SOLUCION DE ECUACIONES NO LINEALES

Dada una función continua ***f (x)**,* se quiere encontrar el valor x_0 de x, para el cual $\boldsymbol{f(x_0) = 0}$; los x_0 para los que se cumple $f(x_0) = 0$ se denominan raíces o solución de la ecuación o ceros .

Problema a resolver:

$$f(x) = 0$$

METODO DE ITERACION DE PUNTO FIJO

Método que se basa en la forma de la función:

$$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = g(x)$$

la iteración es: $\boxed{x_{n+1} = g(x_n) \quad n = 0, 1, \ldots}$

Definición: Dada $g(x): [a,b] \rightarrow R$, g continua y si $g(\alpha) = \alpha$, para algún $\alpha \in [a,b]$ entonces $g(x)$ tiene un ***punto fijo*** en [a,b]

Si α es punto fijo de g(x) $\therefore$ α es cero de f(x)

Ej: como definir una función de iteración

$f(x) = x^2-2x+3 \rightarrow 2x = x^2+3$

$x = (x^2+3)/2 \rightarrow g(x) = (x^2+3)/2$

$f(x) = x^2-2x+3 \rightarrow x^2 = 2x - 3$

$x = \sqrt{(2x-3)} \rightarrow g(x) = \sqrt{(2x-3)}$

$f(x) = \sin x \rightarrow x = \sin x + x \rightarrow g(x) = \sin x + x$

$f(x) = e^{-x} - x \rightarrow x = e^{-x} \rightarrow g(x) = e^{-x}$

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n) \quad n = 0, 1, \ldots}$$

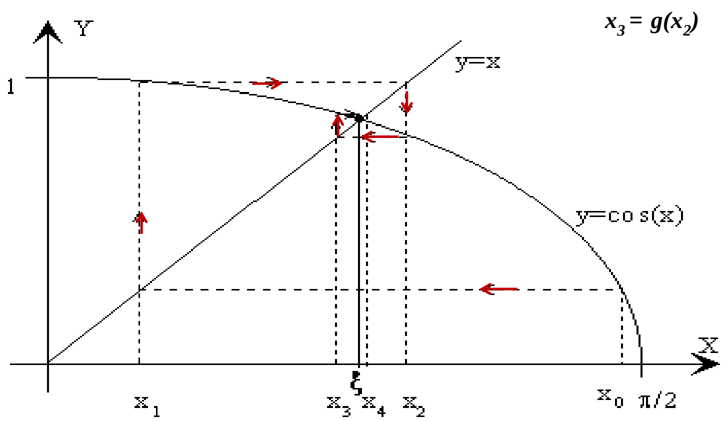
Iteración Convergente

$x_{n+1} = g(x_n) \quad n = 0, 1, \ldots$

$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$

$x_3 = g(x_2)$

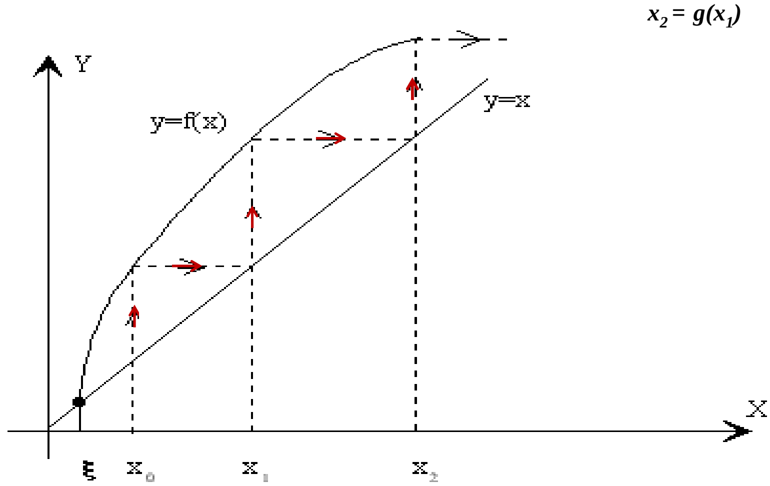


Iteración no Convergente

$x_{n+1} = g(x_n) \quad n = 0, 1, ...$

$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$



En función de lo visto, pueden surgir algunas preguntas:

Cuantas funciones g(x) se pueden determinar dada una ecuación f(x) = 0 ?

