Unidad III
SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Los sistemas de ecuaciones representan problemas físicos o modelos, que involucran la interacción de muchas variables y propiedades.
Las variables en el sistema representan el estado o la respuesta del modelo, las propiedades nos dan características de estos problemas o modelos
Las ecuaciones describen las interacciones entre las variables y las propiedades.

$$\begin{aligned} &a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + \cdots + a_{1,n}\, x_n = b_1 \\ &a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + \cdots + a_{2,n}\, x_n = b_2 \\ &\vdots \\ &a_{n,1}\, x_1 + a_{n,2}\, x_2 + \cdots + a_{n,n}\, x_n = b_n \end{aligned}$$

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

El problema que vamos resolver es , dado un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{aligned} &a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + \cdots + a_{1,n}\, x_n = b_1 \\ &a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + \cdots + a_{2,n}\, x_n = b_2 \\ &\vdots \\ &a_{n,1}\, x_1 + a_{n,2}\, x_2 + \cdots + a_{n,n}\, x_n = b_n \end{aligned}$$

En forma matricial: $A\,x = b$, *con* $A \in \Re^{nxn}$, $x \in \Re^{n}$, $b \in \Re^{n}$

SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Métodos directos. Métodos para matrices triangulares. Método de Eliminación de Gauss. Descomposición LU. Estrategia de pivoteo y escalamiento. Cálculo de la inversa. Métodos para matrices especiales: Cholesky, Thomas.

- Análisis del error: concepto de norma, número de condición, cotas de error. Método de los residuos.

- Métodos iterativos: Gauss Jacobi, Gauss Seidel. Método SOR. Análisis del error y la convergencia.

Algunas aplicaciones :

- Desarrollo de videojuegos, simuladores
- Programas que simulan procesos de física Newtoniana en ambientes virtuales (utilizados para que los efectos parezcan más realistas)
- Codificación y decodificación de mensajes
- Motores de búsqueda de páginas en internet/intranet
- Inteligencia Artificial – Aprendizaje Automático
- Modelos de clima
- Procesamiento de imágenes
- Ajuste de funciones
- Etc..

MATRICES

Supongamos dada A , matriz cuadrada de orden n

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Se define la matriz transpuesta , A^T, como $\left[a_{ji}\right]$, $j=1,n;\ i=1,n$

Una matriz cuadrada A es simétrica si, $A = A^T$,$a_{ij} = a_{ji}$

MATRICES

Supongamos dada A , matriz cuadrada de orden n

Diremos que es TRIANGULAR SUPERIOR si : $a_{ij} = 0$ para $i > j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Diremos que es TRIANGULAR INFERIOR si: $a_{ij} = 0$ para $i < j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

***Teorema 1*:** Dada A, matriz cuadrada de orden n, los enunciados siguientes son equivalentes:

- El sistema homogéneo $A\,x=0$ tiene solo la solución trivial $x=0$
- $\forall$ miembro de la derecha, b, el sistema $A\,x = b$ tiene una solución
- A es invertible

CLASIFICACIÓN DE MÉTODOS

METODOS DIRECTOS: Son aquellos que nos conducirían a la solución exacta luego de un número finito de operaciones elementales, si no hubiera errores de redondeo

METODOS ITERATIVOS: parten de una estimación inicial x_0 y construyen una sucesión de aproximaciones, que en principio, convergen a la solución x

TIPOS DE MATRICES

MATRICES DENSAS: Son aquellas que poseen pocos elementos nulos y son de orden bajo

MATRICES RALAS(SPARSE): Son aquellas que poseen muchos ceros y son de orden alto

SISTEMA CON MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

Dado el sistema $A\ x = b$, siendo A una matriz $\in \Re^{nxn}$, triangular superior, con todas sus entradas diagonales no nulas, entonces resolvemos el sistema utilizando **sustitución hacia atrás**

Algoritmo:

Paso 1 *Calcular* $x_n = b_n / a_{nn}$

Paso 2 *Para k = n-1 , ... , 1.-1*

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}\ x_j}{a_{kk}}$$

Teorema: Si A es matriz triangular superior, con $a_{ii} \neq 0\ \forall\ i$, entonces A es invertible

Ej. Supongamos tener el sig. sistema $A\,x = b$ para resolver:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Paso 1 $x_3 = b_3 / a_{33} = 4/4 = 1$

