APROXIMACION DE FUNCIONES

Gran parte de las aproximaciones realizadas en Análisis Numérico consisten en aproximar una función $f(x)$ desconocida, mediante una cierta función $g(x)$, que se obtiene como combinación de funciones, partiendo de alguna clase de funciones conocidas.
Supongamos dadas $\{h_n(x), n = 0,1, \ldots\}$ ∴

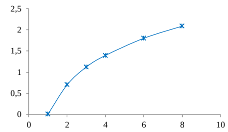
$$g(x) \approx a_0 h_0(x) + a_1 h_1(x) + \ldots + a_n h_n(x)$$

$$g(x) \approx \sum_{i=0}^{n} a_i \, h_i(x)$$

Existen distintos criterios para elegir las a_i , dando lugar a distintos tipos de aproximación:

- Aproximaciones exactas o por interpolación
- Aproximaciones por mínimos cuadrados
- Aproximaciones de error mínimo - máximo

Aproximación por interpolación



$f(x_i) = g(x_i)$

Unidad IV – INTERPOLACION

Contenido

- Concepto de interpolación. Interpolación polinómica.
- Forma de Lagrange. Error en la aproximación.
- Diferencias divididas. Forma de Newton. Error del polinomio interpolante.
- Interpolación segmentaria. Cubic splines.

Algunas aplicaciones :

- Procesamiento de imágenes
- Topografía
- Cartografía
- Modelos económicos
- Diseño industrial
- Tecnologías de comunicación
- Computación Gráfica
- Reconstrucción tridimensional de imágenes médicas.
- Etc..

INTERPOLACIÓN

Supongamos tener un conjunto de puntos, $P_i=(x_i, y_i)$, ya sean datos medidos o valores de una tabla; el problema que se nos presenta es que nos dan una función de la cual solo conocemos una serie de puntos: $(x_o, y_o), (x_1, y_1), \ldots\ldots\ldots, (x_n, y_n)$ y se quiere el valor de un punto x (intermedio de x_0 y x_n) de esta función.
Buscamos una función que pase por esos puntos

Función de Interpolación:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, h_i(x)$$

tal que para $xi,\ i = 0,n$

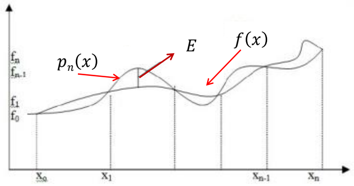
$$g(x_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, h_i(xi) = y_i$$

Familias de Funciones Bases

- Monomios : $1, x, x^2, x^3, \ldots$
- Trigonométricas: $1, \sin(\omega t), \cos(\omega t), \sin(2\omega t), \ldots$
- Fns. Spline: polinomios a trozos
- Fns. Exponenciales: e^{x}, e^{4x}, ...

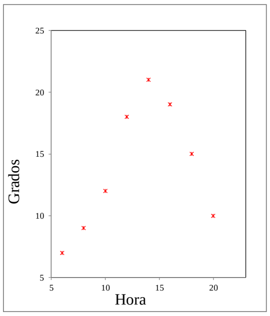
Interpolación Polinomial

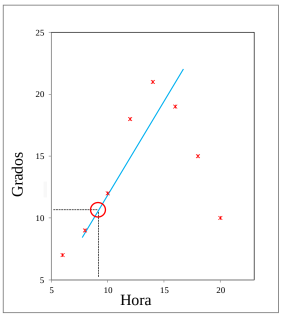
Los polinomios son muy utilizados por su estabilidad
Supongamos que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son $n+1$ puntos $\in [a, b]$ y sea $f(x)$: $[a, b] \longrightarrow \Re$
Queremos estimar el valor de un punto entre x_0 y x_n



Decimos extrapolación cuando el valor que queremos estimar está fuera del rango medido (después de x_n o antes de x_o)

