Unidad 7: Estimación

Probabilidad y Estadística

Año 2020

Estimación puntual

Estimación Puntual

Supuesto: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una m. a. de X con distribución conocida de parámetros desconocidos.

Objetivo: estimar los valores de estos parámetros utilizando los valores muestrales.

Ejemplo

Si nos interesa conocer el valor esperado de X, parece razonable pensar que un "estimador" de μ_X será $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$. Es lo mejor que tenemos al no conocer μ_X.

Observaciones a tener en cuenta…

- μ_X = EX es un número fijo, pero desconocido (parámetro poblacional).

- $\overline{X}$ es una v. a. (cuando la muestra esté tomada, tomará un valor particular para esa muestra, $\bar{x}$).

- No siempre es fácil encontrar el estimador adecuado para un determinado parámetro, para ello existen ***Métodos de Estimación*.**

Método de los momentos

Método de los Momentos
Definición

- El momento de orden i, de X, con respecto al origen es:

$$m_i = E(X^i)$$

- El momento muestral de orden i con respecto al origen es

$$\hat{m}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j^i}{n}$$

- El Método de los Momentos consiste en estimar los momentos poblacionales con los momentos muestrales.

Método de los Momentos

Estimación de momentos poblacionales

Si tenemos:

X v.a. $\longrightarrow X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una m. a.

Las estimaciones de los correspondientes momentos poblacionales serán:

$$EX \longrightarrow \bar{X}$$

$$EX^2 \longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2$$ (saco promedio de los cuadrados)

El procedimiento es el mismo para la estimación de los otros momentos muestrales.

Método de los Momentos

Estimación de parámetros de distribuciones

Supongamos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una m. a. de X con $X \backsim F_X(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ donde θ_i son los parámetros de la distribución de probabilidad.

Escribimos los parámetros de la distribución como funciones de los momentos poblacionales:

$$\begin{cases} \theta_1 = g_1(m_1, m_2, \ldots, m_k) \\ \theta_2 = g_2(m_1, m_2, \ldots, m_k) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \theta_k = g_k(m_1, m_2, \ldots, m_k) \end{cases}$$

la estimación de los parámetros resulta:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = g_1(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \ldots, \hat{m}_k) \\ \hat{\theta}_2 = g_2(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \ldots, \hat{m}_k) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \hat{\theta}_k = g_k(\hat{m}_1, \hat{m}_2, \ldots, \hat{m}_k) \end{cases}$$

Método de los Momentos

Procedimiento

1. Identifique los parámetros a estimar.
2. Considere tantas ecuaciones como parámetros a estimar.
3. Escriba los parámetros en términos de esperanzas.
4. Estime las esperanzas y reemplace.

Ejemplo 1

Los siguientes datos provienen de una distribución Exponencial:

0.53 0.03 1.12 0.53 0.23 0.16 1.39 3.71 1.61

Encuentre un estimador del parámetro λ.

Observamos que $X_1, \ldots, X_n$ vs. as. iid como X, con $X \backsim E(\lambda)$.

Ejemplo 1 (continúa)

El parámetro en término de los momentos se escribe:

$$\lambda = 1/EX$$

El momento muestral de orden 1 es:

$$\hat{m}_1 = \overline{X}$$

Por el Método de los Momentos:

$$\hat{E}(X) = \overline{X} \quad \Longrightarrow \quad {}^{1}/_{\hat{\lambda}} = \overline{X} \quad \Longrightarrow \quad \hat{\lambda} = {}^{1}/_{\overline{X}} = 0{,}97$$

Ejemplo 2

Los siguientes datos provienen de una muestra aleatoria de la v.a. X con media μ y desviación estándar σ:

9.3   8.3   9.8   10.9   10.8   11.3   7.4

Estime por el método de los Momentos μ y σ.

Ejemplo 2 (continúa)

Los parámetros en términos de los momentos se escriben:

$$\begin{cases} \mu = E(X) & (1) \\ \sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 & (2) \end{cases}$$

Los momentos muestrales son:

$$\begin{cases} \widehat{m}_1 = \bar{X} \\ \widehat{m}_2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2 \end{cases}$$

Ejemplo 2 (continúa)

$\text{De}(1) \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{X}$

$\text{De}(2) \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum X_i^2 - \bar{X}^2 = \dfrac{1}{n}\sum (X_i - \bar{X})^2$

Luego

$$\hat{\mu} = 9.69 \;\text{ y }\; \hat{\sigma}^2 = 1.80 \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma} = 1.34$$

Ejemplo 3

Sea X ~ U (α-β, α+β). Encontrar $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ por el método de los momentos:

Recuerden que $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta} & \alpha - \beta < x < \alpha + \beta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$EX = \alpha$

$EX^2 = \alpha^2 + \beta^2/3$

Ejemplo 3 (continúa)

Entonces reemplazo por los momentos muestrales:

$\hat{\alpha} = \bar{x}$

$\alpha^2 + {}^{\beta^2}/_{3} = \frac{1}{n}\sum x_i^2$ entonces $\bar{x}^2 + {}^{\beta^2}/_{3} = \frac{1}{n}\sum x_i^2$

$$\Longrightarrow \quad \hat{\beta}^2 = 3\left(\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2\right)$$

Entonces $\hat{\beta} = \sqrt{3\left(\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2\right)}$ $\quad \therefore \hat{\beta} = \sqrt{3}\hat{\sigma}$