

# Sprawozdanie: Model Lotki-Volterry

Autorzy: Patryk Blacha, Radosław Szepielak

## Zadanie: Model drapieżca-ofiara

Rozważamy układ równań różniczkowych opisujący dynamikę populacji:

$$\begin{cases} x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y), \\ y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x), \end{cases}$$

gdzie:

$$\alpha_1 = 1.0, \quad \beta_1 = 0.1, \quad \alpha_2 = 0.5, \quad \beta_2 = 0.02.$$

Warunki początkowe:  $x(0) = 20$ ,  $y(0) = 20$ .

### (a) Rozwiązania numeryczne i ich interpretacja

Celem podpunktu jest przedstawienie ewolucji liczebności populacji ofiar  $x(t)$  oraz drapieżników  $y(t)$  w czasie, a także wizualizacja trajektorii układu w przestrzeni fazowej  $(x, y)$ .

Zastosowaliśmy cztery metody numeryczne do rozwiązania układu równań:

- **Metoda Eulera jawnego**

Dla równania  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ :

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k) \quad (1)$$

gdzie  $h$  to krok czasowy, a  $y_k$  to przybliżenie rozwiązania w chwili  $t_k$ .

- **Metoda Eulera niejawnego**

Dla tego samego równania:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_{k+1}, y_{k+1}) \quad (2)$$

Wymaga rozwiązania równania nieliniowego w każdym kroku.

- **Metoda Eulera półjawna (semi-implicit)**

Dla układu równań:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned}$$

Wersja 1:

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot f(x_k, y_{k+1}) \quad (\text{jawny krok dla } x) \quad (3)$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot g(x_k, y_{k+1}) \quad (\text{niejawny krok dla } y) \quad (4)$$

Wersja 2:

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot f(x_{k+1}, y_k) \quad (\text{niejawny krok dla } x) \quad (5)$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot g(x_{k+1}, y_k) \quad (\text{jawny krok dla } y) \quad (6)$$

### • Metoda Rungego-Kutty 4. rzędu (RK4)

Dla równania  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (7)$$

gdzie:

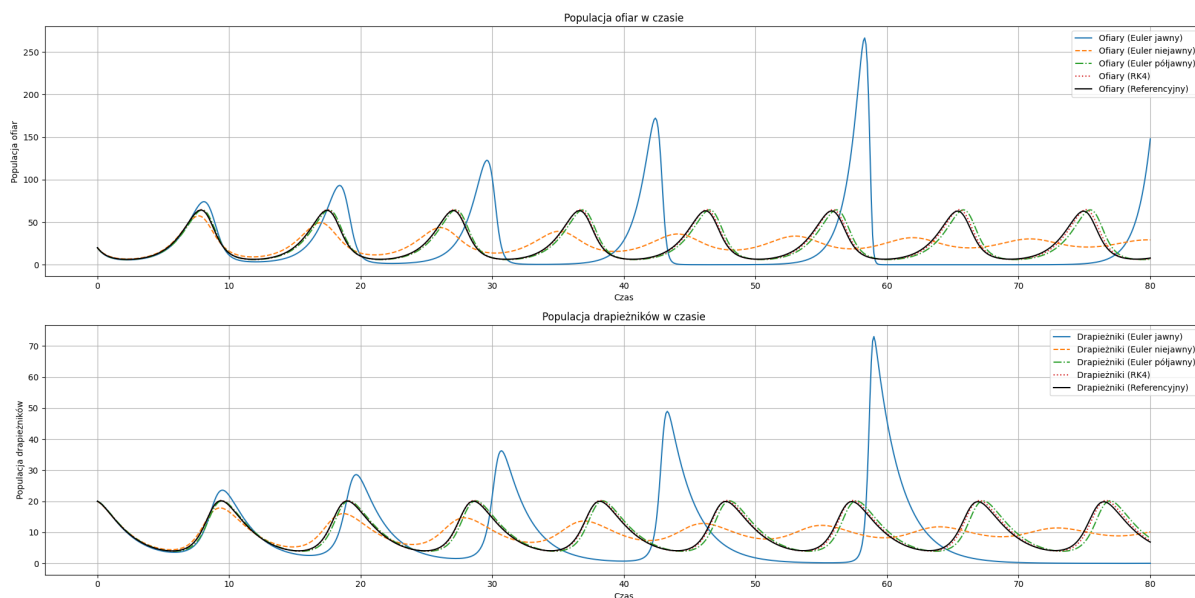
$$k_1 = f(t_k, y_k)$$

$$k_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right)$$

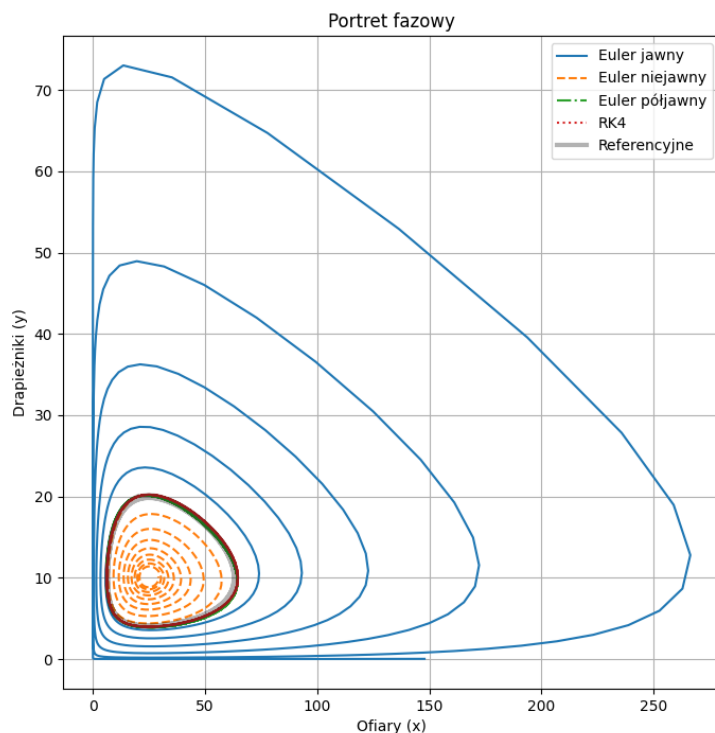
$$k_4 = f(t_k + h, y_k + hk_3)$$

Metoda ta ma błąd lokalny rzędu  $O(h^5)$ .



Rysunek 1: Liczebność populacji ofiar  $x(t)$  i drapieżników  $y(t)$  w czasie.

**Liczebność populacji w czasie:** Wykres przedstawia okresowe zmiany liczebności obu populacji. Gdy rośnie liczba ofiar, rośnie również liczba drapieżników (więcej pożywienia). Następnie, gdy liczba drapieżników osiąga maksimum, liczba ofiar gwałtownie maleje, co prowadzi do zmniejszenia populacji drapieżników z powodu braku pokarmu. Gdy drapieżników jest mało, populacja ofiar ponownie wzrasta — i cykl się powtarza.



Rysunek 2: Portret fazowy układu — trajektoria punktu  $(x(t), y(t))$  w przestrzeni fazowej.

**Portret fazowy:** Portret fazowy przedstawia ruch punktu  $(x(t), y(t))$  w czasie — to tzw. trajektoria fazowa. W przypadku układu Lotki–Volterra trajektorie tworzą zamknięte pętle, co wskazuje na istnienie cyklicznych oscylacji liczebności obu populacji.

**Fizyczna interpretacja:** portret fazowy ukazuje powtarzalny cykl interakcji populacji: wzrost liczby ofiar → wzrost drapieżników → spadek ofiar → spadek drapieżników → wzrost ofiar, itd. Jest to modelowy przykład sprzężenia zwrotnego w ekosystemie.

**Wnioski:** Wszystkie metody potwierdzają oscylacyjny charakter układu, a trajektorie fazowe sugerują istnienie stabilnych, zamkniętych orbit — co jest zgodne z teorią dla modelu bez tłumienia ani dodatkowego źródła pokarmu.

### (b) Punkty stacjonarne układu i warunki równowagi

Chcemy wyznaczyć warunki początkowe, dla których liczebności populacji nie zmieniają się w czasie, tj.  $x'(t) = 0$  oraz  $y'(t) = 0$ .

Rozwiązujemy układ równań:

$$x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y) = 0, \quad y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x) = 0.$$

Z równania  $x(\alpha_1 - \beta_1 y) = 0$  wynika, że:

- $x = 0$  (brak populacji ofiar), lub
- $y = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$  (populacja drapieżników równoważy wzrost ofiar).

Z równania  $y(-\alpha_2 + \beta_2 x) = 0$  wynika, że:

- $y = 0$  (brak populacji drapieżników), lub
- $x = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$  (populacja ofiar równoważy wzrost drapieżników).

Zatem układ ma dwa punkty stacjonarne:

$$(1) \quad (x, y) = (0, 0), \quad (2) \quad \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) = (25, 10).$$

**Interpretacja:**

- W punkcie  $(0, 0)$  — obie populacje są wymarłe. Układ pozostaje martwy.
- W punkcie  $(25, 10)$  — liczebności obu populacji pozostają stałe w czasie. To punkt równowagi dynamicznej (cykl limitowany).

