Introducción al diseño de experimentos

ANOVA

Análisis de la varianza (ANOVA):

Cuando en el experimento involucramos **más de dos niveles**, supongamos k niveles con k>2 necesitaremos k muestras y **el procedimiento estadístico se denomina Análisis de la Varianza (ANOVA)**.

En general se desea probar:

H_0: $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_k$.

H_1: Al menos una media es diferente.

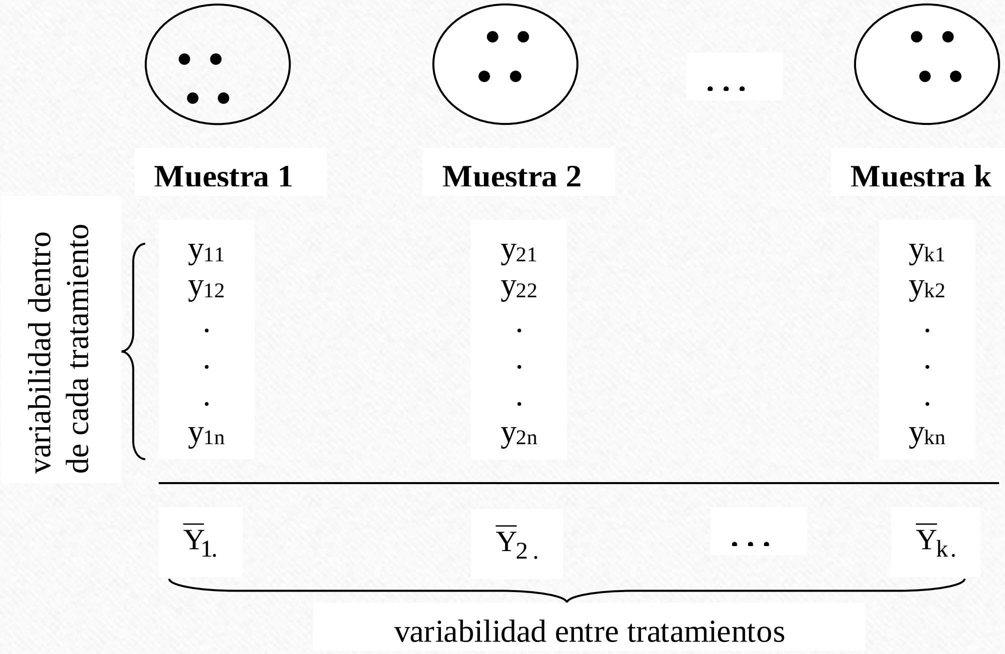
Las **hipótesis** para llevar a cabo el ANOVA son**: k muestras aleatorias independientes** con distribución **Normal** con medias **μ_1, μ_2, μ_3,…μ_k. y σ común, todos desconocidos.**

Los datos se obtienen a partir de tantas muestras como tratamientos se tengan.

ANOVA

Para determinar si las medias son iguales o no, se compara la variabilidad presente en cada muestra (variabilidad dentro de cada tratamiento) contra la variabilidad de muestra en muestra (variabilidad entre tratamientos). Esquemáticamente:

ANOVA



Para determinar si las medias son iguales o no, se compara la variabilidad presente en cada muestra (variabilidad dentro de cada tratamiento) contra la variabilidad de muestra en muestra (variabilidad entre tratamientos).

$\sim F_{k-1,(n-1)k}$

ANOVA

El **estadístico** utilizado es:

$$F = \frac{SSA/(k-1)}{SSE/(n-1)k}$$

donde
SSA es la variabilidad entre los tratamientos
SSE es la variabilidad dentro de cada tratamiento

$$SSA = n\sum_{1=1}^{k}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \qquad \bar{y}_{i.} = \sum_{j=1}^{n}\frac{y_{ij}}{n}$$

$$SSE = \sum_{1=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \qquad \bar{\bar{y}} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\frac{y_{ij}}{kn}$$

La región de rechazo es, dado α: $F_{observado} > F_{k-1, (n-1)k; (1-\alpha)}$

Y el valor $p=P(F_{k-1, (n-1)k} > F_{observado})$

Nota: La distribución F no es simétrica y depende de la cantidad de tratamientos y de los tamaños muestrales.