Paso 2 *Para k = 2 ,1,-1*

$$x_2 = \frac{b_2 - \sum_{j=3}^{3} a_{2j}\, x_j}{a_{22}} = \frac{3 - a_{23}\, x_3}{a_{22}} = \frac{3 - 3.1}{4} = 0$$

$$x_1 = \frac{b_1 - \sum_{j=2}^{3} a_{1j}\, x_j}{a_{11}} = \frac{10 - (a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3)}{a_{11}} = \frac{10 - (5.0 + 6.1)}{2} = 2$$

$$\boldsymbol{x^t = (\,2,0,1)}$$

Ej. Supongamos tener el sig. sistema $A\,x = b$ para resolver:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Paso 1 $\quad x_3 = b_3 / a_{33} = ?$

Paso 2 $\quad$ *Para k = 2 ,1,-1*

$$x_2 = \frac{b_2 - \sum_{j=k+1}^{n} a_{2j} x_j}{a_{22}} = ?$$

$$x_1 = \frac{b_1 - \sum_{j=k+1}^{3} a_{1j} x_j}{a_{11}} = ?$$

SISTEMA CON MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Dado el sistema A x= b, siendo A una matriz $\in \Re^{nxn}$, triangular inferior, con todas sus entradas diagonales no nulas, entonces resolvemos el sistema utilizando **sustitución hacia adelante**
Algoritmo:

Paso 1 *Calcular* $x_1 = b_1 / a_{11}$

Paso 2 *Para k = 2 , ... , n,1*

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}\, x_j}{a_{kk}}$$

Teorema: Si A es matriz triangular inferior, con $a_{ii} \neq 0 \; \forall \, i$, entonces A es invertible

Ej. Supongamos tener el sig. sistema $A\,x = b$ para resolver:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Paso 1 $\quad x_1 = b_1 / a_{11} = 6/6 = 1$

Paso 2 $\quad$ *Para k = 2,n*

$$x_2 = \frac{b_2 - \sum_{j=1}^{1} a_{2j} x_j}{a_{22}} = \frac{12 - a_{21} x_1}{a_{22}} = \frac{12 - 8.1}{4} = 1$$

$$x_3 = \frac{b_3 - \sum_{j=1}^{2} a_{3j} x_j}{a_{33}} = \frac{5 - (a_{31} x_1 + a_{32} x_2)}{a_{33}} = \frac{5 - (2.1 + 1.1)}{2} = 1$$

$$x^t = (1,1,1)$$

Ej. Supongamos tener el sig. sistema $A\,x = b$ para resolver:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Paso 1 $\quad x_1 = b_1 / a_{11} = ?$

Paso 2 $\quad$ *Para k = 2,n*

$$x_2 = \frac{b_2 - \sum_{j=1}^{k-1} a_{2j} x_j}{a_{22}} = ?$$

$$x_3 = \frac{b_3 - \sum_{j=1}^{k-1} a_{3j} x_j}{a_{33}} = ?$$

$$x^t = \ ?$$

CASO GENERAL

Dado el sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$A\,x = b \quad \text{, donde} \quad A \in \Re^{nxn} \; ; \qquad b \in \Re^{n}$$

siendo la matriz del sistema no triangular entonces utilizamos el método de Eliminación de Gauss para transformar el sistema en uno equivalente con matriz triangular superior

Teorema 2 **(**INVARIANZA DE LA SOLUCIÓN**):**

Las soluciones de un sistema $Ax = b$ permanecen invariantes ante las siguientes operaciones:

- Intercambio de dos ecuaciones cualesquiera
- Multiplicación de una ecuación por un escalar no nulo
- Suma de una ecuación con una combinación lineal no nula de otras ecuaciones

ELIMINACION DE GAUSS

ALGORITMO DE TRIANGULACION

Dado el sistema $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

Para resolver el sistema, se requiere el uso de la matriz ampliada del sistema, la cual se define como

$[A{:}b]$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Luego, se sustituye A por la matriz escalonada equivalente, la cual se obtiene aplicando operaciones elementales.

ELIMINACION DE GAUSS

ALGORITMO DE TRIANGULACION

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

matriz ampliada

La idea es llegar a un sistema equivalente que tenga una matriz triangular superior.

Paso 1: eliminamos los elementos de la primera columna.