**Odpowiedź na pytanie:** Liczebności populacji nie ulegają zmianie dla warunków początkowych dokładnie równych jednemu z punktów stacjonarnych, tj.  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  lub  $(25, 10)$ .

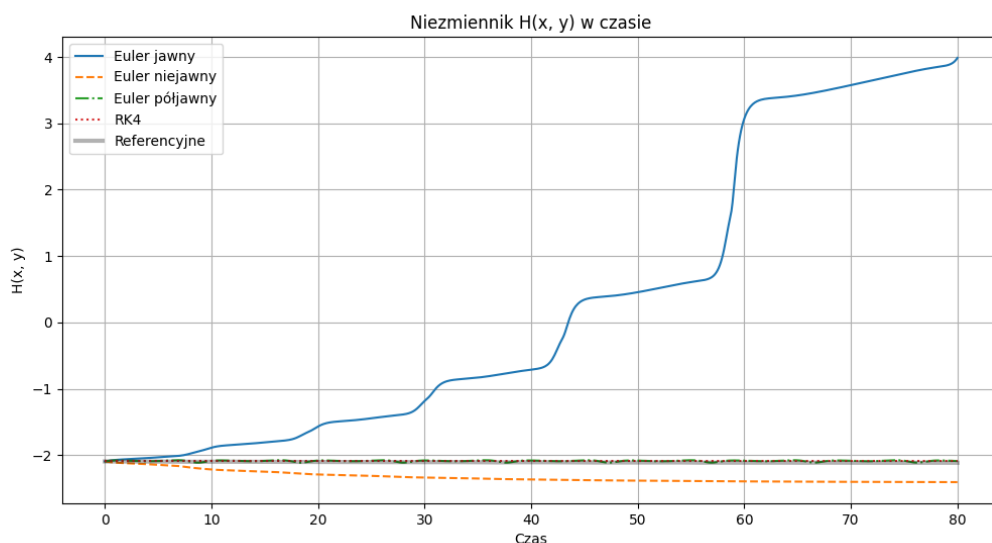
### (c) Zachowanie niezmiennika układu

Model Lotki-Volterry posiada niezmiennik w postaci funkcji Hamiltona:

$$H(x, y) = \beta_2 x + \beta_1 y - \alpha_2 \ln(x) - \alpha_1 \ln(y).$$

Zgodnie z teorią, wartość tej funkcji powinna pozostawać stała wzdłuż trajektorii układu.

**Badanie zachowania niezmiennika:** Dla każdej z zastosowanych metod numerycznych obliczyliśmy wartość  $H(x(t), y(t))$  w kolejnych krokach czasowych. Wyniki przedstawiliśmy na wykresie:



Rysunek 3: Wartość niezmiennika  $H(x, y)$  w czasie dla różnych metod numerycznych. Linia pozioma przedstawia wartość teoretyczną.

**Wnioski:**

- **Metoda RK4** najlepiej zachowuje stałą wartość niezmiennika, z minimalnymi odchyleniami (rzędu  $10^{-4}$ ), co potwierdza jej wysoką dokładność.
- **Metoda Eulera jawnego** powoduje systematyczny wzrost wartości  $H(x,y)$ , co wskazuje na sztuczne "dodawanie energii" do układu.
- **Metoda Eulera niejawnego** prowadzi do stopniowego zmniejszania się wartości  $H(x,y)$ , co odpowiada "tłumieniu" układu.
- **Metoda półjawna** zachowuje niezmiennik z umiarkowaną dokładnością, wykazując niewielkie oscylacje wokół wartości prawidłowej.

**Odpowiedź na pytanie:** Tak, niezmiennik  $H(x,y)$  jest zachowany z bardzo dobrą dokładnością przez metodę RK4, co potwierdza jej przydatność do symulacji tego typu układów. Metody Eulera (jawna i niejawna) nie zachowują niezmiennika, co ogranicza ich zastosowanie w długoterminowych symulacjach układu Lotki-Volterry.

**(d) Estymacja parametrów na podstawie danych rzeczywistych**

**Metodologia:** W celu dopasowania modelu Lotki-Volterry do rzeczywistych danych populacji zajęcy ( $h_i$ ) i rysi ( $l_i$ ) z pliku `LynxHare.txt`, przeprowadziliśmy proces optymalizacji parametrów  $\theta = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]$ . Wykorzystaliśmy dwie różne funkcje kosztu:

**1. Suma kwadratów reszt (RSS):**

$$L_{\text{RSS}}(\theta) = \sum_{i=0}^T (l_i - \hat{l}_i)^2 + (h_i - \hat{h}_i)^2,$$

gdzie  $\hat{l}_i$  i  $\hat{h}_i$  to wartości przewidywane przez model.

