UNIDAD III: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD – 1ra Parte

Hasta este momento definimos ε y S su espacio muestral asociado. El espacio muestral puede ser numérico o no numérico.

Ejemplo 1: ε_1 = Arrojo 2 monedas → S = {cc, cs, sc, ss }

Ejemplo 2: ε_2 = Arrojo un dado → S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Vamos a transformar el espacio S a un conjunto de números reales mediante lo que llamamos **variable aleatoria**.

Definición:
Sea ε un experimento aleatorio y S su espacio muestral. Una variable aleatoria es una función que asigna a cada elemento s de S un número real X(s).

Es decir: $X: S \rightarrow R$
$s \rightarrow X(s)$

Ejemplo 1: ε_1 = Arrojo 2 monedas → S = {cc, cs, sc, ss}
Definimos la v .a
X = nº de caras que aparecen

X (cc) = 2 X (sc) = 1 X (cs) = 1 X (ss) = 0

$R_x = \{0, 1, 2\}$

Ejemplo 2: ε_2 = Arrojo un dado → S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
Definimos la v. a.
X=nº obtenido

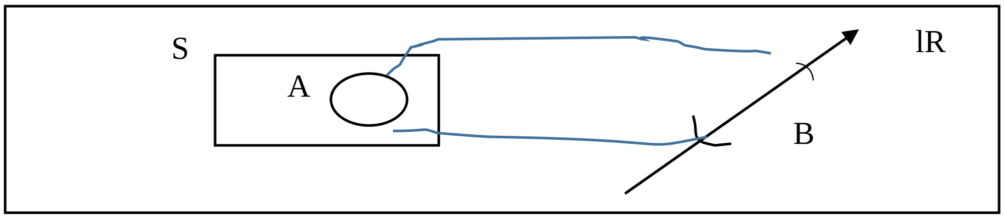
$X(i) = i;\quad i = 1, 2, \ldots, 6.$ $R_x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Nota:
- En muchos casos el resultados del espacio muestral ya es un número, en este caso $X(s)=s$
- El conjunto de todos los valores posibles de X se llama recorrido de la variable X, se denota con R_X

Ejemplo 3: ε = Se lanzan 3 monedas → S = {ccc, ccs, csc, scc, css, scs, ssc, sss}
X = Se cuenta el número de caras. RX = {0, 1, 2, 3}
P (X = 0) = P({sss})=1/8
P (X = 1) = P({css, scs, ssc })=3/8
P (X = 2) = P({ccs, csc, scc })3/8
P (X = 3) = P({ccc})=1/8

Idea de Probabilidad inducida:

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B) = P(A)$$



Clasificación de Variables Aleatorias

a) **Discretas:** Cuando su recorrido es finito o infinito numerable, es decir,
$R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$
Donde a cada valor x_i está asociada una probabilidad $p_X(x_i) = P(X = x_i)$ para i = 1, 2, …
y el conjunto de valores $p_X(x_i)$ cumple con las siguientes propiedades:
i) $p_X(x_i) \geq 0$
ii) $\sum_{x_i} p_X(x_i) = 1$
Esta función se llama **función de masa de probabilidad (fmp)**

Ejemplo 4: Variable aleatoria discreta.
Un embarque de 8 computadoras similares, que se envía a un distribuidor, tiene 3 aparatos defectuosos. Si un colegio realiza una compra al azar de dos de estas computadoras, encuentre la distribución de probabilidad para la variable aleatoria número de computadoras defectuosas que adquiere el colegio.

ε = “Se compran dos computadoras” → S = {NN, ND, DN, DD}

X= Número de computadoras defectuosas Rx = {0, 1, 2}

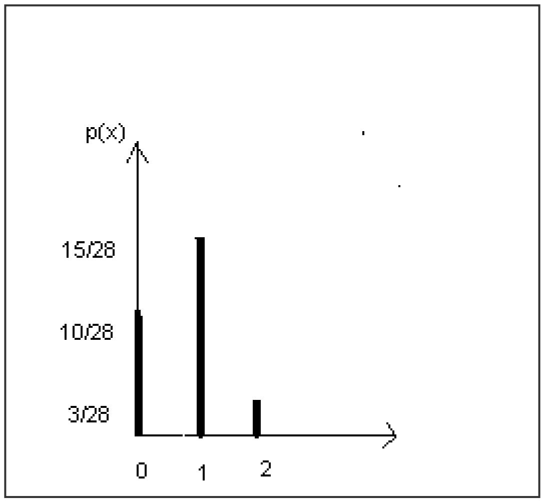
$$p_X(0) = P(X = 0) = P\{NN\} = \frac{5}{8}\frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{10}{28}$$