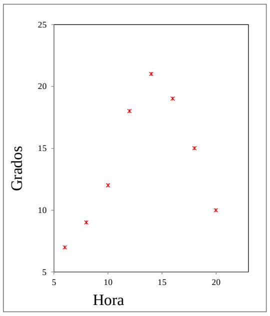
Ejemplo: hr = $[6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20]$
T = $[7, 9, 12, 18, 21, 19, 15, 10]$

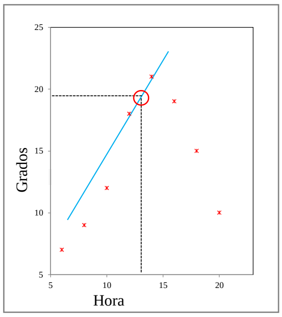




Ejemplo: hr = *[6, 8, 10 ,12 ,14, 16, 18, 20]*

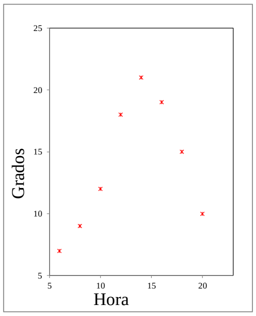
T = *[7, 9, 12, 18, 21, 19, 15, 10]*

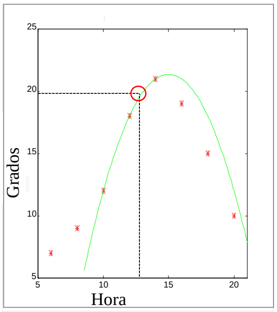




Ejemplo: hr = *[6, 8, 10 ,12 ,14, 16, 18, 20]*

T = *[7, 9, 12, 18, 21, 19, 15, 10]*





Interpolación Polinomial

Queremos construir un polinomio $p(x)$, de grado ≤ n que interpole a $f(x)$ en esos puntos

$$p(x_i) = f(x_i)$$

si

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

tenemos un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^{\,2} + \ldots + a_n x_0^{\,n} = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^{\,2} + \ldots + a_n x_1^{\,n} = f(x_1) \\ \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^{\,2} + \ldots + a_n x_n^{\,n} = f(x_n) \end{cases}$$

En forma matricial:

$\vec{X}\,\vec{a} = \vec{f}(X)$, $\vec{X}$: matriz de Vandermonde

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\,2} \ldots x_0^{\,n} \\ 1 & x_1 & x_1^{\,2} \ldots x_1^{\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \;\cdots\; \vdots \\ 1 & x_n & x_n^{\,2} \ldots x_n^{\,n} \end{pmatrix}$$

Teorema de Aproximación de Weiertrass

Suponga que f esta definida y es continua en [a,b]. Para cada Ɛ >0 existe un polinomio $p(x)$ definido en [a,b], con la propiedad de que

$|f(x) - p(x)|$ < Ɛ, para todo x en [a,b]

Teorema de Existencia y Unicidad

Dados $n+1$ puntos distintos x_i , $i=0,...,n$ y n+1 ordenadas y_i existe y es único un polinomio interpolante $p(x)$ de grado ≤ n que interpola a los y_i en los puntos x_i

Polinomios de LAGRANGE

$$l_k(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

FORMA DE LAGRANGE

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x)$$

EJEMPLO : Interpolar en *x=2* *f(x)=ln(x); f(2) = 0.6931472*

x	$f(x)$
1	0
4	1.386294
6	1.791760

i) Usando P_0 y P_1 :

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{x-4}{1-4} \qquad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{x-1}{4-1}$$

$$p_1(x)=l_0 f(x_0)+l_1 f(x_1)$$

$$p(2)=\frac{2-4}{1-4}0+\frac{2-1}{4-1}1.386294 = 0.4620981$$

ii) Usando P_0 , P_1 y P_2 :

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2} \qquad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2} \qquad l_2(x)= ?$$

$$p_2(x)=l_0 f(x_0)+l_1 f(x_1)+l_2 f(x_2)$$

$$p(2)=\frac{(2-4)(2-6)}{(1-4)(1-6)}0+\frac{(2-1)(2-6)}{(4-1)(4-6)}1.386294+\frac{(2-1)(2-4)}{(6-1)(6-4)}1.79176 = 0.565844$$

Calcular p(x), en x = 1.5, usando *i)* P_0 y P_1 y *ii)* P_0 y (2,0.*693147*); cuál es el error en cada caso ?

