Unidad 3: Distribuciones de Probabilidad
Desigualdad de Chebyshev

Probabilidad y Estadística
Año 2020

Desigualdad de Chebyshev o Tchebychev

Sea X una v. a. con EX = μ y Var(X) = σ^2 entonces:

$$P\left(|X-\mu| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

donde k es un número real positivo.

También se puede escribir de la forma:

$$P\left(|X-\mu| < k\sigma\right) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

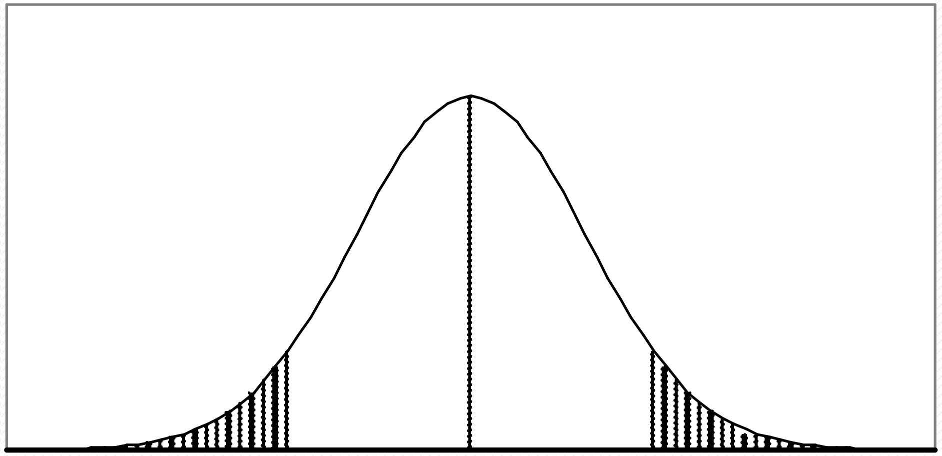
Observaciones

- La cota proporcionada puede ser muy precisa o muy alejada.
- Me proporciona información acerca de las probabilidades sin conocer nada de las distribuciones de probabilidad
- Sirve para acotar las probabilidades de ciertos intervalos sólo conociendo μ y σ.

Ejemplo: Interpretación de la Desigualdad de Chebyshev o Tchebychev:

$$P\left(|X-\mu| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

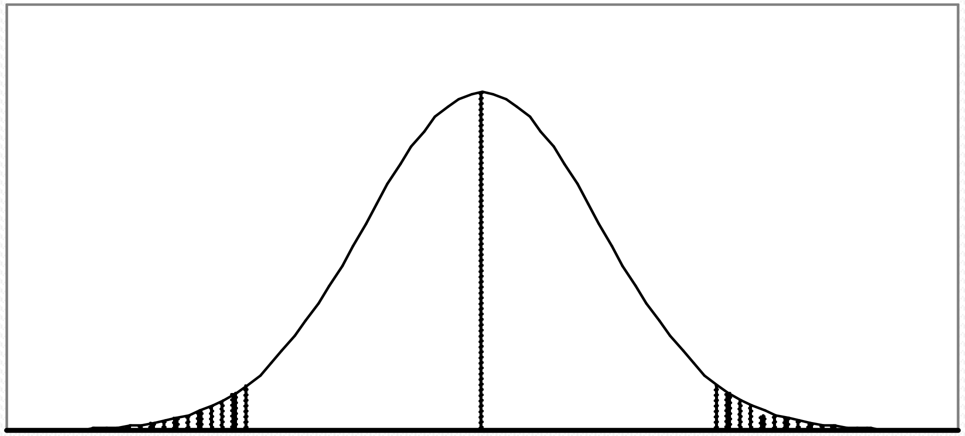
- Si k=2, entonces P(…) ≤ 0.25



Ejemplo: Interpretación de la Desigualdad de Chebyshev o Tchebychev:

