알고리즘

12장 문자열 매칭(string matching)

학습내용

- 1. 원시적인 매칭 방법
- 2. 오토마타를 이용한 매칭
- 3. 라빈-카프 알고리즘
- 4. KMP 알고리즘
- 5. 보이어-무어 알고리즘

학습목표

- 원시적인 문자열 매칭 방법의 비효율성을 이해한다.
- 오토마타를 이용한 문자열 매칭 방법을 이해한다.
- 라빈-카프 알고리즘의 수치화 과정을 이해한다.
- KMP 알고리즘을 이해하고, 오토마타를 이용한 방법과 비교시 장점을 이해한다.
- 보이어-무어 알고리즘의 개요를 이해하고, 다른 문자열 매칭 알고리즘들에 비해 어떤 장점이 있는지 이해한다.

문자열 매칭(string matching)

- 입력
 - A[1...n]: 텍스트 문자열
 - − P[1...m]: 패턴 문자열
 - 단, *n* >> *m* // *n*이 *m*에 비해 훨씬 크다고 가정
- 수행 작업
 - 텍스트 문자열 A[1...n]이 패턴 문자열 P[1...m]을 포함하는지를 알아본다. 또한 포함한다면 어떤 위치인지를 알아낸다.
- 예) A = "aababacccc", P = "aba"
 - 매칭이 일어난 위치(A의 인덱스): 2와 4 (매칭이 두 군데서 일어나며, 매칭 시작 인덱스를 출력)

문자열 매칭 알고리즘

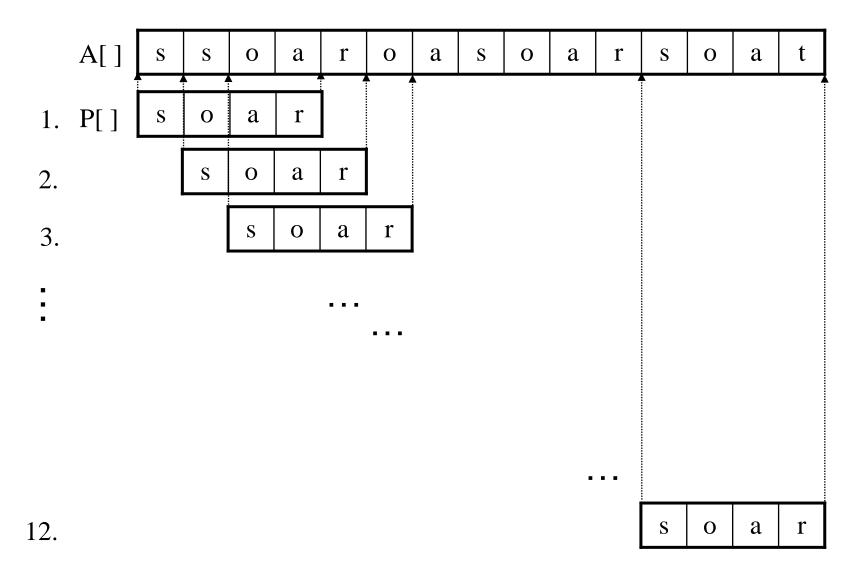
- 원시적인(naive) 매칭
- 오토마타를 이용한 매칭
- Rabin-Karp 알고리즘
- KMP 알고리즘
- Boyer-Moore-Horspool 알고리즘

