Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου

DEMOCRITUS UNIVERSITY OF THRACE | DEPARTMENT OF ELECTRICAL & COMPUTER ENGINEERING

23 ΙΟΥΝΙΟΥ

Τελική Άσκηση

Έχει συνταχθεί από: Ρήγας Παναγιώτης 56841

Άσκηση

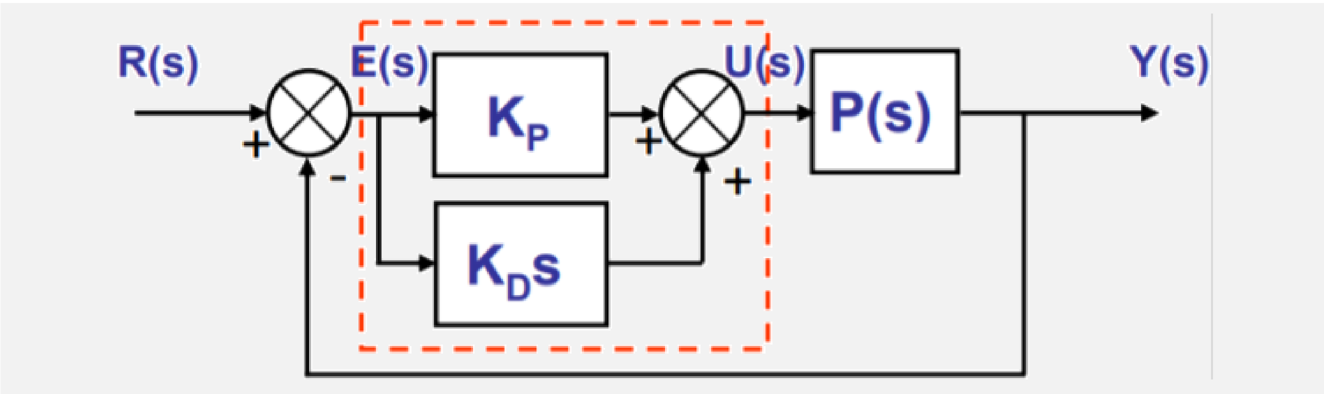
Αρχικά παίρνουμε τα ζεύγη τιμών ω_n και ζ για TF και ZPK. Έτσι έχουμε:

$$\omega_{n\,TF} = 1.7203 \text{ και } \omega_{n\,ZPK} = 2.28$$
$$\zeta_{TF} = 0.1581 \qquad \zeta_{ZPK} = 0.24$$

Ξεκινάμε την υλοποίηση του PID ελεγκτή. Η διαδικασία είναι η εξής:

1) Δημιουργούμε τον PD ελεγκτή και επιλέγουμε τα κέρδη του ώστε το $\zeta = 1$. Επιπλέον λαμβάνουμε υπ' οψιν μας το κριτήριο ευστάθειας Ruth.
2) Συνεχίζουμε με την νέα συνάρτηση και βρίσκουμε τον PI ελεγκτή με βάση το κριτήριο ευστάθειας Ruth
3) Υπολογίζουμε τα κέρδη του PID ελεγκτή και βρίσκουμε την τελική συνάρτηση μεταφοράς

1ο ερώτημα



Ξεκινάμε με τις τιμές της TF. Έτσι έχουμε συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόγχου:

$$\mathbf{H(s) = \frac{\omega_n^2(K_{p1} + K_D s)}{s^2 + (2\omega_n\zeta + \omega_n^2 K_D)s + \omega_n^2 K_{p1}}}$$

Η σταθερά $\mathbf{K_D}$ επιλέγεται ώστε να έχουμε την επιθυμητή απόσβεση, ενώ η $\mathbf{K_{p1}}$ είναι το κέρδος του συστήματος. Επιλέγουμε την $\mathbf{K_D}$ έτσι ώστε να έχουμε ζ όσο πιο κοντά στην μονάδα γίνεται:

$$\mathbf{2\omega_n\zeta + \omega_n^2 K_D = 2\omega_n\zeta_{επιθυμητό}}$$

Έστω ότι το $\mathbf{\zeta_{επιθυμητό} = 1 - error, error = 1\%}$. Έτσι το $\mathbf{K_D}$ υπολογίζεται σε:

$$\mathbf{K_D^{TF} = \frac{2\omega_n\zeta_{επιθυμητό} - 2\omega_n\zeta}{\omega_n^2} \approx 0.9788}$$

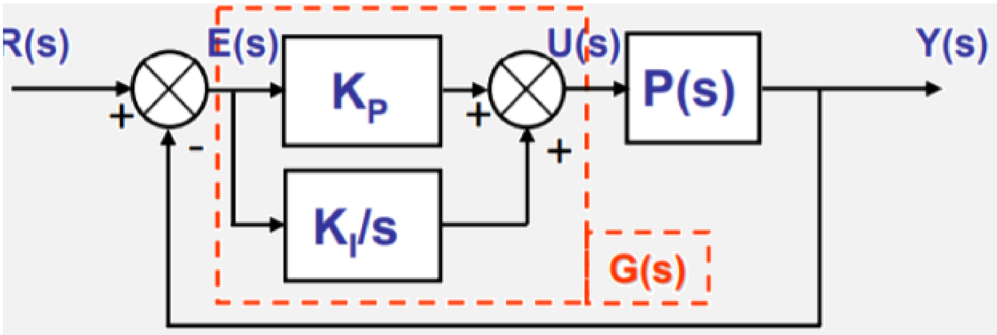
Ο συντελεστή $\mathbf{K_p}$ μπορεί να πάρει διάφορες τιμές με περιορισμό να είναι θετικός όπως θα δούμε.

s^2	1	$\omega_n^2 K_{p1}^{TF}$
s^1	$2\omega_n\zeta + \omega_n^2 K_D^{TF}$	0
s^0	$\omega_n^2 K_{p1}^{TF}$	0

Έτσι για να έχουμε ευστάθεια πρέπει:

$$K_{p1}^{TF} > 0$$

$$K_D^{TF} > -\frac{2\omega_n\zeta}{\omega_n^2} = -\frac{2\zeta}{\omega_n} = -0.1838$$



Συνεχίζουμε με τον PI ελεγκτή, με ενσωματωμένο όμως τον PD. Έτσι έχουμε εξίσωση κλειστού βρόγχου:

$$H_{PI}(s) = \frac{\omega_n^2\left(K_{p2}^{TF}s + K_{i2}^{TF}\right)}{s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 K_{p2}^{TF}s + \omega_n^2 K_{i2}^{TF}}$$

Παίρνουμε το κριτήριο Ruth:

s^3	1	$\omega_n^2 K_{p2}^{TF}$
s^2	$2\zeta\omega_n$	$\omega_n^2 K_{i2}^{TF}$
s^1	$\frac{\omega_n^2 K_{i2}^{TF} - 2\zeta\omega_n\omega_n^2 K_{p2}^{TF}}{-2\zeta\omega_n}$	0
s^0	$\omega_n^2 K_{i2}^{TF}$	0

