Langages formels

1) Mots, langages

2) Automates déterministes

3) Grammaires et langages algébriques

2) Automates déterministes

- **2a) <u>définitions</u>:**

  Un **automate fini** est un quintuplet
  $A = (X, E, e_0, F, \sigma)$ où:

  - X est un ensemble fini, appelé alphabet.
  - E est un ensemble fini, appelé ensemble des états. (X et E disjoints)
  - e_0 est un élément distingué de E, appelé état initial.
  - F est un sous-ensemble de E, appelé ensemble des états finaux.

- σ est une application de ExX dans E, appelée fonction de transition.

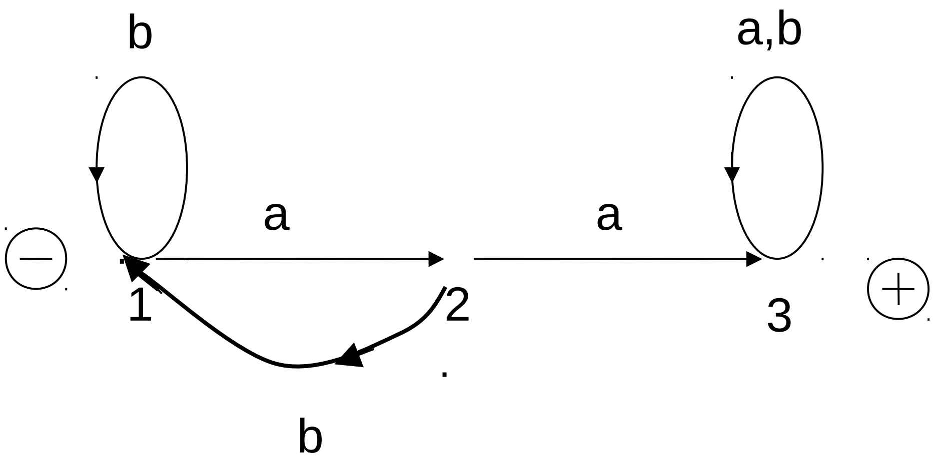
Exemple d'automate fini: A_1

$$X=\{a,b\};E=\{1,2,3\};e_0=1;F=\{3\};$$
$$\sigma:(1,a)\rightarrow 2;(2,a)\rightarrow 3;(3,a)\rightarrow 3;(1,b)\rightarrow 1;(2,b)\rightarrow 1;(3,b)\rightarrow 3;$$

	a	b
1	2	1
2	3	1
3	3	3

Table de transition

Graphe de transition



- Définition 2:

On étend la fonction de transition **σ** à une *application* σ***** de ExX* dans E en posant, pour tout $m \in X^*$ et tout $e \in E$:

- Si $m=\varepsilon$ alors $\sigma^*(e,m)=e$

-Si $m = x \bullet m'$ avec $x \in X$ et $m' \in X^*$, et si $\sigma(e,x)=e'$,alors:

$$\boldsymbol{\sigma^*(e,m)=} \sigma^*(e,x \bullet m')= \sigma^*(\sigma(e,x),m')= \boldsymbol{\sigma^*(e',m')}$$

Il est commode de noter $e \ \mathbf{x}\ m = \sigma^*(e,m)$.

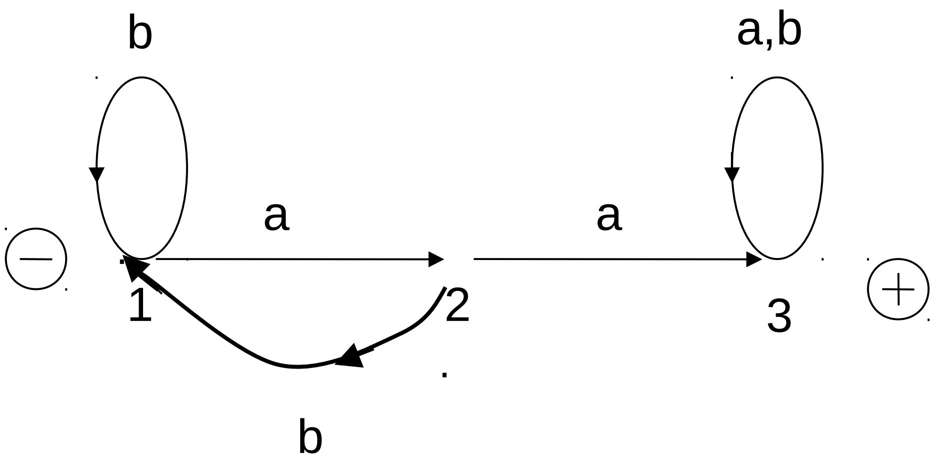
La dernière ligne de la définition s'écrit donc:

$e \ \mathbf{x}\ m=e \ \mathbf{x}\ (x \bullet m')= (e \ \mathbf{x}\ x)\mathbf{x}(m')=e' \ \mathbf{x}\ m'$

Exemple avec A_1

$\sigma^*(1,abaab)=\sigma^*(2,baab)=\sigma^*(1,aab)$
$=\sigma^*(2,ab)=\sigma^*(3,b)=\sigma^*(3,\varepsilon)=1$

On écrira: 1 x abaab = 3



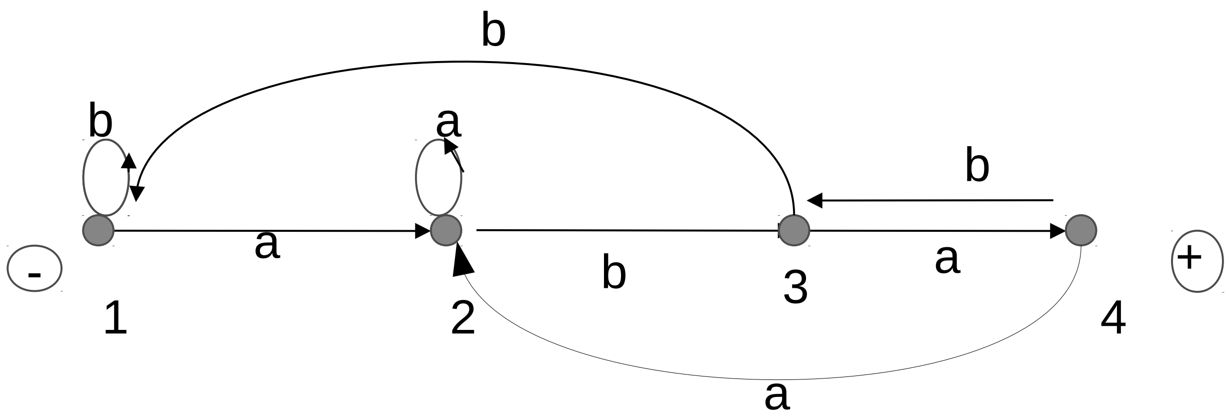
Exemple :