$$p_X(1) = P(X = 1) = P\{ND, DN\} = \frac{5}{8}\frac{3}{7} + \frac{3}{8}\frac{5}{7} = \frac{30}{56}$$

$$p_X(2) = P(X = 2) = P\{DD\} = \frac{3}{8}\frac{2}{7} = \frac{6}{56}$$

La función de masa es:

x	$p_X(x)$
0	$\frac{10}{28}$
1	$\frac{15}{28}$
2	$\frac{3}{28}$
	1



b) **Continua:** Se dice que un variable aleatoria X es continua, si es que existe una función f_X no negativa, definida sobre la recta real, tal que para cualquier intervalo A.

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$$

donde f_X se denomina **función de densidad de probabilidad (fdp)** y cumple con las siguientes condiciones:

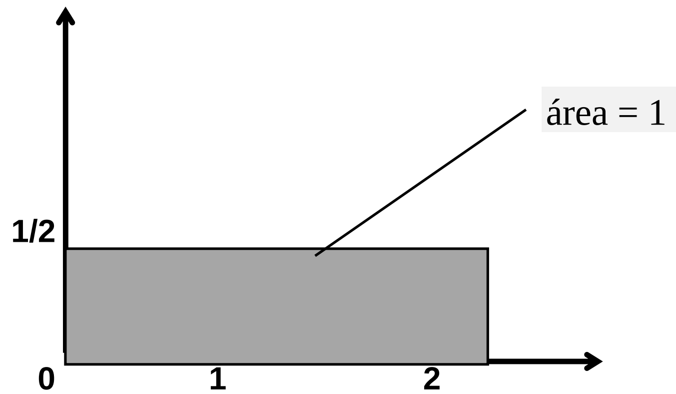
i) $f_X(x) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

Ejemplo 5: Variable aleatoria continua.

Sea X = "Un número elegido en el intervalo [0, 2]" Rx = [0,2]

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



a) Verificar que f_X es una función de densidad

i. $f_x(x) \geq 0$ para todo $x \in \Re$

ii. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{2}\,dx = 1$$

b) ¿Qué probabilidad tengo de elegir un nº perteneciente al intervalo [1.5, 2]?

$$P(1.5 \leq X \leq 2) = \int_{1.5}^{2} \frac{1}{2}\,dx = 0.25$$

Observaciones:

a) La función de densidad no es una probabilidad.

b) En el caso de una variable aleatoria continua, la probabilidad en un punto es cero.

Función de Distribución Acumulada

La función de masa (en el caso discreto) y la función de densidad (en el caso continuo) especifican la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta y continua respectivamente.

Otra forma de especificar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria en general, es mediante la **Función de Distribución Acumulada (Fda)**

$$\forall x \in \Re \quad F_X(x) = P[X \leq x]$$

Es la probabilidad acumulada desde - ∞ hasta el punto x.

Observación: $\forall x \in$ R, $0 \leq F_X(x) \leq 1$

Teorema

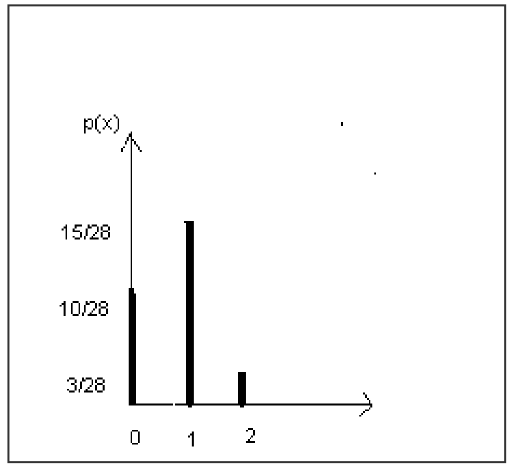
a) Sea X v.a. discreta, p_X su función de masa