Cuales de estas funciones de iteración van a dar una sucesión que sea convergente al cero buscado ?

Teorema (Existencia y unicidad del punto fijo)

Si $g \in C_{[a,b]}$ y $g(x) \in [a,b]$ $\forall x \in [a,b]$. Si además $g'(x)$ existe en (a,b), es continua y $|g'(x)| \leq K < 1$ $\forall x \in [a,b]$.
Si $x_0 \in [a,b]$ entonces la sucesión definida $x_{n+1} = g(x_n)$, n ≥ 1 converge al único punto fijo $\alpha \in [a,b]$.

- Es importante interpretar, dentro de las H) del teorema:

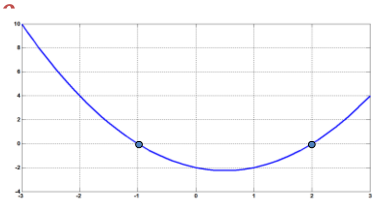
- $g(x) \in [a,b]$ $\forall x \in [a,b]$?

- $|g'(x)| \leq K < 1$ $\forall x \in [a,b]$?

Teorema (existencia y unicidad del punto fijo)

Ejemplo: vale $f(x) = x^2 - x - 2$

$x_{1,2} = -1 , 2$



i) $x = x^2 - 2$ $g_1(x) = x^2 - 2$

- $|g_1'(x)| = 2x < 1$ si $x < 1/2$ → g_1 no verifica teorema

ii) $x^2 = x + 2$ $g_2(x) = (x + 2)^{½}$

$|g_2'(x)| = 0.5(x+2)^{-1/2} < 1$ si $x > 0$

$g_2(1) = 1.732$ y $g_2(3) = 2.236$ → g_2 verifica teorema, o sea genera una sucesión convergente

- Por ej. $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$ $x = 3$, $x = -1$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Rightarrow x^2 = 2x + 3$ $\Rightarrow x = \sqrt{2x+3}$ $\Rightarrow g_1(x) = \sqrt{2x+3}$	$x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Rightarrow x(x-2) - 3 = 0$ $\Rightarrow x = \frac{3}{x-2}$ $\Rightarrow g_2(x) = \frac{3}{x-2}$	$x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Rightarrow 2x = x^2 - 3$ $\Rightarrow x = \frac{x^2-3}{2}$ $\Rightarrow g_3(x) = \frac{x^2-3}{2}$

