Unidad 7: Estimación

Tema: Estimación por Intervalos

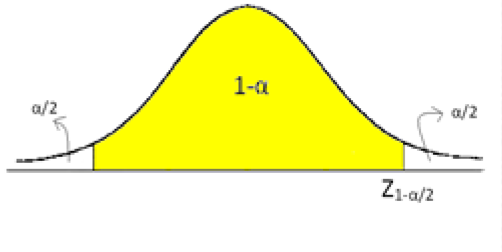
Intervalo de Confianza para la proporción

Intervalo de (1–α)100 % de confianza para la proporción *p* en muestras grandes

- $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de $X \sim \mathrm{B(p)}$,

n suficientemente grande.

- Estadístico pivote: $\dfrac{\bar{X}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \approx N(0,1)$



por Teorema Central del Límite

Intervalo de (1–α)100 % de confianza para la proporción *p* en muestras grandes

- Planteamos: $P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

- Obtenemos: $P\left(\bar{X} - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, z_{1-\alpha/2} < p < \bar{X} + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

- $IC_{(1-\alpha)100\%} = \bar{X} \pm \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\, z_{1-\alpha/2}$

Intervalo de (1–α)100 % de confianza para la proporción p en muestras grandes

- p es desconocido.
- Lo reemplazamos por $\hat{p} = \bar{X}$
- Un intervalo aproximado de $(1 - \alpha)100\%$ de confianza para la proporción es:

$$\boxed{IC_{(1-\alpha)100\%} \cong \bar{X} \pm \sqrt{\frac{\bar{X}\,(1-\bar{X})}{n}}\, z_{1-\alpha/2}}$$

Ejemplo 4: IC para la proporción

- Se han observado 4 elementos defectuosos entre 200 examinados en un proceso de fabricación. Construir un intervalo de 90% de confianza para la proporción de defectuosos.

Ejemplo 4: IC para la proporción

- $X_1, \dots, X_{200}$ m. a. de $X \sim \mathrm{B(p)}$

- Estadístico pivote: $\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \approx N(0,1)$

Ejemplo 4: IC para la proporción

- Planteamos:

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

- $IC_{(1-\alpha)100\%} \cong \bar{X} \pm \sqrt{\frac{\bar{X}\,(1-\bar{X})}{n}}\, z_{1-\alpha/2}$

Ejemplo 4: IC para la proporción

- De la muestra:

$n = 200$ (suf. grande) $\qquad \hat{p} = \bar{X} = \frac{4}{200}$

- 90% de confianza: $(1 - \alpha)100\% = 90\%$

entonces $z_{1-\alpha/2} = z_{0.95} = 1.65$ (tabla o app)

Ejemplo 4: IC para la proporción

- $$IC_{90\%} \cong \bar{X} \pm \sqrt{\frac{\bar{X}\,(1-\bar{X})}{n}}\, z_{1-\alpha/_2}$$

$$= \frac{4}{200} \pm \sqrt{\frac{4}{200}\frac{196}{200}\frac{1}{200}}\ \ 1.65$$

$$= (\mathbf{0.01}, \mathbf{0.03})$$

Observaciones finales:

- Si se quiere mayor confianza, se pierde precisión (intervalos más anchos)
- Si se quiere mayor precisión, se pierde confianza.
- Para tener mayor precisión sin perder confianza se necesita mayor información (por ejemplo, muestras más grandes)
- Si no tenemos el supuesto de población Normal, pero el tamaño muestral es grande, podemos dar intervalos aproximados por Teorema Central del Límite.