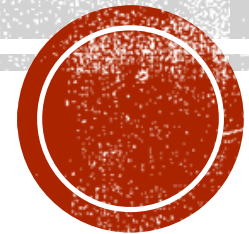


LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Al fin empezamos con las continuas!!



Una variable aleatoria X se dice que tiene distribución Exponencial si su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{donde } \lambda > 0$$

Se puede probar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$EX = 1/\lambda$$

$$V(X) = 1/\lambda^2$$



EJEMPLO

La duración en años de cierto tipo de batería de respaldo de emergencia es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\lambda=0.1$.

- a) ¿Cuál es la vida media de la batería?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que una batería dure por lo menos 8 años?
- c) Si 5 de estas baterías son instaladas, ¿cuál es la probabilidad que al menos 2 funcionen por lo menos 8 años?



¿CUÁL ES LA VIDA MEDIA DE LA BATERÍA?

- a) $EX = 1/\lambda = 10 \text{ años}$



¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE UNA BATERÍA DURE POR LO MENOS 8 AÑOS?

▪ b) $P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8)$

$$= 1 - \int_0^8 0,1e^{-0,1x} dx = 1 + e^{-0,1x} \Big|_0^8 = 1 + (e^{-0,8} - e^0) = e^{-0,8} = 0,449$$



**SI 5 DE ESTAS BATERÍAS SON INSTALADAS,
¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD QUE AL MENOS 2
FUNCIONEN POR LO MENOS 8 AÑOS?**

c) Y= “Número de baterías de las 5 instaladas que funcionan por lo menos 8 años”

$$Y \sim b(5, 0.45)$$

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1))$$

$$= 1 - \left[\binom{5}{0} 0.45^0 \times 0.55^5 + \binom{5}{1} 0.45^1 \times 0.55^4 \right] = 1 - (0.05 + 0.206) = 0.744$$



RELACION ENTRE LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL Y EL PROCESO DE POISSON

Sea X “Cantidad de sucesos en un tiempo t ”, tiene distribución de Poisson de parámetro λ ; es decir $X \sim P(\lambda)$.

Definamos a T como “Tiempo que transcurre hasta la primera ocurrencia”

¿Qué distribución de probabilidades tiene la variable aleatoria T ?

Primero observemos que T es continua y $R_T = [0, \infty)$

Sea $t \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(\text{“no hay ocurrencias en el intervalo } [0, t]\text{”}) \\ &= 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\lambda t} (\lambda t)^0 / 0! = 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Entonces $F_T'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ para $t > 0$ y cero en otro caso, que es la función de densidad de probabilidad de la v. a. Exponencial.



EJEMPLO: DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL Y DE POISSON

Suponga que llegan 3 camiones por hora, en promedio, para ser descargados en una bodega, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo entre el arribo de sucesivos camiones sea a lo sumo 5 minutos?

X = “Número de camiones que llegan por hora”

$X \sim P(3)$

T = “Tiempo entre el arribo de dos camiones sucesivos en horas”

$T \sim E(3)$

$$P(T \leq 5 \text{ min}) = P(T \leq 1/12) = \int_0^{1/12} 3e^{-3x} dx = 1 - e^{-\frac{1}{4}} = 0,221$$

■



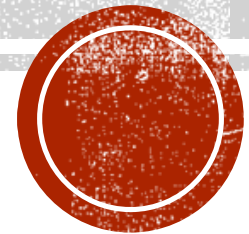
$$\begin{aligned}P(T \leq 5 \text{ min}) &= 1 - P(T > 5 \text{ min}) \\&= 1 - P(\text{no lleguen camiones durante 5 min}) \\&= 1 - e^{-\frac{1}{4}} = 1 - e^{-\frac{1}{4}} = 0,221\end{aligned}$$

Observación: $\lambda t = \frac{5 \times 3}{60} = \frac{15}{6} = \frac{1}{4}$



LA DISTRIBUCIÓN UNIFORME

La mas Fácil de Todas!



DISTRIBUCIÓN UNIFORME

- La v. a. X tiene distribución Uniforme en el intervalo $[a, b]$, si su función de densidad de probabilidad es
$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se puede probar que:

1) $f_X(x) \geq 0 \quad a \leq x \leq b$

2) $\int_a^b f_X(x) dx = 1$ (Demostrar como ejercicio)

3) $EX = \frac{a+b}{2}$ y $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ (Demostrar como ejercicio)

4) Notación: $X \sim U[a, b]$