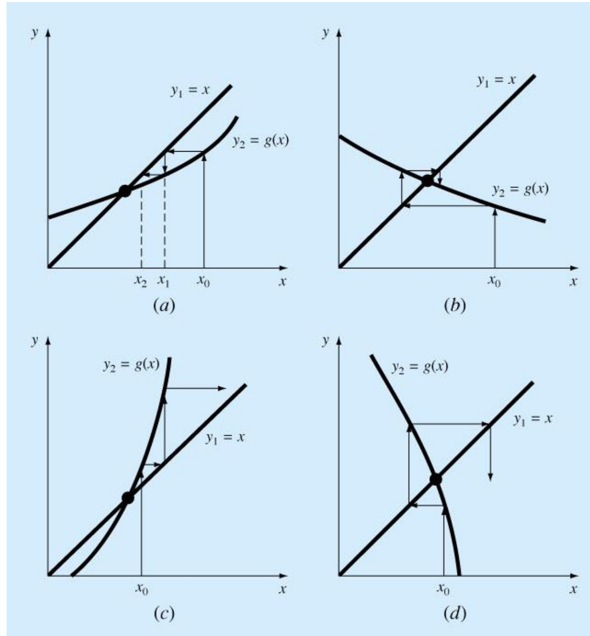
$\mathbf{g_1(x)}$	$\mathbf{g_2(x)}$	$\mathbf{g_3(x)}$
$x_{i+1} = \sqrt{2x_i + 3}$	$x_{i+1} = \frac{3}{x_i - 2}$	$x_{i+1} = \frac{x_i^2 - 3}{2}$
1. $x_0 = 4$ 2. $x_1 = 3.31662$ 3. $x_2 = 3.10375$ 4. $x_3 = 3.03439$ 5. $x_4 = 3.01144$ 6. $x_5 = 3.00381$	1. $x_0 = 4$ 2. $x_1 = 1.5$ 3. $x_2 = -6$ 4. $x_3 = -0.375$ 5. $x_4 = -1.263158$ 6. $x_5 = -0.919355$ 7. $x_6 = -1.02762$ 8. $x_7 = -0.990876$ 9. $x_8 = -1.00305$	1. $x_0 = 4$ 2. $x_1 = 6.5$ 3. $x_2 = 19.625$ 4. $x_3 = 191.070$
Converge x = 3	Converge x = -1	No Converge

(a) $|g'(x)| < 1, g'(x) > 0$
$\Rightarrow$ converge, monótona

(b) $|g'(x)| < 1, g'(x) < 0$
$\Rightarrow$ converge, oscilante

(c) $|g'(x)| > 1, g'(x) > 0$
$\Rightarrow$ diverge, monótona

(d) $|g'(x)| > 1, g'(x) < 0$
$\Rightarrow$ diverge, oscilante



Algoritmo de Iteración de Punto Fijo

ENTRADA : x_0 ; Eps: real ;max: entero
SALIDA : x_1: real o mensaje de error
VARIABLES: iter: entero

PASO 1: iter = 0, $x_1 \leftarrow x_0 + 2*$ Eps
PASO2: MIENTRAS (iter $\leq$ max $\wedge$ $|x_1 - x_0|$ > Eps)
$x_1 \leftarrow g(x_0)$
iter $\leftarrow$ iter+1
$x_0 \leftarrow x_1$
PASO3 : Si (iter > max) ENTONCES
ESCRIBIR ((‘No converge en max iteraciones’)
SINO
ESCRIBIR(‘Raiz =’, x_1)
PASO4 : Parar

ORDEN DE CONVERGENCIA

Definición: Supongamos que $\{x_n\}$ es una sucesión que converge a x' y que $e_n = x_n - x'$ para cada n>0
Si existen constantes positivas λ, α tal que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x'|}{|x_n - x'|^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\alpha}} = \lambda}$$

decimos que $\{x_n\}$ **converge a x' con orden α**, con una constante de error asintótico λ.
Por lo tanto:

$\alpha = 1$: método lineal
$\alpha = 2$: método cuadrático

ORDENES DE CONVERGENCIA

$\alpha = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{método de bisección} \\ \text{método Regula Falsi} \\ \text{iteración de punto fijo} \end{array} \right.$

$\alpha = 1.6$ método de la secante

$\alpha = 2$ método de Newton-Raphson

Newton-Raphson vs. Iteración de Punto Fijo

$f(x) = e^{-x} - x$

$$x_{n+1} = \frac{e^{-xn}(xn + 1)}{(e^{-xn} + 1)}$$

i	x_i	*F(xi)*
0	0	1
1	0,500000000	0,10653066
2	0,566311003	0,00130451
3	0,567143165	1,9654E-07
4	0,567143290	6,4219E-10

$x_{n+1} = e^{-xn}$

i	x_i	*F(xi)*
0	0	1,00000000
1	1,000000	1,71828183
2	0,367879	1,07679312
3	0,692201	1,30590753
4	0,500473	1,14902830
5	0,606244	1,22728770
6	0,545396	1,17989546
7	0,579612	1,20573358
8	0,560115	1,19075884
9	0,571143	1,19914634
10	0,564879	1,19435590

