Unidad 7: Estimación

Tema: Estimación por Intervalos

Intervalo de confianza para la media

Intervalo de (1–α)100 % de confianza para μ con σ conocido

- $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ conocido.

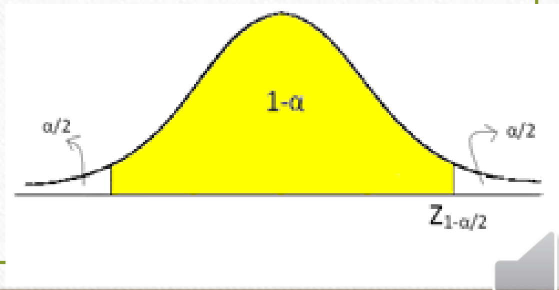
Intervalo de (1–α)100 % de confianza para μ con σ conocido

- $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ conocido.
- Estadístico pivote: $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Intervalo de (1–α)100 % de confianza para μ con σ conocido

- Planteamos:

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$



Cálculos auxiliares:

- $P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

Multiplicamos por $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- $P\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} < \bar{X} - \mu < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

Restamos $\bar{X}$
y multiplicamos por -1

- $P\left(\underbrace{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}}_{\hat{\theta}_1} < \underbrace{\mu}_{\theta} < \underbrace{\bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}}_{\hat{\theta}_2}\right) = 1-\alpha$

Intervalo de (1–α)100 % de confianza para μ con σ conocido

$$IC_{(1-\alpha)100\%} = \bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}$$

Ejemplo 1: IC para μ con σ conocido

- Una máquina de refrescos está ajustada, de manera que la cantidad de líquido envasada, en litros, es una v. aleatoria con distribución aprox. N (μ, 0.15). Una muestra de 36 envases tiene un contenido promedio de 2.25 l. Se quiere estimar μ con un intervalo de 95% de confianza.

$$IC_{(1-\alpha)100\%} = \bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}$$

Ejemplo 1: IC para μ con σ conocido

- $X =$ *"Cantidad envasada, en litros."*
- $X_1, \ldots, X_{36}$ m. a. de $X \sim N(\mu, 0.15)$
- Estadístico pivote: $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
- 95% de confianza: $(1-\alpha)100\% = 95\%$ entonces $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$