1 x bbaabab = 3

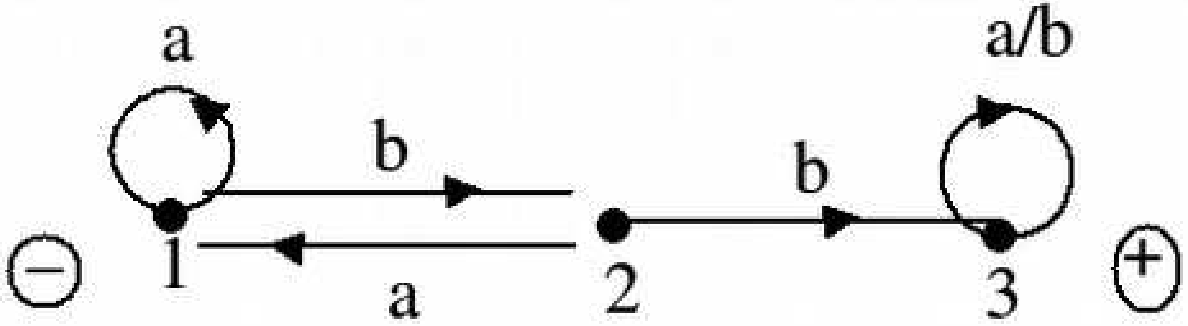
1X babbababa = 4

2 x aabbb = 1

A

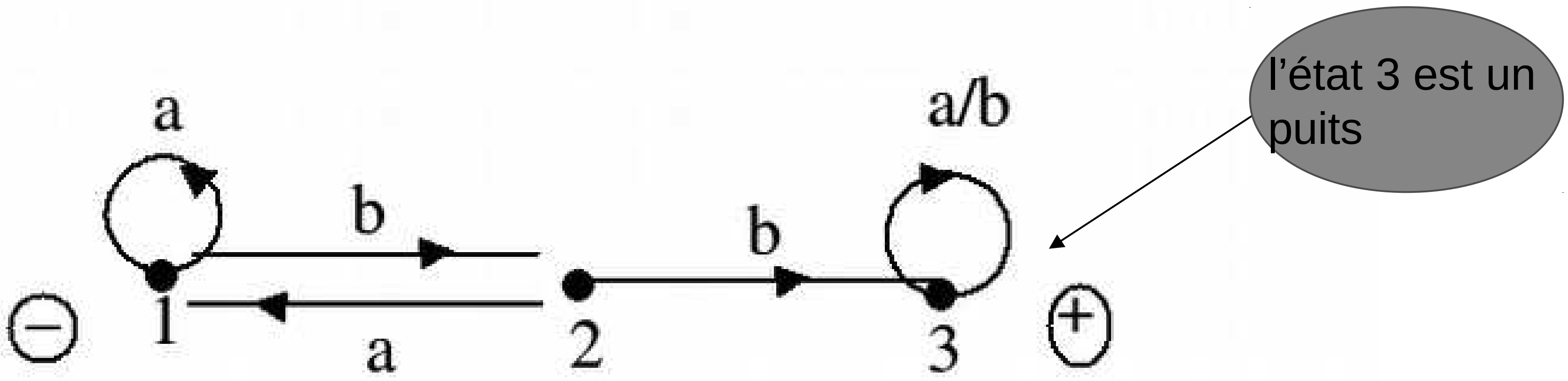


Exercice :



1Xabba= ?
1Xaaabab= ?
2Xaab= ?

1Xu•bb•v= ? (u et v mots quelconques)



1Xabba= 3
1Xaaabab= 2
2Xaab= 2

1Xu•bb•v= 3 (u et v mots quelconques)
Démonstration :
1er cas : 1Xu=1 alors :
1Xu•bb•v=(1Xu)Xbb•v=(1Xbb)Xv=3Xv=3
(dernière égalité : l'état 3 est un puits)
2ème cas : 1Xu=2 alors :
1Xu•bb•v=(1Xu)Xbb•v=(2Xbb)Xv=3Xv=3
3ème cas : 1Xu=3 alors :
1Xu•bb•v=(1Xu)Xbb•v=(3Xbb)Xv=3Xv=3

- **<u>Propriété 1:</u>**

> Pour tout u, v $\in$X*, σ*****(e,u • v)= σ*****(σ*****(e,u),v)
>
> e x u • v =(e x u) x v

- *<u>Démonstration</u>*: on démontre par récurrence sur k la proposition suivante:
  - **P(k):** $\forall e \in E, \forall u,v \in X^*, |u| = k \Rightarrow e \times (u \cdot v) = (e \times u) \times v$

2 b) Langages reconnus par un automate déterministe:

- **<u>Définition3</u>**:

Soit $A=(X, E, e_0, F,\sigma)$ un automate. Le langage reconnu par **A** est le langage:

$$L(A)=\{ m\in X^*/ e_0 \text{ x } m \in F\}$$

Le chemin étiqueté:

Soit $A = (X,E, e_0, F,\sigma)$ un automate, e un état de E et $m=a_1a_2\ldots a_k$ un mot de X*. On note:

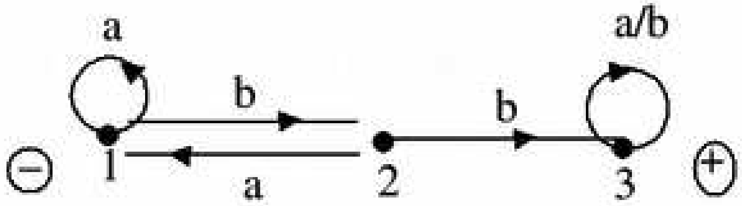
$\Lambda(e,m)=(t_0 = e, a_1, t_1, a_2, \ldots.a_i, t_i,\ldots.a_k,t_k)$

avec

$$\forall\, i \in \{0,1,\ldots,k\}, t_i \in E,$$

$$\forall\, i \in \{0,1,\ldots,k-1\}, t_i \times a_{i+1} = t_{i+1}$$

Exemple de chemin étiqueté :

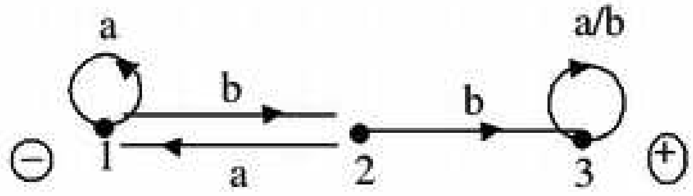


$\Lambda(1,aabbabb)=(1,a,1,a,1\underline{,b,2,b,}3,a,3,b,3,b,3)$

Première fois
dans l'état 3

$$1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{b} 3$$

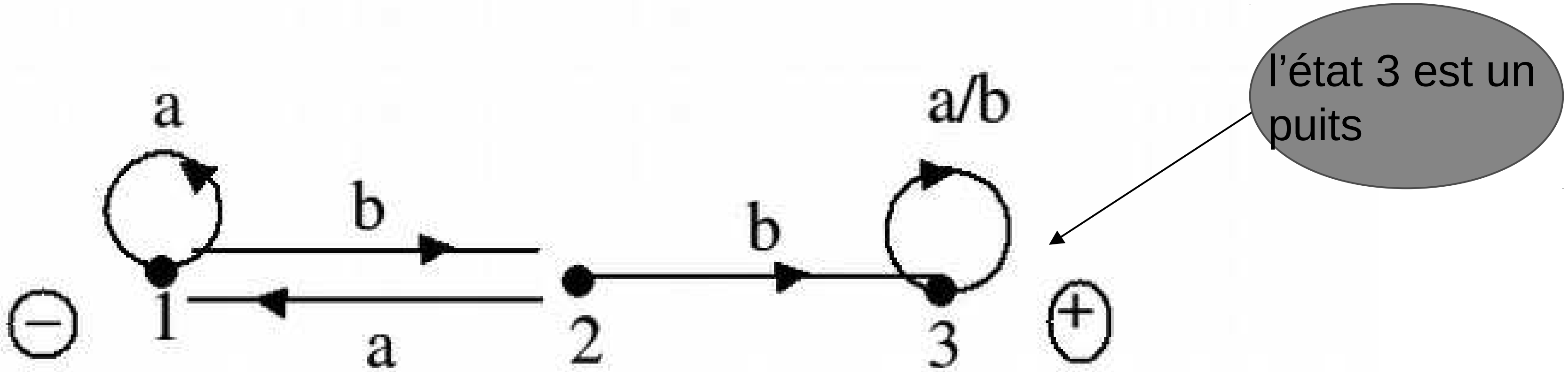
Démonstration de langage :



L(A) = {m∈X*,bb facteur de m} = {u•bb•v, u,v∈ X*} **?**

1) 1Xu•bb•v=3 ?

2) Si 1Xm=3 alors bb facteur de m ?