원시적인(naive) 매칭

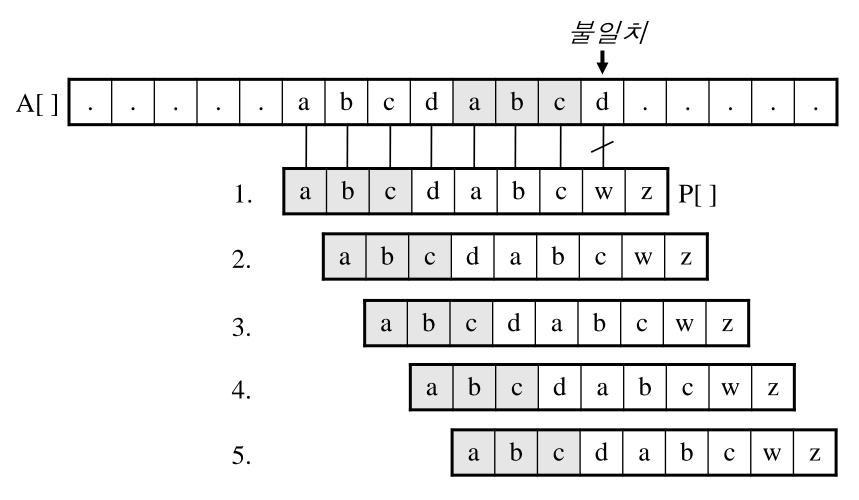
```
naiveMatching(A[], P[])
  \triangleright n: 배열 A의 길이, m: 배열 P의 길이
  for i \leftarrow 1 to n-m+1{
         if (P[1...m] = A[i...i+m-1]) then
             A[i] 자리에서 매칭이 일어났음을 알린다;
```

✓ 수행시간: O(mn)

원시적인 매칭의 작동 원리



원시적인 매칭이 비효율적 이유



• 앞선 매칭 과정에서 얻은 정보를 전혀 이용하지 않으므로 비효율적 : 1에서 불일치로 중단하지만, P의 앞부분 abc가 A의 두번째 abc와 일치한다는 사실을 활용할 수 있다면 2, 3, 4의 비교는 불필요하다.

문자열 매칭 알고리즘

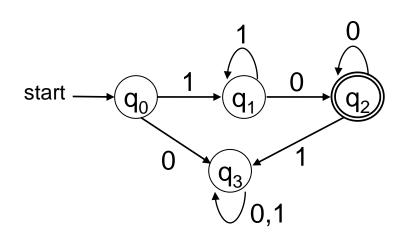
- 원시적인(naive) 매칭
- 오토마타를 이용한 매칭
- Rabin-Karp 알고리즘
- KMP 알고리즘
- Boyer-Moore-Horspool 알고리즘

오토마타를 이용한 매칭

- 유한 오토마타(finite automata)
 - 문제 해결 절차를 상태 전이(state transition)로 나타냄
 - 구성 요소: (Q, q₀, F, ∑, δ)
 - Q: 상태 집합
 - q₀: 시작 상태
 - F : 목표 상태(최종 상태)들의 집합
 - ∑ : 입력 알파벳
 - δ : 상태 전이 함수 Q x Σ → Q

유한 오토마타

예)



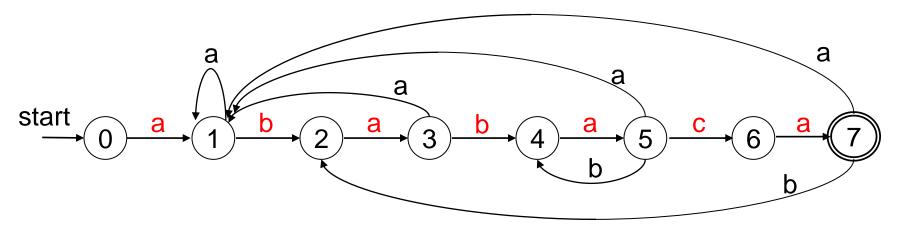
오토마타를 이용한 매칭 단계

- 1. 전처리 작업(preprocessing)
 - 찾고자 하는 패턴에 대해 오토마타를 정의해야 함
 - P[1...m] → 하나의 오토마타
 - 매칭이 어디까지 진행되었는가를 상태로 표현하고
 - 어떤 경우 어떤 상태로 전이하는가를 정의한다.

2. 매칭(matching)

- 시작 상태에서 시작하여 텍스트 문자열의 문자를 하나씩 읽어 그 문자에 맞게 상태 전이
 - 최종 상태에 이르면 매칭된 것임
- 이어서 텍스트 문자열을 계속해서 읽고 상태 전이도 계속함

1. 전처리 작업 단계 패턴 ababaca에 대한 오토마타



A: anbbactababaababacababacaagbk...

P: ababaca

오토마타에 입력 알파벳이 표시되지 않은 경우 매칭 실패로서, 시작 상태로 전이한다고 본다.

