

알고리즘

13장 NP-완비(NP-complete)

학습목표

- P와 NP를 구별한다.
- NP-완비의 의미를 이해한다.

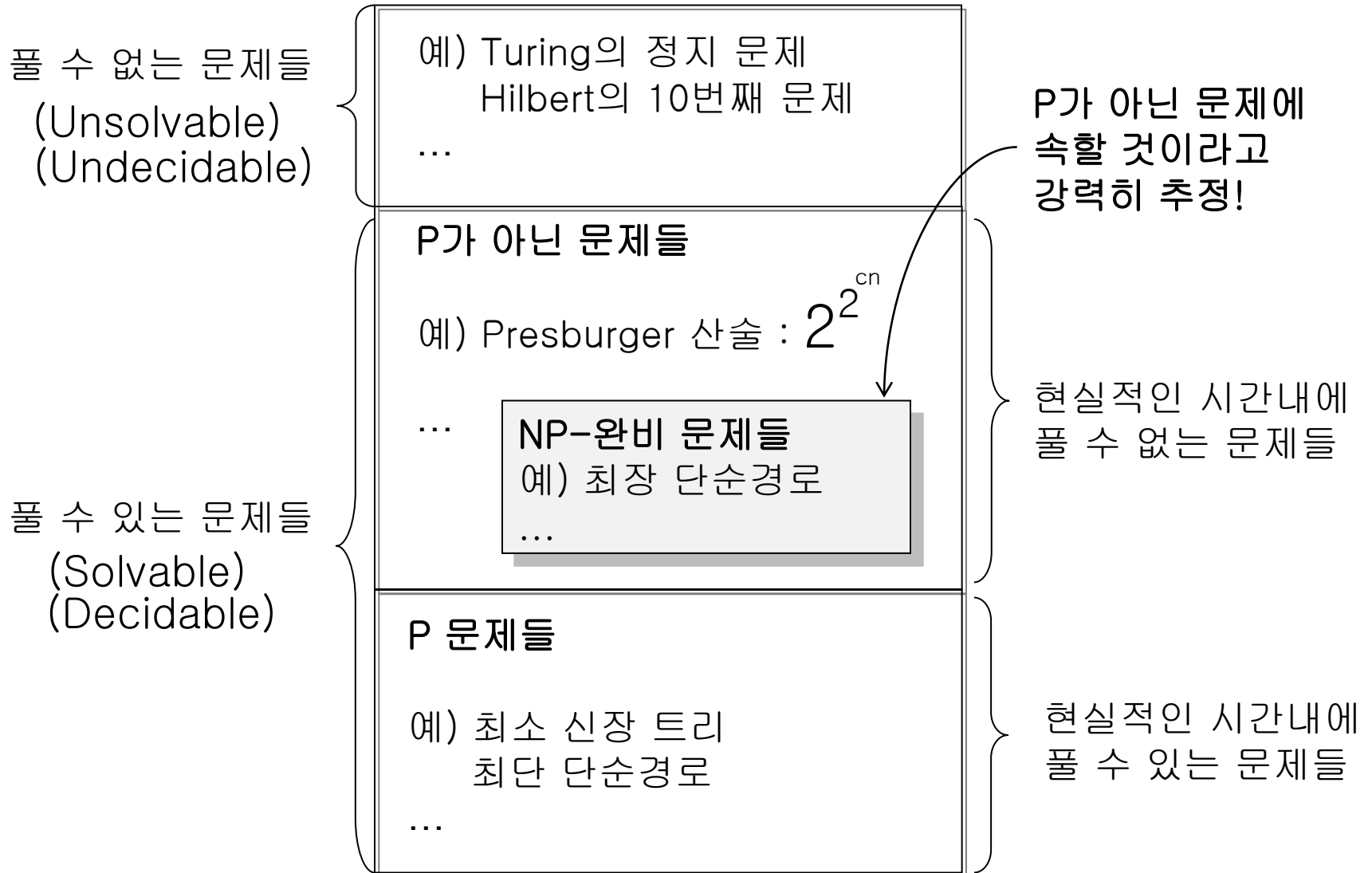
NP-완비

- 어떤 문제가 **NP-완비(NP-complete)**라고 하면
 - 현실적인 시간 내에 답을 얻을 수 있는 해법이 존재하지 않는다고 보면 됨
- **NP-완비** 군에 속하는 많은 문제들
 - 현재까지의 연구 결과로는 현실적인 시간 내에 답을 얻을 수 있는 해법이 존재하지 않는다.
 - 단, **NP-완비**인 하나의 문제라도 현실적인 시간에 답을 얻을 수 있는 해법이 존재한다면 **NP-완비**인 모든 문제에서 현실적인 시간에 답을 얻을 수 있는 해법이 존재한다.

문제의 종류

- 이제까지 다룬 알고리즘은 다항식 시간 (polynomial-time) 알고리즘
 - 입력의 크기가 n 일 때 최악의 경우 수행시간이 $O(n^k)$, (k 는 상수)
- 모든 문제를 컴퓨터로 다항식 시간에 풀 수 있을까? → No.
 - 풀 수는 있지만 다항식 시간 이상이 걸려서 “현실적인 시간 내에 풀 수 없는” 문제도 있고,
 - 아무리 많은 시간이 주어져도 “풀 수 없는” 문제도 있다.

문제의 종류



현실적인 시간

- 현실적인 시간이란 다항식 시간을 의미
 - n 의 다항식으로 표시되는 시간 (n : 입력의 크기)
 - 예: $n^3 + 5n + 10$
 - 실제로 $O(n^k)$ 을 의미하므로 \log 가 포함되어도 무방
