Unidad 8
Test de Hipótesis

Parte 5 : Relación entre Test de Hipótesis e Intervalos de Confianza

En esta Unidad estudiaremos:

01

Definiciones

Hipótesis estadística.
Hipótesis Nula y Alternativa.
Test de hipótesis.

02

Metodología

Paso a paso para realizar un test.

03

Test para una población

Test para la media.
Test para la proporción..

04

Test para dos poblaciones

Diferencia de medias.
Medias pareadas.
Diferencia de proporciones

05

Test e IC

Relación entre los dos métodos de estimación.

06

Errores

Que se pueden cometer al hacer un test.

05

Test e IC

Relación entre los dos métodos de estimación.

Test de Hipótesis
vs
Intervalo de Confianza

Podemos decir que, en general, cada Intervalo de Confianza corresponde a un Test de Hipótesis, y viceversa.

Para ello debemos pensar a la Región de Aceptación de un test como un Intervalo de Confianza, en una versión estandarizada.

El nivel de significancia del test corresponderá con el nivel de confianza del intervalo correspondiente.

Recordemos: para hacer un test

1. Definir H_0 y H_1.

2. Definir el estadístico a utilizar y su distribución de probabilidad bajo H0. La forma general de este estadístico será:

$$\text{Estadístico} = \frac{Estimador - Parámetro\ bajo\ H_0}{Desviación\ estándar\ del\ estimador}$$

3. Dado el nivel de significación α, determinar la región crítica y con los datos tomar la decisión.

Recordemos: para calcular un IC

1. Por definición: $P(\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$

2. El estimador del parámetro desconocido a utilizar tiene su distribución de probabilidad. La forma general de este estadístico será:

$$\text{Estadístico} = \frac{Estimador - Parámetro\ bajo\ H_0}{Desviación\ estándar\ del\ estimador}$$

3. Dado el nivel de confianza α, se plantea la probabilidad correspondiente y se calcula el IC.

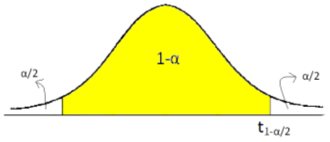
Ejemplo

Intervalo de (1-α)100 % de confianza para μ con σ desconocido

$X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ desconocido.

Estadístico pivote: $\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ donde $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(X_i - \bar{X})^2}$

Planteamos: $P\left(-t_{1-\alpha/2(n-1)} < \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha/2(n-1)}\right) = 1 - \alpha$



Obtenemos: $IC_{(1-\alpha)100\%} = \bar{X} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2(n-1)}$

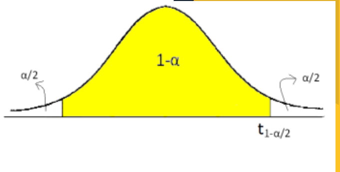
Ejemplo

Test de hipótesis para μ con σ desconocido

$X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de $X \sim N(\mu, \sigma)$, σ desconocido.

Planteamos: $\mathbf{H_0}$ y $\mathbf{H_1}$

Estadístico pivote bajo $\mathbf{H_0}$: $\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ donde $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (X_i - \bar{X})^2}$



Luego: Dado el nivel de significancia α, determinar la región crítica.

Conclusión:

El test $H_0: \mu = \mu_0$ vs. $H_1: \mu \neq \mu_0$ a un nivel α es equivalente a calcular el intervalo de confianza $(1-\alpha)100\%$ para μ con σ desconocido.

Importante:

Si $\mu_0 \notin IC_{1-\alpha}$ hay suficiente evidencia para rechazar H_0.

Ejemplo 1:

Un ingeniero desea estudiar el sesgo en una medición de ph. Se reúnen datos de una sustancia neutra, ph = 7, se toma una muestra de 10 mediciones.

Los datos son:

7.07	7.00	7.10	6.97	7.00	7.03	7.01	7.01	6.98	7.08

Ejemplo 1: Test

1. $H_0: \mu = 7$
   $H_1: \mu \neq 7$

2. $\frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$

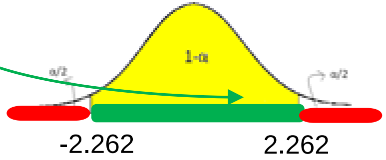
Donde **n = 10** y usamos distribución t aproximada porque suponemos

X con distribución Normal y varianza desconocida.

3. $\alpha = 0.05$

Donde $t_{0bservado} = \frac{7.025 - 7}{0.044/\sqrt{10}} = 1.795$ y $t_{crítico} = t_{0.975\,(9)} = 2.262$

Región crítica: $|t_{observado}| > t_{crítico}$



Decisión: no hay evidencia suficiente para rechazar H_0.

Ejemplo 1: IC

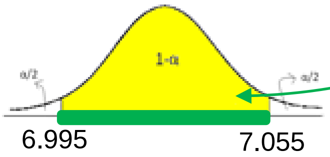
Planteamos: $$P\left(-t_{0.975(9)} < \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} < t_{0.975(9)}\right) = 0.95$$ usando $$\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

Trabajando algebraicamente:

$$\bar{x} \pm t_{0.975(9)}\frac{s}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad 7.025 \pm 2.262 \times \frac{0.044}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \quad (6.995,\ 7.055)$$

Como $7 \in IC_{0.95}$ $\Rightarrow$ No hay evidencia suficiente para pensar que el Medidor está sesgado, pues μ puede ser igual a 7.



Ejemplo 2:

Se lanza 20 veces una moneda obteniéndose 5 caras. ¿Hay suficiente evidencia para rechazar que la moneda está balanceada?

Suponga $\alpha = 0.10$.

Ejemplo 2: Test

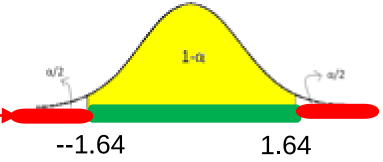
1. H_0: $p = 0.5$
   H_1: $p \neq 0.5$

2. Estadístico pivote bajo H_0: $z = \dfrac{\hat{p} - 05}{\sqrt{\dfrac{p_o(1-p_o)}{n}}} \approx N(0,1) \quad por \quad TCL$

3. $\alpha = 0.10$

Donde $z_{observado} = \dfrac{0.25 - 0.5}{0.11} = -2.24$ y $z_{crítico} = z_{\ 0.95} = \mathbf{1.64}$

Región crítica: $|z_{observado}| > z_{crítico}$



Decisión: hay evidencia suficiente para rechazar H_0.

Ejemplo 2: IC

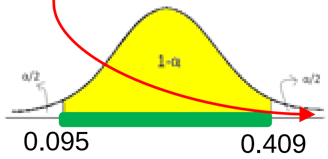
Planteamos: $P\left(-z_{0.95} < \dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} < z_{0.95}\right) = 0.90$ usando $\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \approx N(0,1)$

Trabajando algebraicamente:

$$\hat{p} \pm z_{0.95}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \Rightarrow 0.25 \pm 1.64\sqrt{\frac{0.25\times 0.75}{20}}$$

$$\Rightarrow (0.095, 0.409)$$

Como $0.5 \notin IC_{0.90}$ $\Rightarrow$ Hay evidencia suficiente para pensar que la moneda no está balanceada.



Ejercicio:

Escribir la región de aceptación y rechazo para la diferencia de medias.

Intervalo de confianza:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2}(n_1+n_2-2)} s_p < \mu_1 - \mu_2 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2}(n_1+n_2-2)} s_p$$

Fin de la Parte 5