Unidad 2: Independencia de sucesos

Probabilidad y Estadística
Año 2020

Independencia de sucesos

ε : Se lanza un dado dos veces.

S = {(1,1) ... (1,6) ... (6,1) ... (6,6) } 36 ptos = 6 x 6

Sean los sucesos:

- A = "En el 1er lanzamiento se obtiene un número par"
- B = "En el 2do lanzamiento se obtiene un 5 o un 6"

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \qquad P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} = P(B)$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2} = P(A)$$

- Por lo tanto, A y B son independientes.

Definición de sucesos independientes

Existen casos en donde la ocurrencia de un suceso no afecta a la probabilidad de ocurrencia del otro suceso, es decir que:

- $P(A|B) = P(A)$, si es que $P(B)>0$ ó
- $P(B|A) = P(B)$, si es que $P(A)>0$

Esto podría ser una definición de independencia, pero tenemos la restricción que $P(B)>0$ ó $P(A)>0$, por lo que generalizamos el concepto con la definición.

Definición de sucesos independientes

- Dados dos sucesos A, B en S, decimos que A y B son independientes sí y sólo sí

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ejemplo

De un lote de 100 artículos que contiene 20 defectuosos y 80 no defectuosos, se extraen 2 artículos *con reposición*. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean defectuosos?

- **D_1** = "el primer artículo es defectuoso"
- **D_2** = "el segundo artículo es defectuoso"
- $P(D_1 \cap D_2) = \mathrm{P}(D_1)P(D_1|D_2) = \mathrm{P}(D_1)P(D_2) =$

$$= \frac{20}{100}\frac{20}{100} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

Generalización de Independencia de sucesos

La definición se extiende a n sucesos de la siguiente forma:

Solo lo hacemos para $n = 3$. Decimos que A, B y C son mutuamente independientes sí y sólo sí:

- $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A)\, P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B)\, P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B) P(C)$

Ejemplo:

Sea el experimento ε con el siguiente espacio muestral $S = \{ s_1, s_2, s_3, s_4 \}$, donde cada punto tiene probabilidad 1/4

- Sean los sucesos

$A = \{ s_1, s_2 \}$ $\quad$ $B = \{ s_1, s_3 \}$ $\quad$ $C = \{ s_1, s_4 \}$

$P(A) = P(B) = P(C) = 2/4 = 1/2$

$AB = AC = BC = \{ s_1 \}$

$P(AB) = 1/4 = P(A)\, P(B)$

$P(AC) = 1/4 = P(A)\, P(C)$

$P(BC) = 1/4 = P(B)\, P(C)$

$ABC = \{ s_1 \}$ $\quad$ $P(ABC) = 1/4$

$P(A)\, P(B)\, P(C) = 1/8$

Luego A, B y C no son mutuamente independientes.

Observación

No confundir el concepto de independencia con mutuamente excluyente.

- Independencia es

  $P(AB)=P(A)P(B)$ concepto estadístico

- Mutuamente excluyente es

  $P(A \cap B) = \emptyset$ concepto de conjuntos