오토마타의 S/W 구현

\입	력문	자						_	력문	자		
상태	a	b	С	d	е	•••	Z	상태\	а	b	С	기타
0	1	0	0	0	0	• • •	0	0	1	0	0	0
1	1	2	0	0	0		0	1	1	2	0	0
2	3	0	0	0	0		0	2	3	0	0	0
3	1	4	0	0	0		0	3	1	4	0	0
4	5	0	0	0	0		0	4	5	0	0	0
5	1	4	6	0	0		0	5	1	4	6	0
6	7	0	0	0	0		0	6	7	0	0	0
7	1	2	0	0	0		0	7	1	2	0	0

2. 매칭 단계 - 매칭 알고리즘

```
FA-Matcher(A, \delta, f) \triangleright f : 목표 상태 { q \leftarrow 0; \qquad \triangleright 0: \text{시작 상태} for i \leftarrow 1 to n { \qquad \triangleright n: \text{배열 A[]} 의 길이 \qquad \qquad q \leftarrow \delta(q, A[i]); if (q = f) then A[i-m+1]에서 매칭이 발생했음을 알림; } }
```

- 위의 알고리즘 수행 시간 $= \Theta(n)$
- 상태전이함수 구성 시간 = 가장 효율적이라고 볼 때 $\Theta(|\Sigma|m)$

✔오토마타를 이용한 매칭 총 수행시간: $O(n + /\sum/m)$

문자열 매칭 알고리즘

- 원시적인(naive) 매칭
- 오토마타를 이용한 매칭
- Rabin-Karp 알고리즘
- KMP 알고리즘
- Boyer-Moore-Horspool 알고리즘

Rabin-Karp 알고리즘

- 문자열 패턴을 수치로 바꾸어 문자열의 비교를 수 치 비교로 대신한다.
- 수치화
 - 가능한 문자 집합 ∑의 크기에 따라 진수가 결정된다.
 - 예: $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$
 - $|\Sigma| = 10$
 - a, b, c, ... , j 를 각각 0, 1, 2, ... , 9 에 대응시킨다.
 - 문자열 "cad"를 수치화하면 2*10²+0*10¹+3*10⁰ = 203
- |∑|를 d 라고 하자.

문자열 수치화 예

- $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$
 - $-|\sum|=5$
 - a, b, c, d, e 를 각각 0, 1, 2, 3, 4 에 대응시킨다.
 - 문자열 "cad"를 수치화하면 2*5²+0*5¹+3*5⁰ = 53
 - 문자열 "bec"를 수치화 하면 $1*5^2+4*5^1+2*5^0=47$
 - 문자열 "eca"를 수치화 하면 4*5²+2*5¹+0*5⁰ = 110
- 문자열 수치화를 이용한 문자열 매칭 예 A="becad", P="cad"

해결해야 하는 문제점

- 문자열 수치화를 이용하여 문자열 매칭을 수행하 려면 다음과 같은 문제점을 해결해야 한다.
 - 수치화 작업의 부담
 - 수치가 커져 오버플로우 발생 가능성

→ Rabin-Karp 알고리즘은 이 두가지 문제점을 해결 하여 문자열 매칭을 수행한다.

수치화 작업의 부담

• P[1...m]에 대응하는 수치 <math>p의 계산

-
$$p = ((...((P[1]*d)+P[2])*d+...)*d+P[m-1])*d+P[m]$$

○ (((4*5)+3)*5+0)*5+1)*5+2
= ((((4*5)+3)*5+0)*5+1)*5+2

• A[i...i+m-1]에 대응하는 수치 a_i 의 계산

-
$$a_i$$
 = ((...((A[i]*d)+A[i+1])*d+...)*d+A[i+m-2])*d+A[i+m-1]
○ (deedabcc" → a_1 = 3*5⁴ + 2*5³ + 4*5² + 3*5¹ + 0
= ((((3*5)+2)*5+4)*5+3)*5+0

- $\rightarrow p$ 와 a_i 를 비교하여 값이 같으면 i에서 매칭
- 문제점
 - $-a_i$ 계산에 $\Theta(m)$ 의 시간이 든다.
 - a_i 를 일일이 계산하는 경우 A[1...n] 전체에 대한 비교는 $\Theta(mn)$ 이 소요된다. → 원시적인 매칭에 비해 나은 게 없다.

수치화 작업의 부담

• 다행히, m의 크기에 상관없이 아래와 같이 계산할 수 있으므로 이 문제는 해결된다.