Se eligen $\boldsymbol{m_{21}}$ y $\boldsymbol{m_{31}}$ de forma que los elementos de la columna 1 debajo de la diagonal principal sean nulos

$$\mathbf{1 - m_{21} \times 2 = 0 \rightarrow m_{21} = 1/2} \qquad \mathbf{4 - m_{31} \times 2 = 0 \rightarrow m_{31} = 2}$$

Resto a la 2da ecuación la 1era multiplicada por $m_{21} = 1/2$

Resto a la 3era ecuación la 1era multiplicada por $m_{31} = 2$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -3x_2 + 6x_3 &= -3 \\ -7x_2 + 2x_3 &= -10 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & -7 & 2 & -10 \end{array}\right)$$

matriz ampliada

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6$$
$$-3x_2 + 6x_3 = -3 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & -7 & 2 & -10 \end{array}\right)$$
$$-7x_2 + 2x_3 = -10 \,.$$

Paso 2: eliminamos los elementos de la segunda columna.

Calculamos: $-7 - m_{32} \times (-3) = 0 \rightarrow \boldsymbol{m_{32}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}$

Resto a la 3era ecuación la 2da multiplicada por $m_{32} = 7/3$

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6$$
$$-3x_2 + 6x_3 = -3 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & -3 \end{array}\right)$$
$$-12x_3 = -3$$

Obtengo una matriz triangular superior.

Utilizando el algoritmo de sustitución hacia atrás resolvemos el sistema: $\boldsymbol{x^T} = \mathbf{(1/4,\ 3/2,\ 1/4\ )}$

FACTORIZACION LU

Sea el problema general de resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$A\,x = b \quad , \text{donde } A \in \Re^{nxn}; \quad b \in \Re^{n}$$

Este método se usa para resolver sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes y distintos términos independientes.

Se descompone la matriz A en un producto de dos matrices:

- Una matriz triangular inferior unidad L.
- Una matriz triangular superior U,

de tal forma que $\boldsymbol{A=LU}$

FACTORIZACION LU

Dado el sistema inicial, $A\,x = b$,

$$A^1 = (a^1{}_{ij}\ ),\ b^1 = (b^1{}_i\ ),\ 1 \le i,j \le n$$

Paso 1: suponiendo $a^1{}_{11} \neq 0$

$$m_{i1} = a^1{}_{i1} / a^1{}_{11} \qquad i = 2, 3, \ldots, n$$

$$a^2{}_{ij} = a^1{}_{ij} - m_{i1}\, a^1{}_{1j} \qquad i,j = 2, 3, \ldots, n$$

$A^2 = (a^2{}_{ij}\ )$

Paso k: suponiendo $a^k{}_{kk} \neq 0$

$$m_{ik} = a^k{}_{ik} / a^k{}_{kk} \qquad i = k+1, \ldots, n$$

$$a_{ij}^{k+1} = a^k{}_{ij} - m_{ik}\, a^k{}_{kj} \qquad i,j = k+1, \ldots, n$$

$A^{k+1} = (\ a_{ij}^{k+1})$

FACTORIZACION LU

Despues de n-1 pasos: A^n, triangular superior, $U = A^n$

$$U = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 & a_{13}^1 & . & a_{1n}^1 \\ 0 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & . & a_{2n}^2 \\ 0 & 0 & a_{33}^3 & . & a_{3n}^3 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0. & . & a_{nn}^n \end{bmatrix}$$

Definimos ahora la matriz L, formada por los multiplicadores

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & . & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ m_{n1} & m_{n2} & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

***Teorema 3*:** **Factorización LU**

Sea $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}$ tal que las n sub-matrices principales:

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix},\ k = 1, \dots, n$$

Sean invertibles (esto es, $\det(\Delta_k) \neq 0, \forall k = 1, \dots, n$). Entonces, $a_{kk}^{k} \neq 0, \forall\ k = 1, \dots, n$ y por lo tanto, existe una matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$, con elementos diagonales $l_{ii} = 1, \forall i = 1, \dots, n$ y una matriz diagonal superior $U = (u_{ij})$, tales que $\boldsymbol{A = LU}$. Además, esta factorización es única.

