UNIDAD III: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD – 2da Parte
CARACTERÍSTICAS DE VARIABLES ALEATORIAS

Esperanza Matemática o Valor Esperado de una v. a.

Si una empresa de seguros nos informa que se espera que una mujer de 40 años viva 38 años más, no significa que toda mujer de 40 años hoy vivirá hasta cumplir 78 años solamente. Habrá mujeres de 40 años hoy que vivirán 10 años más otras 50 años más otras 20, etc. La expectativa debe ser interpretada como que en promedio todas las mujeres de 40 años hoy vivirán 38 años más.

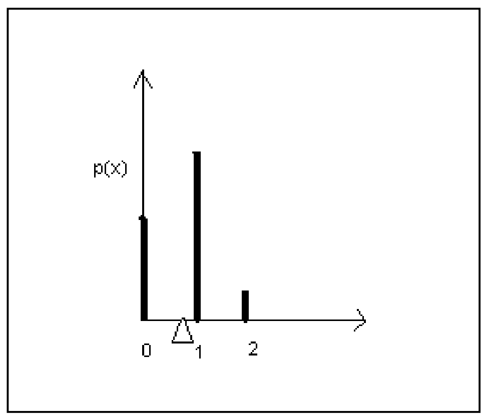
Caso Discreto
Sea X un v. a. discreta, $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ su recorrido y $p_X(x_i)$ i = 1, 2, … su función de masa de probabilidad.
El valor esperado de X se define como:

$$E(X) = \mu_X = \sum_{i=1} x_i \, p_X(x_i) \qquad \text{siempre que exista } \sum_{i=1} |x_i| \, p_X(x_i)$$

Ejemplo 12: Esperanza Matemática, caso discreto (mostrar gráficamente ubicación de la media)

Usando la f.m.p del Ejemplo 4:

x	$p_X(x)$
0	$\frac{10}{28}$
1	$\frac{15}{28}$
2	$\frac{3}{28}$



$$EX = 0 \times \frac{10}{28} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{3}{28} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Caso continuo:
Sea X una v. a. continua con función de densidad f_X, el valor **esperado de X se define** como:

$$EX = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x) dx \qquad \text{siempre que exista } \int_{-\infty}^{\infty} |x| \, f_X(x) dx$$

Ejemplo 13: Esperanza Matemática caso continuo (mostrar gráficamente ubicación de la media)

Suponga que el error en la temperatura de reacción, en ºC, para un experimento es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2 & -1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine el valor esperado del error en la temperatura de reacción.

$$EX = \int_{-1}^{2} \frac{1}{3}x^2 x dx = \left.\frac{x^4}{12}\right|_{-1}^{2} = \frac{16-1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

Observaciones:

1) La esperanza matemática no tiene porque ser un valor del recorrido de la variable
2) Es una medida de posición de la distribución de probabilidad. Es el centro de gravedad de la distribución de probabilidad.
3) Cuando el número de observaciones es muy grande la media muestral tiende a la esperanza matemática.

Propiedades:

Se puede demostrar que:

- Sea X v.a. tal que existe EX, sean a, b $\in \Re$, entonces

E(aX + b) = a EX + b

- Sean X, Y vs. as. tales que existen EX y EY. Entonces

E(X + Y) = EX + EY

Ejemplo 14: Propiedades de la esperanza.

El valor esperado de las calificaciones de cierto examen fue 65 y el desvío estándar 20. ¿Cómo deberán corregirse las calificaciones de manera tal que el valor esperado sea 75 y el desvío estándar sea 10? Considere la transformación Y=aX+b, a > 0.

$$E(X) = 65 \qquad \sqrt{V(X)} = 20$$

Y = *a* X + *b* $\Rightarrow$ EY = *a* EX + *b* y $\sigma_y = a\,\sigma_x$

$$\begin{cases} a\ EX + b = 75 \\ a\ \sigma_X = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \times 65 + b = 75 \\ a \times 20 = 10 \end{cases}$$

a = 1/2 = 0.5

$$\frac{1}{2} \times 65 + b = 75 \quad \Rightarrow \quad b = 75 - \frac{65}{2} = 75 - 32.5 = 42.5$$

Por lo tanto la transformación a realizar es:

Y = 0.5 X + 42.5

Esperanza de una función de una v. a.

TEOREMA:

Sea X una v. a. y sea Y = g(X), entonces:

a) Si X es discreta con función de masa p_X

$$EY = E\big(g(X)\big) = \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j)\, p_X(x_j)$$

b) Si X es continua con densidad f_X

$$EY = E\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$$

Nota:

Este resultado nos permite calcular la esperanza de una v. a. Y que es función de otra variable aleatoria X con distribución conocida, sin necesidad de obtener la función de densidad o de masa de Y.