-
$$a_i = d(a_{i-1} - d^{m-1}A[i-1]) + A[i+m-1]$$

- $-d^{m-1}$ 은 반복 사용되므로 미리 한번만 계산해 두면 된다.
- 곱셈 2회, 덧셈 2회로 충분

예) "dcedabcc"

$$a_1 = 3*5^4 + 2*5^3 + 4*5^2 + 3*5^1 + 0$$
 > "dceda"
 $a_2 = 5*(a_1 - 5^{4*}A[1]) + A[6]$
 $= 5*(a_1 - 5^{4*}3) + 1$

즉, dceda를 나타내는 수치로부터 cedab를 나타내는 수치를 계산 하는 데 상수 시간이 걸림

수치화를 이용한 매칭의 예

P[] e e a a b
$$p = 4*5^4 + 4*5^3 + 0*5^2 + 0*5^1 + 1 = 3001$$

A[] a c e b b c e e a a b c e e d b

 $a_1 = 0*5^4 + 2*5^3 + 4*5^2 + 1*5^1 + 1 = 356$

a c e b b c e e a a b c e e d b

 $a_2 = 5(a_1 - 0*5^4) + 2 = 1782$

a c e b b c e e a a b c e e d b

 $a_3 = 5(a_2 - 2*5^4) + 4 = 2664$

...

a c e b b c e e a a b c e e d b

수치화를 이용해 매칭을 체크하는 알고리즘

```
basicRabinKarp(A, P, d) \triangleright n : 배열 A의 길이, m : 배열 P의 길이
  p \leftarrow 0; a_1 \leftarrow 0;
  p \leftarrow dp + P[i];
       a_1 \leftarrow da_1 + A[i];
  if (p = a_1) then A[1] 자리에서 매칭이 일어났음을 알린다;
  for i \leftarrow 2 to n-m+1{
       a_{i} \leftarrow d(a_{i-1} - d^{m-1}A[i-1]) + A[i+m-1];
       if (p = a_i) then A[i] 자리에서 매칭이 일어났음을 알린다;

✓ 총 수행시간: Θ(n)
```

basicRabinKarp 알고리즘의 문제점

- 문자 집합 크기 d와 패턴의 길이 m에 따라 a_i 가 매우 커질 수 있다.
 - 심하면 컴퓨터 레지스터의 용량 초과
 - 오버플로우 발생
- 해결책
 - 나머지 연산(modulo)을 사용하여 a_i 의 크기를 제한한다.
 - $a_i = d(a_{i-1} d^{m-1}A[i-1]) + A[i+m-1]$ 대신

$$b_i = (d(b_{i-1} - (d^{m-1} \mod q) A[i-1]) + A[i+m-1]) \mod q$$
 사용

 q를 충분히 큰 소수(prime number)로 정하되, dq가 레지스터에 수용될 수 있는 크기로 한다. d*도 너무 커지므로 실제로 구현할 때는 이 값에도 mod 연산을 함

나머지 연산을 이용한 매칭 예

P[] e e a a b
$$p = (4*5^4 + 4*5^3 + 0*5^2 + 0*5^1 + 1) \mod 113 = 63$$

A[] a c e b b c e e a a b c e e d b

$$b_1 = (0*5^4 + 2*5^3 + 4*5^2 + 1*5^1 + 1) \mod 113 = 17$$
a c e b b c e e a a b c e e d b

$$b_2 = (5(b_1 - 0*(5^4 \mod 113)) + 2) \mod 113 = 87$$
a c e b b c e e a a b c e e d b

$$b_3 = (5(b_2 - 2*(5^4 \mod 113)) + 4) \mod 113 = 65$$

a c e b b c e e a a b c e e d b

$$b_7 = (5(b_6 - 2*(5^4 \mod 113)) + 1) \mod 113 = 63$$

. . .

