Simulación

Método de Montecarlo

Simulación de una Muestra aleatoria

- El método de Montecarlo es un procedimiento para simular una muestra de cualquier distribución de probabilidad. y se basa en el siguiente teorema:

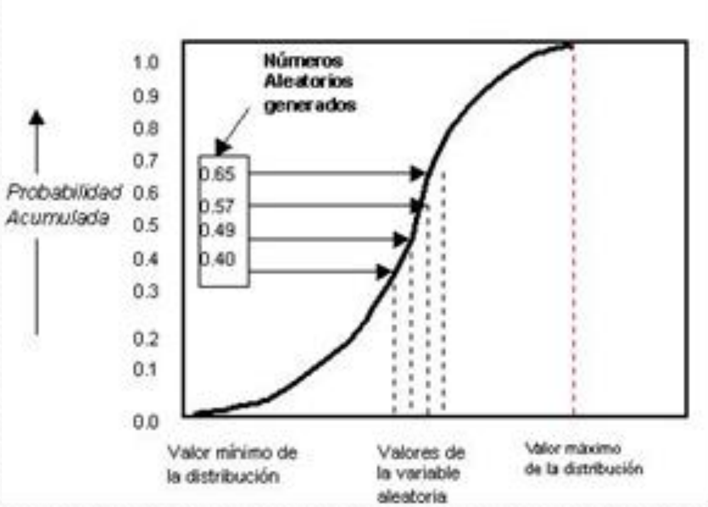
Teorema de la transformación integral

Sea X v. a. continua X con función de distribución acumulada F_X, $\forall x \in [a, b]$ $f_X(x) > 0$. Si definimos a la variable aleatoria U como: $U = F_X(X)$ entonces

U tiene distribución Uniforme en [0, 1].

$U = F_X(X)$ se llama

la Transformada Integral de X.



Aplicación

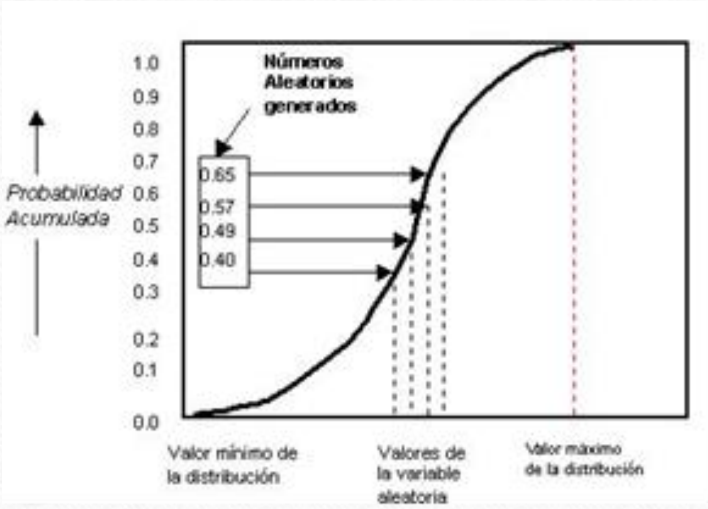
$$U = F_X(X) \Rightarrow X = F_X^{-1}(U).$$