Δ^2 DE AITKEN

Supóngase que $\{x_n\}$ converge linealmente al limite p y que, para valores suficientemente grandes de n,$(x_n - p)(x_{n+1} - p) > 0$
Entonces, la sucesión

$$\hat{x} = x_n - \frac{((\Delta x)_n)^2}{(\Delta^2 x)_n} = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Converge con orden cuadrático

Acelera la convergencia de cualquier sucesión de orden lineal.

METODO DE STEFFENSEN

Se obtiene al aplicar Δ^2 de Aitken a la sucesión generada con iteración de punto fijo:

$$\hat{x}_s = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}, \quad n = 0,1,\ldots$$

Dado x_0, Eps

iter = 0, $x_1 \leftarrow x_0 + 2$* Eps

MIENTRAS (iter $\leq$ max $\wedge$ $|x_1 - x_0|$ > Eps)

    $x_1 \leftarrow g(x_0)$

    $x_2 \leftarrow g(x_1)$

    iter $\leftarrow$ iter+1

    $x_s \leftarrow x_0 - (x_1 - x_0)^2 / (x_2 - 2x_1 + x_0)$

    $x_0 \leftarrow x_s$

Si (iter > max) ENTONCES

    ESCRIBIR ('No converge en max iteraciones')

  SINO

    ESCRIBIR('Raiz =', x_0)

CEROS DE POLINOMIOS

Dado un polinomio, de orden n, con coeficientes a_i, $i = 0,.., n$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$$

Recordemos:

•Para un orden n, hay n raíces reales o complejas, no necesariamente distintas.
•Si n es impar, hay al menos una raíz real.
•Si las raíces complejas existen, existe un par conjugado.

<u>Teorema de Acotación de Raíces</u>: Todos los ceros de un polinomio se hallan en el disco cerrado cuyo centro está en el origen del plano complejo y cuyo radio es ρ siendo:

$$\rho = 1 + |a_n|^{-1} \max_{0 \le k \langle n} |a_k|$$

Ej: si tomamos el polinomio

$$p(x) = 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 6$$

Calculamos: $$\rho = 1 + \frac{6}{3} = 3$$

En función de este valor las raíces están el intervalo (-3,3)

METODO DE HORNER

Dado un polinomio $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$
y un valor x_0

Si se toman $$\begin{cases} b_n = a_n \\ b_k = a_k + b_{k+1} x_0 \quad (k = n-1, n-2, ..., 1, 0) \\ \therefore\ b_0 = P(x_0) \end{cases}$$

más aun si : $Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1$

entonces $P(x) = (x - x_0) Q(x) + b_0$

METODO DE HORNER

Dado que $P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$ (1)

Siendo $Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1$

Si derivamos (1) $P'(x) = Q(x) + (x - x_0)Q'(x)$

Para $x = x_0$ $P'(x_0) = Q(x_0)$

Método de Newton Raphson

Dado el polinomio, $P(x)$, se calcula:

$$x_{n+1} = x_n - P(x_n) / P'(x_n) \qquad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

usando Horner para calcular $P_{(x)}$ y $P'_{(x)}$.

Mediante el proceso de **deflación** podemos calcular todos los ceros del polinomio

METODO DE HORNER

Ejemplo:

$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$ $\boxed{x_0 = -2}$

V. i. para Newton

	2	0	-3	3	-4
		+			
-2		-4	8	-10	14
	2	-4	5	-7	$\boxed{10}$

$$P(x) = (x+2)\underbrace{(2x^3 - 4x^2 + 5x - 7)}+10$$

$$\boxed{Q(x) = P\,'(x)}$$

METODO DE HORNER

Ejemplo: $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$ $\boxed{x_0 = -2}$ ⟵ V. i. para Newton