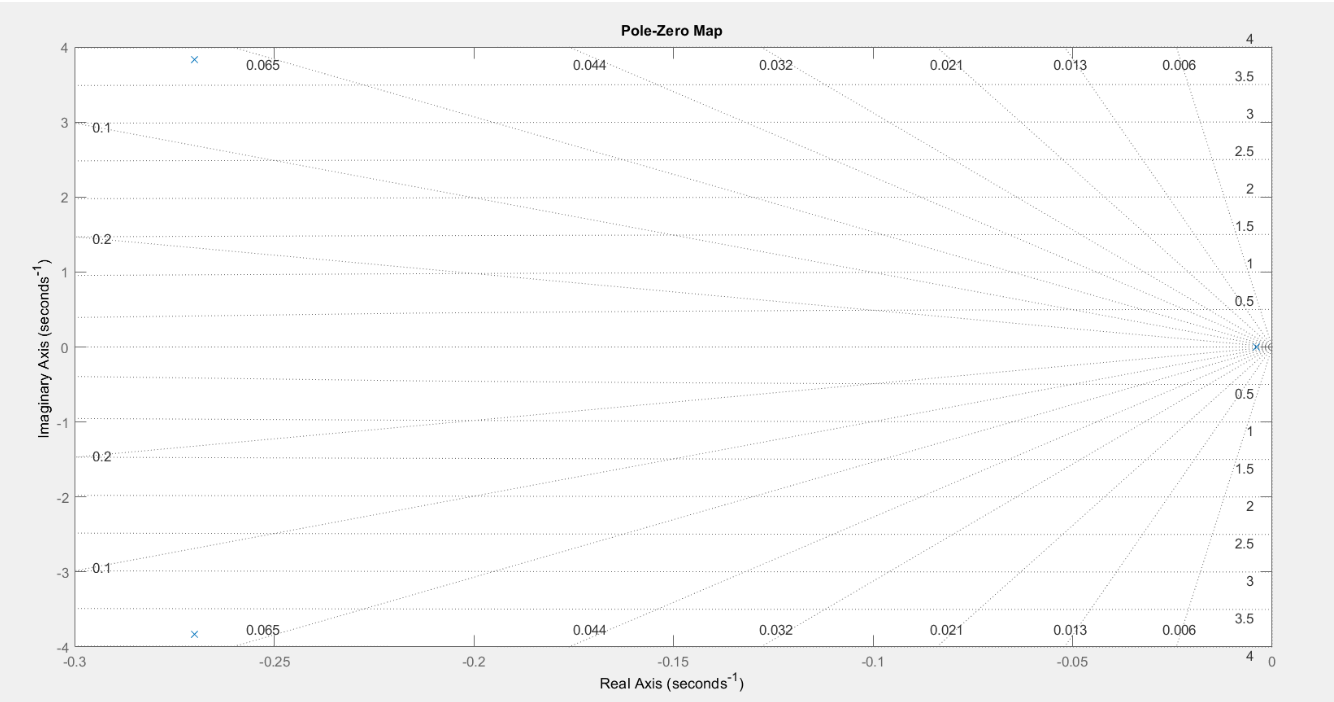
Έτσι παίρνουμε ότι:

$$\begin{gathered}
\mathbf{2\zeta\omega_n > 0} \\
\frac{\mathbf{\omega_n^2 K_{i2}^{TF} - 2\zeta\omega_n\omega_n^2 K_{p2}^{\mathit{TF}}}}{\mathbf{-2\zeta\omega_n}} > \mathbf{0} \\
\mathbf{\omega_n^2 K_{i2}^{TF} > 0}
\end{gathered}$$

Λύνουμε και βλέπουμε πως:

$$\begin{gathered}
\mathbf{0 < K_{i2}^{TF} < 2\zeta\omega_n K_{p2}^{TF}} \\
\mathbf{0 < \frac{K_{i2}^{\mathit{TF}}}{K_{p2}^{\mathit{TF}}} < 2\zeta\omega_n \approx 3.4406}
\end{gathered}$$

Επιπλέον έχουμε στο μυαλό μας πως το μηδενικό πρέπει να είναι όσο πιο κοντά στο μηδέν γίνεται και μακριά από την μικρότερη ιδιοτιμή(πόλο) της συνάρτησης, και με βάση αυτά διαλέγουμε τις τιμές.



Τέλος Βρίσκουμε τα κέρδη του PID ελεγκτή από τις εξισώσεις:

$$K_p + K_D s + \frac{K_I}{s} =$$
$$= (K_{P1} + K_{D1}s)\left(K_{P2} + \frac{L_{I2}}{s}\right)$$

Έτσι έχουμε:

$$K_P^{TF} = K_{P1}^{TF}K_{P2}^{TF} + K_{D1}^{TF}K_{I2}^{TF} = 5.0196$$
$$K_D^{TF} = K_{D1}^{TF}K_{P2}^{TF} = 4.8939$$
$$K_I^{TF} = K_{P1}^{TF}K_{I2}^{TF} = 0.0200$$

Συνεχίζουμε με τις τιμές της ZPK. Έχουμε:

$$\mathbf{K_D^{ZPK} = \frac{2\omega_n\zeta_{\varepsilon\pi\iota\theta\upsilon\mu\eta\tau\acute{o}} - 2\omega_n\zeta}{\omega_n^2} \approx 0.6667}$$

Ο συντελεστή K_p μπορεί να πάρει διάφορες τιμές με περιορισμό να είναι θετικός.

$\mathbf{s^2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{\omega_n^2K_{p1}^{ZPK}}$
$\mathbf{s^1}$	$\mathbf{2\omega_n\zeta + \omega_n^2K_D^{ZPK}}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{s^0}$	$\mathbf{\omega_n^2K_{p1}^{ZPK}}$	$\mathbf{0}$

Έτσι για να έχουμε ευστάθεια πρέπει:

$$\mathbf{K_{p1}^{ZPK} > 0}$$
$$\mathbf{K_D^{ZPK} > -\frac{2\omega_n\zeta}{\omega_n^2} = -\frac{2\zeta}{\omega_n} = -0.2105}$$

Συνεχίζουμε με τον PI ελεγκτή.

$$\mathbf{H_{PI}(s) = \frac{\omega_n^2\left(K_{p2}^{ZPK}s + K_{i2}^{ZPK}\right)}{s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2K_{p2}^{ZPK}s + \omega_n^2K_{i2}^{ZPK}}}$$

Παίρνουμε το κριτήριο Ruth:

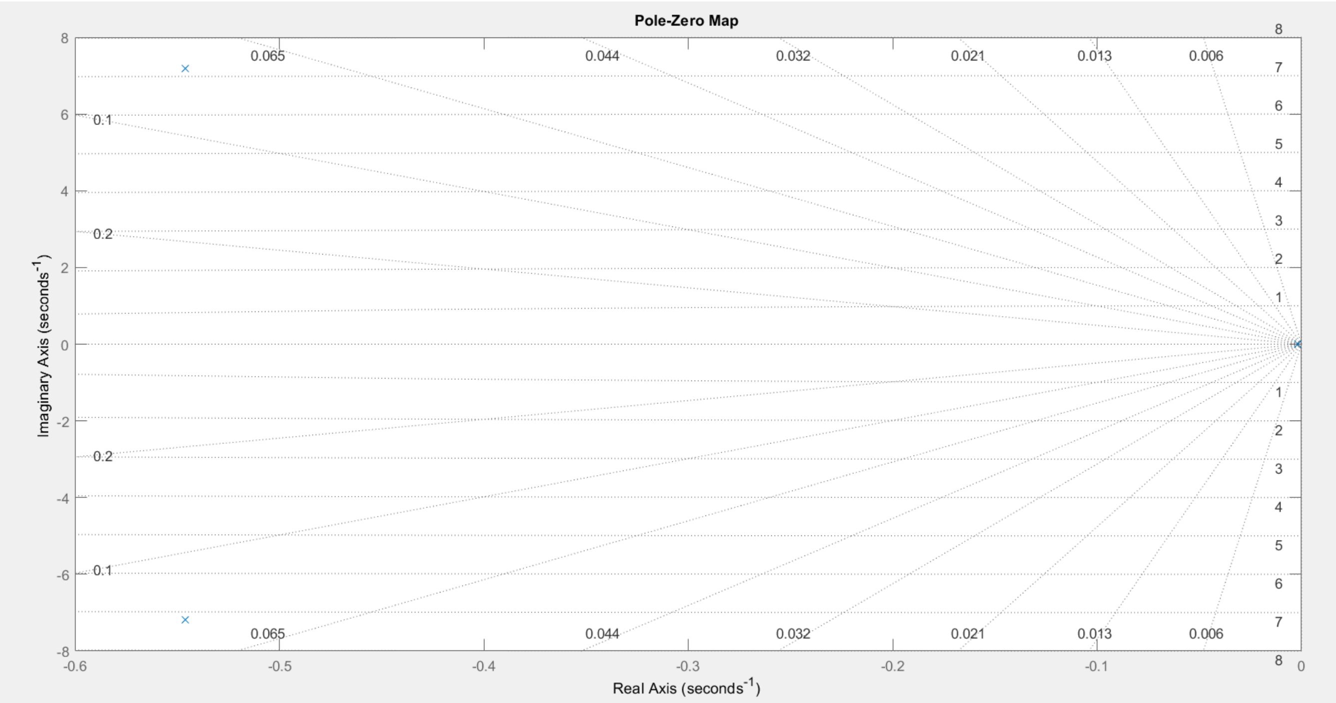
$\mathbf{s^3}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{\omega_n^2K_{p2}^{ZPK}}$
$\mathbf{s^2}$	$\mathbf{2\zeta\omega_n}$	$\mathbf{\omega_n^2K_{i2}^{ZPK}}$
$\mathbf{s^1}$	$\mathbf{\frac{\omega_n^2K_{i2}^{ZPK} - 2\zeta\omega_n\omega_n^2K_{p2}^{ZPK}}{-2\zeta\omega_n}}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{s^0}$	$\mathbf{\omega_n^2K_{i2}^{ZPK}}$	$\mathbf{0}$

Έτσι παίρνουμε ότι:

$$\boldsymbol{2\zeta\omega_n > 0}$$
$$\boldsymbol{\frac{\omega_n^2 K_{i2}^{ZPK} - 2\zeta\omega_n\omega_n^2 K_{p2}^{ZPK}}{-2\zeta\omega_n} > 0}$$
$$\boldsymbol{\omega_n^2 K_{i2}^{ZPK} > 0}$$

Λύνουμε και βλέπουμε πως:

$$\boldsymbol{0 < K_{i2}^{ZPK} < 2\zeta\omega_n K_{p2}^{ZPK}}$$
$$\boldsymbol{0 < \frac{K_{i2}^{ZPK}}{K_{p2}^{ZPK}} < 2\zeta\omega_n \approx 4.5600}$$



Τέλος Βρίσκουμε τα κέρδη του PID ελεγκτή:

$$K_P^{ZPK} = K_{P1}^{ZPK}K_{P2}^{ZPK} + K_{D1}^{ZPK}K_{I2}^{ZPK} = 10.0133$$
$$K_D^{ZPK} = K_{D1}^{ZPK}K_{P2}^{ZPK} = 6.6667$$
$$K_I^{ZPK} = K_{P1}^{ZPK}K_{I2}^{ZPK} = 0.0321$$

2ο ερώτημα

Η υλοποίηση γίνεται με matlab. Ο κώδικας βρίσκεται στο τέλος. Τα αποτελέσματα για την TF είναι:

$$y_{out_{norm,TF}} = 1.0 - 1.0e^{-0.272t}\left(cos(1.7t) + 0.16sin(1.7t)\right)$$

$$y_{out_{PD,TF}} = 1.0 - 1e^{-1.72\,t}\left(cosh(6.35 * 10^{-9}\,t) - 1.85 * 10^{8} sinh(6.35 * 10^{-9}\,t)\right)$$

$$y_{out_{PID,TF}} = 9.26 * 10^{-4} * e^{(-0.004t)} - 0.843 * e^{(-17.0t)} - 0.158 * e^{(-0.869t)} + 1.0$$

Επιπλέον οι μέγιστες τιμές (overshoot) είναι:

$$y_{out_{norm,TF}} = 1.6025$$

$$y_{out_{PD,TF}} = 1.0582$$

$$y_{out_{PID,TF}} = 1.0009$$

Τα αποτελέσματα για την ZPK είναι:

$$\mathrm{y_{out_{norm,ZPK}}} = 1.0 - 1.0 * \mathrm{e}^{-0.547*\mathrm{t}} * \left(\cos(2.21 * \mathrm{t}) + 0.247 * \sin(2.21 * \mathrm{t})\right)$$

$$\mathrm{y_{out_{PD,ZPK}}} = 1.19 * \mathrm{t} * \mathrm{e}^{(-2.28*\mathrm{t})} - 1.0 * \mathrm{e}^{(-2.28*\mathrm{t})} + 1.0$$

$$\mathrm{y_{out_{PID,ZPK}}} = 1.74\mathrm{e} - 4 * \mathrm{e}^{(-0.002*\mathrm{t})} - 0.914 * \mathrm{e}^{(-37.8*\mathrm{t})} - 0.0863 * \mathrm{e}^{(-1.38*\mathrm{t})} + 1.0$$

Επιπλέον οι μέγιστες τιμές (overshoot) είναι:

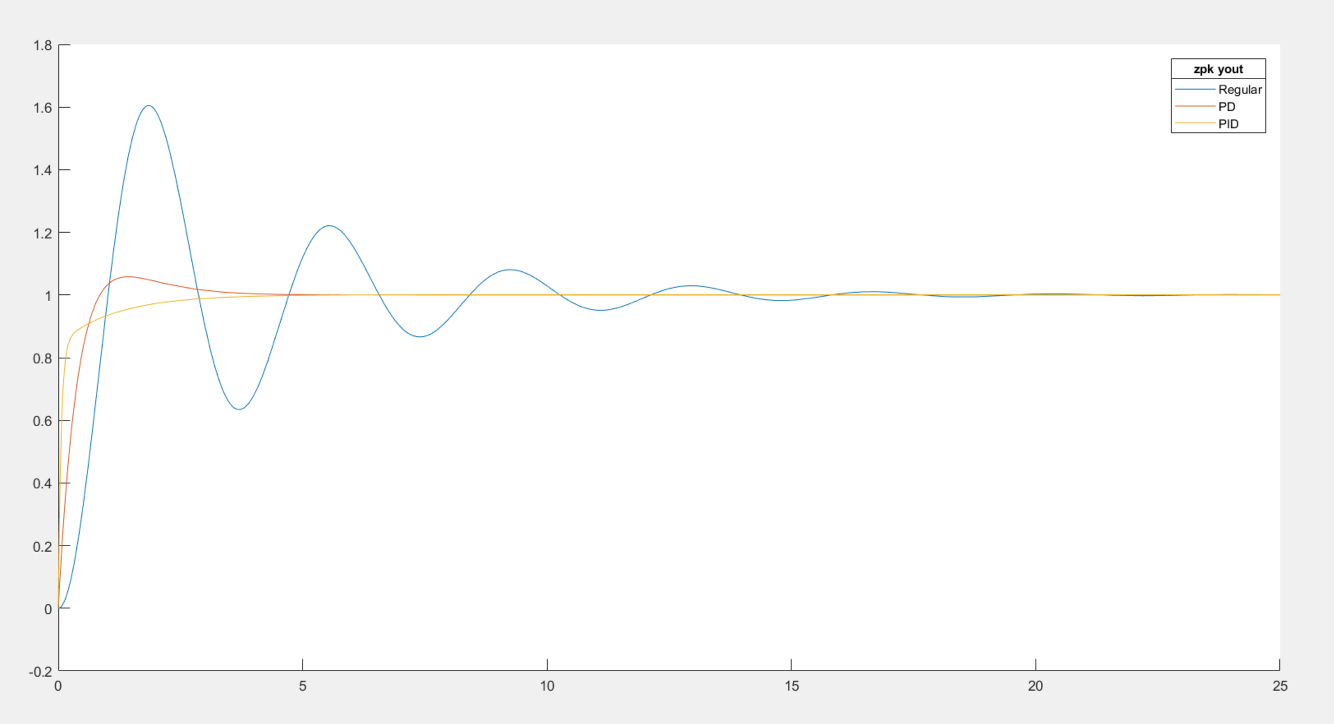
$$\mathrm{y_{out_{norm,ZPK}}} = 1.4595$$