라빈-카프 알고리즘

```
RabinKarp(A, P, d, q) ▷ n : 배열 A의 길이, m : 배열 P의 길이
   h \leftarrow 1;
   for i \leftarrow 1 to m-1
                                      ▷ h 계산(= d<sup>m-1</sup> mod q)
         h \leftarrow dh \mod q;
   p \leftarrow 0; b_1 \leftarrow 0;
   for i \leftarrow 1 to m \in \{1, 1, 2, \dots, m\}
                                     ▷ 패턴 P의 수치값 p 계산
         p \leftarrow (dp + P[i]) \mod q;
         b_1 \leftarrow (db_1 + A[i]) \mod q;
                                    ▷ b₁ 계산
   for i \leftarrow 1 to n-m+1{
         if (i \neq 1) then b_i \leftarrow (d(b_{i-1} - hA[i-1]) + A[i+m-1]) \mod q;
         if (p = b_i) then
              if (P[1...m] = A[i...i+m-1]) then ▷ 진짜 매칭인지 알아봄
                   A[i] 자리에서 매칭이 일어났음을 알린다;
       ✔ 매칭 횟수가 상수 번이면 \Theta(n) → 평균 수행시간 \Theta(n)
```

라빈-카프 알고리즘

최악의 경우 Θ(mn)
 모든 문자가 동일한 경우. 예를 들어

$$A = \underbrace{aaaaa.....aaa}_{n} = a^{n}$$

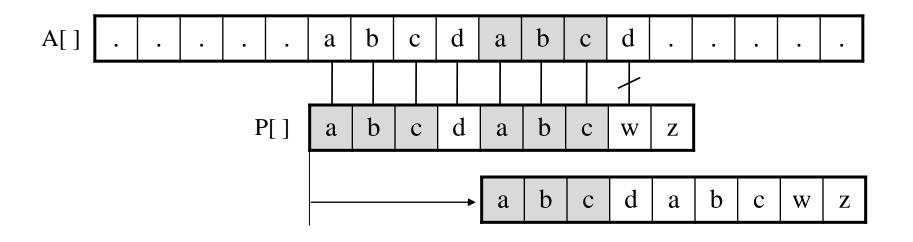
$$P = \underbrace{aaaa.....aa}_{m} = a^{m}$$

문자열 매칭 알고리즘

- 원시적인(naive) 매칭
- 오토마타를 이용한 매칭
- Rabin-Karp 알고리즘
- KMP 알고리즘
- Boyer-Moore-Horspool 알고리즘

KMP(Knuth-Morris-Pratt) 알고리즘

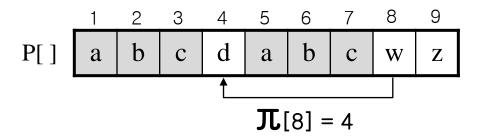
- 오토마타를 이용한 매칭과 동기가 유사
 - 매칭에 실패했을 때 돌아갈 상태를 준비해둔다.
- 오토마타를 이용한 매칭보다 전처리 작업이 단순



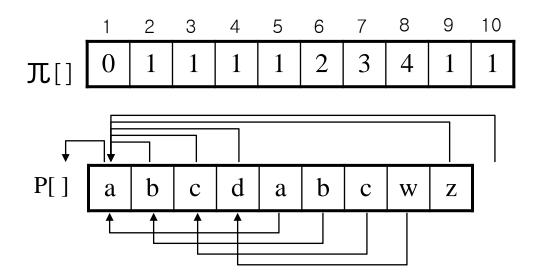
- P[8] 매칭에 실패했으므로 실패한 텍스트 위치에서 P[4] 부터 다시 매칭 시작

KMP 알고리즘의 전처리(preprocessing)

매칭이 실패했을 때 돌아갈 곳을 준비하는 작업



- 텍스트에서 abcdabc까지는 매치되고, w에서 실패한 상황
- 패턴의 맨앞의 abc와 실패 직전의 abc는 동일함을 이용할 수 있다.
- 실패한 텍스트 문자와 P[4]를 비교한다.



패턴의 각 위치에 대해 매칭에 실패했을 때 돌아갈 곳에 대한 정보 π를 준비해 둔다.

