Unidad 5: Distribuciones de funciones de variables aleatorias
Propiedades de Esperanza Covarianza Coeficiente de Correlación

Probabilidad y Estadística

Año 2020

Teorema: Esperanza de una función de varias variables aleatorias

Se puede demostrar que:

- Caso continuo $$E[h(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$
- Caso discreto $$E[h(x,y)] = \sum_{x}\sum_{y} h(x,y) p_{XY}(x,y)$$

Ejemplo

Podemos calcular:

- $E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf_{XY}(x, y)dxdy$
- $E(X+Y)$
- $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$

Más propiedades de la Esperanza

1) Sean $X_1, \ldots, X_n$ vs. as. cuyas esperanzas existen; sean $a_1, \ldots, a_n$ constantes, entonces:

$$E(a_1X_1 + \ldots + a_nX_n) = a_1EX_1 + \ldots + a_nEX_n$$

2) Si X e Y son v. a. independientes cuyas esperanzas existen, entonces: $E(XY) = EXEY$

- **Generalización:**

Sean $X_1, \ldots, X_n$ v. a. independientes, tales que $EX_i < \infty$ $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces:

$$E(X_1 \ldots X_n) = \prod_{i=1}^{n} EX_i$$

Observación

- El recíproco de la propiedad 2) no es cierto, es decir que:

$$E(XY) = EXEY \not\Rightarrow \text{ X e Y son independientes}$$

Contraejemplo:
E(XY) = E(X) E(Y) no implica independencia

Sea X tal que $R_X = \{ -1, 0, 1\}$ con $p_X(x) = 1/3 \ \forall \ x \in R_X$. Defino $Y = X^2$. La función de masa conjunta está dada por:

Y \ X	–1	0	1
0	0	1/3	0
1	1/3	0	1/3

- $EX = 0$
- $EY = 2/3$
- $E(XY) = E(X^3) = 0$
- Por lo tanto $E(XY) = EX.EY$
- Pero X e Y no son independientes ya que, por ejemplo,

$$p_{XY}(0, 1) = 0 \qquad y \qquad p_X(0) \,.\, p_Y(1) = 1/3 \,.\, 2/3 = 2/9$$

Covarianza

La Covarianza es una medida de Asociación Lineal entre dos variables. Se define como:

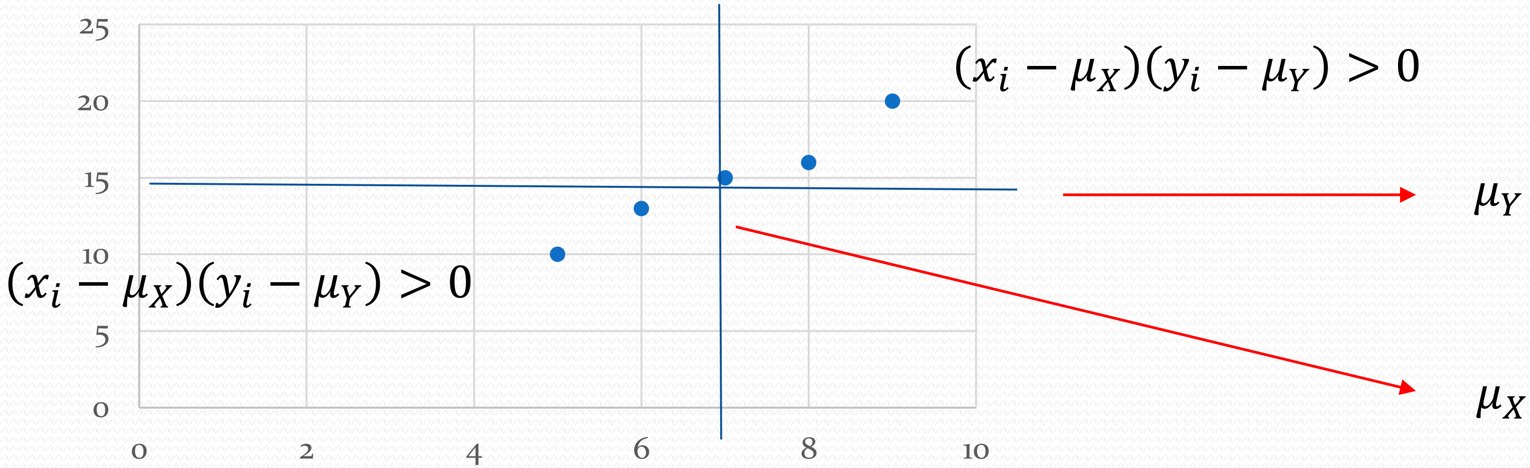
$Cov(X, Y) = E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ siempre que $\sigma_X < \infty$ y $\sigma_Y < \infty$