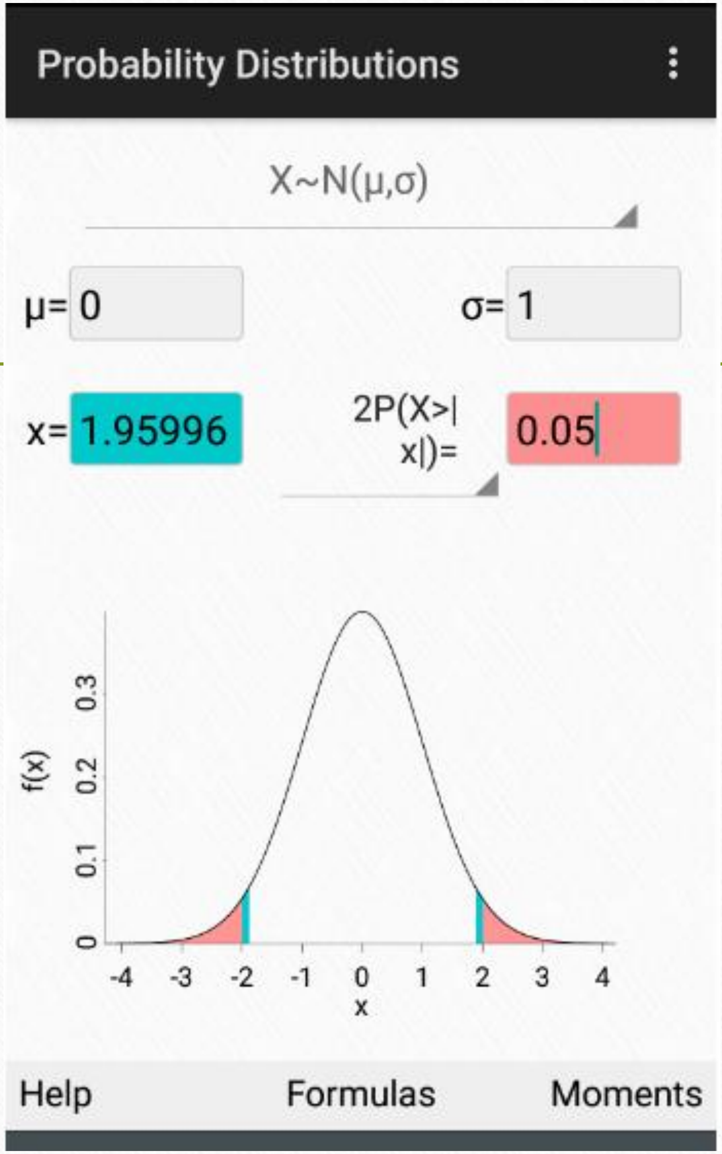
Obtención de $z_{0.975}$ usando Tabla

Tabla de la función de distribución Normal Estándar

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} (2\pi)^{-1/2} \exp(-u^2/2)du$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	X	Φ(x)
0.00	0.5000	0.60	0.7257	1.20	0.8849	1.80	0.9641	2.40	0.9918
0.01	0.5040	0.61	0.7291	1.21	0.8869	1.81	0.9649	2.41	0.9920
0.02	0.5080	0.62	0.7324	1.22	0.8888	1.82	0.9656	2.42	0.9922
0.03	0.5120	0.63	0.7357	1.23	0.8907	1.83	0.9664	2.43	0.9925
0.04	0.5160	0.64	0.7389	1.24	0.8925	1.84	0.9671	2.44	0.9927
0.05	0.5199	0.65	0.7422	1.25	0.8944	1.85	0.9678	2.45	0.9929
0.06	0.5239	0.66	0.7454	1.26	0.8962	1.86	0.9686	2.46	0.9931
0.07	0.5279	0.67	0.7486	1.27	0.8980	1.87	0.9693	2.47	0.9932
0.08	0.5319	0.68	0.7517	1.28	0.8997	1.88	0.9699	2.48	0.9934
0.09	0.5359	0.69	0.7549	1.29	0.9015	1.89	0.9706	2.49	0.9936
0.10	0.5398	0.70	0.7580	1.30	0.9032	1.90	0.9713	2.50	0.9938
0.11	0.5438	0.71	0.7611	1.31	0.9049	1.91	0.9719	2.52	0.9941
0.12	0.5478	0.72	0.7642	1.32	0.9066	1.92	0.9726	2.54	0.9945
0.13	0.5517	0.73	0.7673	1.33	0.9082	1.93	0.9732	2.56	0.9948
0.14	0.5557	0.74	0.7704	1.34	0.9099	1.94	0.9738	2.58	0.9951
0.15	0.5596	0.75	0.7734	1.35	0.9115	1.95	[illegible]	2.60	0.9953
0.16	0.5636	0.76	0.7764	1.36	0.9131	1.96	0.9750	2.62	0.9956
0.17	0.5675	0.77	0.7794	1.37	0.9147	1.97	[illegible]	2.64	0.9959
0.18	0.5714	0.78	0.7823	1.38	0.9162	1.98	0.9761	2.66	0.9961
0.19	0.5753	0.79	0.7852	1.39	0.9177	1.99	0.9767	2.68	0.9963
0.20	0.5793	0.8	0.7881	1.40	0.9192	2.00	0.9772	2.70	0.9965
0.21	0.5832	0.81	0.7910	1.41	0.9207	2.01	0.9778	2.72	0.9967
0.22	0.5871	0.82	0.7939	1.42	0.9222	2.02	0.9783	2.74	0.9969
0.23	0.5910	0.83	0.7967	1.43	0.9236	2.03	0.9788	2.76	0.9971
0.24	0.5948	0.84	0.7995	1.44	0.9251	2.04	0.9793	2.78	0.9973
0.25	0.5987	0.85	0.8023	1.45	0.9265	2.05	0.9798	2.80	0.9974
0.26	0.6026	0.86	0.8051	1.46	0.9279	2.06	0.9803	2.82	0.9976