FACTORIZACION LU

Dado el sistema inicial, $A\,x = b$, y calculada $A = LU$, la solución del sistema se calcula:

$$LU\,x = b$$

Se considera $U\,x = y$

Se resuelve el sistema $L\,y = b$

Calculado y, se resuelve $U\,x = y$

FACTORIZACION LU

Ejemplo:
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 1: $\boldsymbol{a^1{}_{11} = 1}$

$m_{21} = a^1{}_{21} / a^1{}_{11} = 1/1 = 1$, $a^2{}_{2j} = a^1{}_{2j} - m_{21}\, a^1{}_{1j}$, $j = 1,2,3$

$\boxed{a^2{}_{21} = a^1{}_{21} - m_{21}\, a^1{}_{11} = 1 - 1.1 = 0}$

$a^2{}_{22} = a^1{}_{22} - m_{21}\, a^1{}_{12} = 5 - 1.3 = 2$

$a^2{}_{23} = a^1{}_{23} - m_{21}\, a^1{}_{13} = 0 - 1.2 = -2$

$m_{31} = a^1{}_{31} / a^1{}_{11} = 2/1 = 2$, $a^2{}_{3j} = a^1{}_{3j} - m_{31}\, a^1{}_{1j}$, $j = 1,2,3$

$\boxed{a^2{}_{31} = a^1{}_{31} - m_{31}\, a^1{}_{11} = 2 - 2.1 = 0}$

$a^2{}_{32} = a^1{}_{32} - m_{31}\, a^1{}_{12} = 4 - 2.3 = -2$

$a^2{}_{33} = a^1{}_{33} - m_{31}\, a^1{}_{13} = 1 - 2.2 = -3$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

FACTORIZACION LU

Ejemplo:
$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Paso 2: $\boldsymbol{a^2{}_{22} = 2}$

$m_{32} = a^2{}_{32} / a^1{}_{22} = -2/2 = -1$, $a^3{}_{3j} = a^2{}_{3j} - m_{32}\, a^2{}_{2j}$, $j = 2,3$

$\boxed{a^3{}_{32} = a^2{}_{32} - m_{32}\, a^2{}_{22} = -2 - (-1).2 = 0}$

$a^3{}_{33} = a^2{}_{33} - m_{32}\, a^2{}_{23} = -3 - (-1).(-2) = -5$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

NOTA: No hay necesidad de almacenar los 0
Es posible almacenar las matrices L y U en A

FACTORIZACION LU

Ejemplo:
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$L\,y = b \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 11 \\ 11 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{Sust. hacia Adelante}} y = \begin{Bmatrix} 9 \\ 2 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

$$U\,x = y \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 2 \\ -5 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{Sust. hacia Atrás}} x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo:
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \qquad A^1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Paso 1: $a^1{}_{11} = 2$

$m_{21} = a^1{}_{21} / a^1{}_{11} = ?\ ,\ a^2{}_{2j} = a^1{}_{2j} - m_{21}\, a^1{}_{1j} \quad , j = 2,3$

$a^2{}_{22} = a^1{}_{22} - m_{21}\, a^1{}_{12} = ?$

$a^2{}_{23} = a^1{}_{23} - m_{21}\, a^1{}_{13} = ?$

$m_{31} = a^1{}_{31} / a^1{}_{11} = ?\ ,\ a^2{}_{3j} = a^1{}_{3j} - m_{31}\, a^1{}_{1j}\ , \quad j = 2,3$

$a^2{}_{32} = a^1{}_{32} - m_{31}\, a^1{}_{12} = ?$ $\qquad A^2 = ?$

$a^2{}_{33} = a^1{}_{33} - m_{31}\, a^1{}_{13} = ?$

FACTORIZACION LU

Paso 2: $\boldsymbol{a^2{}_{22} = ?}$

$m_{32} = a^2{}_{32} / a^1{}_{22} = ?$, $a^3{}_{3j} = a^2{}_{3j} - m_{32}\, a^2{}_{2j}$, $j=3$

$a^3{}_{33} = a^2{}_{33} - m_{32}\, a^2{}_{23} = ?$

$A^3 = ?$

$L =$ $U =$

$L\,y = b$ $U\,x = y$ $x = \begin{Bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{Bmatrix}$