	2	0	-3	3	-4
		+			
-2		-4	8	-10	14
	2	-4	5	-7	$\boxed{10}$ ⟶ $\boxed{P(-2)}$

$$P\ (x) = (x+2)\underbrace{(2x^3 - 4x^2 + 5x - 7)}+10$$

$$\boxed{P\,'(x) = Q(x)}$$

Aplico Horner nuevamente para encontrar **Q(-2)=P'(-2)**

	2	-4	5	-7
		+		
-2		-4	16	-42
	2	-8	21	$\boxed{-49}$ ⟶ $\boxed{P\,'(-2)}$

Método de Newton Raphson

Esta seria 1era iteración del método

$$x_1 = x_0 - P(x_0)/P'(x_0) = -2 - 10/(-49) \cong \boxed{-1.796}$$

Se continuan las iteraciones hasta alcanzar la precisión buscada

Algoritmo para calcular *P(x) y P'(x)*

ENTRADA : ***n***: grado de $P(x)$, ***ai***: coeficientes de $P(x)$,
$\boldsymbol{x_0}$: punto donde evaluar $P(x)$

SALIDA : $\boldsymbol{y} = P(x_0)$, $\boldsymbol{z} = P'(x_0)$

PASO 1: $y = a_n$

PASO2: $z = a_n$

PASO 3: PARA $j = n\text{-}1 , n\text{-}2, \ldots 1$

$y = x_0 * y + a_j$

$z = x_0 * z + y$

PASO 4: $y = x_0 * y + a_0$

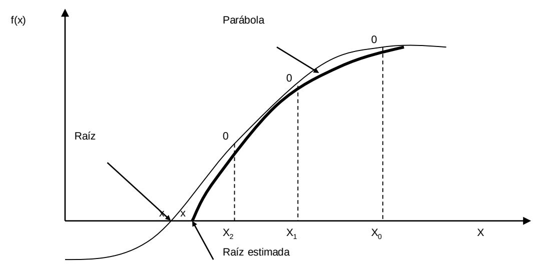
PASO 5: Devolver y , z

Método de Muller

Permite calcular las raíces del polinomio, $p_n(x)$, donde n es el orden del polinomio y las a_n son coeficientes constantes.

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

Este método es una generalización del método de la secante, trabaja con la parábola que intersecta al polinomio dado en tres puntos



Supongamos buscar las raíces de

$$p_2(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$$

Debemos conocer *a, b* y *c*
Dados *P0, P1 y P2* , planteamos el sig. sistema de ecuaciones:

$$p_2(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c = f(x_0)$$
$$p_2(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c = f(x_1)$$
$$p_2(x_2) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c = f(x_2)$$

vemos que $f(x_2) = c$

El sistema será:

$$c = f(x_2)$$

$$b = \frac{(x_0 - x_2)^2 [f(x_1) - f(x_2)] - (x_1 - x_2)^2 [f(x_0) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

$$a = \frac{(x_1 - x_2)[f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2)\ [f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

La nueva aproximación a la raíz será la solución de $p_2(x3) = 0$
Para el cálculo de la raíz, x_3, debemos resolver:

$$x_3 - x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para prevenir error de redondeo

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Cual signo hay que tomar ?

En cada iteración, se recalculan los valores $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$ y $[x_2, f(x_2)]$ hasta alcanzar la raíz con la precisión deseada

Este método también permite calcular raíces complejas, se debe tomar un *v.i*. complejo, y es más estable que Newton, siendo su orden de convergencia $\cong$ 1.8.

En resumen:

- Los métodos numéricos para resolver raíces se dividen en abiertos y de intervalo

- Métodos que usan intervalos, necesitan dos valores iniciales que contengan la raíz, tienen garantizada la convergencia. Pero son lentos.

- Métodos abiertos abandonan la acotación de la raíz, ganando en velocidad; pero pueden diverger. La convergencia depende de una buena elección de los valores iniciales