Se puede probar que:

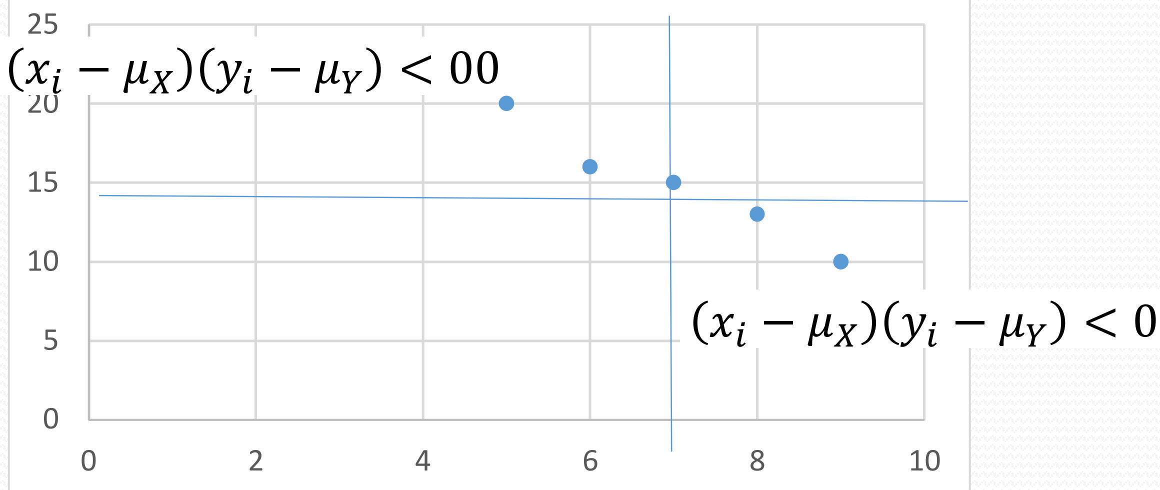
$Cov(X, Y) = E(XY) - EX\, EY$

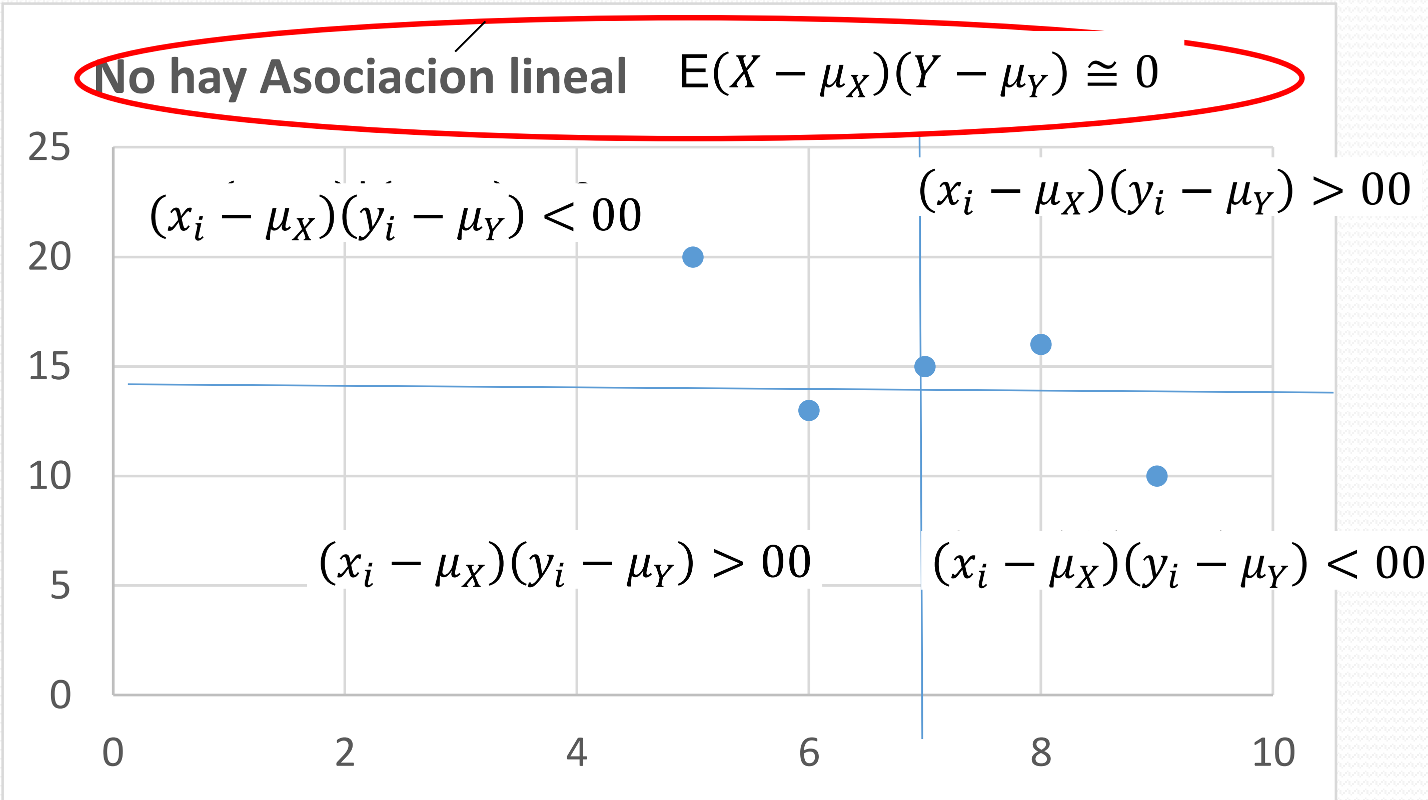
Demostración como ejercicio

Asociación lineal positiva $\mathrm{E}(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)>0$



Asociación lineal negativa $\mathrm{E}(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)<0$





No hay Asociacion lineal
$E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\cong 0$
$(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)<00$
$(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)>00$
$(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)>00$
$(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)<00$
25
20
15
10
5
0
0
2
4
6
8
10

Propiedades de la covarianza

Sean X e Y vs. as. tales que existen σ^2_X y σ^2_Y

1) $\mathrm{Cov}^2(X, Y) \leq \sigma^2_X \sigma^2_Y$
2) $\mathrm{Cov}(aX+b, cY+d) = ac\mathrm{Cov}(X, Y)$ para todo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
3) $\mathrm{Cov}(X+Y, Z)=\mathrm{Cov}(X,Z)+\mathrm{Cov}(Y,Z)$
4) X e Y independientes $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X, Y)=0$

Demostración de propiedades 2), 3) y 4) como Ejercicio

Ejemplos

1. Suponga que X e Y son variables aleatorias tales que la $Cov(X,Y) = 1$. Calcule la $Cov(2X,3Y+1)$

$Cov(2X,3Y+1) = 2.3.Cov(X,Y) = 6$

2. Suponga que X e Y están correlacionadas negativamente. ¿$V(X+Y)$ es mayor o menor que $V(X-Y)$?

Observación

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \not\Rightarrow X \text{ e } Y \text{ son independientes}$$

Contraejemplo: Ejercicio (Ver Diapositiva 5)

Coeficiente de correlación