 - 예: $3n^2 \log n = O(n^3)$
 - n^{100} 도 현실적인 시간인가?
 - 최고차항의 차수가 너무 크면 현실적인 시간으로 보기 힘들다.
 - 그러나 n^6 을 넘는 경우는 매우 드물기 때문에 “다항식 시간 = 현실적인 시간”으로 간주하기로 하자.
- 비다항식 시간의 예 - 비현실적인 시간
 - 지수 시간 – 예: 2^n
 - 계승 시간 – 예: $n!$

현재까지의 연구결과

- 어떤 문제가 NP-완비(NP-complete)라면
 - 이 문제를 현실적인 시간에 풀 수 있는 방법은 지금까지의 연구결과로는 없다.
 - 그렇지만 이 사실이 아직 증명은 되지 않았다.
- 클레이수학연구소의 21세기 7대 백만불짜리 문제 중의 하나
 - $P = NP$ 문제

P / NP / NP-complete

- P

- Polynomial
- 문제가 주어졌을 때 Yes 또는 No 답을 다항식 시간에 할 수 있는 문제 → “빨리 풀 수 있는 문제”

- NP

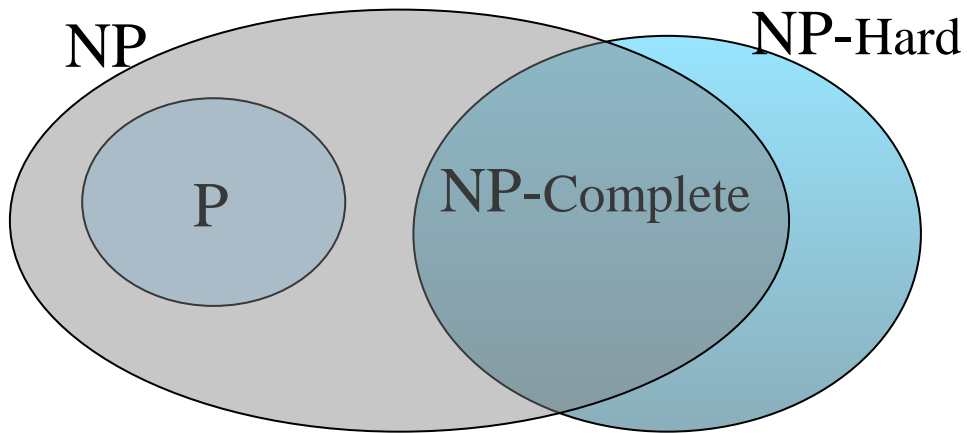
- **Nondeterministic Polynomial** (Non-Polynomial의 준말이 아님)
- 문제의 답이 Yes라는 근거가 주어졌을 때 그것이 옳은 근거임을 다항식 시간에 확인해줄 수 있는 문제 → “빨리 확인할 수 있는 문제”
- $P \subseteq NP$ 임은 알고 있으며, $P \neq NP$ 일 것으로 강력히 추정됨