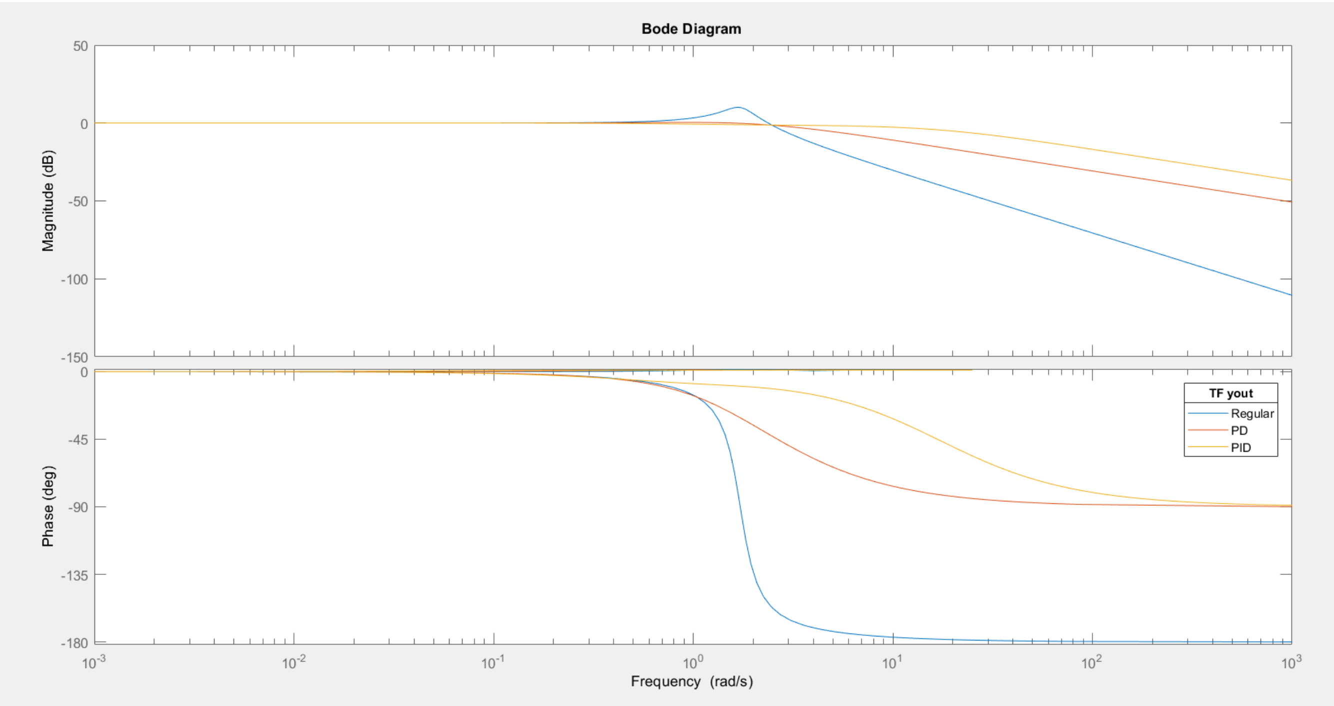
$$\mathrm{y_{out_{PD,ZPK}}} = 1.0279$$

$$\mathrm{y_{out_{PID,ZPK}}} = 1.0002$$

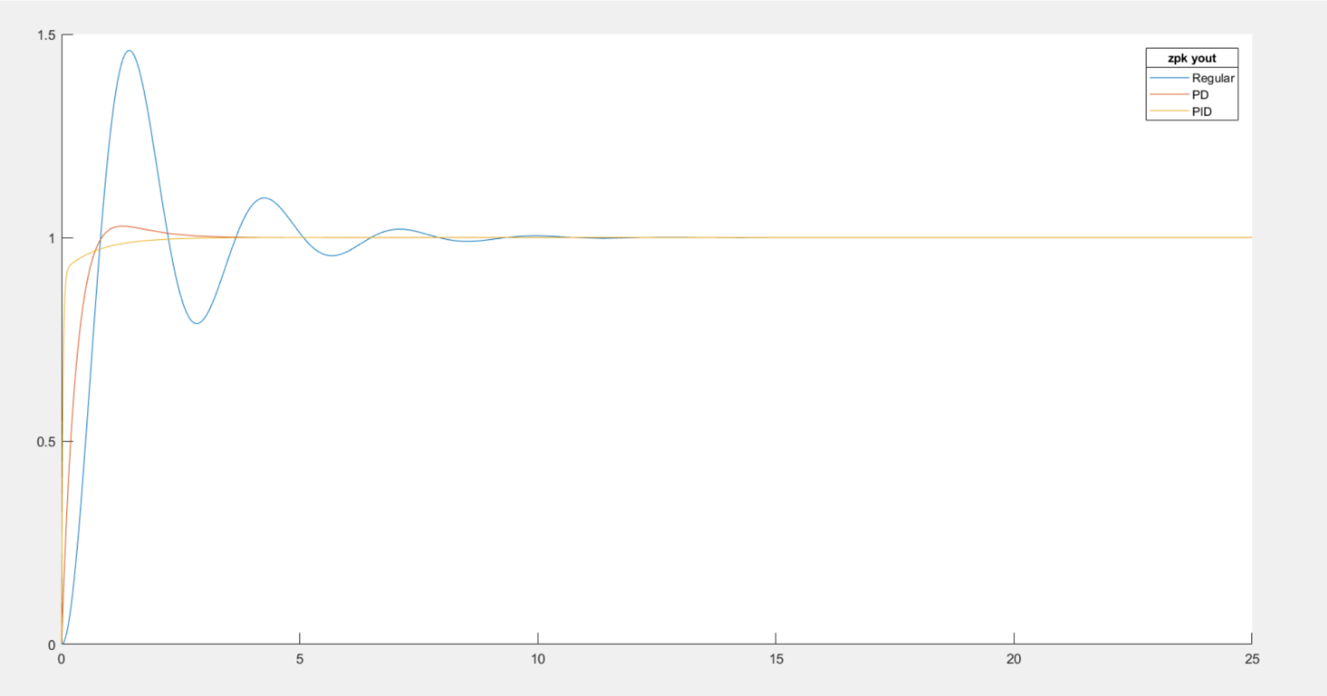
3ο ερώτημα

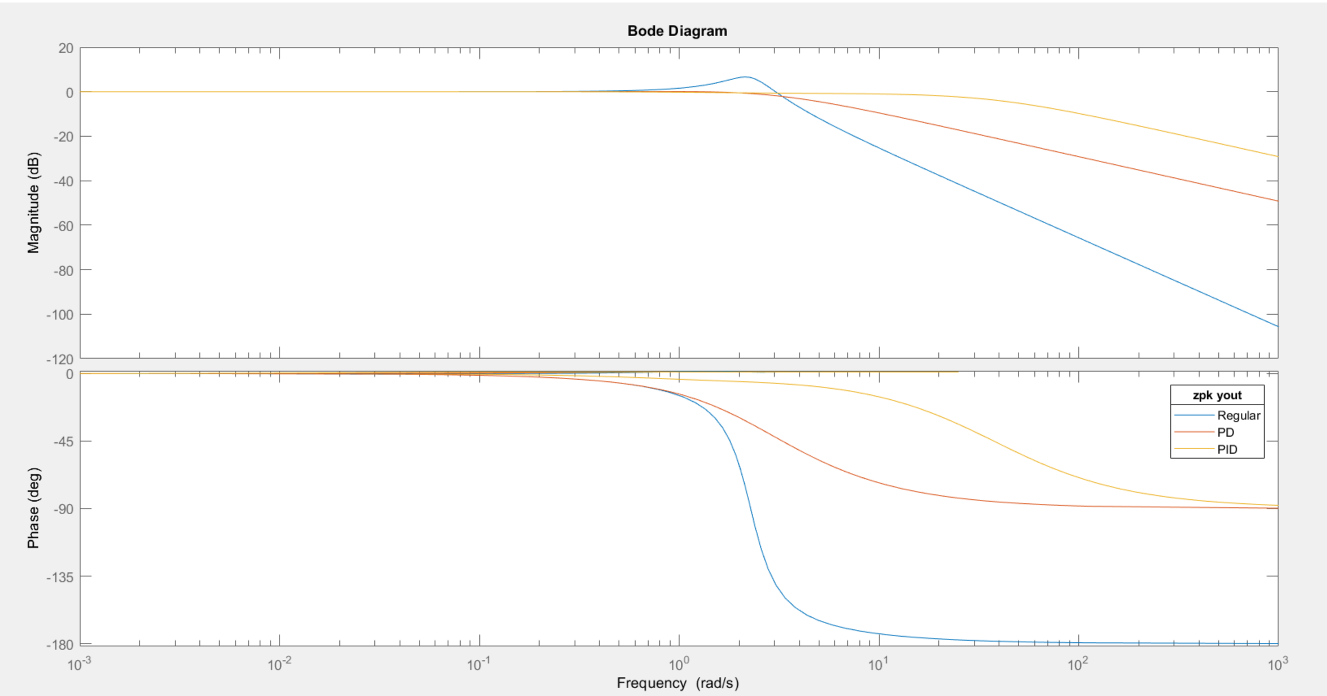