ERROR DE INTERPOLACION

Teorema

Sea $f(x):[a,b]\rightarrow\Re$, $n+1$ veces diferenciable en (a,b), y sean $\{x_i\}$ $i=0,1,...,n$, n+1 puntos distintos en [a,b].

Si $p_n(x)$ es el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a $f(x)$ en, $x_0,..., x_n$ ∴ para cada $x\in[a,b]$ $\exists\ \xi\in(a,b)$ tal que:

$$f(x)-p_n(x)=\frac{(x-x_0)...(x-x_n)}{(n+1)!}f^{n+1}(\xi)\ , \quad \xi\in(a,b)$$

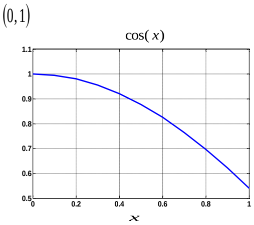
EJEMPLO : Calcular un cota para el error de interpolación si se interpola $f(x)=\cos(x)$ usando un polinomio de grado 3 en el intervalo [0,1]

$$f(x)-p_n(x)=\frac{(x-x_0)...(x-x_n)}{(n+1)!}f^{n+1}(\xi)\ , \quad \xi\in(a,b)$$

$$e_n=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{4!}\cos(\xi) \quad ,\xi\in(0,1)$$

$$e_n\leq\frac{1}{24}\cos(\xi) \quad ,\xi\in(0,1)$$

$$e_n\leq\frac{1}{24}\approx 0.0417$$



Método de LAGRANGE

- Evita resolver el sistema de ecuaciones (O(n^3))
- Tiene un costo del orden de O(n^2)
- Para estimar una cota del error se necesita conocer la derivada de orden n+1
- No es fácil de utilizar en problemas de integración o
- diferenciación
- Si se agrega un punto, hay que recalcular todos los coeficientes

FORMA DE NEWTON

La idea en este método es, dado p_{n-1} poder calcular p_n reusando lo anterior

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + C(x)$$

$$C(x) = p_n(x) - p_{n-1}(x) \qquad (1)$$

$C(x)$ debe ser de orden n,

Newton propuso el siguiente polinomio:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_{n-1}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-2}) + a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

FORMA DE NEWTON

$$C(x) = p_n(x) - p_{n-1}(x) \qquad (1)$$

$$\Downarrow$$

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_{n-1}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-2}) + a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$- \quad p_{n-1}(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_{n-1}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-2})$$

$$C(x) = p_n(x_n) - p_{n-1}(x_n) = a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

C(x) tiene los n ceros $x_0,\ldots,x_{n-1}$ y por ser interpolante $p_n(x_n) = f(x_n)$

$$a_n = \frac{p_n(x_n) - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1})} = \frac{f(x_n) - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1})}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]}$$

n-ésima diferencia dividida de f en $x_0,\ldots,x_{n-1}$

Forma de NEWTON

Vamos a construir el polinomio en la forma de Newton

Con 1 punto $(x_0, f(x_0)) \rightarrow$ $p_0(x) = a_0 = f(x_0)$

Con 2 puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x-x_0)$$

$$p_1(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

$$p_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

Con n puntos

$$\boxed{p_n(x) = p_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}$$

Forma de Newton de Diferencias Divididas

Forma de NEWTON

$$p_0(x) = a_0 = f(x_0)$$

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

.

.