Resumen de la idea del ANOVA:

- Si la variabilidad "DENTRO" es **chica** y la variabilidad "ENTRE" es **grande** entonces F es grande $\Rightarrow$ son distintas las medias $\Rightarrow$ RECHAZO
- Si la variabilidad "DENTRO" es **grande** y la variabilidad "ENTRE" es **chica**$\Rightarrow$ son iguales $\Rightarrow$ACEPTO

La tabla del ANOVA

Fuente de Variación	Grado de libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados medios	F	Valor p
Tratamiento	k-1	SSA	SSA/(k-1)	$\frac{SSA/(k-1)}{SSE/((n-1)k)}$	
Error	(n-1)k	SSE	SSE/((n-1)k)		
Total	Nk-1	SST			

Interpretación

- Si el valor p es pequeño $\Rightarrow$ se rechaza H_0.
- Al rechazar H_0 puedo estar interesado en saber cual de las medias es la diferente. En este caso se realizan las comparaciones múltiples

Comparaciones múltiples o de a pares

Existen varios métodos para realizar las comparaciones de a pares que mantienen el nivel α. Ellas son:

- Pruebas de Tuckey
- Pruebas de Duncan
- Pruebas de Dunnett

Las dos primeras comparan de a pares todas las medias, mientras que la de Dunnett compara todas las medias con un control.

Generan intervalos de confianza para la diferencia de medias μ_i - μ_j. Luego, para probar las hipótesis:

- H_0: $\mu_i - \mu_j = 0$ (o equivalentemente $\mu_i = \mu_j$) para $i \neq j$
- H_1: $\mu_i - \mu_j \neq 0$ (o equivalentemente $\mu_i \neq \mu_j$)

- Se observa si $0 \in$ IC.

Ejemplo

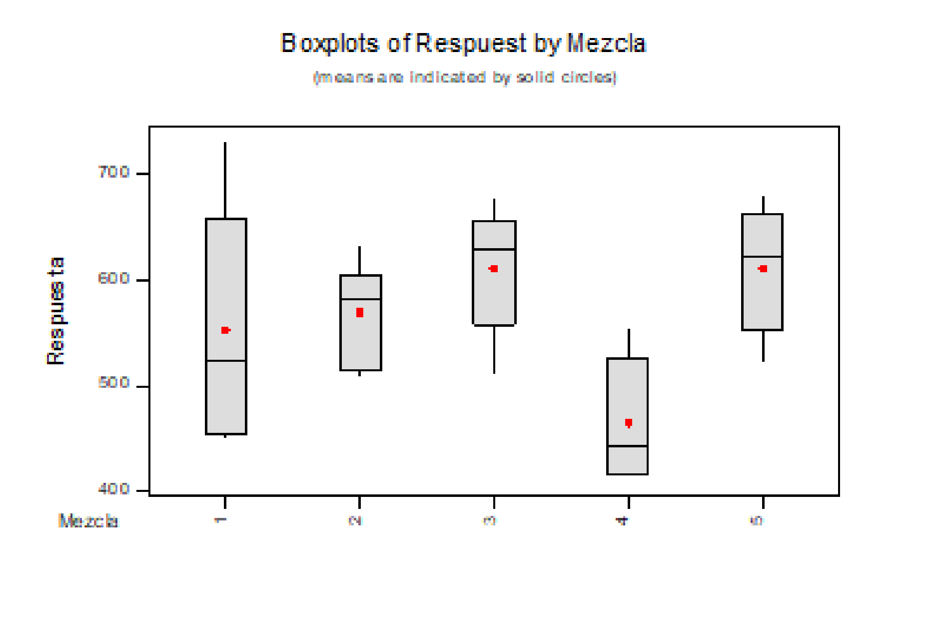
- Un ingeniero desea estudiar cómo varía la absorción de humedad en concreto, en 5 mezclas diferentes. Se consideran 6 muestras de cada tipo y se las expone a humedad durante 48 hs.

Datos: **Absorción de humedad en mezclas de concreto**

Mezcla	1	2	3	4	5
	551	595	639	417	563
	457	580	615	449	631
	450	508	511	517	522
	731	583	573	438	613
	499	633	648	415	656
	632	517	677	555	676
Total	3320	3416	3663	2791	3664
Media	553.33	569.33	610.50	465.17	610.67

Las hipótesis a probar son:

- H_0: $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_5$
- H_1: Al menos una es diferente.