Ξεκινάμε με το σύστημα TF. Βλέπουμε δύο διαγράμματα. 1 με τις εξόδους και ένα με τα διαγράμματα bode(φάση και πλάτος).





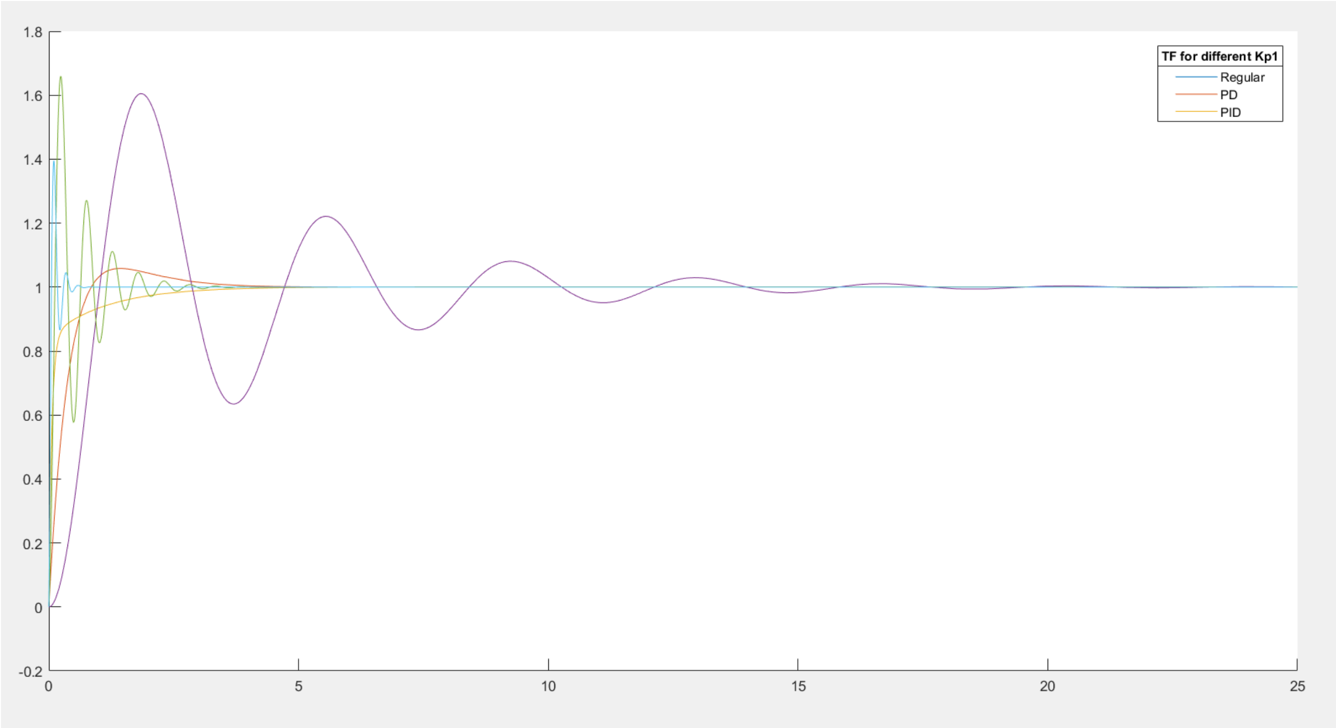
Συνεχίζουμε με τα διαγράμματα bode και εξόδου για βηματική είσοδο για το ZPK.



