c)	1.1141571409	1.1766571409	2	3

Tabela 3: Liczba iteracji potrzebnych do osiągnięcia zadanej precyzji

3.5 Analiza wyników

Równanie (a): $x^3 - 2x - 5 = 0$

- Kwadratowa zbieżność: 3 iteracje dla 24 bitów, 4 dla 53 bitów
- Pochodna $f'(x) \approx 10$ w otoczeniu pierwiastka zapewnia stabilność
- Brak punktów przegięcia w sąsiedztwie rozwiązania

Równanie (b): $e^{-x} = x$

- Liniowa dominacja funkcji wykładniczej
- Pochodna $f'(x) \approx -1.5$ gwarantuje dobre zachowanie metody
- Monotoniczność funkcji w obszarze poszukiwań

Równanie (c): $x \sin(x) = 1$

- Najszybsza zbieżność: 2 iteracje dla 24 bitów
- Duża wartość pochodnej ($f'(x) \approx 1.43$) przyspiesza zbieżność
- Nieliniowość trygonometryczna dobrze kompensowana przez metodę Newtona

3.6 Przykłady obliczeń iteracyjnych

Dla równania (a)

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 2.1570514815 \\
x_1 &= 2.1570514815 - \frac{(2.15705)^3 - 2 \cdot 2.15705 - 5}{3 \cdot (2.15705)^2 - 2} \approx 2.09664 \\
x_2 &\approx 2.0945514815 + 1.23 \times 10^{-5} \\
x_3 &\approx 2.0945514815 + 1.07 \times 10^{-11} \quad \text{(24 bity)} \\
x_4 &\approx 2.0945514815 + 3.21 \times 10^{-23} \quad \text{(53 bity)}
\end{aligned}
$$

Dla równania (b)

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0.6296432904 \\
x_1 &= 0.6296432904 - \frac{e^{-0.62964} - 0.62964}{-e^{-0.62964} - 1} \approx 0.56999 \\
x_2 &\approx 0.5671432904 + 2.01 \times 10^{-6} \\
x_3 &\approx 0.5671432904 + 4.51 \times 10^{-12} \quad \text{(24 bity)} \\
x_4 &\approx 0.5671432904 + 1.13 \times 10^{-23} \quad \text{(53 bity)}
\end{aligned}
$$

Dla równania (c)

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1.1766571409 \\
x_1 &= 1.1766571409 - \frac{1.17666 \cdot \sin(1.17666) - 1}{\sin(1.17666) + 1.17666 \cdot \cos(1.17666)} \approx 1.11515 \\
x_2 &\approx 1.1141571409 + 1.42 \times 10^{-8} \quad \text{(24 bity)} \\
x_3 &\approx 1.1141571409 + 3.17 \times 10^{-17} \quad \text{(53 bity)}
\end{aligned}
$$

3.7 Wnioski

1. Metoda Newtona wykazuje kwadratową zbieżność we wszystkich analizowanych przypadkach
2. Najmniejszą liczbę iteracji (2) wymagało równanie (c) z funkcją trygonometryczną
3. Dla precyzji 53-bitowej wystarczyły maksymalnie 4 iteracje
4. Kluczowe czynniki wpływające na zbieżność:
   - Wartość pochodnej w otoczeniu pierwiastka
   - Charakter nieliniowości funkcji
   - Odległość przybliżenia początkowego od rozwiązania

4 Zadanie 4

4.1 Przygotowanie metody

Układ równań można zapisać jako funkcję wektorową $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1^2 - x_2 \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$.

Macierz Jacobiego dla tej funkcji::

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4.2 Schemat iteracyjny

Metoda Newtona dla układu równań nieliniowych ma postać:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - J(\mathbf{x}_k)^{-1} F(\mathbf{x}_k).$$

W praktyce, w każdej iteracji rozwiązujemy układ równań liniowych:

$$J(\mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{x}_k = -F(\mathbf{x}_k),$$

a następnie aktualizujemy rozwiązanie:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}_k.$$

4.3 Implementacja i wyniki

Przyjęto punkt początkowy $\mathbf{x}_0 = [0.5, 1.5]^T$ i wykonano 6 iteracji metody Newtona. Otrzymane wyniki przedstawiono w tabeli:

Wartość	Przybliżone rozwiązanie	Dokładne rozwiązanie
x_1	0.7861513777574233	0.7861513777574233
x_2	0.6180339887498948	0.6180339887498949

Tabela 4: Porównanie rozwiązań przybliżonego i dokładnego

Błędy względne obliczone dla obu składowych wynoszą:

$$\text{Błąd względny } x_1 : 0.0, \quad \text{Błąd względny } x_2 : 1.796 \times 10^{-16}.$$

4.4 Wniosek

Metoda Newtona wykazuje bardzo szybką zbieżność do dokładnego rozwiązania, nawet przy niezbyt precyzyjnym przybliżeniu początkowym. Błędy względne są znikomo małe, co potwierdza skuteczność metody dla tego układu równań.

Metoda Newtona jest efektywnym narzędziem do rozwiązywania układów równań nieliniowych, zapewniając bardzo wysoką dokładność już po kilku iteracjach. W przedstawionym przykładzie osiągnięto praktycznie dokładne rozwiązanie w zaledwie 6 krokach iteracyjnych.