NUMERO DE OPERACIONES

Consideramos el costo de:

i) Cálculo de L y U

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)^2 \cong 2\int_1^{n-1} (n-k)^2 dk = -2\left(\frac{(n-k)^3}{3}\right)_1^{n-1} = 2\left(\frac{(n-1)^3}{3} - \frac{1}{3}\right) \cong \frac{2n^3}{3}$$

ii) Resolución de $Ly = b$

$$\sum_{i=1}^{n} 2(i-1)+1 = \sum_{i=1}^{n} 2i-1 = 1+3+\ldots+2n-1 = \frac{1+2n-1}{2}n = n^2$$

iii) Resolución de $Ux = y$

$$\sum_{i=1}^{n} 2(i-1)+1 = \sum_{i=1}^{n} 2i-1 = 1+3+\ldots+2n-1 = \frac{1+2n-1}{2}n = n^2$$

El costo es $O(n^3)$

CALCULO DEL DETERMINANTE

$A = LU \longrightarrow \det(A) = \det(L)\det(U) = \det(U)$

L triangular con $l_{ii}=1, \ \forall\, i,$ entonces $\det(L) = 1$

CALCULO DE A^{-1}

Dado que: $A A^{-1} = I$

Calculamos: $A x^i = e^i$, $i = 1, \dots, n$

A : matriz de partida

x^i: columna i-esima de la matriz inversa

e^i : columna i-esima de la matriz identidad, $(0....1^{(i)}......0)^t$

Así se calculan las n columnas de la matriz inversa, A^{-1}

.

Pivoteo y Escalamiento en el Método de Gauss

Se ha supuesto que $a_{kk}^k \neq 0 \ \forall k$, elemento pivote, caso contrario hay que realizar intercambio de filas.

También puede ocurrir que el elemento pivote sea pequeño entonces:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k+1)}}{a_{kk}^{(k+1)}} \quad , \quad i = k+1, \dots, n$$

serán grandes y producen mucho error de redondeo

Ejemplo: Sin Pivoteo

t = 4

$$\begin{bmatrix} 1.133 & 5.281 \\ 24.14 & -1.210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.414 \\ 22.93 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{24.14}{1.133} = 21.31$$

$$a^2{}_{22} = a^1{}_{22} - m_{21} a^1{}_{12} = -113.7$$

$$\begin{bmatrix} 1.133 & 5.281 \\ 0.000 & -113.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.414 \\ -113.8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9956 \\ 1.001 \end{bmatrix}$$

Pérdida de precisión

Ejemplo: Con Pivoteo

$$\begin{bmatrix} 24.14 & -1.210 \\ 1.133 & 5.281 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.93 \\ 6.414 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{1.133}{24.14} = 0.04693$$

$$a^2{}_{22} = a^1{}_{22} - m_{21} a^1{}_{12} = 5.338$$

$$\begin{bmatrix} 24.14 & -1.210 \\ 0.000 & 5.338 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.93 \\ 5.338 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

Pivoteo Parcial

Wilkinson llama así a tomar como pivote el elemento de mayor valor absoluto de una columna

Paso k :

$$\boxed{c_k = \max_{i=k\dots n} \left| a_{ik}^{k} \right|}$$

Siendo i el menor índice $\geq k$ tal que se obtiene el valor c_k

Nótese que de esta forma los multiplicadores

$$\left| m_{ik} \right| \leq 1 \qquad , i = k+1, \dots, n$$

Si $i > k$ se intercambian las filas en A y b

Paso k :

$$c_k = \max_{i=k\dots n} \left| a_{ik}^{k} \right|$$

$$\begin{array}{cl}
\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1i}^{(1)} & \cdots & a_{1j}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2i}^{(2)} & \cdots & a_{2j}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3i}^{(3)} & \cdots & a_{3j}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kj}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ik}^{(k)} & \cdots & a_{jj}^{(k)} & \cdots & a_{jn}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nj}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)}
\end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{Fila Pivote} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

Columna Pivote

$$\begin{array}{cl}
\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1i}^{(1)} & \cdots & a_{1j}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2i}^{(2)} & \cdots & a_{2j}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3i}^{(3)} & \cdots & a_{3j}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kj}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{jk}^{(k)} & \cdots & a_{jj}^{(k)} & \cdots & a_{jn}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nj}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)}
\end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{Fila Pivote} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

El mas grande

Pivoteo Total

Wilkinson llama así a tomar como pivote el elemento de mayor valor absoluto de toda la matriz

Paso k :

$$\boxed{c_k = \max_{i,j=k\ldots n} \left| a_{ij}^{k} \right|}$$

El más grande

$$\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1i}^{(1)} & \cdots & a_{1j}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2i}^{(2)} & \cdots & a_{2j}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3i}^{(3)} & \cdots & a_{3j}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kj}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ik}^{(k)} & \cdots & a_{ij}^{(k)} & \cdots & a_{in}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nj}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)}
\end{bmatrix}$$

es muy caro por el numero de comparaciones, por ello es más usado el pivoteo parcial