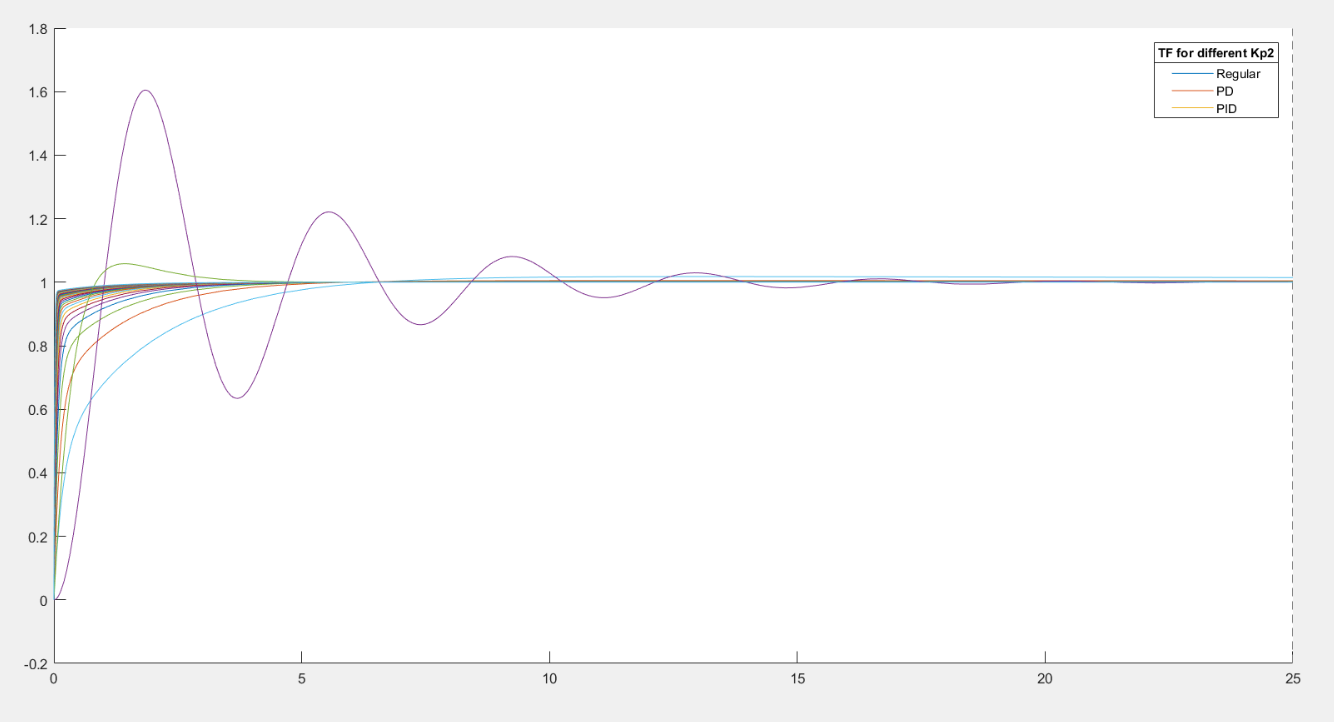


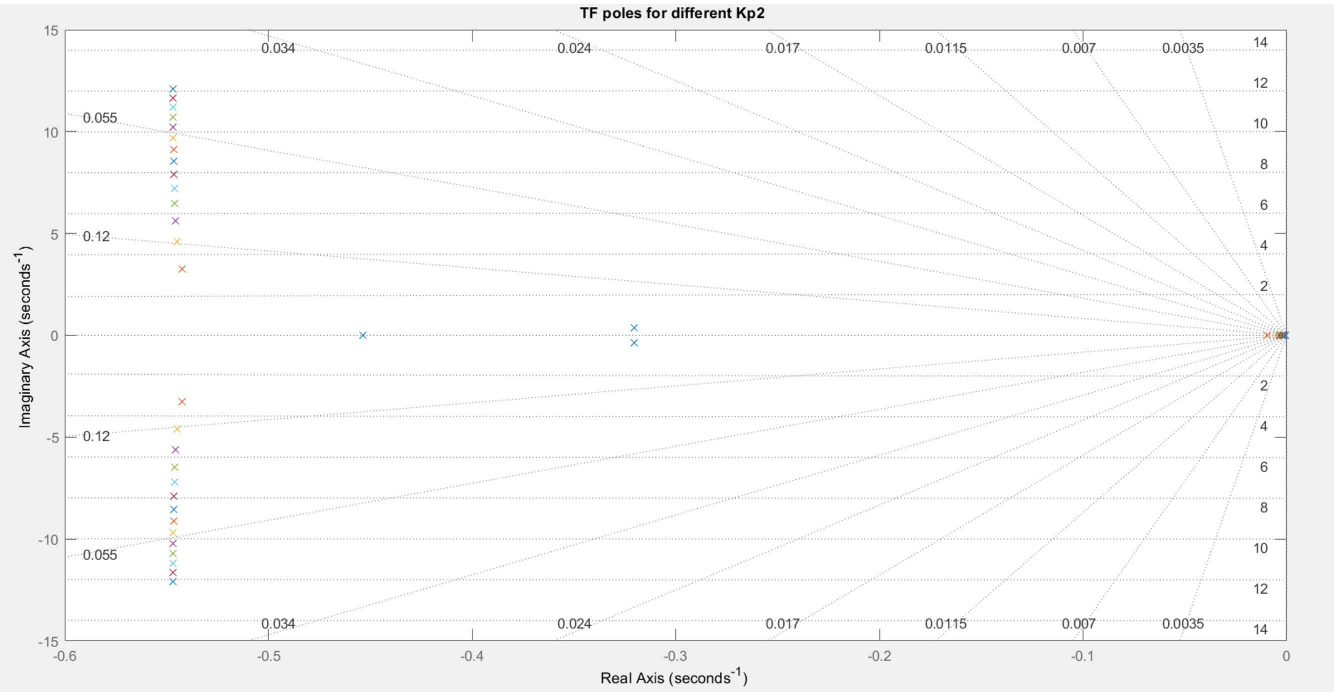
4ο ερώτημα

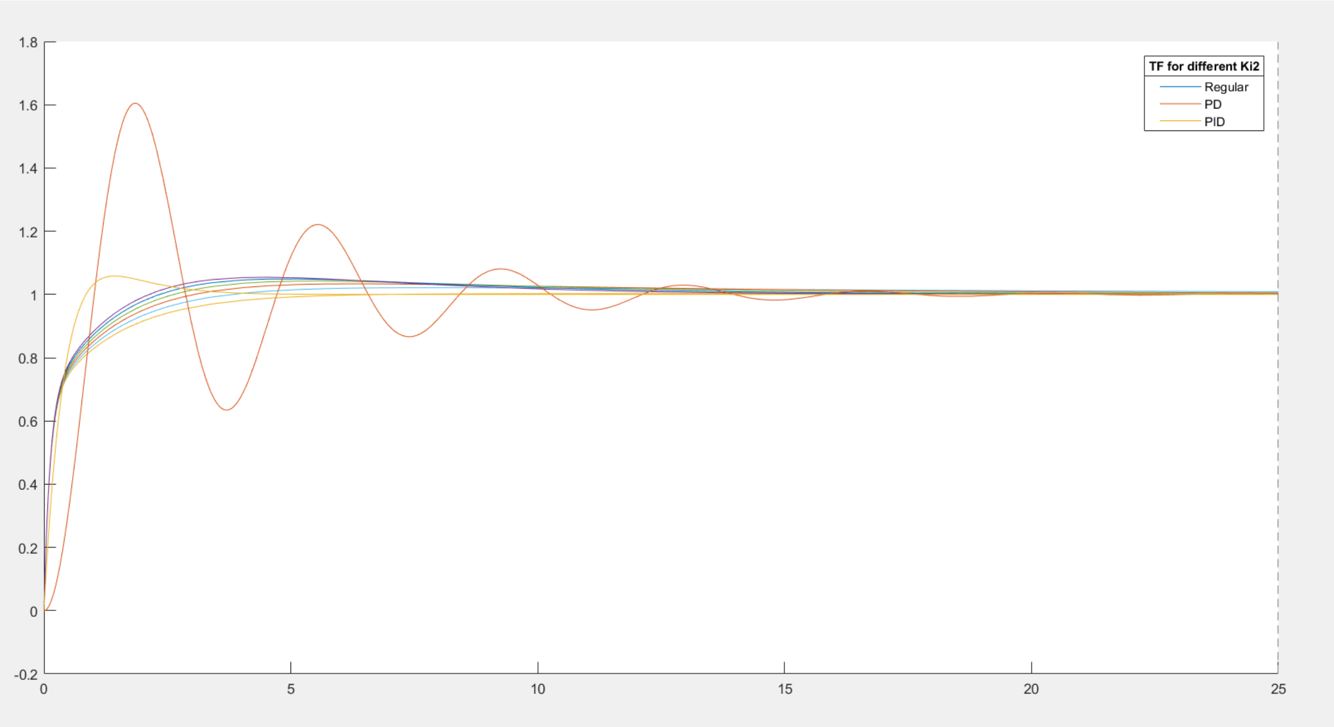
Θα δοκιμάσουμε να αλλάξουμε στους βαθμούς ελευθερίας που έχουμε τις μεταβλητές και συγκεκριμένα το κέρδος. Το αποτέλεσμα είναι τα παρακάτω γράφημα για το TF:

