Unidad 3: Distribuciones de Probabilidad Esperanza y Varianza Aproximadas de una transformada.

Probabilidad y Estadística

Año 2020

Esperanza y Varianza aproximada de la transformada de una v. a.

Sea X una v. a. y sea Y = g(X) la transformada.

Si la función g es muy complicada la evaluación de la esperanza y de la varianza puede conducir a integrales o sumas muy difíciles.

En estos casos la esperanza y la varianza de Y pueden ser calculadas de manera aproximada a partir de la media y varianza de X.

Esperanza aproximada de la transformada de una v. a.

Sea X una v. a. y sea Y = g(X) la transformada.

Supongamos que g tiene derivadas continuas en el recorrido de X, el desarrollo en serie de Taylor de g alrededor de $x = \mu_X$ hasta el término de orden 2 será:

$$y = g(x) \approx g(\mu_X) + g'(\mu_X)(x - \mu_X) + \frac{1}{2!} g''(\mu_X)(x - \mu_X)^2$$

despreciando los demás términos. Tomando esperanza en ambos miembros

$$Ey \approx g(\mu_X) + \sigma_X^2 \frac{g''(\mu_X)}{2}$$

Varianza aproximada de la transformada de una v. a.

Sea X una v. a. y sea Y = g(X) la transformada.

Supongamos que g tiene derivadas continuas en el recorrido de X, el desarrollo en serie de Taylor de g alrededor de $x = \mu_X$ hasta el término de orden 2 será:

$$y = g(x) \approx g(\mu_X) + g'(\mu_X)(x - \mu_X) + \cancel{\frac{1}{2!} g''(\mu_X)}(x - \mu_X)^2$$

Despreciando el término de segundo orden y tomando varianza

$$V(Y) \approx [g'(\mu_X)]^2 \sigma_X^2$$

Ejemplo: Esperanza aproximada de una transformada

- Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad EX = 1 \quad V(X) = \frac{1}{3} \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Sea $Y = e^{-X}$ una transformada.

$g(x) = e^{-x}$ $\qquad g'(x) = -e^{-x}$ $\qquad g''(x) = e^{-x}$

$$e^{-x} \cong e^{-\mu_x} - e^{-\mu_x}(X-\mu_x) + \frac{e^{-\mu_x}}{2}(X-\mu_x)^2$$ tomando esperanza

$$\mu_y \cong g(\mu_x) + \sigma_x^2\, g''(\mu_x)/2 = e^{-1} + \frac{1}{3}\frac{e^{-1}}{2} = 0.429$$

Ejemplo: Varianza aproximada de una transformada

- Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad EX = 1 \quad V(X) = \frac{1}{3} \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Sea Y = e^{-X} una transformada.

$g(x) = e^{-x}$ $\quad$ $g'(x) = -e^{-x}$ $\quad$ $g''(x) = e^{-x}$

$$e^{-x} \cong e^{-\mu_x} - e^{-\mu_x}(X-\mu_x) + \cancel{\frac{e^{-\mu_x}}{2}(X-\mu_x)^2}$$

$$\sigma_y^2 \cong \sigma_x^2 (g'(\mu_x))^2 = \frac{1}{3}[-e^{-1}]^2 = \frac{1}{3}e^{-2} = 0.045$$

Continuación ejemplo

- La Esperanza y Varianza Exactas serían:

$$EY=\int_0^2 e^{-x}\frac{1}{2}dx=-\frac{e^{-x}}{2}\Bigg|_0^2=\frac{-e^{-2}+1}{2}=\frac{1-e^{-2}}{2}=0.432$$

$$EY^2=\int_0^2 e^{-2x}\frac{1}{2}dx=\frac{-e^{-2x}}{4}\Bigg|_0^2=\frac{-e^{-4}+1}{4}=\frac{1-e^{-4}}{4}$$

$$V(Y)=EY^2-(EY)^2=\frac{1-e^{-4}}{4}-\left(\frac{1-e^{-2}}{2}\right)^2=0.058$$

Síntesis

La esperanza de una transformada de una variable aleatoria podemos hacerlo:

- De manera exacta
  - Por definición, encontrando primero la función de densidad de la transformada y luego por definición la esperanza
  - Por el teorema.
- De manera aproximada
  - Por Taylor, con lo que encontramos la esperanza y varianza aproximadas sólo a partir de la esperanza y la varianza de la variable aleatoria original.

Fin de la Unidad 3!!!