PROCESO DE POISSON O CAOS HOMOGENEO

SUPONGAMOS UN PROCESO EN DONDE SE OBSERVAN SUCESOS PUNTUALES SOBRE SOPORTE CONTINUO

Ejemplos

- \- Nro. de llamadas telefónicas recibidas en una central: suceso puntual $\rightarrow$ llamada

soporte continuo $\rightarrow$ tiempo

- \- Nro de errores de tipeo por página: suceso puntual $\rightarrow$ error

soporte continuo $\rightarrow$ página

- \- Cantidad de defectos en una plancha metálica: suceso puntual $\rightarrow$ defecto

soporte continuo $\rightarrow$ área de metal

CONSIDEREMOS EL SIGUIENTE EJEMPLO:

Se observa el número de partículas emitidas por un material radioactivo durante un intervalo de tiempo $[0, t)$

Se deben verificar las siguientes hipótesis:

1) INDEPENDENCIA:

El número de partículas emitidas en un intervalo de tiempo es independiente del número de partículas emitidas en otro intervalo de tiempo disjunto del primero.

2) HOMOGENEIDAD Y PROPORCIONALIDAD:

La probabilidad de que sea emitida una partícula en un intervalo de tiempo $[t, t+h)$ es $\lambda h+o(h)$ donde λ es constante independiente de t y $o(h)/h \to 0$ cuando $h \to 0$. Es decir que cuando h es pequeño la probabilidad es proporcional a la longitud del intervalo y es independiente de t.

3) REGULARIDAD:

La probabilidad de que en el intervalo $[t, t+h)$ sean emitidas 2 o más partículas es despreciable cuando h es pequeña.

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Este proceso da origen a una variable aleatoria con Distribución de Poisson. **X ~ P(λt)**

X = "Número de sucesos en un intervalo [0,t) de longitud fija, en un proceso de Poisson"

$R_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Su función de masa de probabilidad es: $p_x(x) = P(X = x) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^x}{x!} \qquad x = 0,1,2, \ldots$

donde λ>0, es el número promedio de partículas emitidas por unidad de tiempo.

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Se puede probar que

$$\sum_{x=0}^{n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^x}{x!} = 1$$

$$EX=\lambda t$$

$$V(X)=\lambda t$$

EJEMPLO

En promedio, en una cierta intersección ocurren 3 accidentes viales por mes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un determinado mes ocurran menos de 3 accidentes?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que en 2 meses haya 5 accidentes?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana no haya accidentes?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que en dos meses seguidos, ocurran menos de tres accidentes en cada uno?

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EN UN DETERMINADO MES OCURRAN MENOS DE 3 ACCIDENTES?

Primero se revisan las hipótesis del Proceso de Poisson.

a) X = “Número de accidentes por mes”

$X \sim P(3)$

$P(X < 3) = P(X \leq 2) = p_x(0) + p_x(1) + p_x(2)$

$$= e^{-3}\frac{3^0}{0!} + e^{-3}\frac{3^1}{1!} + e^{-3}\frac{3^2}{2!} \quad \text{, por tabla}$$

$= 0.0498 + 0.1494 + 0.2240 = 0.4232$

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EN 2 MESES HAYA 5 ACCIDENTES? ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EN UNA SEMANA NO HAYA ACCIDENTES?

b) Y = "Número de accidentes en 2 meses"
$Y \sim P(6)$

$P(Y = 5) = 0.1606$ (por tabla)

c) S = " Número de accidentes por semana"
$S \sim P(0.75)$

$$P(S = 0) = e^{-0.75} \frac{0.75^0}{0!} = e^{-0.75} = 0.472$$

¿CUAL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EN DOS MESES SEGUIDOS, OCURRAN MENOS DE TRES ACCIDENTES EN CADA UNO?

d) Por la probabilidad calculada en a), usando la hipótesis de independencia se tiene que:

P(menos de tres en el 1$^{er.}$ mes **y** menos de tres en el 2$^{do.}$ mes)
= P(menos de tres en el 1er mes) x P(menos de tres en el 2do mes)
= 0.4232^2