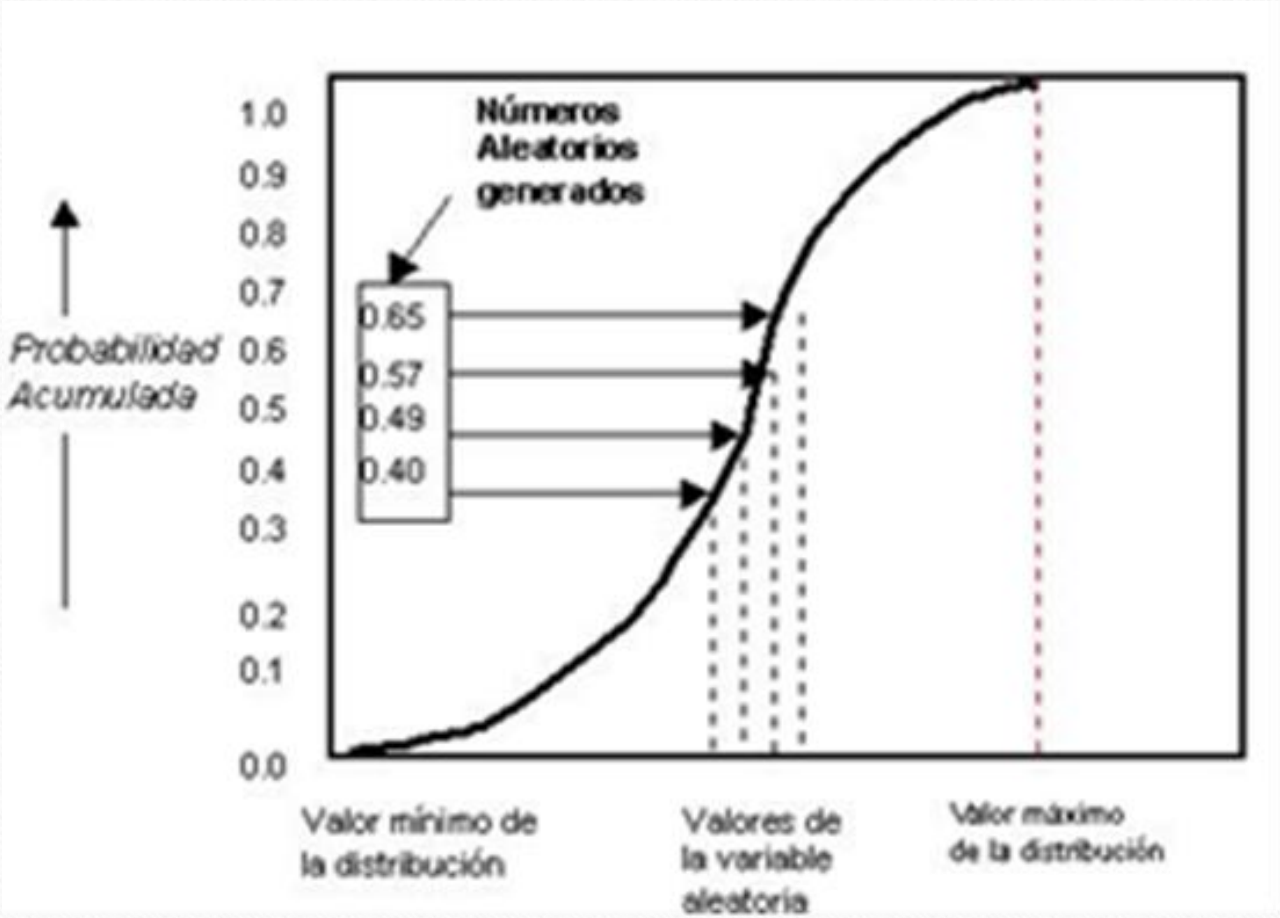
Objetivo:

Generar una **MUESTRA ALEATORIA** de una Población

Procedimiento (caso continuo)

1. Tomar n números aleatorios $u_1, \ldots, u_n$ con distribución Uniforme en [0,1] de la tabla, con tantos dígitos como precisión se desee.
2. Obtener los números aleatorios mediante la fórmula $x_i = F_X^{-1}(u_i)$, donde F_X es la función de distribución acumulada de la v. a. en cuestión, X.





Números
Aleatorios
generados
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
Probabilidad
Acumulada
0.65
0.57
0.49
0.40
Valor mínimo de
la distribución
Valores de
la variable
aleatoria
Valor máximo
de la distribución

Ejemplo: Simulo Exponencial

La duración de ciertos artefactos electrónicos es una variable aleatoria Exponencial con media 2 años. Se desea simular la duración de 3 artefactos de este tipo.

$$X \sim E\left(\frac{1}{2}\right) \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se eligen 3 números al azar: $u_1 = 0.8133$ $u_2 = 0.0423$ $u_3 = 0.8811$

$$u = F_X(x) \Rightarrow u = 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}x} = 1 - u \Rightarrow -\frac{1}{2}x = \ln(1-u) \Rightarrow x = -2\ln(1-u)$$

Luego las duraciones de los tres artefactos son:

$x_1 = 3.357$ $x_2 = 0.0864$ $x_3 = 4.259$

Ejemplo: Simulo Normal

La resistencia a la compresión de ciertas vigas de cemento es una variable aleatoria con distribución N(300, 20). Se desea simular el comportamiento de 3 de estas vigas.