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Propiedades de las Diferencias Divididas

i) Las diferencias divididas se pueden escribir recursivamente en función de diferencias divididas anteriores

$$f[x_i] = f(x_i)$$

$$\ldots$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \qquad i = 0,1,.., n-1$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

ii) Si los z_i son un reordenamiento de los x_i

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = f[z_1, z_0, z_2, \ldots, z_n]$$

Tabla de Diferencias Divididas

i	Xi	f(Xi)	Primera	Segunda	Tercera
0	X0	f(X0)			
1	X1	f(X1)	f[X0, X1]		
2	X2	f(X2)	f[X1, X2]	f[X0, X1, X2]	
3	X3	f(X3)	f[X2,X3]	f[X1, X2, X3]	f[X0, X1, X2, X3]

Ejemplo: construir la tabla de dif. divididas. Si ***f(x)=cos(x)***

x_k	$f[x_k]$				
0.0	**1.0000000**				
1.0	0.5403023	**-0.4596977**			
2.0	-0.4161468	-0.9564491	**-0.2483757**		
3.0	-0.9899925	-0.5738457	0.1913017	**0.1465592**	
4.0	-0.6536436	0.3363499	0.4550973	0.0879318	**-0.0146568**

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{0.5403023 - 1}{1} = -0.4596977$$

$$\boxed{P_1(x) = 1 - 0.4596977(x-0)}$$

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-0.9564491 - (-0.4596977)}{2 - 0} = -0.2483757$$

$$\boxed{P_2(x) = 1 - 0.4596977(x-0) - 0.2483757(x)(x-1)}$$

Ejemplo: construir la tabla de dif. divididas. Si *f(x)=cos(x)*

x_k	$f[x_k]$				
0.0	**1.0000000**				
1.0	0.5403023	**-0.4596977**			
2.0	-0.4161468	-0.9564491	**-0.2483757**		
3.0	-0.9899925	-0.5738457	0.1913017	**0.1465592**	
4.0	-0.6536436	0.3363499	0.4550973	0.0879318	**-0.0146568**

$$p_3(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$\boxed{p_3(x) = 1 -0.4596977(x-0) -0.2483757(x)(x-1)+0.1465592x(x-1)(x-2)}$

$p_4(x) = ?$

Error de interpolación al usar Newton

Sea $f(x):[a,b]\to\Re$ y sean $\{x_i\}\ i=0,1,\dots,n$, n+1 puntos distintos en [a, b]. Si $p_n(x)$ es el polinomio de grado < n que interpola a $f(x)$ en $x_0,\dots,x_n$ entonces, el error que se comete en la interpolación viene dado por: $e_n = f(x) - p_n(x)$

La forma de $p_{n+1}(x)$ usando Newton es:

$$p_{n+1}(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0,x_1,\dots,x_{n+1}](x-x_0)\dots(x-x_n)$$

Por ser interpolante : $p_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1})$

O sea que:

$$f(x_{n+1}) = \underbrace{f(x_0) + \dots + f[x_0,x_1,\dots,x_n](x_{n+1}-x_0)\dots(x_{n+1}-x_{n-1})}_{p_n(x_{n+1})} + f[x_0,x_1,\dots,x_{n+1}](x_{n+1}-x_0)\dots(x_{n+1}-x_n)$$

Por lo tanto:

$$e_n = f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}) = f[x_0,x_1,\dots,x_{n+1}](x_{n+1}-x_0)\dots(x_{n+1}-x_n)$$

Si comparamos con la fórmula de error vista antes:

$$f(x_{n+1}) - p_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x_{n+1}-x_0)(x_{n+1}-x_1)\dots(x_{n+1}-x_n)$$

vemos que:

$$f[x_0,x_1,\dots,x_n,x_{n+1}] = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \qquad \xi \in (a,b)$$

es decir que con un punto más podemos calcular el error

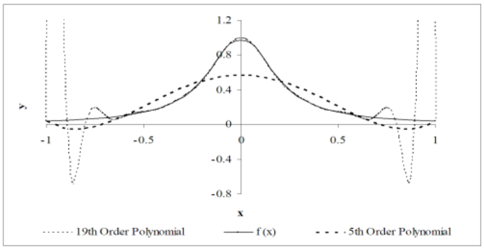
$$\boxed{e_n = f[x_0,x_1,\dots,x_n,x_{n+1}](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}$$

