Unidad 3: Distribuciones de Probabilidad Definición de Función de Distribución Acumulada (Fda)

Probabilidad y Estadística

Año 2020

Función de Distribución Acumulada

- La función de masa de probabilidad (fmp), en el caso discreto y la función de densidad de probabilidad (fdp), en el caso continuo, especifican la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta y continua respectivamente.
- Otra forma de especificar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria en general, es mediante la **Función de Distribución Acumulada**

Función de Distribución Acumulada

- Definición

$$\forall x \in \Re \quad F_X(x) = P[X \le x]$$

Es la probabilidad acumulada desde - ∞ hasta el punto x.

- Observación: $\forall x \in R, \quad 0 \le F_X(x) \le 1$

Teorema

- Sea **X v.a. discreta**, p_X su función de masa de probabilidad

$$\forall x \in \Re \qquad F_X(x) = \sum_{x_j \leq x} p_X(x_j)$$

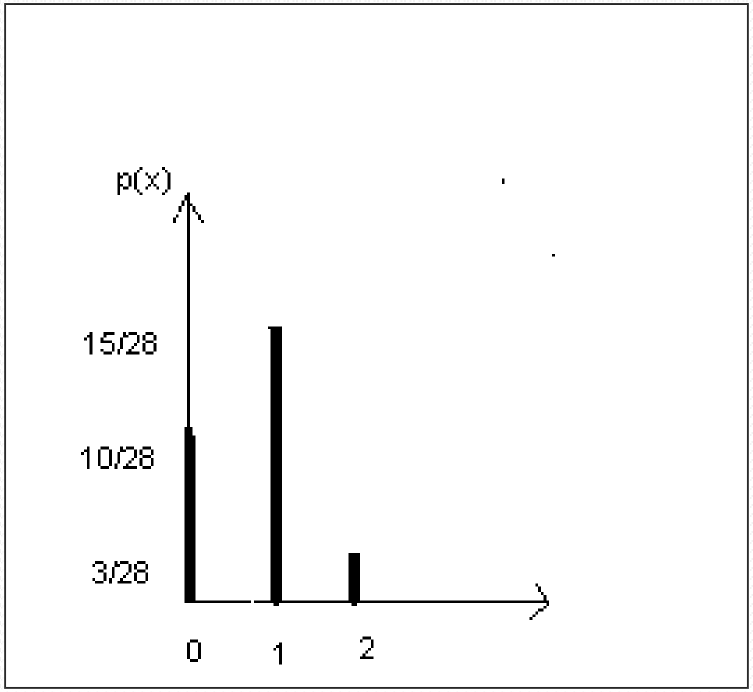
- Sea **X v.a. continua**, f_X su función de densidad de probabilidad

$$\forall x \in \Re \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Ejemplo: F.d.a v.a. discreta