$$F_X(x) = \sum_{x_j \le x} p_X(x_j)$$

Ejemplo 6: Función de Distribución Acumulada, para v.a. Discreta

X = Número de computadoras defectuosas

x	$p_X(x)$
0	$\frac{10}{28}$
1	$\frac{15}{28}$
2	$\frac{3}{28}$
	1



Si $x < 0$ $\quad F_X(x) = 0$

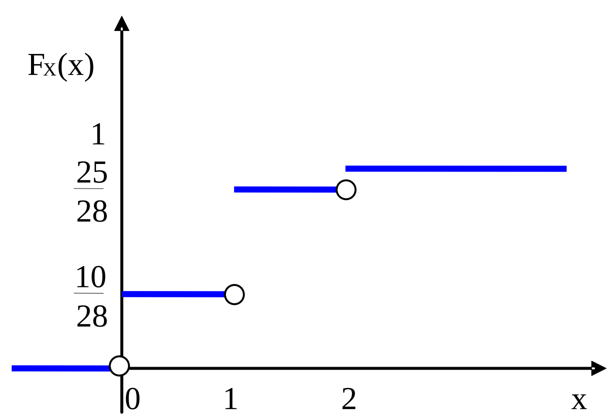
Si $0 \le x < 1$ $\quad F_X(x) = P(X \le x) = p_X(0) = \frac{10}{28}$

Si $1 \le x < 2$ $\quad F_X(x) = P(X \le x) = p_X(0) + p_X(1) = \frac{10}{28} + \frac{15}{28} = \frac{25}{28}$

Si $x \ge 2$ $\quad F_X(x) = P(X \le x) = p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) = \frac{10}{28} + \frac{15}{28} + \frac{3}{28} = \frac{28}{28} = 1$

Es decir:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{10}{28} & 0 \le x < 1 \\ \frac{25}{28} & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$



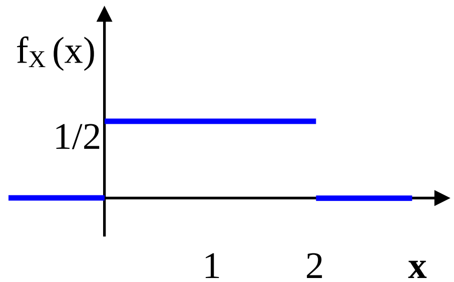
b) Sea X v.a. continua, f_X su función de densidad

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Ejemplo 7: Función de Distribución Acumulada

X = Número elegido en el intervalo [0, 2]

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

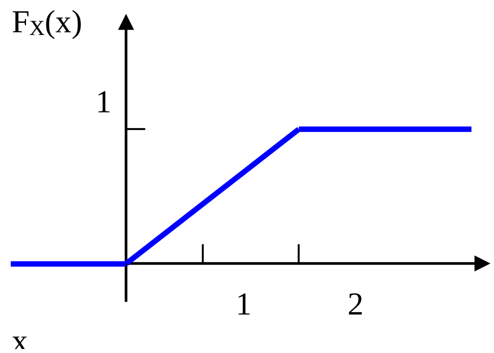


$$x < 0 \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = 0$$

$$0 \leq x < 2 \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{2}dt = \frac{x}{2}$$

$$x \geq 2 \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{0}^{2} \frac{1}{2}dt = 1$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$



Observaciones:

1) Para el caso discreto, la Función de Distribución Acumulada tiene un salto en cada punto del recorrido, igual a la probabilidad en dicho punto.
2) En el caso continuo $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \Rightarrow$ bajo ciertas hipótesis $F_X'(x) = f_X(x)$

Propiedades

1) La función F es no decreciente, es decir: si $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ (Ejercicio: demostrar)

2) $$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$

3) Para todo a, b $\in$ R, a < b $\Rightarrow$ $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
En caso continuo
$P(a<X\leq b) = P(a\leq X<b) = P(a<X<b) = P(a\leq X\leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
(Ejercicio: demostrar)

Ejemplo 8: Cálculo de probabilidades usando F.d.a

X = Número elegido en el intervalo [0, 2]

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

a) Calcular P(0.5<X<1.5)

$P(0.5<X<1.5) = F_X(1.5) - F_X(0.5) = 1.5/2 - 0.5/2 = 0.5$

b) Calcular P(X<1)

$P(X<1) = F_X(1) = 1/2 = 0.5$

TRANSFORMACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS

Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad conocida, entonces $Y = g(X)$ es también una variable aleatoria

¿Cuál es la distribución de probabilidades de Y?