KMP 알고리즘

```
KMP(A[], P[]) ▷ n: 배열 A의 길이, m: 배열 P의 길이
  preprocessing(P); // 수행시간 \Theta(m)
  i ← 1; ▷ 본문 문자열 포인터
  i ← 1; ▷ 패턴 문자열 포인터
  while (i \le n) {
       if (j = 0 \text{ or } A[i] = P[j])
               then { i++; j++; }
               else j \leftarrow \pi[j];
       if (j = m+1) then {
               A[i-m]에서 매칭이 일어났음을 알린다;
               j \leftarrow \pi[j];
                                         ✓수행시간: Θ(n)
```

KMP 전처리 작업 알고리즘

```
preprocessing(P[ ])
    j \leftarrow 1;
    k \leftarrow 0;
    \pi[1] \leftarrow 0;
    while (j \le m) {
            if (k = 0 or P[j] = P[k])
                         then \{j++; k++; \pi[j] \leftarrow k; \}
                         else k \leftarrow \pi[k];
```

✓수행시간: *Θ*(*m*)

문자열 매칭 알고리즘

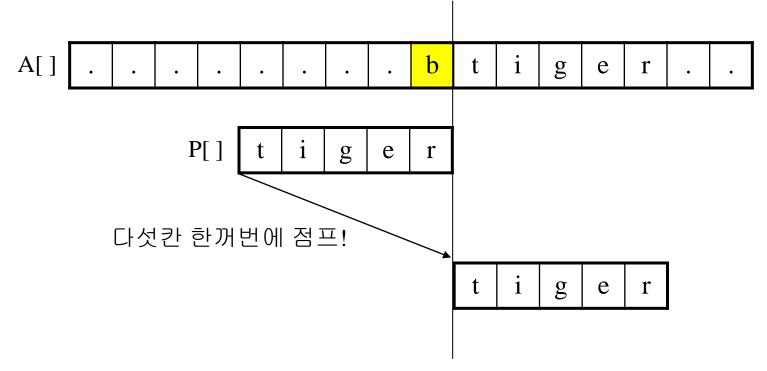
- 원시적인(naive) 매칭
- 오토마타를 이용한 매칭
- Rabin-Karp 알고리즘
- KMP 알고리즘
- Boyer-Moore-Horspool 알고리즘

Boyer-Moore-Horspool 알고리즘

- 앞의 매칭 알고리즘들의 공통점
 - 텍스트 문자열의 문자를 적어도 한번씩 훑는다.
 - 따라서 최선의 경우에도 $\Omega(n)$
- 보이어-무어 알고리즘은 텍스트 문자를 다 보지 않아도 된다.
 - 발상의 전환: 패턴의 오른쪽부터 비교
 - 매치될 가능성이 없으면 점프
- 보이어-무어-호스풀 알고리즘
 - 보이어-무어 알고리즘에서 까다로운 부분을 약식으로 처리한 알 고리즘으로서, 약식으로 처리해도 전체 성능에는 거의 영향을 주지 않음
 - 라빈-카프 알고리즘, KMP 알고리즘보다 평균적으로 빠름

Motivation

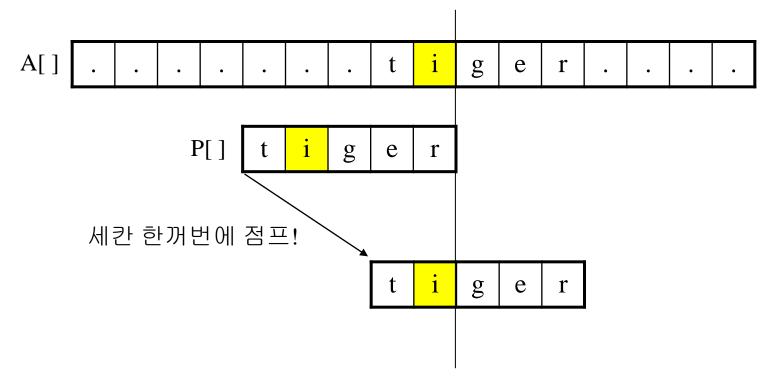
상황: 텍스트의 b와 패턴의 r을 비교하여 실패했다.



✓ 관찰: 패턴에 문자 b가 없으므로 패턴 전체가 텍스트의 b를 뛰어넘어도 된다.

Motivation

상황: 텍스트의 i와 패턴의 r을 비교하여 실패했다.



✓ 관찰: 패턴에서 i가 r의 3번째 왼쪽에 나타나므로 패턴이 한꺼번에 3칸을 뛰어 넘어도 된다.