Implementación de LU con Pivoteo

Si representamos con P = (P_{n-1} ... P_1) las permutaciones de filas realizadas, entonces $PA = LU$

Dado $Ax = b$ si $PA = LU \therefore A = PLU$

El sistema a resolver quedaría:

$$PLU\,x = b$$
$$L\,y = P\,b$$
$$U\,x = y$$

Nota:

Cuando dos filas de A se intercambian, las filas de b deben también ser intercambiadas.

Es conveniente usar un vector pivote; se inicializa desde 1 hasta n.

Cuando dos filas de A son intercambiadas, se aplica esto al vector pivote.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Paso 1: $C_1 = max\ \{0,-4,1\}$ $A' = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ $p = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Paso 1: $a^1{}_{11} = -4$

$m_{21} = a^1{}_{21} / a^1{}_{11} = 0/-4 = 0$, $a^2{}_{2j} = a^1{}_{2j} - m_{21}\, a^1{}_{1j}$, $j = 2,3$

$a^2{}_{22} = a^1{}_{22} - m_{21}\, a^1{}_{12} = 3-0.(-2) = 3$

$a^2{}_{23} = a^1{}_{23} - m_{21}\, a^1{}_{13} = 2-0.1 = 2$

$m_{31} = a^1{}_{31} / a^1{}_{11} = -1/4$, $a^2{}_{3j} = a^1{}_{3j} - m_{31}\, a^1{}_{1j}$, $j=2,3$

$a^2{}_{32} = a^1{}_{32} - m_{31}\, a^1{}_{12} = 4-(-1/4).(-2) = 7/2 = 3.5$

$a^2{}_{33} = a^1{}_{33} - m_{31}\, a^1{}_{13} = -2-1.(-1/4) = -7/4 = -1.75$

$A^2 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3.5 & -1.75 \end{bmatrix}$

Paso 2

$C_2 = max\ \{3,3.5\}$ $A^2 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3.5 & -1.75 \end{bmatrix}$ $p = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$A^{2\prime} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3.5 & -1.75 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $p = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$a^2{}_{22} = 3.5$

$m_{32} = a^2{}_{32} / a^2{}_{22} = 3/3.5$, $a^3{}_{3j} = a^2{}_{3j} - m_{32}\, a^2{}_{2j}$, $j=3$

$a^3{}_{33} = a^2{}_{33} - m_{32}\, a^2{}_{23} = 2-(3/3.5)(-1.75) = 3.5$

$A^3 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3.5 & -1.75 \\ 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix}$

$\boxed{L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 3/3.5 & 1 \end{bmatrix}}$ $\boxed{U = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3.5 & -1.75 \\ 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix}}$ $\boxed{p = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 3/3.5 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3.5 & -1.75 \\ 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema hay que calcular:

$$\boldsymbol{L\,y = P\,b} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 3/3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} y_1 &= b_1 = -5 \\ y_2 &= b_2 - (-0.25).y_1 = 3 + 0.25\,y_1 = 1.75 \\ y_3 &= b_3 - (3/3.5).y_2 = 12 - (3/3.5)\,y_2 = 10.5 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{U\,x = y} \qquad \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 3.5 & -1.75 \\ 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1.75 \\ 10.5 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_3 &= y_3 / u_3 = 10.5/3.5 = 3 \\ x_2 &= (y_2 - (-1.75).x_3)/u_2 = (1.75 + 1.75.3)/3.5 = 2 \\ x_1 &= (y_1 - (1.x_3 + (-2).x_2))/u_1 = (-5 - (3-4))/-4 = 1 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x^T = (1\,,\,2,\,3)}$$

Escalamiento Implícito

Wilkinson propone que una matriz debe *equilibrarse* antes de aplicar una algoritmo de solución de sistemas lineales.