- NP-complete

- NP이면서 “어떤 문제만큼도 어려운 문제”

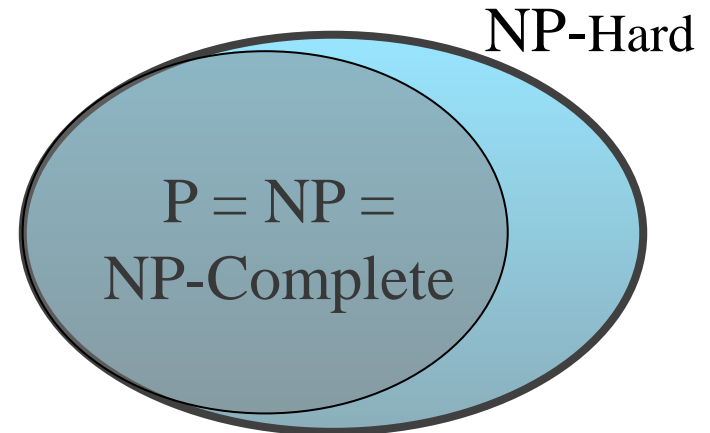
NP, NP-Complete, NP-Hard의 관계

$P \neq NP$ 인 경우



✓ P 부분은 추정

$P = NP$ 인 경우



직관과 배치되는 NP-완비 문제 예

- NP-complete 문제 중 몇 가지는 표면적으로 P-문제와 유사해 보임
 - 최단 단순 경로는 P,
최장 단순 경로는 NP-complete
 - 오일러 경로를 가지는지 결정하는 문제는 P,
해밀토니안 싸이클을 가지는지 결정하는 문제는 NP-complete

- 오일러 경로 : 모든 간선을 정확히 한 번씩 방문하고 돌아오는 경로
- 해밀토니안 싸이클 : 모든 정점을 단 한번씩 방문하고 돌아오는 경로

NP 이론의 유용성

- 어떤 문제가 NP-complete/NP-hard라는 확증이 있으면
 - 문제의 정확한 해를 빨리 구하는 알고리즘을 찾으려는 헛된 노력은 일단 중지한다.
 - 주어진 시간 예산 내에서 최대한 좋은 해를 구하는 알고리즘(heuristic)을 개발하는 것이 낫다. ➔ 근사해를 구함

요약

- 직관적으로 **P**는 빠른 시간에 해결할 수 있는 문제이고, **NP**는 빠른 시간에 확인할 수 있는 문제이다.
- **NP-complete** 문제는 아직 다항식 시간에 해결하는 방법이 알려지지 않은 어려운 문제이다.
- **NP-complete** 문제들 중 단 하나라도 다항식 시간 알고리즘이 발견되면 다른 모든 **NP-complete** 문제들도 다항식 시간에 해결된다.
- **P**는 **NP**에 속한다. **NP** 문제 중 **P**에 속하지 않는 것이 존재하는지는 아직 결론이 나지 않았지만 존재할 것이라고 강력히 추정한다.