Unidad 5: Distribuciones de funciones de variables aleatorias
Vs. As. Bidimensionales e Independencia

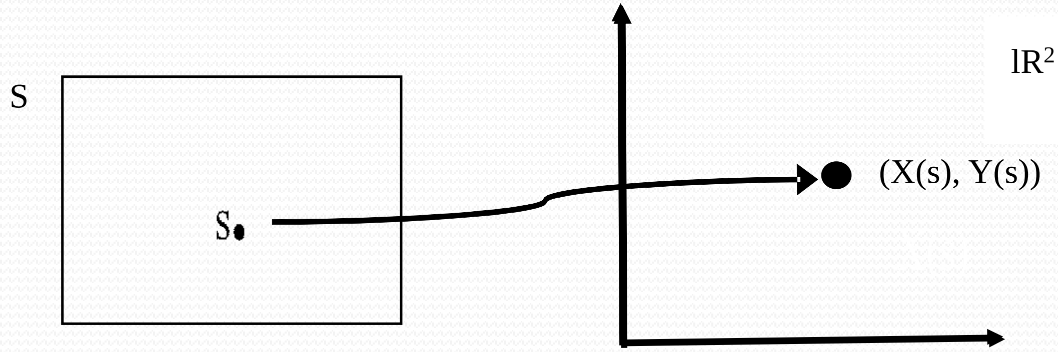
Probabilidad y Estadística

Año 2020

DISTRIBUCIONES CONJUNTAS
Distribuciones Bidimensionales

Definición de V. A. Bidimensional:

Sea ε un experimento aleatorio y S su espacio muestral. Sean X e Y vs. as. tal que a cada s de S le asignan los números reales X(s) e Y(s) respectivamente. Entonces se dice que el par (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional.



DISTRIBUCIONES CONJUNTAS
Distribuciones Bidimensionales

a) **Caso discreto**

(X, Y) es una v. a. Bidimensional Discreta si el conjunto de valores posibles (recorrido) es finito o infinito numerable, es decir:

$R_{XY} = \{(x_i, y_j): \; i = 1, 2, \ldots n, \ldots \; j = 1, 2, \ldots, m, \ldots\}$

a) Caso discreto

- Su **función de masa conjunta** se define como:

$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$ para todo $(x, y) \in R_{XY}$

- Se debe cumplir que:

i) $p_{XY}(x, y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in R_{xy}$

ii) $\sum_{x} \sum_{y} p_{XY}(x, y) = 1$

Las funciones de masa marginales son:

Para todo $x \in R_X$ $\quad p_X(x) = \sum_{y} p_{XY}(x, y)$

Para todo $y \in R_Y$ $\quad p_Y(y) = \sum_{x} p_{XY}(x, y)$

Ejemplo

En una planta automotriz dos tareas estarán a cargo de robots. La primera consiste en soldar dos bisagras y la segunda en apretar dos tornillos. Sea X el número de soldaduras defectuosas, e Y el número de tornillos apretados incorrectamente. La siguiente tabla muestra la distribución de probabilidad conjunta.

X \ Y	0	1	2	
0	0	0.15	0.10	0.25
1	0.15	0.20	0.05	0.40
2	0.10	0.15	0.10	0.35
	0.25	0.50	0.25	1

$p_{XY}(x, y)$

- P (X = 2, Y = 2) = 0.10
- P (X = 2) = 0.35
- P (Y = 1) = 0.50

Continuación ejemplo

$p_{XY}(x, y)$ **función de masa conjunta**

X \ Y	0	1	2	
0	0	0.15	0.10	0.25
1	0.15	0.20	0.05	0.40
2	0.10	0.15	0.10	0.35
	0.25	0.50	0.25	1

$p_X(x)$ **función de masa marginal de x**

$p_Y(y)$ **función de masa marginal de y**

Continuación ejemplo

Funciones de masa marginal

x	$p_X(x)$
0	0.25
1	0.40
2	0.35
	1

y	$p_Y(y)$
0	0.25
1	0.50
2	0.25
	1

DISTRIBUCIONES CONJUNTAS
Distribuciones Bidimensionales

a) **Caso continuo**

(X, Y) es una v. a. Bidimensional Continua si existe una función f_{XY} llamada función de densidad de probabilidad conjunta tal que

para todo $A \subset \Re^2$ $\quad P(A) = \iint_A f_{XY}(x, y)dxdy$

Además cumple con:

i) $f_{XY}(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \Re^2$

ii) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dxdy = 1$$

a) Caso continuo

Las funciones de masa marginales son:

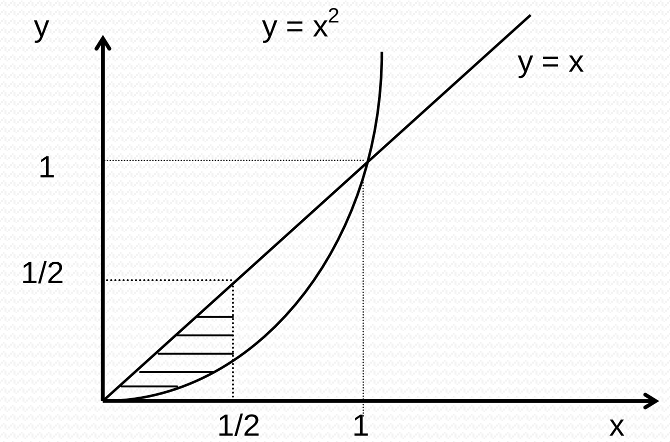
Para todo $x \in R_X$ $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy$$

Para todo $y \in R_Y$ $$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dx$$

Ejemplo 2

Sea (X, Y) una v.a. bidimensional continua cuya f.d.p. conjunta está dada por:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 6 & 0 \leq x \leq 1 \quad x^2 \leq y \leq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



a) Pruebe que efectivamente es una función de densidad.

b) Calcule las funciones de densidad marginales.

c) Calcule la probabilidad de que X e Y no sean mayores que ½.

Continuación ejemplo

a) La función es no negativa por definición.

$$\text{Volumen} = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} 6dy \right) dx = \int_0^1 6y \Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 6(x - x^2)dx$$

$$= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 6\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1$$

b) Sea x : $0 \le x \le 1$

$$f_X(x) = \int_{x^2}^{x} 6dy = 6\left(x - x^2\right) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Continuación ejemplo

Sea y: $0 \le y \le 1$

$$f_Y(y) = \int_y^{\sqrt{y}} 6dx = 6\left(\sqrt{y} - y\right) \quad \Rightarrow \quad f_Y(y) = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y) & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) $$P\left(X \le \frac{1}{2}, Y \le \frac{1}{2}\right) = \int_0^{1/2} \int_{x^2}^{x} 6\, dy\, dx = \int_0^{1/2} 6y\Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^{1/2} 6(x - x^2)dx$$

$$= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1/2} = 6\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{2}$$

Definición: Independencia de Variables Aleatorias

- **Caso discreto:** Sean X e Y dos v. a. discretas, decimos que X e Y son independientes si:

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \qquad \text{para todo } (x, y) \in R_{XY}$$

- **Caso continuo:** Sean X e Y v. a. continuas, decimos que X e Y son independientes si:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \qquad \text{para todo } (x, y) \in R_{XY}$$

Ejemplo: caso discreto

- Con la f.m. conjunta del Ejemplo 1

X \ Y	0	1	2	
0	0	0.15	0.10	0.25
1	0.15	0.20	0.05	0.40
2	0.10	0.15	0.10	0.35
	0.25	0.50	0.25	1

$p_{XY}(0,0) = 0$ $\quad$ $p_X(0) = 0.25$ $\quad$ $p_Y(0) = 0.25$

$p_X(0).p_Y(0) = 0.0625$

Luego X e Y no son independientes.

Ejemplo caso continuo

- Con los datos del ejemplo 2:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} 6 & 0 \le x \le 1 \quad x^2 \le y \le x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Se sigue que:

$$f_X(x)=\begin{cases} 6(x-x^2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} 6(\sqrt{y}-y) & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Para (1,1) se tiene que: $f_X(1).f_Y(1) \neq f_{XY}(1,1)$,

Entonces existe al menos un punto del recorrido, tal que:

$$f_X(x).f_Y(y) \neq f_{XY}(x,y),$$

Luego X e Y no son independientes

Ejemplo 3

- Se lanza un dado y una moneda. La función de masa conjunta está dada por:

$$p_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{12} & x=0,1; \quad y=1,\ 2,\ \ldots,\ 6\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

$$p_X(x)=\sum_{y=1}^{6} p_{XY}(x,y)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2} \qquad x=0,1$$

$$p_Y(y)=\sum_{x=0}^{1} p_{XY}(x,y)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6} \qquad y=1,2,\ldots,6$$

- Luego X e Y son independientes.

Ejemplo 4

Se eligen dos números al azar del intervalo [0, 1]. La v.a. (X,Y) tiene f.d. conjunta dada por:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

- Se sigue que $f_X(x)=\int_0^1 1dy=1,\ 0\le x\le 1 \quad\Rightarrow\quad f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$
- Análogamente:

$$f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

- Luego X e Y son independientes

Fin