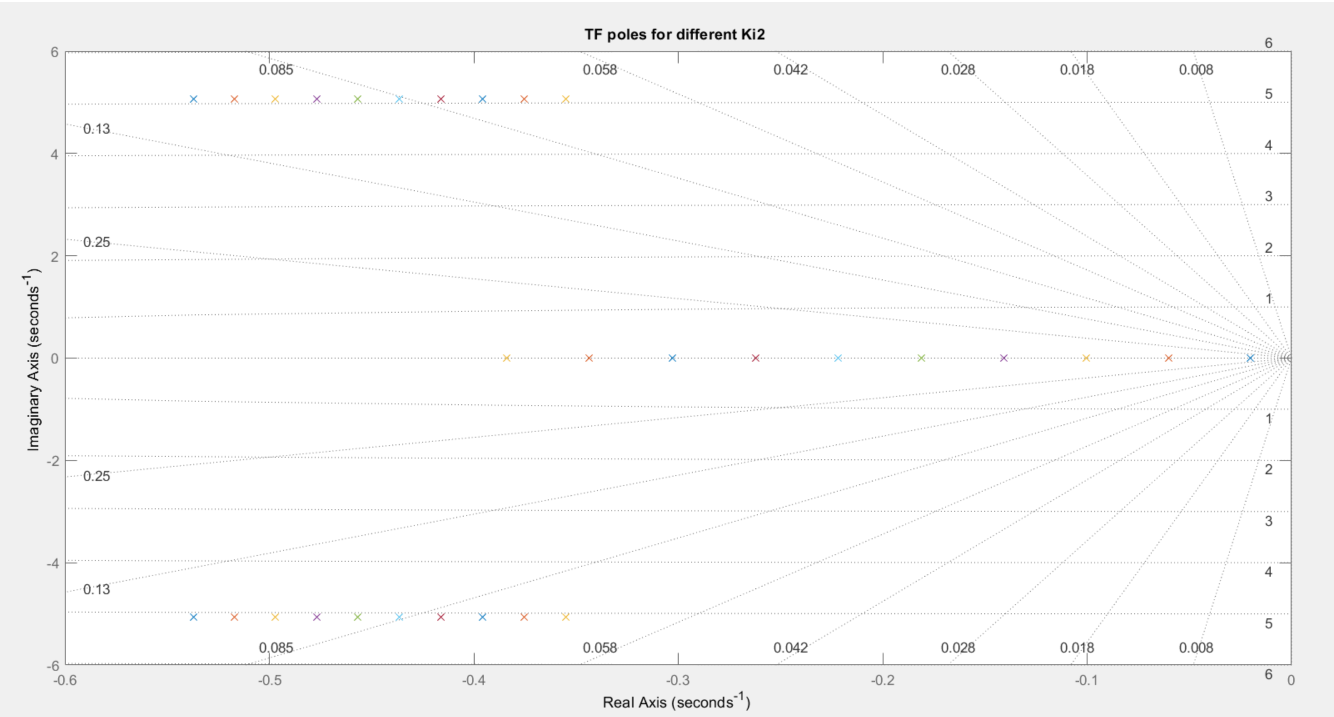


Καταλαβαίνουμε πως είναι trade off όσον αφορά το κέρδος και την ταλάντωση. Επιπλέον το ίδιο κάνουμε και για τα κέρδη του PI, προβάλλοντας ταυτόχρονα και το τι συμβαίνει με τους πόλους, ώστε να διατηρούμε το σύστημα ευσταθές:


TF for different Kp2
Regular
PD
PID

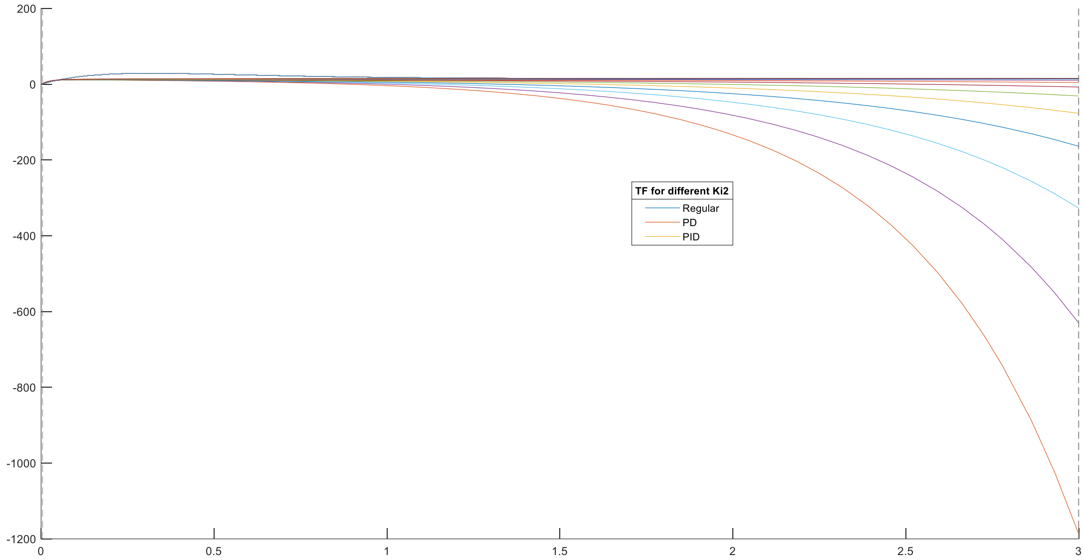

TF poles for different Kp2
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})

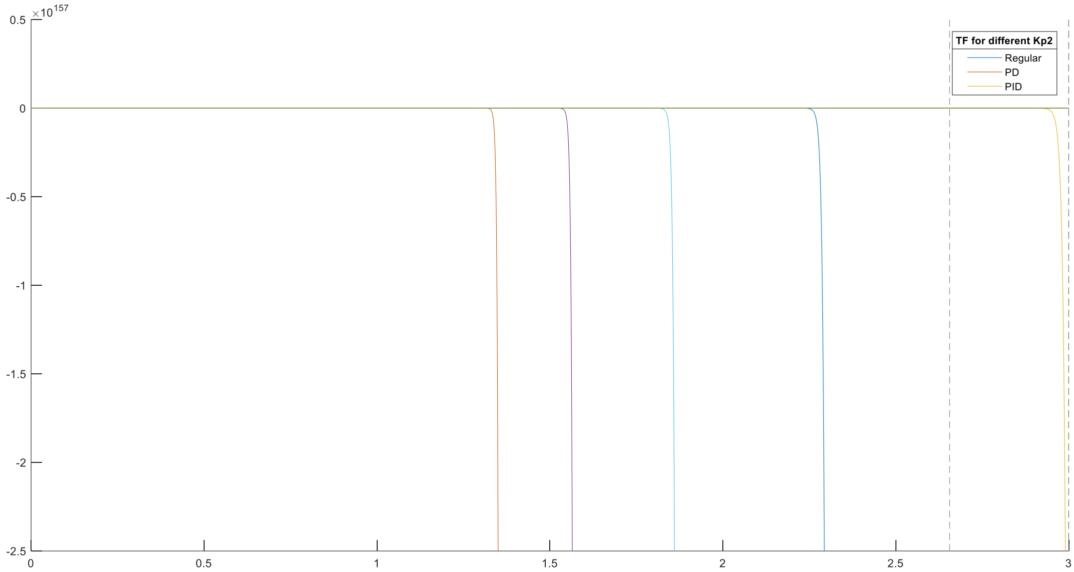




Στον σχεδιασμό επιλέγεις τα χαρακτηριστικά ανάλογα με τις προδιαγραφές, όπως το πόσο κέρδος θέλουμε να έχει το σύστημα ή αν μας ενοχλεί και πόσο το overshoot Και μετά από πόσο χρόνο θέλουμε το σύστημα να σταθεροποιείται.

