Unidad 7: Estimación

Tema: Estimación por Intervalos

Intervalo de confianza para la diferencia de medias

Intervalo para la diferencia de dos medias de poblaciones Normales con igual varianza

- Sean:

$$\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_n \text{ una muestra aleatoria de } X \sim N(\mu_X, \sigma) \\ Y_1, \ldots, Y_m \text{ una muestra aleatoria de } Y \sim N(\mu_Y, \sigma) \end{array}\right\} \text{ independientes, } \sigma \text{ común}$$

- Para estimar la diferencia de medias poblacionales $\mu_X - \mu_Y$ contamos con $\bar{X} - \bar{Y}$.
- Por Teorema de las Combinaciones Lineales sabemos que $\bar{X} - \bar{Y}$ sigue una distribución Normal.

Intervalo para la diferencia de dos medias de poblaciones Normales con igual varianza

- Observemos que:

$$E(\bar{X}-\bar{Y})=\mu_X-\mu_Y$$

$$V(\bar{X}-\bar{Y})=V(\bar{X})+V(\bar{Y})=\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{m}=\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)$$

- Podemos estimar σ^2 a partir de las muestras utilizando:

$$s_p^2=\frac{(n-1)s_X^2+(m-1)s_Y^2}{n+m-2}$$

Intervalo para la diferencia de dos medias de poblaciones Normales con igual varianza

- Estadístico pivote:

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}\sim t_{(n+m-2)}$$

- Planteamos:

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}\,(n+m-2)}<\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}<t_{1-\frac{\alpha}{2}\,(n+m-2)}\right)=1-\alpha$$

Intervalo para la diferencia de dos medias de poblaciones Normales con igual varianza

- Trabajamos algebraicamente para obtener:

$$P\left(\underbrace{\bar{X}-\bar{Y}-s_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\ t_{1-\frac{\alpha}{2}(n+m-2)}}_{\hat{\theta}_1}<\underbrace{\mu_X-\mu_Y}_{\theta}<\underbrace{\bar{X}-\bar{Y}+s_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\ t_{1-\frac{\alpha}{2}(n+m-2)}}_{\hat{\theta}_2}\right)=1-\alpha$$

- $$\boxed{IC_{(1-\alpha)100\%}=(\bar{X}-\bar{Y})\pm s_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\ t_{1-\frac{\alpha}{2}(n+m-2}}$$

Resumen: Intervalo para la diferencia de dos medias de poblaciones Normales con igual varianza

- $\left.\begin{array}{l} X_1, \dots, X_n \text{ una muestra aleatoria de } X \sim N(\mu_X, \sigma) \\ Y_1, \dots, Y_m \text{ una muestra aleatoria de } Y \sim N(\mu_Y, \sigma) \end{array}\right\}$ independientes, σ común
- Estadístico pivote: $\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t_{(n+m-2)}$
- Planteamos: $P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}\,(n+m-2)} < \dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}\,(n+m-2)}\right) = 1-\alpha$
- $\boxed{IC_{(1-\alpha)100\%} = (\bar{X}-\bar{Y}) \pm s_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\; t_{1-\frac{\alpha}{2}\,(n+m-2)}}$

Ejemplo 3: IC para la diferencia de medias

- Suponga que el número de piezas fabricadas por día por las máquinas A y B siguen una distribución $N(\mu_X, \sigma)$y $N(\mu_Y, \sigma)$ respectivamente.

El número diario de piezas fabricadas por la máquina A en 5 días ha sido:

50	48	53	60	37

y por la máquina B en los mismos 5 días ha sido:

40	51	62	55	64

Se pide:

i) Construir un intervalo de 95% de confianza para la diferencia de medias entre las máquinas A y B.

ii) ¿Se puede concluir que las máquinas tienen la misma media?

Ejemplo 3: IC para la diferencia de medias

- Sean:

$X_1, \dots, X_5$ una muestra aleatoria de $X \sim N(\mu_X, \sigma)$
$Y_1, \dots, Y_5$ una muestra aleatoria de $Y \sim N(\mu_Y, \sigma)$
independientes, σ común

- Estadístico pivote:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{(n+m-2)}$$

Ejemplo 3: IC para la diferencia de medias

- Planteamos:

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}\,(n+m-2)} < \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}\,(n+m-2)}\right) = 1-\alpha$$

- Luego:

$$IC_{95\%} = (\bar{X}-\bar{Y}) \pm s_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\;\; t_{1-\frac{\alpha}{2}\,(n+m-2)}$$

Ejemplo 3: IC para la diferencia de medias

- De las muestras:

$\bar{X} = 49.6 \quad s_X = 38.8 \qquad \bar{Y} = 54.4 \quad s_Y = 61.9 \quad \text{n} = m = 5$

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2} = 81.29 \quad \Rightarrow \quad s_p = 9.02$$

- 95% de confianza: $t_{1-\alpha/_2(n+m-2)} = t_{0.975\,(8)} = 2.31$

Ejemplo 3: IC para la diferencia de medias

i) $IC_{95\%} = (\bar{X} - \bar{Y}) \pm s_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \;\; t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2)$

$$= 49.6 \; - 54.4 \pm 9.02 \;\; \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}} \; 2.31$$

$$= (\mathbf{-17.98, 8.38})$$

ii) Como $0 \in \; IC_{95\%}$ tienen la misma media.