VARIABLES ALEATORIAS CON NOMBRES PROPIOS

LAS FAMOSAS!!!!

DISTRIBUCIÓN BERNOULLI

Saco un artículo y veo si es defectuoso.

Luego defino una variable aleatoria

$X=1$ si defectuoso

$X=0$ si no defectuoso.

DISTRIBUCIÓN BERNOULLI $X \sim \beta(p)$

Esta situación se modela con una Distribución de Bernoulli: $X \sim \beta(p)$

- Sea X v.a. tal que $R_x = \{0,1\}$ $p_x(1) = p;\quad p_x(0) = 1 - p$ con $0 \leq p \leq 1$
- Lo que es lo mismo $p_x(x) = p^x(1-p)^{1-x}$ con $x = 0,1$

Ejercicios: 1) Probar que es función de masa
2) Probar que $EX = p$ y $V(X) = p(1-p)$

ESA ERA LA MAS FÁCIL

- Ahora veamos el Proceso de Bernoulli

PROCESO DE BERNOULLI

El proceso de Bernoulli es un experimento en el que se cumplen las siguientes hipótesis:

1. El proceso consiste en un número fijo (n) de repeticiones de un experimento (ensayos),
2. En cada repetición, hay solo dos resultados posibles. Éxito (E) y Fracaso (F).
3. La probabilidad de éxito se mantiene constante de repetición en repetición. P(E)=p y P(F) = $1-p$
4. Los ensayos son independientes entre sí. Es decir, la probabilidad de Éxito es siempre la misma y no se modifica por cualquier combinación de Fracasos o Éxitos observados hasta esa repetición.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: $X \sim b(n, p)$

En un proceso de Bernoulli la v. a. Binomial se define como:

X = "Número de éxitos obtenidos al realizar los n ensayos de Bernoulli"

- Recorrido de X, R_X = {0, 1, 2, …, n}
- Nota: , donde X_i son ensayos Bernoulli.

¿Cuál es su distribución de probabilidades?

$p(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, con $k = 0,1,2, \ldots n$ donde $0! = 1$

$\sum_{r=0}^{n} p_X(r) = 1$

OBSERVACIÓN IMPORTANTE:

- $X_1, X_2, \ldots X_n$, son v.a. donde cada $X_i \sim B(p)$, entonces $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n,p)$.
- X~b(n,p) modela el Proceso de Bernoulli.
- Xi~β(p) modela **UN** ensayo de Bernoulli.

Se puede demostrar que

- $\sum_{r=0}^{n} p(r) = 1$
- EX = np
- V(X) = np(1 – p)

$\sum_{r=0}^{n} p_X(r) = 1$

EJEMPLO 1

La probabilidad de que un artículo sea defectuoso en un lote es ¼. Si se eligen 4 artículos al azar de dicho lote:

1. Revise las hipótesis del proceso de Bernoulli.
2. Encuentre la función de masa de la variable X= ”Número de artículos defectuosos de los 4 extraídos.
3. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente un componente sea defectuoso?.
4. ¿Cuál es la probabilidad de que a lo sumo 2 componentes sean defectuosos?

X= ”NÚMERO DE ARTÍCULOS DEFECTUOSOS DE LOS 4 EXTRAÍDOS

1. Listo
2. Listo

X$\sim b(4{,}0{,}25)$

3. $P(X=1)=p_X(1)=0.422$

4. $P(X \leq 2) = p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) = 0.316 + 0.422 + 0.211 = 0.949$

EJEMPLO 2

La probabilidad de que un paciente se recupere de una enfermedad es 0.4. Si se sabe que 15 personas han contraído esa enfermedad.

¿Cuál es la probabilidad de que:

1. al menos 13 se recuperen?
2. a lo sumo 2 se recuperen?
3. Se recuperen 5 personas?
4. ¿Cuál es el valor esperado y la desviación estándar de pacientes que se recuperan?

- Considere X="Nro. de personas que se recuperan".
- Primero se revisan las hipótesis del Proceso de Bernoulli $X \sim b(15, 0.4)$

$P(X \geq 13) = p_x(13) + p_x(14) + p_x(15)$, por tabla

$= 0.0003 + 0 + 0 = 0.0003$

$P(X \leq 2) = p_x(0) + p_x(1) + p_x(2)$, por tabla

$= 0.0005 + 0.0047 + 0.0219 = 0.0271$

$P(X = 5) = 0.1859$, por tabla.

$EX = 15 \times 0.4 = 6$

$V(X) = 15 \times 0.4 \times 0.6 = 3.60 \Rightarrow \sigma_x = 1.90$