Se eligen 3 números al azar:

$u_1 = 0.2793$ $\quad$ $u_2 = 0.4701$ $\quad$ $u_3 = 0.9466$

Entonces

$$\Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) = u_i \qquad \Rightarrow \qquad \Phi^{-1}(u_i) = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

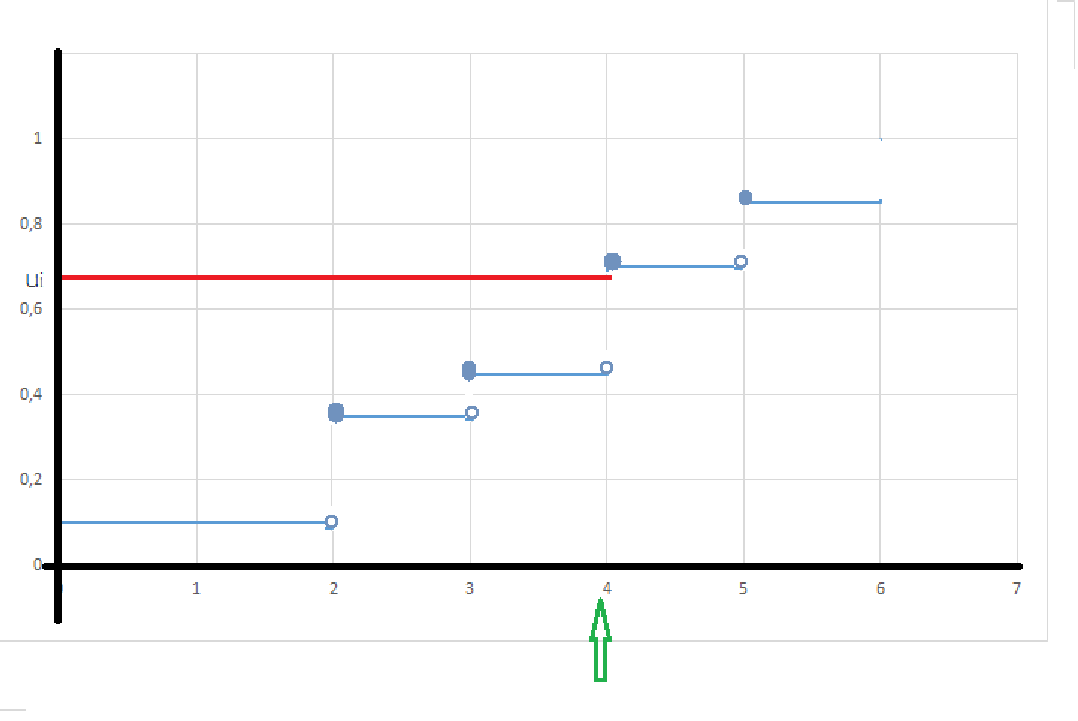
Luego: $\frac{x_1 - \mu}{\sigma} = -0.59$ $\quad$ $\frac{x_2 - \mu}{\sigma} = -0.08$ $\quad$ $\frac{x_3 - \mu}{\sigma} = 1.61$

Entonces, el comportamiento de las 3 vigas es:

$x_1 = \sigma\ (-0.59) + \mu = 288.2$
$x_2 = 298.4$
$x_3 = 332.2$

Procedimiento: (caso discreto)

1) Tomar n números aleatorios u_1, …, u_n con distribución Uniforme en [0, 1] de la tabla, con tantos dígitos como precisión se desee
2) Considerar a u_i como un valor de la distribución acumulada F_X (tabulada) y tomar el menor x_i que verifique: $F_X(x_i) > u_i$.



Ejemplo: Simulo Poisson

El número de llamadas que llegan por minuto a una central es una variable aleatoria con distribución P(1). Se desea generar el comportamiento de la central en tres períodos de 1 minuto.

Los números al azar son:

$u_1 = 0.0032$ $u_2 = 0.9367$ $u_3 = 0.5369$

El primer x_i es 0 pues $F_X(0) > 0.0032$

El segundo x_i es 3 pues $F_X(3) > 0.9367$

El tercer x_i es 1 pues $F_X(1) > 0.5369$

Función de distribución acumulada

x	$F_X(x)$
x<0	0
$0 \leq x < 1$	0.3679
$1 \leq x < 2$	0.7358
$2 \leq x < 3$	0.9197
$3 \leq x < 4$	0.9810
:	:
.	.