- Sea X: Número de computadoras defectuosas
- La f.m.p. es

x	$p_X(x)$
0	10/28
1	15/28
2	3/28
	1



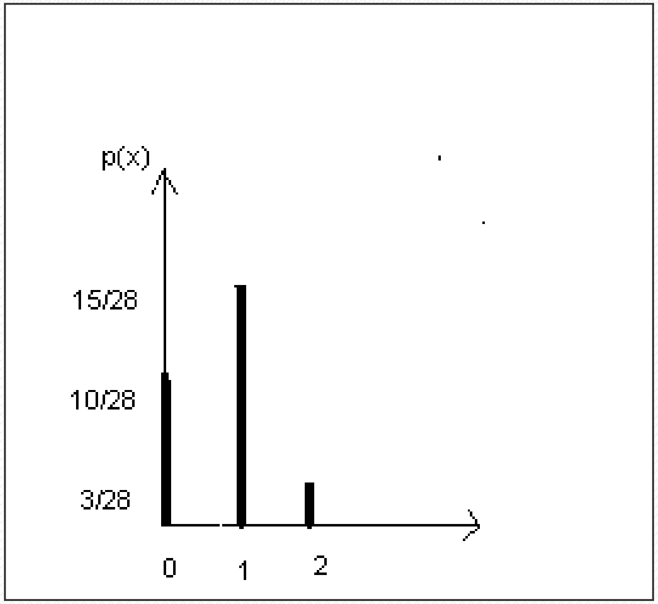
Continuación F.d.a v.a. discreta

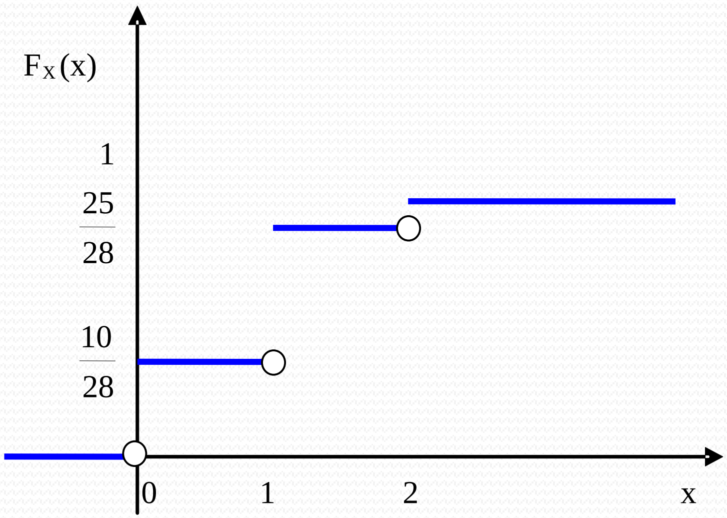
- Si $x < 0$ $\quad F_X(x) = 0$
- Si $0 \leq x < 1$ $\quad F_X(x) = P(X \leq x) = p_X(0) = \frac{10}{28}$
- Si $1 \leq x < 2$ $\quad F_X(x) = P(X \leq x) = p_X(0) + p_X(1) = \frac{10}{28} + \frac{15}{28} = \frac{25}{28}$
- Si $x \geq 2$ $\quad F_X(x) = P(X \leq x) = p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) =$

$$= \frac{10}{28} + \frac{15}{28} + \frac{3}{28} = \frac{28}{28} = 1$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{10}{28} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{25}{28} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Continuación ejemplo F.d.a v.a. discreta

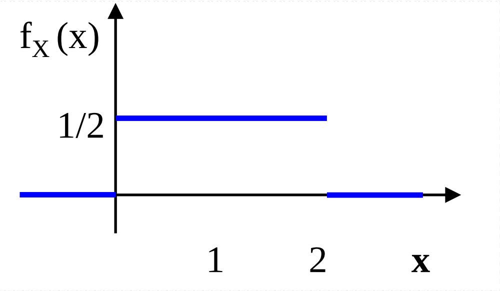




Ejemplo: F.d.a v.a. continua

- X = Número elegido en el intervalo [0, 2]

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Continuación ejemplo F.d.a v.a. continua

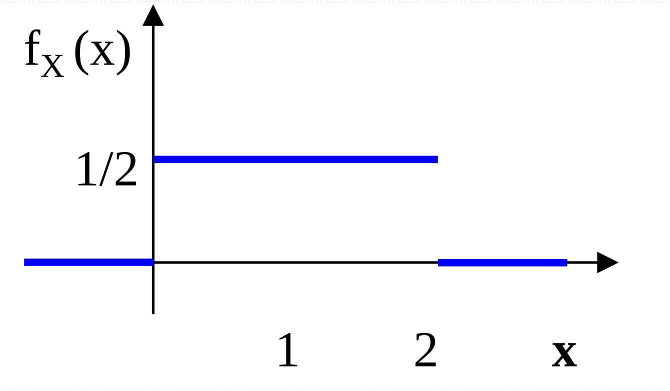
$x < 0 \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = 0$

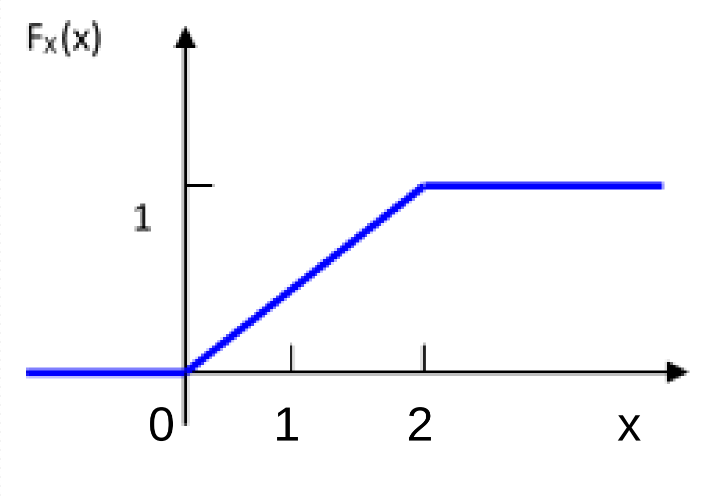
$0 \leq x < 2 \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{2}dt = \frac{x}{2}$

$x \geq 2 \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{0}^{2} \frac{1}{2}dt = 1$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Continuación ejemplo F.d.a. v.a. continua





Observaciones:

- Para el caso discreto, la Fda tiene un salto en cada punto del recorrido, igual a la probabilidad en dicho punto.
- Para el caso continuo, bajo cierta condiciones:

$$F_X'(x) = f_X(x)$$

Propiedades

1) La función Fx es no decreciente, es decir: si $x_1 \leq x_2$ $\Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ (Ejercicio: demostrar)

2) $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

3) Para todo a, b $\in$ R, a < b $\Rightarrow P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

En caso continuo

$P(a<X\leq b)= P(a\leq X<b)=P(a<X<b)=P(a\leq X\leq b)= F_X(b)-F_X(a)$

Ejemplo: Cálculo de probabilidades usando F.d.a

- X = Número elegido en el intervalo [0, 2]

Sea su F.d.a

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & 0 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

- Calcular $P(0.5<X<1.5)$

$P(0.5<X<1.5) = F_X(1.5) - F_X(0.5) = 1.5/2 - 0.5/2 = 0.5$

- Calcular $P(X<1)$

$P(X<1) = F_X(1) = 1/2 = 0.5$