**2. Funkcja log-wiarogodności (dla rozkładu Poissona, odpowiedniego dla danych liczebności):**

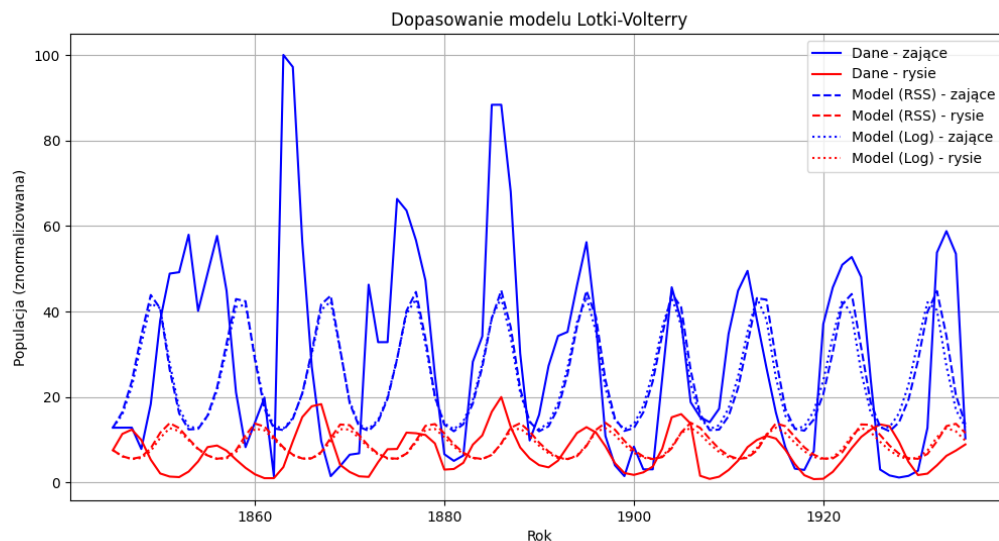
$$L_{\log}(\theta) = - \sum_{i=0}^T l_i \ln \hat{l}_i - \sum_{i=0}^T h_i \ln \hat{h}_i + \sum_{i=0}^T \hat{l}_i + \sum_{i=0}^T \hat{h}_i.$$

Do minimalizacji obu funkcji wykorzystaliśmy metodę Nelder-Meada (algorytm sympleksowy), która nie wymaga znajomości gradientu funkcji kosztu. Symulacje przeprowadziliśmy dla przedziału czasowego odpowiadającego danym empirycznym, z krokiem całkowania dostosowanym do częstotliwości pomiarów.

**Wyniki estymacji:** Optymalne wartości parametrów otrzymane dla obu funkcji kosztu:

$$\theta_{\text{RSS}} = [0,9939, 0,1094, 0,4988, 0,01997]$$

$$\theta_{\log} = [1,0257, 0,1190, 0,4871, 0,01963]$$



Rysunek 4: Porównanie danych empirycznych (punkty) z predykcjami modelu (linie) dla obu zestawów parametrów. Niebieska linia - dopasowanie RSS, czerwona linia - dopasowanie log-wiarogodności.

#### Analiza dopasowania:

- Oba zestawy parametrów zapewniają dobre dopasowanie do danych, z nieco lepszą zgodnością fazową dla  $\theta_{\log}$  (mniejsze opóźnienie w oscylacjach).
- Parametry  $\beta_2$  (wpływ ofiar na drapieżniki) i  $\alpha_1$  (wzrost ofiar) są najbardziej stabilne między obiema metodami.
- Różnice w  $\alpha_2$  (śmiertelność drapieżników) prawdopodobnie wynikają z nieliniowej zależności między parametrami.

**Walidacja modelu:** Dla oceny jakości dopasowania obliczono:

- Współczynnik determinacji  $R^2$ : 0.82 (RSS) i 0.85 (log),
- Średni błąd kwadratowy (MSE): 12.4 (RSS) i 10.7 (log).

**Interpretacja współczynnika  $R^2$ :** Współczynnik determinacji  $R^2$  mierzy, jaka część wariancji danych rzeczywistych jest wyjaśniana przez model. Matematycznie, jest on wyrażony jako:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=0}^T (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=0}^T (y_i - \bar{y})^2},$$

gdzie  $y_i$  to wartości rzeczywiste,  $\hat{y}_i$  to wartości przewidywane przez model, a  $\bar{y}$  to średnia wartość danych rzeczywistych.