Regla del Término Siguiente

Observaciones:

- El polinomio de interpolación suele usarse para estimar valores de una función tabulada, en las abscisas que no aparecen en la tabla.
- El aumento de grado no siempre mejora la aproximación, pues el polinomio se vuelve oscilante.
- Tipos de error:
  - redondeo: datos , coeficientes, aproximación
  - truncamiento: depende de la derivada

Ejemplo
Función de Runge $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ $[-1, 1]$



Si los datos son igualmente espaciados se observa inestabilidad cuando el grado crece, también el error crece con el número de puntos

La interpolación con polinomios de grado alto es un problema mal condicionado

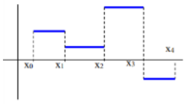
Interpolación Polinómica Segmentaria

Dados n+1 puntos $(x_0,y_0), (x_1,y_1), \ldots, (x_n,y_n)$ con $x_0 < x_1 \ldots < x_n$, una función spline de orden k (k-Spline) sobre dichos puntos es una función S verificando:

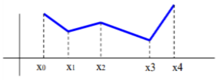
(i) $S(x) = q_k(x)$ polinomio de grado $\leq k$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

(ii) $S(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$

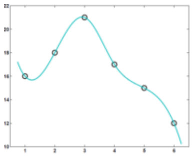
(iii) $S \in C^{k-1}[x_0, x_1]$



Spline orden 0



Spline orden 1



Spline orden 3

Cubic Spline

Sea $f(x):[a,b] \rightarrow \Re$ y sean $\{x_i\}\ i = 0,1,\ldots,n$ n+1 puntos distintos en [a,b], a =x0 < x1 < x2 … < xn = b

a) En cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, S es un polinomio cúbico denotado por $S_i(x)$.

b) $S_i(x_i) = f(x_i)$, i = 0,…, n-2

c) $S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1})$

d) $S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1})$

e) $S''_{i+1}(x_{i+1}) = S''_i(x_{i+1})$

f) Se satisface alguna de las siguientes condiciones de frontera: $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (frontera libre)

$S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ (frontera sujeta)

Se plantea un sistema de ecuaciones para calcular los coeficientes del polinomio $S_i(x)$:

a) $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \; i = 0,1,\ldots,n-1$

b) $S_i(x_i) = f(x_i) = a_i$

si $h_i = x_{i+1} - x_i$ y utilizando las restantes propiedades tenemos:

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i+1} - h_i)c_i + h_i c_{i+1} = \frac{3}{h_i}[a_{i+1} - a_i] - \frac{6}{h_{i-1}}[a_i - a_{i-1}]$$

Esta matriz es tridiagonal, diagonalmente dominante, o sea que siempre tiene solución y se resuelve con el método de Thomas

$$\begin{pmatrix} 2(h_1+h_0) & h_1 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_2+h_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{n-2} \\ 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-1}+h_{n-2}) \end{pmatrix}$$

Una vez calculados los ci:

$$b_i = \frac{1}{h_i}[a_{i+1} - a_i] - \frac{h_i}{3}[2c_i + c_{i+1}]$$

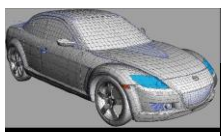
$$d_i = (c_{i+1} - c_i) \big/ 3h_i$$

Si el punto a interpolar está en el intervalo $(x_i \; , \; x_{i+1})$ se debe utilizar la función S_i

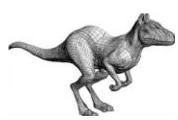
Error de Interpolación

Al usar una spline natural para interpolar una función *f(x)*, el error es proporcional a h^4. Lo mismo ocurre cuando utilizamos una spline cúbica sujeta.

Diseño



Video Juegos



Animación