Unidad 2: Probabilidad condicional

Probabilidad y Estadística

Año 2020

Ejemplo

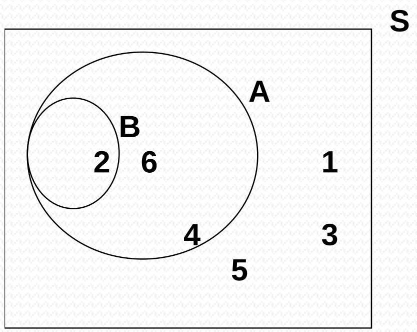
ε = Se lanza un dado

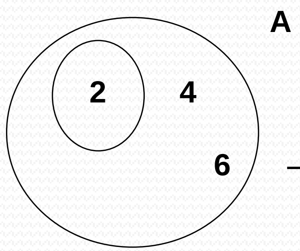
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6 }

A = “Se obtiene un nº par” = { 2, 4, 6 }

B = “Se obtiene el nº 2” = { 2 } $\Rightarrow$ P(B) = 1/6

Si ahora por alguna razón **sabemos**, que al lanzar el dado se obtuvo un nº par, la probabilidad de que se obtenga un 2 es 1/3.





$\rightarrow$ espacio muestral reducido

Definición de Probabilidad condicional

- Sea A y B sucesos en S tales que P(A) > 0 definimos:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

- Análogamente si P(B) > 0 $\quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- Nota: Se puede probar que para un suceso B fijo tal que P(B)>0, $\forall \mathbf{A} \subset \mathbf{S}$ la función P(A/B), es una probabilidad o sea cumple con los axiomas de la definición de probabilidad.

La probabilidad condicional P(*/B) cumple con los siguientes axiomas:

- $\forall\ A \in F \quad P(A/B) \geq 0$
- $P(S/B) = 1$
- Si $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión de sucesos disjuntos, tal que $\forall\ i \neq j\ \ A_i \cap A_j = \emptyset$ entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Big/ B \right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i / B)$$

- Ejercicio: Probar estos axiomas.

Ejemplo

En una cierta población, el 10% de la gente es rica, el 5% es famosa y un 3% es rica y famosa. Se elige una persona de la población al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la persona sea famosa **si se sabe que es rica**?

$$P(F/R) = \frac{P(F \cap R)}{P(R)} = \frac{0.03}{0.10} = 0.30$$

.

continuación

- ¿Cuál es la probabilidad de que no sea famosa si se sabe que es rica?

Se pide $P(F^C / R)$

Como la probabilidad condicional es una probabilidad, se tiene:

$$P(F^C / R) = 1 - P(F / R) = 1 - 0.30 = 0.70$$

Regla del Producto

Dados **ε** y *S, sean* A y B son sucesos de S entonces

$P(A \cap B) = P(A)\ P(B|\ A)$ si $P(A) > 0$ o bien

$= P(B)\ P(A|\ B)$ si $P(B) > 0$

- **Nota:** Este teorema se puede generalizar a n sucesos, por ejemplo para n = 3:

$P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B/A) P(C/AB)$ si $P(AB) > 0$

Ejemplo

Consideremos un lote de 100 artículos, que consta de 20 defectuosos y 80 sin defectos. Elegimos 2 al azar *sin sustitución*. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos artículos sean defectuosos?

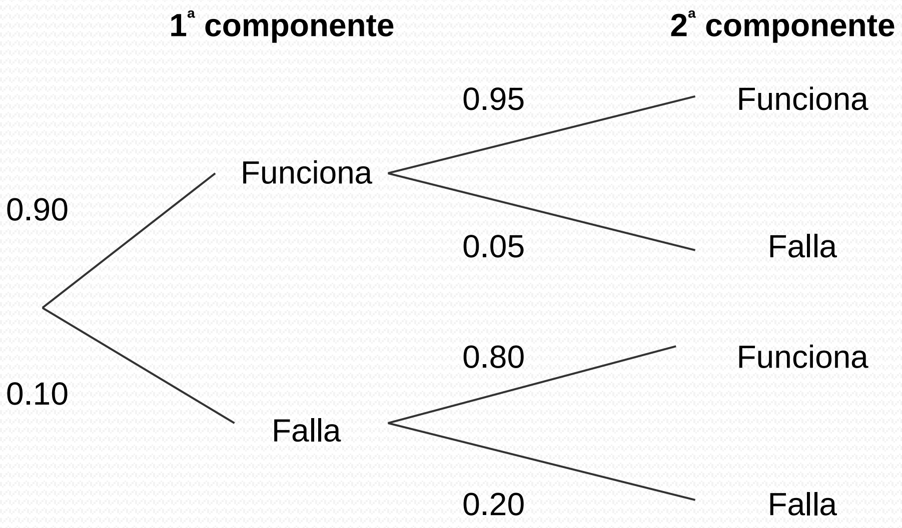
- D1 = "el primer artículo es defectuoso"
- D2 = "el segundo artículo es defectuoso"
- $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2/D_1) = \frac{20}{100}\,\frac{19}{99} = \frac{19}{495}$

Ejemplo

Suponga 2 componentes eléctricas. La probabilidad de que la primera componente falle es 0.10. Si la primera falla, la probabilidad de que la segunda falle es 0.20. Pero si la primera funciona la probabilidad de que la segunda falle es 0.05.

Calcular las siguientes probabilidades:

- Al menos 1 componente funciona.
- Exactamente 1 de las componentes funciona.
- La segunda componente funciona.



A = Al menos 1 componente funciona
A^c = Ambas fallan
$P(A) = 1 – P(A^c) = 1 – 0.10 \times 0.20 = 0.98$

B = Exactamente 1 de las componentes funciona
$P(B) = 0.90 \times 0.05 +0.10 \times 0.80 = 0.125$

C = La segunda componente funciona
$P(C) = 0.90 \times 0.95 + 0.10 \times 0.80 = 0.935$