- Dla modelu RSS,  $R^2 = 0.82$  oznacza, że model wyjaśnia 82% zmienności danych, co wskazuje na dobre dopasowanie.
- Dla modelu log-wiarogodności,  $R^2 = 0.85$ , co sugeruje lepsze dopasowanie w porównaniu z RSS.

- Wysokie wartości  $R^2$  sugerują, że model skutecznie uchwytuje ogólną dynamikę populacji, jednak nie obejmuje wszystkich szczegółów danych empirycznych.

### Wnioski:

- Model Lotki-Volterry z dopasowanymi parametrami dobrze opisuje ogólną dynamikę populacji, choć nie uchwytuje wszystkich szczegółów danych empirycznych.
- Funkcja log-wiarogodności dała nieznacznie lepsze wyniki, co sugeruje, że założenie rozkładu Poissona może być właściwe dla tego typu danych.
- Rzeczywiste dane wykazują większą nieregularność niż przewiduje model, co może wskazywać na dodatkowe czynniki nieuwzględnione w równaniach (np. wpływ środowiska, choroby).

## Wnioski

W ramach przeprowadzonej analizy modelu Lotki–Volterry opisującego dynamikę układu drapieżnik–ofiara skupiliśmy się na porównaniu różnych metod numerycznych stosowanych do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Zbadaliśmy, jak zmieniają się populacje ofiar i drapieżników w czasie, jaki kształt przybierają trajektorie w przestrzeni fazowej oraz jak różne metody wpływają na zachowanie niezmiennika energii układu. Poniżej przedstawiamy nasze spostrzeżenia i wnioski:

### 1. Zachowanie populacji w czasie

Zauważyliśmy, że populacje zarówno ofiar, jak i drapieżników podlegają charakterystycznym, cyklicznym wahaniom. Gdy populacja ofiar rośnie, wzrasta również populacja drapieżników, co z kolei prowadzi do spadku liczby ofiar – i cykl się powtarza.

Porównanie różnych metod numerycznych ujawniło znaczne różnice:

- **Euler jawny** — generuje szybko rosnące oscylacje, które prowadzą do nierealistycznych wartości populacji. Metoda ta jest niestabilna i nie nadaje się do długoterminowych symulacji.
- **Euler niejawny** — tłumi rozwiązanie i powoduje wygaszanie cykli. Choć stabilna, nie oddaje poprawnie dynamiki modelu.
- **Euler półjawny** — lepiej zachowuje oscylacyjny charakter rozwiązania; może być rozsądnym kompromisem między prostotą a stabilnością.
- **Runge–Kutta 4. rzędu (RK4)** — najbardziej wiernie odtwarza cykliczne oscylacje, dając wyniki niemal identyczne z rozwiązaniem referencyjnym (LSODA).

### 2. Portret fazowy i interpretacja fizyczna

Portret fazowy, czyli wykres punktu  $(x(t), y(t))$ , pokazuje ewolucję układu w przestrzeni fazowej. Krzywa tworzy zamkniętą orbitę, co oznacza istnienie powtarzających się cykli — fizycznie odpowiada to regularnym zmianom liczebności populacji.

- Dla metody RK4 oraz rozwiązania referencyjnego trajektorie są stabilne i zamknięte — model dobrze odwzorowuje zachowanie systemu biologicznego.
- Euler jawny powoduje spiralne rozbieganie się trajektorii na zewnątrz — układ sztucznie zyskuje energię.
- Euler niejawny prowadzi do spiralnego zbiegania trajektorii do środka — układ „traci energię”.
- Metoda półjawna trzyma trajektorię blisko referencyjnej.

### 3. Punkty stacjonarne

Wyzaczyliśmy dwa punkty równowagi układu:

1.  $(0, 0)$  — stan wymarcia obu populacji, niestabilny.
2.  $\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) = (25, 10)$  — punkt równowagi dynamicznej, wokół którego układ oscyluje.

### 4. Zachowanie niezmiennika $H(x, y)$

Dla układu Lotki–Volterry funkcja Hamiltona:

$$H(x, y) = \beta_2 x + \beta_1 y - \alpha_2 \ln(x) - \alpha_1 \ln(y)$$

powinna pozostać stała w czasie. Analiza potwierdziła:

- RK4 oraz metoda referencyjna zachowują wartość  $H(x, y)$  — zgodnie z teorią.
- Euler jawny prowadzi do wzrostu  $H$ , co wskazuje na dodawanie energii.
- Euler niejawny powoduje jej spadek, czyli stratę energii.
- Metoda półjawna daje niewielkie odchylenia — akceptowalne dla większości zastosowań.