One-way Analysis of Variance

Analysis of Variance for Respuest

Source	DF	SS	MS	F	P
Mezcla	4	85356	21339	4,30	**0,009**
Se rech. H_0					
Error	25	124020	4961		
Total	29	209377			

Tukey's pairwise comparisons

Family error rate = 0,0500

Individual error rate = 0,00706

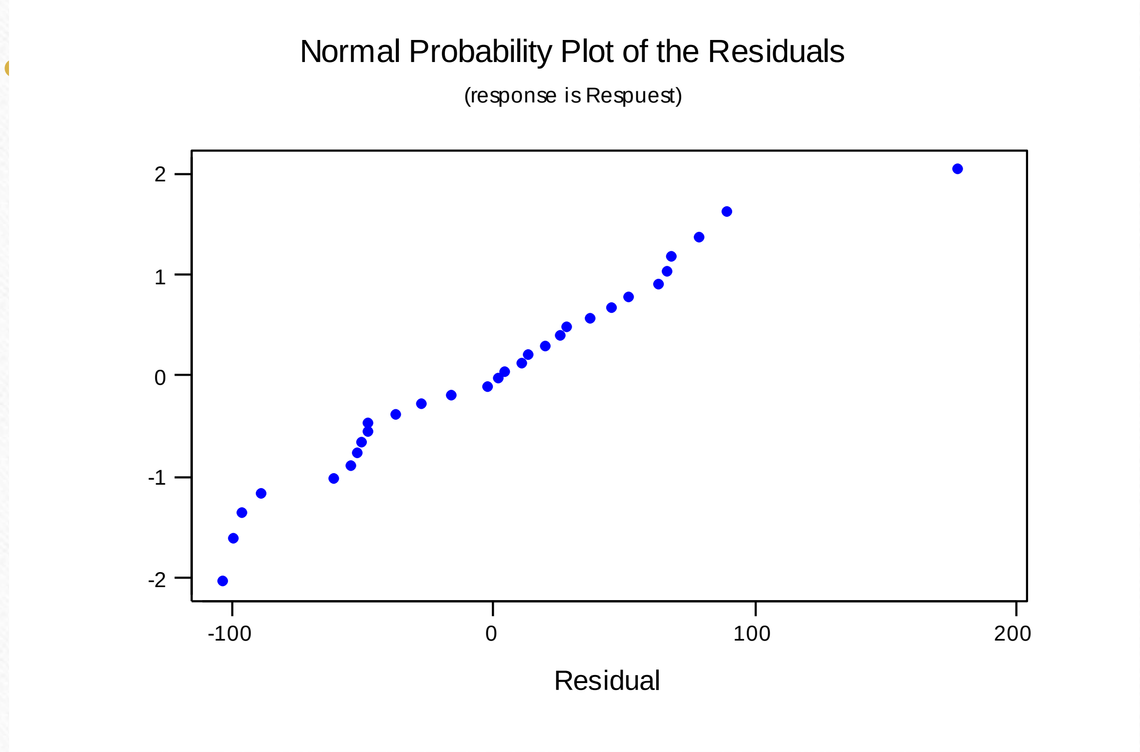
Critical value = 4,15

Intervals for (column level mean) - (row level mean)

	1	2	3	4
2	-135,3			
	103,3			
3	-176,5	-160,5		
	62,2	78,2		
4	-31,2	-15,2	**26,0**	
	207,5	223,5	**264,7**	
5	-176,7	-160,7	-119,5	**-264,8**
	62,0	78,0	119,2	**-26,2**

Las Medias **3 y 4 son diferentes** y las Medias **4 y 5 son diferentes.**

Chequeo de hipótesis de Normalidad para los datos:



Mezcla	Respuesta
1	551
1	457
1	450
1	731
1	499
1	632
2	595
…	…
5	563
5	631
5	522
5	613
5	656
5	679

Observación

Para que el ANOVA sea válido deben cumplirse las hipótesis de:

- Normalidad de los datos.
- Varianza común.
- Independencia.

- En este curso hemos aprendido a chequear normalidad de los datos. La comparación de varianzas se realiza con un test F pero escapa a los conocimientos del curso.