0.27	0.6064	0.87	0.8078	1.47	0.9292	2.07	0.9808	2.84	0.9977
0.28	0.6103	0.88	0.8106	1.48	0.9306	2.08	0.9812	2.86	0.9979
0.29	0.6141	0.89	0.8133	1.49	0.9319	2.09	0.9817	2.88	0.9980
0.30	0.6179	0.90	0.8159	1.50	0.9332	2.10	0.9821	2.90	0.9981
0.31	0.6217	0.91	0.8186	1.51	0.9345	2.11	0.9826	2.92	0.9982
0.32	0.6255	0.92	0.8212	1.52	0.9357	2.12	0.9830	2.94	0.9984
0.33	0.6293	0.93	0.8238	1.53	0.9370	2.13	0.9834	2.96	0.9985
0.34	0.6331	0.94	0.8264	1.54	0.9382	2.14	0.9838	2.98	0.9986
0.35	0.6368	0.95	0.8289	1.55	0.9394	2.15	0.9842	3.00	0.9987
0.36	0.6406	0.96	0.8315	1.56	0.9406	2.16	0.9846	3.05	0.9989
0.37	0.6443	0.97	0.8340	1.57	0.9418	2.17	0.9850	3.10	0.9990
0.38	0.6480	0.98	0.8365	1.58	0.9429	2.18	0.9854	3.15	0.9992
0.39	0.6517	0.99	0.8389	1.59	0.9441	2.19	0.9857	3.20	0.9993
0.40	0.6554	1.00	0.8413	1.60	0.9452	2.20	0.9861	3.25	0.9994
0.41	0.6591	1.01	0.8438	1.61	0.9463	2.21	0.9864	3.30	0.9995
0.42	0.6628	1.02	0.8461	1.62	0.9474	2.22	0.9868	3.35	0.9996
0.43	0.6664	1.03	0.8485	1.63	0.9484	2.23	0.9871	3.40	0.9997
0.44	0.6700	1.04	0.8508	1.64	0.9495	2.24	0.9875	3.45	0.9997
0.45	0.6736	1.05	0.8531	1.65	0.9505	2.25	0.9878	3.50	0.9998
0.46	0.6772	1.06	0.8554	1.66	0.9515	2.26	0.9881	3.55	0.9998
0.47	0.6808	1.07	0.8577	1.67	0.9525	2.27	0.9884	3.60	0.9998
0.48	0.6844	1.08	0.8599	1.68	0.9535	2.28	0.9887	3.65	0.9999
0.49	0.6879	1.09	0.8621	1.69	0.9545	2.29	0.9890	3.70	0.9999
0.50	0.6915	1.10	0.8643	1.70	0.9554	2.30	0.9893	3.75	0.9999
0.51	0.6950	1.11	0.8665	1.71	0.9564	2.31	0.9896	3.80	0.9999
0.52	0.6985	1.12	0.8686	1.72	0.9573	2.32	0.9898	3.85	0.9999
0.53	0.7019	1.13	0.8708	1.73	0.9582	2.33	0.9901	3.90	1.0000
0.54	0.7054	1.14	0.8729	1.74	0.9591	2.34	0.9904	3.95	1.0000
0.55	0.7088	1.15	0.8749	1.75	0.9599	2.35	0.9906	4.00	1.0000
0.56	0.7123	1.16	0.8770	1.76	0.9608	2.36	0.9909		
0.57	0.7157	1.17	0.8790	1.77	0.9616	2.37	0.9911		
0.58	0.7190	1.18	0.8810	1.78	0.9625	2.38	0.9913		
0.59	0.7224	1.19	0.8830	1.79	0.9633	2.39	0.9916		

