Unidad 7: Estimación

Probabilidad y Estadística

Año 2020

Distribución de $\overline{X}$

Distribución de $\bar{X}$

Supuestos: Sea X una v. a. con $EX = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$. Sea $X_1, \ldots, X_n$ un muestra aleatoria de X. El estimador de μ por Método de los Momentos es $\hat{\mu} = \bar{X}$.

Se sabe que:

- $\mathbf{E(\bar{X}) = \mu}$ **y** $\mathbf{V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}}$
- Si $X_1, \ldots, X_n$ iid con distribución Normal $\Longrightarrow$ $\mathbf{\bar{X} \sim Normal}$, por T. de Combinaciones Lineales,
- Si $X_1, \ldots, X_n$ iid con otra distribución y n suficientemente grande $\Longrightarrow$ $\mathbf{\bar{X} \sim_{aprox.} Normal}$, por T. Central del Límite.

Estas son buenas propiedades de $\bar{X}$ como estimador de μ.

Ejemplo 1

La cantidad de errores de tipeo que comete una secretaria por página, variable que siguen una distribución de Poisson, son: 2 2 0 4 2 3 4 3 1 0.

Observamos $X_1, \ldots, X_n$ que vs.as. iid como X, con $X \backsim P(\lambda)$.

La estimación del parámetro por el Método de los Momentos es: $\hat{\lambda} = \overline{X} = 2{,}1$

Encuentre el desvío estándar del estimador propuesto y estime dicho desvío.

$$V(\hat{\lambda}) = V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\lambda}{n} \quad \Rightarrow \quad \hat{V}(\hat{\lambda}) = \frac{\hat{\lambda}}{n} \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}_{\hat{\lambda}} = \sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}} = 0.46$$

Ejemplo 2

Los siguientes datos provienen de una distribución Exponencial:

0.53 0.03 1.12 0.53 0.23 0.16 1.39 3.71 1.61

Observamos que $X_1, \ldots, X_n$ vs.as. iid como X, con $X \backsim E(\lambda)$.

La estimación del parámetro por el Método de los Momentos es: $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}} = 0.97$

Encuentre el desvío estándar del estimador propuesto.

Queremos encontrar: $V(\hat{\lambda}) = V\left(\frac{1}{\bar{X}}\right)$

Los siguientes datos nos servirán: $f(\bar{X}) = \frac{1}{\bar{X}}$ $f'(\bar{X}) = -\frac{1}{\bar{X}^2}$

Ejemplo 2 (continúa)

Escribimos como serie de Taylor para aproximar la varianza del estimador:

$$\frac{1}{\bar{X}} \cong \frac{1}{1/\lambda} + \left(-\frac{1}{\bar{X}^2}\right)\Big|^{1}/_{\lambda}\left(\bar{X} - \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda + (-\lambda^2)\left(\bar{X} - \frac{1}{\lambda}\right) \qquad \text{ya que} \qquad E(\bar{X}) = EX = \frac{1}{\lambda}$$

La varianza y desvío aproximados del estimador son:

$$\mathbf{V(\hat{\lambda}) \cong (-\lambda^2)^2 V(\bar{X}) = \lambda^4 \frac{\sigma^2}{n} = \lambda^4 \frac{1}{\lambda^2 n} = \frac{\lambda^2}{n}} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\sigma_{\hat{\lambda}} \cong \frac{\lambda}{\sqrt{n}}}$$

La estimaciones de esta varianza y desvío estándar son:

$$\mathbf{\hat{V}(\hat{\lambda}) \cong \frac{\hat{\lambda}^2}{n}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\hat{\sigma}_{\hat{\lambda}} \cong \frac{\hat{\lambda}}{\sqrt{n}}}$$

Distribución muestral $\hat{\sigma}^2$

Distribución muestral de $\hat{\sigma}^2$

Por el Método de los Momentos obtenemos como estimador de σ^2 a:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2 - \bar{X}^2$$

Se puede probar que $E(\widehat{\sigma}^2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2$, por lo que es sesgado.

Distribución muestral de $\hat{\sigma}^2$

Entonces buscamos un estimador insesgado de σ^2, definimos como su estimador:

$$s^2 = \frac{n\hat{\sigma}^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

se tiene que: $E(s^2) = \sigma^2$

Distribución muestral de $\hat{\sigma}^2$

Entonces un estimador insesgado para la desviación estándar σ será:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

No cumple con la propiedad anterior ya que: $E(s) \neq \sigma$