Al aplicar el **escalamiento implícito**, supongamos estar en el paso k del proceso de triangulación:

$$\boxed{c_k = \max_{i=k\ldots n} \frac{\left|a_{ik}^{k}\right|}{s_i}}$$

i es el menor índice tal que $i \geq k$, si son distintos se intercambian las filas

Siendo s, vector tamaño, que se inicializa al comenzar el algoritmo

$$s_i = \max_{j=1\ldots n} \left|a_{ij}\right|$$

Ejemplo de pivoteo con escalamiento:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad s = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Paso 1:

$$C_1 = max \left|\frac{a_{i1}}{s_i}\right| = max\{ \frac{4}{4}, \frac{1}{6}, \frac{2}{2} \}$$

Paso 1: $a^1{}_{11} = 4$

$m_{21} = a^1{}_{21} / a^1{}_{11} = -1/4$, $a^2{}_{2j} = a^1{}_{2j} - m_{21}\, a^1{}_{1j}$, $j = 2,3$

$a^2{}_{22} = a^1{}_{22} - m_{21}\, a^1{}_{12} = 0 - 2.(-1/4) = 1/2$

$a^2{}_{23} = a^1{}_{23} - m_{21}\, a^1{}_{13} = 6 - (-1/4)1 = 25/4$

$m_{31} = a^1{}_{31} / a^1{}_{11} = 2/4 = 1/2$, $a^2{}_{3j} = a^1{}_{3j} - m_{31}\, a^1{}_{1j}$, $j = 2,3$

$a^2{}_{32} = a^1{}_{32} - m_{31}\, a^1{}_{12} = 2 - (1/2).2 = 1$

$a^2{}_{33} = a^1{}_{33} - m_{31}\, a^1{}_{13} = 1 - (1/2).1 = 1/2$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0.5 & 6.25 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Paso 2

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0.5 & 6.25 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad s = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = max \left|\frac{a_{i2}}{s_i}\right| = max\{ \frac{1}{12}, \frac{1}{2} \}$$

$$A^{2\prime} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 6.25 \end{bmatrix} \quad s = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$a^2{}_{22} = 1$

$m_{32} = a^2{}_{32} / a^2{}_{22} = 0.5$, $a^3{}_{3j} = a^2{}_{3j} - m_{32}\, a^2{}_{2j}$, $j = 3$

$a^3{}_{33} = a^2{}_{33} - m_{32}\, a^2{}_{23} = 6.25 - (0.5)(0.5) = 6$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.25 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}} \quad \boxed{U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}} \quad \boxed{s = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}} \quad \boxed{p = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.5 & 1 & 0\\ -0.25 & 0.5 & 1\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0.5\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}7\\5\\5\end{bmatrix}\quad p=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema hay que calcular:

$$\boldsymbol{L\,y = P\,b}\quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.5 & 1 & 0\\ -0.25 & 0.5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\5\\5\end{bmatrix}\qquad \begin{aligned}&y_1=b_1=7\\&y_2=b_2-(-0.25).y_1=5-0.5y_1=1.5\\&y_3=b_3-(-0.25.y_1+0.5.y_2)=5-(-7/4+3/4)=6\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{U\,x = y}\quad \begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0.5\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\1.5\\6\end{bmatrix}\qquad \begin{aligned}&x_3=y_3/u_{33}=6/6=1\\&x_2=(y_2-(0.5).x_3)/u_{22}=(1.5-0.5)/1=1\\&x_1=(y_1-(1.x_3+2.x_2))/u_{11}=(7-(1+2))/4=1\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x^{T}=(1\,,\,1,\,1)}$$

Variantes de Eliminación de Gauss
Método de Gauss Jordan

Es similar al método de Gauss, la diferencia es que se diagonaliza la matriz

Paso k: suponiendo $a^{k}_{kk}\neq 0$

$$\begin{aligned}&m_{ik}=a^{k}_{ik}/a^{k}_{kk} && i=1,\ldots,n\ ,\ i\neq k\\&a^{k+1}_{ij}=a^{k}_{ij}-m_{ik}\,a^{k}_{kj} && j=k,\ldots,n\\&b^{k+1}_{i}=b^{k}_{i}-m_{ik}\,b^{k}_{k}\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)}\\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)}\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & b_1^{(n-1)}\\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & 0 & b_2^{(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)}\end{array}\right]$$

Al finalizar el algoritmo tenemos $x=b^{n}$

Desventaja: Costo aumenta en 50%

Variantes de Eliminación de Gauss
Método de Cholesky

Sea $A \in \Re^{nxn}$, simétrica y definida positiva :