Obtención de $z_{0.975}$ usando app



Ejemplo 1: IC para μ con σ conocido

- De la muestra: $\bar{X} = 2.25$ y $n = 36$

- $IC_{95\%} = \bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}$

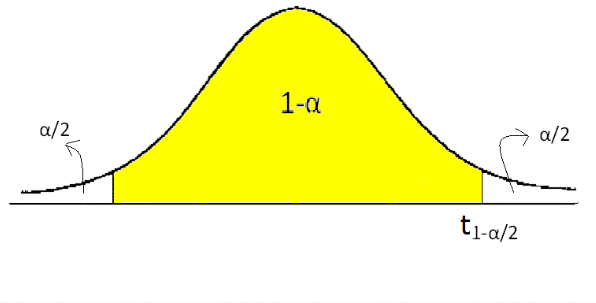
$$= 2.25 \pm \frac{0.15}{\sqrt{36}} 1.96$$

$$\boxed{IC_{95\%} = (\mathbf{2.201,\ 2.299})}$$

Intervalo de (1–α)100 % de confianza para μ con σ desconocido

- Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ desconocido.

- Estadístico pivote: $\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ donde $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2}$



Distribución t de Student

- La distribución t es simétrica alrededor de cero.
- Tiene forma similar a la distribución Normal.
- Tiene mayor varianza que la distribución N(0,1).
- A medida que n crece, la distribución t se aproxima a la N(0,1).
- Para $n > 120$ son prácticamente iguales.

Intervalo de (1–α)100 % de confianza para μ con σ desconocido

- Planteamos: $P\left(-t_{1-\alpha/2(n-1)} < \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha/2(n-1)}\right) = 1-\alpha$
- Obtenemos:

$$P\left(\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2(n-1)} < \mu < \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

- $\boxed{IC_{(1-\alpha)100\%} = \bar{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2(n-1)}}$

Ejemplo 2: IC para μ con σ desconocido

- Una máquina produce piezas metálicas de forma cilíndrica. Los diámetros, en cm., de dichas piezas se distribuyen con una distribución $N(\mu, \sigma)$. Se toma una muestra de piezas cuyos diámetros son:

1.01 0.97 1.03 1.04 0.99 0.98 0.99 1.01 1.00

Se busca un intervalo de 95% para μ.

Ejemplo 2: IC para μ con σ desconocido

- $X =$ *"Diámetro de piezas, en cm."*
- $X_1, \ldots, X_9$ m. a. de $X \sim N(\mu, \sigma)$
- Estadístico pivote: $\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Ejemplo 2: IC para μ con σ desconocido

- Planteamos:

$$P\left(-t_{1-\alpha/2(n-1)} < \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha/2(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

- $IC_{95\%} = \bar{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}}\ t_{1-\alpha/2(n-1)}$

Ejemplo 2: IC para μ con σ desconocido

- De la muestra (usar calculadora):

$$\bar{X} = 1.002 \quad s = 0.023 \quad n = 9$$

- 95% de confianza: $(1-\alpha)100\% = 95\%$

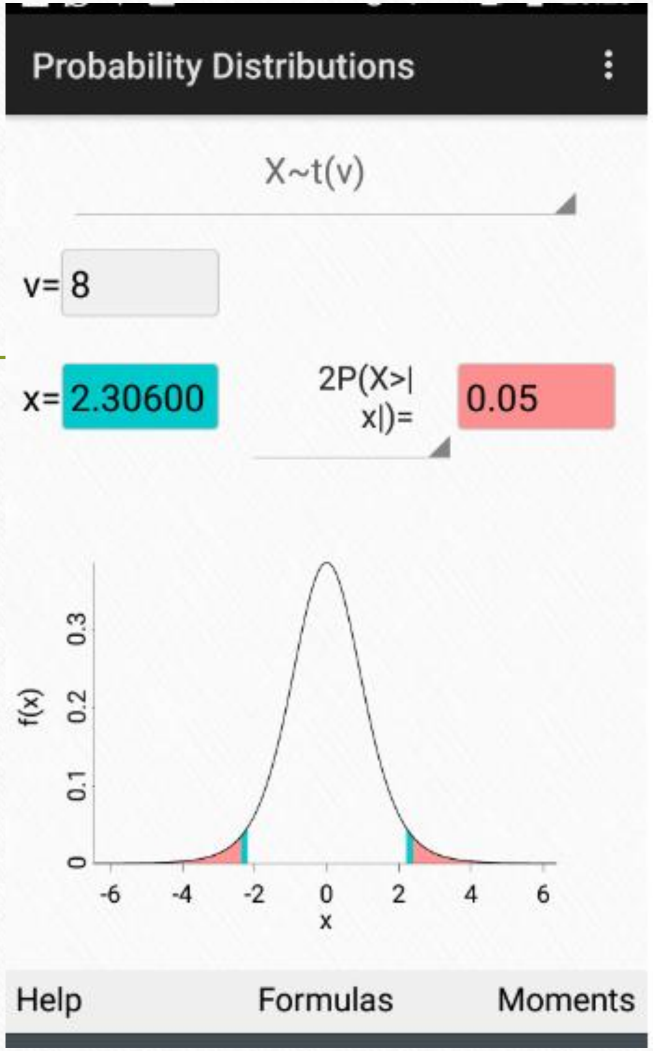
entonces $t_{1-\alpha/2(n-1)} = t_{0.975\,(8)} = 2.31$