Caso Discreto

Si X es discreta, entonces Y = g(X) también es discreta

Sea $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ el recorrido de X y sea $R_Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ el recorrido de Y

La función de masa de probabilidad de la v. a. X es conocida. Se desea encontrar la función de masa de probabilidad de la v. a. Y

$$p_Y(y_i) = P[Y = y_i] = P\{x \in R_X : g(x) = y_i\} = \sum_{x: g(x)=y_i} \mathbf{p_X(x)}$$

Ejemplo 9: Transformación de variables aleatorias, caso discreto-discreto.

Sea X v.a. con recorrido $R_X = \{-1, 0, 1, 2\}$ tal que $p_x(x) = 1/4$ para todo $x \in R_x$. Sea $Y = X^2$. Encuentre la función de masa de Y.

$R_Y = \{0, 1, 4\}$

$p_Y(0) = P(Y = 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = 1/4$

$p_Y(1) = P(Y = 1) = P(X^2 = 1) = P(X = \pm 1) = 1/2$

$p_Y(4) = P(Y = 4) = P(X^2 = 4) = P(X = 2) = 1/4$

Y	$p_Y(y)$
0	1/4
1	1/2
4	1/4
	1

Caso Continuo

Sea X una v. a. continua, entonces Y = g(X) puede ser → **discreta**
→ continua

Si **Y es discreta** se procede como antes.

Ejemplo 10: Transformación de variables aleatorias, caso continuo-discreto

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \mathbf{Y(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}}$$

$$P(Y = -1) = P(X < 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{4}dx = \frac{1}{4}$$

$$P(Y = 1) = P(X \ge 1) = \int_{1}^{\infty} f(x)dx = \int_{1}^{4} \frac{1}{4}dx = \frac{3}{4}$$

Si **Y es continua s**e desea determinar la función de densidad de probabilidad de Y utilizando la densidad de probabilidad de X que es conocida

Procedimiento (válido para g monótona creciente)

i) Representar gráficamente Y = g(X)
ii) Obtenga el recorrido de la v. a. Y
iii) Obtenga F_Y, la función de distribución acumulada de Y

$\mathbf{y \in \Re}$

$$\mathbf{F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P(X \le g^{-1}(y)) = F_X\left[g^{-1}(y)\right]}$$

$$\mathbf{F_Y(y)} = \begin{cases} 0 & y < \ldots \\ F_X\left[g^{-1}(y)\right] & \ldots \leq y < \ldots \\ 1 & y \geq \ldots \end{cases}$$

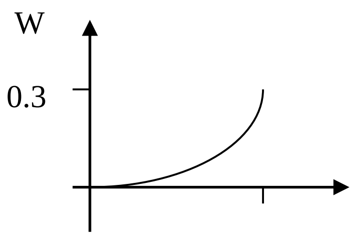
iv) Derive F_Y respecto de y a fin de obtener f_Y

Ejemplo 11: Transformación de variables leatorias, caso continuo-continuo.

Sea V la velocidad del viento, en km/h. Supongamos que V es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad dada por:

$$f_V(v) = \begin{cases} 1/10 & 0 \leq v \leq 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La presión W sobre la superficie de un avión (dada en Km/m^2) está dada por $W = 0.003V^2$. Encuentre la función de densidad de W.



$0 \leq v \leq 10 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq w \leq 0.3$

- Sea w: w < 0 ; $F_W(w) = P[W \leq w] = 0$ por el R_W entonces $F'_W(w) = 0$ = $f_W(w)$
- Sea w : $0 \leq w \leq 0.3$

$$F_W(w) = P[W \leq w] = P\left[0.003V^2 \leq w\right] = P\left[|V| \leq \sqrt{\frac{w}{0.003}}\right]$$

$$= P\left[V \leq \sqrt{\frac{w}{0.003}}\right] = F_V\left(\sqrt{\frac{w}{0.003}}\right)$$

$$f_W(w) = f_V\left(\sqrt{\frac{w}{0.003}}\right)\frac{1}{2}\frac{w^{\frac{-1}{2}}}{\sqrt{0.003}} = \frac{1}{10}\frac{1}{2}w^{-1/2}10\ \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}w^{-1/2}$$

- Sea w: w > 0.3 ; $F_W(w) = P[W \leq w] = 1$ por el R_W entonces $\mathbf{F'_W(w) = 0}$ =$f_W(w)$

Por lo tanto la función de densidad es de la siguiente manera:

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}w^{-1/2} & 0 < w < 0.3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$