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

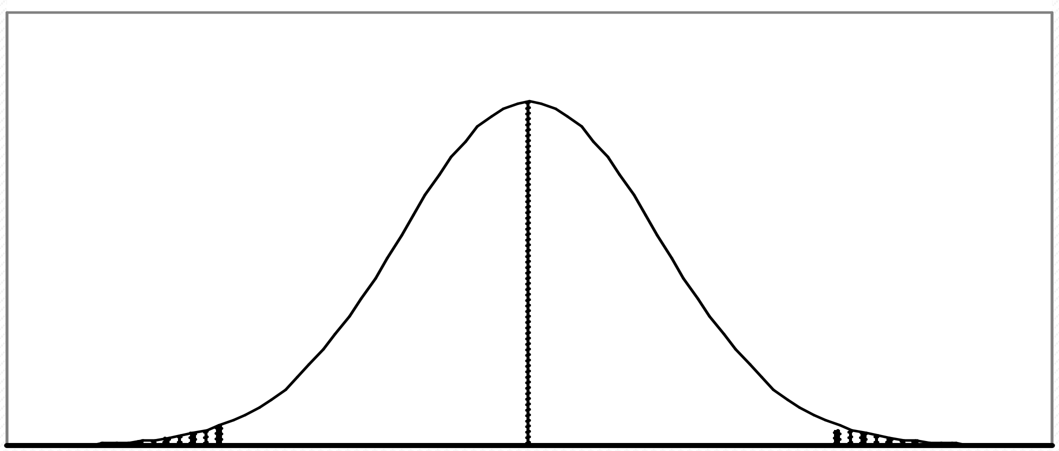
- Si k=3, entonces P(…) ≤ 0.11



Ejemplo: Interpretación de la Desigualdad de Chebyshev o Tchebychev:

$$P\left(|X-\mu| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

- Si k=4, entonces P(…) ≤ 0.06



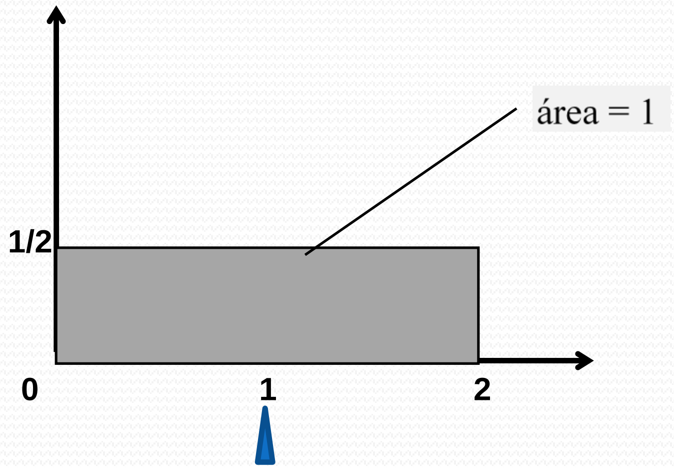
Ejemplo: Desigualdad de Chebyshev o Tchebychev

Sea X = "Un número elegido en el intervalo [0, 2]"

Rx = [0,2]

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$EX = 1 \qquad V(X) = \frac{1}{3} \qquad \sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Se pide una cota para

$$P\left(|X - 1| \ge \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Continuación Ejemplo:

- Utilizando la desigualdad de Chebyshev, k=3/2:

$$\mathrm{P}\left(\left|\mathrm{X}-\mu\right| \geq \frac{3}{2}\sigma\right) \leq \frac{4}{9} = 0.44$$

- En forma exacta:

$$P\left(\left|X-1\right| \geq \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = P\left(\left|X-1\right| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} < X - 1 < \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 1 - P\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < X < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \int_{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{2}\,dx = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.13$$

- Conclusión: la cota no es exacta pero si consistente y se obtuvo **sin saber nada** acerca de la forma de la distribución de la variable aleatoria.