Obtención de $t_{0.975}$ (8) usando Tabla

Tabla de la Distribución t de Student
Valores de la función de distribución, $P(t \leq t_p) = p$; k = grados de libertad.

k	$t_{0.995}$	$t_{0.99}$	$t_{0.975}$	$t_{0.95}$	$t_{0.90}$	$t_{0.80}$	$t_{0.75}$	$t_{0.70}$	$t_{0.60}$	$t_{0.55}$
1	63,66	31,82	12,71	6,31	3,08	1,376	1,000	0,727	0,325	0,158
2	9,92	6,96	4,30	2,92	1,89	1,061	0,816	0,617	0,289	0,142
3	5,84	4,54	3,18	2,35	1,64	0,978	0,765	0,584	0,277	0,137
4	4,60	3,75	2,78	2,13	1,53	0,941	0,741	0,569	0,271	0,134
5	4,03	3,36	2,57	2,02	1,48	0,920	0,727	0,559	0,267	0,132
6	3,71	3,14	2,45	1,94	1,44	0,906	0,718	0,553	0,265	0,131
7	3,50	3,00	2,36	1,89	1,41	0,896	0,711	0,549	0,263	0,130
8	3,36	2,90	2,31	1,86	1,40	0,889	0,706	0,546	0,262	0,130
9	3,25	2,82	2,26	1,83	1,38	0,883	0,703	0,543	0,261	0,129
10	3,17	2,76	2,23	1,81	1,37	0,879	0,700	0,542	0,260	0,129
11	3,11	2,72	2,20	1,80	1,36	0,876	0,697	0,540	0,260	0,129
12	3,05	2,68	2,18	1,78	1,36	0,873	0,695	0,539	0,259	0,128
13	3,01	2,65	2,16	1,77	1,35	0,870	0,694	0,538	0,259	0,128
14	2,98	2,62	2,14	1,76	1,35	0,868	0,692	0,537	0,258	0,128
15	2,95	2,60	2,13	1,75	1,34	0,866	0,691	0,536	0,258	0,128
16	2,92	2,58	2,12	1,75	1,34	0,865	0,690	0,535	0,258	0,128
17	2,90	2,57	2,11	1,74	1,33	0,863	0,689	0,534	0,257	0,128
18	2,88	2,55	2,10	1,73	1,33	0,862	0,688	0,534	0,257	0,127
19	2,86	2,54	2,09	1,73	1,33	0,861	0,688	0,533	0,257	0,127
20	2,85	2,53	2,09	1,72	1,33	0,860	0,687	0,533	0,257	0,127
21	2,83	2,52	2,08	1,72	1,32	0,859	0,686	0,532	0,257	0,127
22	2,82	2,51	2,07	1,72	1,32	0,858	0,686	0,532	0,256	0,127
23	2,81	2,50	2,07	1,71	1,32	0,858	0,685	0,532	0,256	0,127
24	2,80	2,49	2,06	1,71	1,32	0,857	0,685	0,531	0,256	0,127
25	2,79	2,49	2,06	1,71	1,32	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
26	2,78	2,48	2,06	1,71	1,31	0,856	0,684	0,531	0,256	0,127
27	2,77	2,47	2,05	1,70	1,31	0,855	0,684	0,531	0,256	0,127
28	2,76	2,47	2,05	1,70	1,31	0,855	0,683	0,530	0,256	0,127
29	2,76	2,46	2,05	1,70	1,31	0,854	0,683	0,530	0,256	0,127
30	2,75	2,46	2,04	1,70	1,31	0,854	0,683	0,530	0,256	0,127
40	2,70	2,42	2,02	1,68	1,30	0,851	0,681	0,529	0,255	0,126
60	2,66	2,39	2,00	1,67	1,30	0,848	0,679	0,527	0,254	0,126
120	2,62	2,36	1,98	1,66	1,29	0,845	0,677	0,526	0,254	0,126
∞	2,58	2,33	1,96	1,645	1,28	0,842	0,675	0,524	0,253	0,126

Obtención de $t_{0.975\,(8)}$ usando app



Ejemplo 2: IC para μ con σ desconocido

- $$IC_{95\%} = \bar{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}}\ t_{1-\alpha/_2(n-1)}$$
  $$= 1.002 \pm \frac{0.023}{\sqrt{9}} * 2.31$$
  $$= (\mathbf{0.98, 1.02})$$