La covarianza es una medida de asociación lineal entre dos variables aleatorias. Tiene el inconveniente de que no está acotada y depende de las particulares unidades de medidas de las variables X e Y, por ello no podemos saber cuándo esta asociación es fuerte o débil. Por eso definimos el coeficiente de asociación lineal:

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Propiedades

1) $|\rho(X,Y)| \leq 1$
   - $\rho(X,Y) \approx \pm 1$ Existe una fuerte asociación lineal (positiva o negativa) entre las variables
   - $\rho(X,Y) \approx 0$ No hay asociación lineal entre las variable. (no indica independencia)
2) X e Y independientes $\Rightarrow$ $\rho(X, Y)=0$

$$\not\Leftarrow$$

3) $Y=aX+b,\ a\neq 0 \Leftrightarrow \rho(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } a > 0 \\ -1 & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Demostrar 3) en el sentido $\Rightarrow$ (Ejercicio)

Más propiedades de la varianza

1) Sea X una v. a. tal que $\sigma^2_X<\infty$ y sean a y b $\in \Re$ entonces: $V(aX+b)=a^2V(X)$

2) Sean X e Y vs. as. tales que $\sigma^2_X<\infty$ y $\sigma^2_Y<\infty$ entonces
$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)$$

- Consecuencia: Si X e Y son independientes, entonces $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$
- Generalización: Si $X_1, \ldots, X_n$ vs. as. ***independientes***, tales que, para todo i $\sigma^2_i<\infty$
$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

Ejemplos (Ejercicios)

1. Suponga que X e Y están correlacionadas negativamente.

   ¿$V(X+Y)$ es mayor o menor que $V(X-Y)$?

2. Suponga que X, Y y Z son variables aleatorias tales que:

$V(X) = 1$ $V(Y) = 4$ $V(Z) = 8$ $Cov(X, Y) = 1$
$Cov(X, Z) = -1$ $Cov(Y, Z) = 2$.

Calcule:

a) $V(X+Y+Z)$

b) $V(3X-Y-2Z+1)$

Fin

Unidad 5 2da Parte