점프 정보 준비(preprocessing)

• 패턴 "tiger"에 대한 점프 정보

오른쪽 끝문자	t	i	g	e	r	기타
jump	4	3	2	1	5	5

• 패턴 "rational"에 대한 점프 정보

오른쪽 끝문자	r	a	t	i	О	n	a	1	기타
jump	7	6	5	4	3	2	1	8	8



오른쪽 끝문자	r	t	i	О	n	a	1	기타
jump	7	5	4	3	2	1	8	8

보이어-무어-호스풀 알고리즘

```
BoyerMooreHorspool(A[], P[]) \triangleright n : 배열 A의 길이, m : 배열 P의 길이
                              // preprocessing : 수행시간 \Theta(m)
  computeJump(P, jump);
  i \leftarrow 1;
  while (i \le n - m + 1) {
       j \leftarrow m; k \leftarrow i + m - 1;
        while (j > 0 \text{ and } P[j] = A[k]) \{
            j--; k--;
       if (j = 0) then A[i] 자리에서 매칭이 일어났음을 알린다;
       i \leftarrow i + \text{jump}[A[i + m - 1]]; // \text{jump 정보 얻는 시간 } \Theta(1)
✓최악의 경우 수행시간: Θ(mn)
✓최선의 경우 수행시간: \Theta(n/m)
✔입력에 따라 다르지만 일반적으로 \Theta(n)보다 시간이 덜 든다.
```

보이어-무어-호스풀 알고리즘

최악의 경우 Θ(mn)

모든 문자가 동일한 경우. 예를 들어

$$A = aaaaa....aaa = a^n$$

$$P = aaaa....aa = a^m$$

최선의 경우 Θ(n/m)

예를 들어

A = abcdybbbbkcccctddddx

P = abcde

패턴 "tiger"에 대한 점프 정보

오른쪽 끝문자	t	i	g	e	r	기타
jump	4	3	2	1	5	5

A t i g e a t i t i g e r t i t e r a

P t i g e r

패턴 "tiger"에 대한 점프 정보

오른쪽 끝문자	t	i	g	e	r	기타
jump	4	3	2	1	5	5

A t i g e a t i g e d t o d a y e r a

P t i g e r

요약

- 원시적인 매칭 알고리즘은 텍스트의 각 위치에서 시작해 패턴 문자열과 일치하는지 체크하는 방법 으로, 수행 시간은 O(mn)이다.
- 오토마타를 이용하는 알고리즘은 매칭 과정에서 불일치가 일어났을 때 처음부터 다시 비교하지 않 고 문맥상의 정보를 이용해 중간부터 비교할 수 있도록 한다.
- 라빈-카프 알고리즘은 패턴을 수치화해(문자열 비교를 수치 비교로 전환해) 문자열 매칭을 수행 한다.

요약

- KMIP 알고리즘은 매칭 과정에서 불일치가 일어났을 때 처음부터 다시 비교하지 않고 중간부터 비교할 수 있도록 되돌아 갈 위치를 배열로 나타낸다.
- 보이어-무어-호스풀 알고리즘은 패턴의 뒷부분에 대응되는 텍스트의 문자를 이용해 텍스트를 보지 않고도 뛰어넘을 수 있게 한다. 최악의 경우 시간 은 O(mn)이지만 평균적으로 가장 좋은 성능을 보 인다.

문자열 매칭 알고리즘 텍스트길이 n

패턴 길이 m

			<u> </u>	
알고리즘	preprocessing time	matching time	특징	
Naive(brute force)	0	O(mn)	매우 원시적	
Finite automaton	$O(m \sum)$	$\Theta(n)$	오토마타 이용 ∑: 입력 알파벳	
Rabin-Karp	$\Theta(m)$	최악 $\Theta(mn)$ 최선 $\Theta(n)$ 평균 $\Theta(n)$	패턴을 수치화	
Knuth-Morris-Pratt	$\Theta(m)$	$\Theta(n)$	부분패턴에 깃든 효용성을 최대한 이용	
Boyer-Moore- Horspool	$\Theta(m)$	최악 Θ(mn) 최선 Θ(n/m) 평균 Θ(n)보다는 Θ(n/m)에 가까움	텍스트 문자열을 보지 않고 점프할 수 있는 기회를 최대화	