A simétrica si $A = A^T$

A definida positiva si $X^T A X > 0 \ \forall \ X \neq 0$

Para estas matrices se puede encontrar una matriz triangular inferior L, con elementos diagonales positivos, tal que

$$A = L \ L^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = LL^T = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

Una vez calculada L y L^T resolvemos el sistema :

$$L \, y = b$$
$$L^T x = y$$

Variantes de Eliminación de Gauss
Método de Cholesky

Los elementos de L se obtienen comparando los $a \ ij$ con $l \ ij$
Por ej. para $n = 2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{pmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} \qquad l_{21} = a_{21}/l_{11} \qquad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}{}^2}$$

Forma Gral:

$$\boxed{\begin{array}{ll} l_{ii} = (a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \ l_{ik}{}^2)^{1/2} & i = 1, \ldots n \\ l_{ji} = (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} \ l_{jk} \, l_{ik})/l_{ii} & j = i + 1, \ldots n \end{array}}$$

Ventajas: costo es la mitad de LU, $\frac{n^3}{3}$, y no necesita pivoteo

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16.5 & 14 \\ 16.5 & 76.25 & 48 \\ 14 & 48 & 54 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 54 \\ 243.5 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Para *i = 1*

$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{6} = 2.4495$

$l_{21} = a_{21}/l_{11} = 16.5/2.4495 = 6.7361$ j = 2

$l_{31} = a_{31}/l_{11} = 14/2.4495 = 5.7155$ j = 3

Para *i = 2*

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - {l_{21}}^2} = \sqrt{76.25 - (6.7361)^2} = 5.5565$$

$l_{32} = (a_{32-l_{21}l_{31}}/l_{22} = (48\text{-}6.7361\text{x}5.7155)/\ 5.5565 = 1.7097$ j = 3

Para *i = 3*

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - {l_{31}}^2 - {l_{32}}^2} = \sqrt{54 - 5.7155^2 - 1.7097^2} = 4.2906$$

$$L = \begin{bmatrix} 2.4495 & 0 & 0 \\ 6.7361 & 5.5565 & 0 \\ 5.7155 & 1.7097 & 4.2907 \end{bmatrix} \qquad L^T = \begin{bmatrix} 2.4495 & 6.7361 & 5.7155 \\ 0 & 5.5565 & 1.7097 \\ 0 & 0 & 4.2907 \end{bmatrix}$$

L y = b

$$\begin{bmatrix} 2.4495 & 0 & 0 \\ 6.7361 & 5.5565 & 0 \\ 5.7155 & 1.7097 & 4.2907 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \\ 24.35 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$y_1 = b_1 / l_{11} = 54 / 2.4495 = 22.045$

$y_2 = (b_2 - 6.7361 . y_1) / 5.5565 = 17.097$

$y_3 = (b_3 - (5.7155\ y_1 + 1.7097\ y_2)) / 4.2907 = -12.872$

Ux = y

$$\begin{bmatrix} 2.4495 & 6.7361 & 5.7155 \\ 0 & 5.5565 & 1.7097 \\ 0 & 0 & 4.2907 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.045 \\ 17.097 \\ -12.872 \end{bmatrix}$$

$x_3 = y_3 / u_{33} = -3$

$x_2 = (y_2 - (1.7097).x_3) / u_{22} = 4$

$x_1 = (y_1 - (5.7155\ x_3 + 6.7361 .x_2)) / u_{11} = 5$

x^T =(5, 4, -3)

MATRIZ DE BANDA

Supongamos dada A , matriz cuadrada de orden n

Diremos que es de banda si : $a_{ij} = 0$ para $| i - j | > m$
Siendo 2m+1 el ancho de banda,
si m = 1 la matriz es tridiagonal,
m = 2 la matriz es pentadiagonal

Una matriz tridiagonal seria : $a_{ij} = 0$ para $| i - j | > 1$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Estas matrices son llamadas matrices de Jacobi

Variantes de Eliminación de Gauss
Método de Thomas

Para estas matrices, tridiagonales, se implementa una variante de LU, con un costo O(n)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y vale que:

$l_{11} = a_{11}$, $\quad u_{12} = a_{12}/l_{11}$
$l_{ii} = a_{ii} - a_{ii-1}u_{i-1i}$, $\quad u_{i\,i+1} = a_{i\,i+1}/l_{ii}$ $\quad i = 2,\ldots,n-1$
$l_{nn} = a_{nn} - a_{n\,n-1}u_{n-1\,n}$