Unidad 3: Distribuciones de Probabilidad
TRANSFORMACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS

Probabilidad y Estadística

Año 2020

TRANSFORMACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS

- Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad conocida, entonces

$Y = g(X)$

es también una variable aleatoria

- ¿Cuál es la distribución de probabilidades de Y?

Casos de Transformación de vs. as.

- Sea X una v.a. **discreta**, entonces Y=g(X) es una v.a. **discreta.**
- Sea X una v.a. **continua**, entonces Y=g(X) puede ser
  - una v.a. **discreta** ó
  - una v.a. **continua.**

Caso Discreto

- Si X es v.a. discreta, entonces Y = g(X) también es discreta

Sea $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ el recorrido de X y sea

$R_Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ el recorrido de Y

- La función de masa de probabilidad de la v. a. X es conocida. Se desea encontrar la función de masa de probabilidad de la v. a. Y
- Sea $y_i \in R_Y$

$$p_Y(y_i) = P[Y = y_i] = P\{x \in R_X : g(x) = y_i\} = \sum_{x \in R_X : g(x) = y_i} p_X(x)$$

Ejemplo: Transformación de variables aleatorias, caso discreto-discreto

- Sea X v.a. con recorrido $R_X = \{-1, 0, 1, 2\}$ tal que $p_x(x) = 1/4$ para todo $x \in R_x$. Sea $Y = X^2$. Encuentre la función de masa de Y.

$R_Y = \{0, 1, 4\}$

$p_Y(0) = P(Y = 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = ¼$

$p_Y(1) = P(Y = 1) = P(X^2 = 1) = P(X = \pm 1) = 1/2$

$p_Y(4) = P(Y = 4) = P(X^2 = 4) = P(X = 2) = ¼$

Y	$p_Y(y)$
0	1/4
1	1/2
4	1/4
	1

Caso Continuo-discreto

Si X es una v. a. continua, entonces $Y = g(X)$ puede ser

- discreta o
- continua

- Si **Y es discreta** se procede como antes,

Ejemplo: Transformación de variables aleatorias, caso continuo-discreto

Sea X una v.a. continua con f.d.p. dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y sea la transformación $\mathbf{Y(x)} = \begin{cases} \mathbf{-1} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x < 1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x \ge 1} \end{cases}$

$$P\ (Y = -1) = P\ (\ X < 1\ ) = \int_{-\infty}^{1} \mathbf{f(x)dx} = \int_{0}^{1} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

$$P\ (Y = 1) = \mathbf{P(X \ge 1)} = \int_{1}^{\infty} \mathbf{f(x)dx} = \int_{1}^{4} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

y	$p_Y(y)$
-1	1/4
1	3/4
	1

Caso Continuo-continuo

- Si **Y es continua**, se debe determinar la función de densidad de probabilidad de Y utilizando la densidad de probabilidad de X que es conocida

Caso Continuo-continuo

Procedimiento (válido para g monótona creciente)

- Representar gráficamente $Y = g(X)$
- Obtenga el recorrido de la v. a. Y
- Obtenga F_Y, la función de distribución acumulada de Y

$\mathbf{y \in \Re}$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < \ \dots \\ F_X(|g^{-1}(y)|) & \dots \leq y < \ \dots \\ 1 & y \geq \ \dots \end{cases}$$

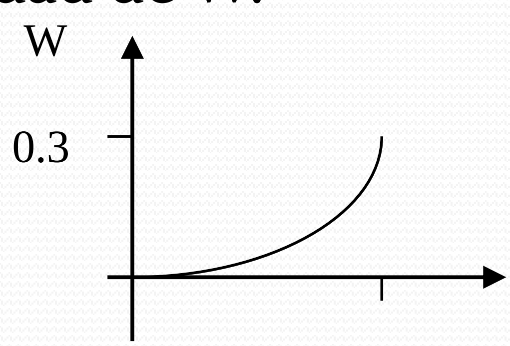
- Derive F_Y respecto de y a fin de obtener f_Y

Ejemplo: Transformación de variable aleatorias, caso continuo-continuo

Sea V la velocidad del viento, en km/h. Supongamos que V es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad dada por:

$$f_V(v) = \begin{cases} 1/10 & 0 \le v \le 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La presión W sobre la superficie de un avión (dada en Km/m²) está dada por $W = 0.003V^2$. Encuentre la función de densidad de W.



$$0 \le v \le 10 \quad \Rightarrow \quad 0 \le w \le 0.3$$

Continuación ejemplo

- Sea w: w < 0; $F_W(w) = P[W \le w] = 0$ por el R_W entonces

$$F_W'(w) = 0 = f_W(w)$$

- Sea w : $0 \le w \le 0.3$

$$F_W(w) = P[W \le w] = P[0.003V^2 \le w] = P\left[|V| \le \sqrt{\frac{w}{0.003}}\right]$$

$$= P\left[V \le \sqrt{\frac{w}{0.003}}\right] = F_V\left(\sqrt{\frac{w}{0.003}}\right)$$

$$f_W(w) = f_V\left(\sqrt{\frac{w}{0.003}}\right)\frac{1}{2}\frac{w^{\frac{-1}{2}}}{\sqrt{0.003}} = \frac{1}{10}\frac{1}{2}w^{-1/2}10\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}w^{-1/2}$$

- Sea w: w > 0.3 ; $F_W(w) = P[W \le w] = 1$ por el R_W entonces

$$F_W'(w) = 0 = f_W(w)$$

Continuación ejemplo

- Finalmente

$$f_W(w) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} w^{-1/2} & 0 < w < 0.3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$