Ejemplo 15: Tomar esperanza de W en Ejemplo 10

$W = 0.003V^2$

Por definición:

$$E(W) = \int_{-\infty}^{+\infty} w f_W(w) dw = \int_0^{0.3} w \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{3}} w^{-1/2} dw = \int_0^{0.3} w^{1/2} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{3}} dw = \sqrt{\frac{10}{3}}\frac{1}{3} w^{3/2}\Big|_0^{0.3} = 0.1$$

Por teorema:

$$E(W) = \int_0^{10} 0.003 v^2 \frac{1}{10} dv = \frac{0.003}{10}\frac{v^3}{3}\Big|_0^{10} = 0.1$$

<u>Varianza de una v.a.</u>

Sea X una v. a. la varianza de X se define como:

$V(X) = E(X - EX)^2 = \sigma_X^2$ siempre que $E(X^2) < \infty$.

La raíz cuadrada positiva de la varianza de X se denomina **desviación estándar** y se denota por σ_X.

Caso continuo $\quad V(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x) dx \quad$ siempre que exista $E(X^2)$

Caso discreto $\quad V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 p_X(x_i) \quad$ siempre que exista $E(X^2)$

Propiedades:

1) Sea X v.a. tal que existe V(X), entonces $V(X) = EX^2 - (EX)^2$

   Demostración: $V(X) = E(X-\mu)^2 = E\left(X^2 - 2X\mu + \mu^2\right) = EX^2 - 2\mu EX + \mu^2 = EX^2 - \mu^2$

2) Sea X v.a. tal que existe V(X)y sean a,b $\in \Re$, entonces
   $V(a X + b) = a^2 V(X)$

Ejemplo 16: Varianza, caso discreto.

En el ejemplo 4 recordemos que E(X) = 3/4

$$V(X) = E(X - EX)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{10}{28} + \left(1-\frac{3}{4}\right)^2 \frac{15}{28} + \left(2-\frac{3}{4}\right)^2 \frac{3}{28} = 0.4$$

Ejemplo 17: Varianza, caso continuo.

En el ejemplo 12 recordemos que

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2 & -1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad E(X) = 5/4$$

Utilizando la propiedad: $V(X)=E(X^2) - (E(X))^2$

Calculemos V(X)

$$E(X^2) = \int_{-1}^{2} x^2 \frac{1}{3} x^2 dx = \frac{1}{3}\frac{x^5}{5}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{11}{5} \qquad \Rightarrow \qquad V(X) = \frac{11}{5} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 0.6375$$

Desigualdad de Chebyshev o Tchebychev

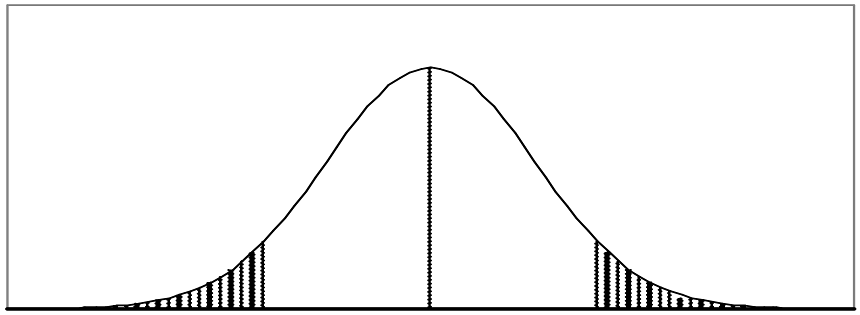
Sea X una v. a. con EX = μ y Var(X) = σ^2 entonces:

$$P\left(\left| X - \mu \right| \ge k\,\sigma\right) \le \frac{1}{k^2}$$ donde k es un número real positivo.

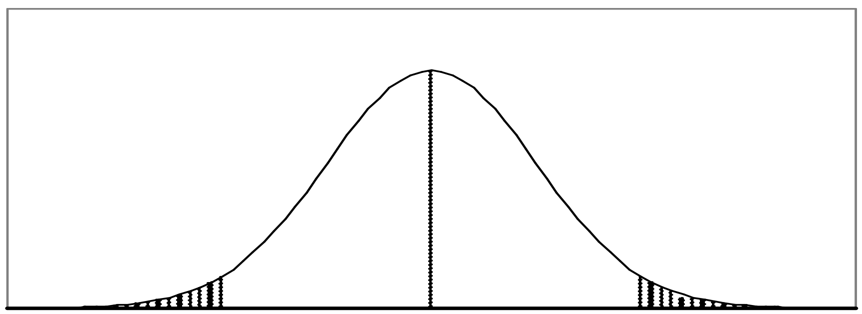
Ejemplo 18: Interpretación de la Desigualdad de Chebyshev o Tchebychev:

$$P\left(\left|X-\mu\right| \ge k\sigma\right) \le \frac{1}{k^2}$$

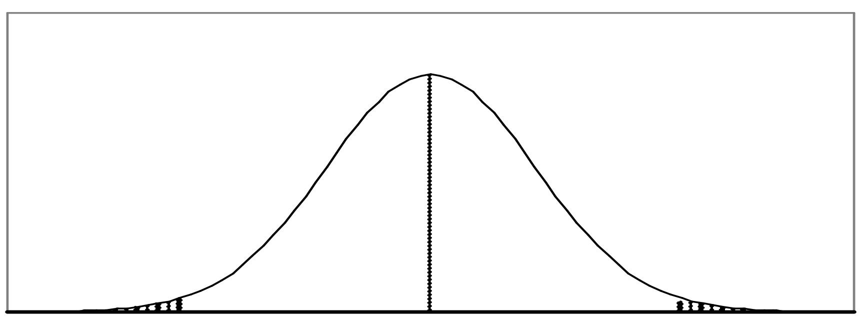
P ≤ 0.25



P ≤ 0.11



P ≤ 0.06



También se puede escribir de la forma:

$$P\left(\left| X-\mu \right| < k\,\sigma\right) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

Observaciones:

1. La cota proporcionada puede ser muy precisa o muy alejada.
2. Me proporciona información acerca de las probabilidades sin conocer nada de las distribuciones de probabilidad
3. Sirve para acotar las probabilidades de ciertos intervalos sólo conociendo μ y σ.

Ejemplo 19: Desigualdad de Chebyshev o Tchebychev.

k = 3/2

$$P\left(|X-\mu| \geq \frac{3}{2}\sigma\right) \leq \frac{4}{9} = 0.44$$

Supongamos que X tiene función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

EX = 1 y $V(X) = \frac{2^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$P\left(|X-1| \geq \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = P\left(|X-1| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} < X-1 < \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 1 - P\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2} < X < 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \int_{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{2}dx = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.13$$

Conclusión: el resultado no es exacto pero si consistente y se obtuvo sin saber nada acerca de la forma de la distribución de la variable aleatoria.

Esperanza y Varianza aproximada de la transformada de una v. a.

Sea X una v. a. y sea Y = g(X) la transformada. Si la función g es muy complicada la evaluación de la esperanza y de la varianza puede conducir a integrales o sumas muy difíciles. En estos casos la esperanza y la varianza de Y pueden ser calculadas de manera aproximada a partir de la media y varianza de X.

Supongamos que g tiene derivadas continuas en el recorrido de X, el desarrollo en serie de Taylor de g alrededor de $x = \mu_X$ hasta el término de orden 2 será:

$$y = g(x) \approx g(\mu_X) + g'(\mu_X)(x-\mu_X) + \frac{1}{2!}g''(\mu_X)(x-\mu_X)^2$$

despreciando los demás términos. Tomando esperanza en ambos miembros

$$Ey \approx g(\mu_X) + \sigma_X^2 \frac{g''(\mu_X)}{2}$$

Despreciando el segundo término y tomando varianza

$$V(Y) \approx [g'(\mu_X)]^2 \sigma_X^2$$

Ejemplo 20: Esperanza y Varianza aproximada de una transformada.

Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con EX = 1 y $V(X) = \frac{1}{3}$.

Sea Y = e^{-X} una transformada.

$g(x) = e^{-x}$ $\quad$ $g'(x) = -e^{-x}$ $\quad$ $g''(x) = e^{-x}$

$$e^{-x} \cong e^{-\mu_x} - e^{-\mu_x}(X-\mu_x) + \frac{e^{-\mu_x}}{2}(X-\mu_x)^2$$

$\mu_y \cong g(\mu_x) + \sigma_x^2\, g''(\mu_x)/2 =$ $e^{-1} + \frac{1}{3}\frac{e^{-1}}{2} = 0.429$

$\sigma_y^2 \cong \sigma_x^2\,(g'(\mu_x))^2 =$ $\frac{1}{3}[-e^{-1}]^2 = \frac{1}{3}e^{-2} = 0.045$

La Esperanza y Varianza Exactas serían:

$$EY = \int_0^2 e^{-x}\,\frac{1}{2}\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}\Bigg|_0^2 = \frac{-e^{-2}+1}{2} = \frac{1-e^{-2}}{2} = 0.432$$

$$EY^2 = \int_0^2 e^{-2x}\,\frac{1}{2}\,dx = \frac{-e^{-2x}}{4}\Bigg|_0^2 = \frac{-e^{-4}+1}{4} = \frac{1-e^{-4}}{4}$$

$$V(Y) = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1-e^{-4}}{4} - \left(\frac{1-e^{-2}}{2}\right)^2 = 0.058$$

<u>En resumen</u>: para obtener la esperanza de una transformada de una variable aleatoria podemos hacerlo:

De manera exacta

1) Por definición, encontrando primero la función de densidad de la transformada y luego por definición la esperanza
2) Por el teorema.

De manera aproximada

3) Por Taylor, con lo que encontramos la esperanza y varianza aproximadas sólo a partir de la esperanza y la varianza de la variable aleatoria original.