Επιπλέον μπορούμε να οδηγήσουμε το σύστημα σε αστάθεια διαλέγοντας λάθος τιμές, για κάποιο από τα κέρδη.





Παράρτημα

Παρακάτω βρίσκεται ο κώδικας Matlab. Δημιουργήθηκαν 3 συναρτήσεις. 1(fun) για τις εξισώσεις, 1(main) για το κυρίως σώμα, Και η PI για κάποιες επιλογές.

Fun.m

```
 function  [a,yout1,yout2,yout3,gains ] = fun(wn,z,A,Kp1,Ki2,Kp2)
syms t y(t) Y(s) y0 s
x=0:0.1:25;
Hnon = tf([wn^2],[1 2*z*wn wn^2]);
yout_non = step(Hnon,x);[~,I_non]=max(yout_non);
% Hnon = tf([wn^2],[1 2*z*wn wn^2 0]);
%  yt = ilaplace(Hnon,s,t)

 snum = poly2sym([wn^2], s) ;                               % Symbolic Numerator Polynomial
sden = poly2sym([1 2*z*wn wn^2 0], s);                                % Symbolic Denominator
Polynomial
FT_time_domain = ilaplace(snum/sden);                  % Inverse Laplace Transform
yout1=FT_time_domain;
yout1=vpa(yout1,3);
% figure
% hold on

%   bode(Hnon)

%% PD
e=0.01;
z_w = 1-e;

Kd1 = ( 2 * (1-z) * wn)/(wn^2);
% Kp1 = 2;

s = - Kp1/Kd1;
p_v1 = [1    (2*(z)*wn + (wn^2) * Kd1)     (wn^2)*Kp1 ] ;
Hpd = tf([(wn^2)*Kd1 (wn^2)*Kp1],p_v1);
yout_pd = step(Hpd,x);[~,I_pd]=max(yout_pd);

syms t y(t) Y(s) y0 s
snum1 = poly2sym([(wn^2)*Kd1 (wn^2)*Kp1], s) ;                    % Symbolic Numerator
Polynomial
sden1 = poly2sym([1    (2*(z)*wn + (wn^2) * Kd1)     (wn^2)*Kp1 0], s);
    % Symbolic Denominator Polynomial
FT_time_domain1 = ilaplace(snum1/sden1);               % Inverse Laplace Transform
yout2=FT_time_domain1;
yout2=vpa(yout2,3);
% rhStabilityCriterion
```

```
%% PI
z=1-e;
% [Ki2,Kp2] = PI(A);
% Kp2 = 5;
% Ki2 = 0.02;
% p_v2 = [1 2*z*wn wn^2 * Kp2 wn^2 * Ki2];
% Hpi = tf([(wn^2)*Kp2 (wn^2)*Ki2],p_v2);

% bode(Hpi)

%% PID
Kp = Kp1*Kp2 + Kd1* Ki2;
Kd = Kd1 *Kp2;
Ki = Kp1*Ki2;
Hpid= tf([(wn^2)*Kd (wn^2)*Kp (wn^2)*Ki],[1 ((wn^2)*Kd+2*wn*z) (wn^2)*Kp (wn^2)*Ki]);
yout_pid = step(Hpid,x);[~,I_pid]=max(yout_pid);

syms t y(t) Y(s) y0 s
snum3 = poly2sym([(wn^2)*Kd (wn^2)*Kp (wn^2)*Ki], s) ;                              % Symbolic
Numerator Polynomial
sden3 = poly2sym([1 ((wn^2)*Kd+2*wn*z) (wn^2)*Kp (wn^2)*Ki 0], s);
% Symbolic Denominator Polynomial
FT_time_domain3 = ilaplace(snum3/sden3);                         % Inverse Laplace Transform
yout3=FT_time_domain3;
yout3=vpa(yout3,3);

 %% Bode and max output %%

%  bode(Hnon,Hpd,Hpid)
%  legend('Regular','PD','PID')

 a=[max(yout_non) max(yout_pd) max(yout_pid); I_non/10 I_pd/10 I_pid/10];


 %% output graph%%

%   figure(1)
%  hold on
%
% plot(x',yout_non)
% plot(x',yout_pd)
% plot(x',yout_pid)
%  hold off

figure(1)
hold on
fplot(yout1,[0 25])
fplot(yout2,[0 25])
fplot(yout3 ,[0 25])

hold off
gains=[Kp1 Kd1 Kp2 Ki2 Kp Kd Ki];
end
```

Main.m

```
%% TF %%
z_trf =  abs( 0.1581);%-0.1581
wn_trf =1.7203;%1.7203
%  [max, yout_norm,yout_pd,yout_pid] = fun(wn,z) ;
%  figure
% fplot(yout_norm,[0 25]);
%% ZPK %%
z_zpk =0.24;
wn_zpk = 2.28;
Kp1=1;
[max_zpk, yout_norm_zpk,yout_pd_zpk,yout_pid_zpk,gains_zpk] = fun(wn_zpk,z_zpk,'zpk',Kp1) ;
lgd=legend('Regular','PD','PID');
title(lgd,'zpk yout');

%% TF %%
z_trf =  0.1581;
wn_trf =1.7203;

Kp1=1;
[max_trf, yout_norm_trf,yout_pd_trf,yout_pid_trf,gains_trf] = fun(wn_trf,z_trf,'trf',Kp1) ;
lgd=legend('Regular','PD','PID');
title(lgd,'TF yout');
%% plots for different Gains
 hold on
 figure
for i=1:10
    fun(wn_zpk,z_zpk,'zpk',i) ;
    lgd=legend('Regular','PD','PID');
    title(lgd,'zpk for different Kp');
end
 hold off
 hold on
 figure
for i=0.01:0.1:2
    fun(wn_trf,z_trf,'trf',1,i,2) ;
    lgd=legend('Regular','PD','PID');
    title(lgd,'TF for different Ki2');
end
 hold off
H=tf([1],[1 2*z_trf*wn_trf  wn_trf*wn_trf*5.0000  wn_trf*wn_trf*0.02]);
pzmap(H)
grid on
figure
 hold on

for i=0.1:0.2:2

    H=tf([1],[1 2*z_zpk*wn_zpk  wn_zpk*wn_zpk*5  wn_zpk*wn_zpk*i]);
pzmap(H)
grid on
  title('TF poles for different Ki2 ');

end
 hold off
```

PI.m

```
function [Ki2,Kp2] = PI(A)

if A=='zpk'
    Kp2 =10;
    Ki2 =0.02;
end

if A=='trf'
    Kp2=1;
    Ki2=0.02;


end
```