1Xu•bb•v= 3 ? (u et v mots quelconques)

Démonstration :

1er cas : 1xu=1 alors :

1xu•bb•v=(1xu)Xbb•v=(1xbb)xv=3xv=3

(dernière égalité : l’état 3 est un puits)

2ème cas : 1xu=2 alors :

1xu•bb•v=(1xu)Xbb•v=(2xbb)xv=3xv=3

3ème cas : 1xu=3 alors :

1xu•bb•v=(1xu)xbb•v=(3xbb)xv=3xv=3

Si 1Xm=3 alors bb facteur de m ?

Par hypothèse Λ(1,m) est de la forme :

$\Lambda(1,m)=(t_0=1,\ldots\ldots,b,t_{i-1}=2,b,t_i=3,\ldots,3,\ldots,3,\ldots,t_k=3)$

Donc bb facteur de m

(<u>explications :</u>

Par hypothèses : $t_0=1$ et $t_k=3$.

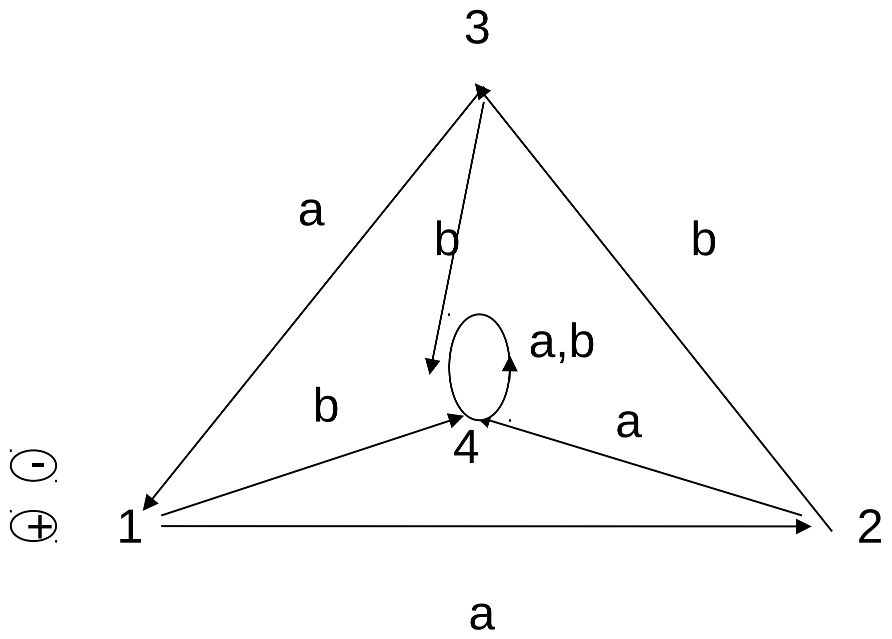
Notons i le plus petit indice tel que $t_i=3$

<u>Par analyse « rétro » de l'automate</u> :

$t_{i-1}=2$, $a_i=b$ et $a_{i-1}=b$

Exemple 2: A_2

- A_2



Démonstration du langage reconnu par A_2

$L(A_2)=\{ (aba)^n, n \in IN \}$?

P(n)

1) Pour tout $n \in IN$, $1x(aba)^n=1$?

$\boxed{P(0) ?}$ $1 \times (aba)^0 = 1 \times \varepsilon = 1$ donc P(0) vraie.

$\boxed{P(n)\Rightarrow P(n+1) ?}$

HR

$1 \times (aba)^{n+1} = \underline{1 \times (aba)} \bullet (aba)^n = 1x(aba)^n = 1$

2) 1xm=1 => m est de la forme $(aba)^n$?

Par récurrence sur la longueur de m :

Pour tout entier k, si m est de longueur k alors :

1xm=1 => m est de la forme $(aba)^n$

Idée :

$$\Lambda(1,m)=(\underbrace{t_0=1,\ldots,t_{k-3}}_{\text{HR}}=1,\ \underbrace{a,\ t_{k-2}=2,\ b, t_{k-1}=3,\ a,\ t_k=1}_{\text{Analyse rétro}})$$