Rachunek zdań

Dalej rozważmy *system aksjomatyczny T* dla rachunku zdań, który jest adekwatny rachunku zdań w tym sensie, że pozwala innym (składniowym) metodom rozwiązywać problem tautologiczności formuł logicznych, w przeciwieństwie do tzw. semantycznej metody, kiedy wartośc logiczna formuly jest obliczana za pomocą pobudowy tablic wartości logicznych dla tych formul.

System *T* będziemy nazywać *systemem aksjomatycznym dla rachunku zdań*.

Rachunek zdań

Pewna formalna teoria aksjomatyczna jest określona, jeżeli:

1. Określony jest pewien *alfabet skończony* lub *przeliczalny*, zawierający symbole teorii. Skończone ciągi tych symboli nazywamy wyrazami.

2. Dany jest podzbiór wyrazów teorii, zwany *zbiorem formuł teorii*.

3. Dany jest podzbiór zbioru formuł, którego elementy zwane są *aksjomatami teorii*. Jeżeli istnieje procedura, za pomocą której można określić czy dana formuła jest aksjomatem czy też nie, to *T* nazywamy *teorią aksjomatyczną*.

4. Dany jest zbiór skończony formuł, zwany *regulami wyprowadzenia* (*wnioskowania*).

Rachunek zdań

System aksjomatyczny T

Symbole systemu T to są symbole następujących kategorii:

a) Małe litery łacińskie z indeksami i bez

$$(a, b, \ldots, x, y, z, a_1, \ldots, f).$$

Symbole te nazywane są *zmiennymi zdaniowymi*.

b) Symbole

$$\wedge, \vee, \rightarrow, \neg,$$

które nazywane są połączeniami logicznymi.

c) Symbole (,), które są nazywane lewymi i prawymi nawiasami.

Rachunek zdań

System aksjomatyczny T

Formuły systemu T to skończone ciągi symboli systemu T. Aby wskazać formuły, używamy wielkich liter łacińskich z indeksami i bez (A, B, C_1, . . .).

Często istnieje procedura pozwalająca zawsze określić czy dany wyraz jest formułą czy też nie.

Definicja (formuły).

a) Zmienne zdaniowe jest formułą.

b) Jeśli A i B są formułami, to słowa

$$(A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \rightarrow B),\ \neg A$$

są również formułami.

c) pozostałe wyrażenia, tj. nie spełniajce warunków a), b) nie są formulami.

Rachunek zdań

Definicja (wyprowadzalnych formuł). Aby wyznaczyć *wyprowadzalne formuły*, najpierw definiujemy się *początkowe wyprowadzalne formuły*, a następnie określamy się zasady tworzenia nowych wyprowadzalnych formuł na podstawie początkowych.

Reguły te nazywane są *regułami wyprowadzenia*, a początkowe wyprowadzalne formuły nazywane są *aksjomatami*.

Rachunek zdań

Wyprowadzalne formuły systemu T są wyznaczane w następujący sposób:

(1) początkowe wyprowadzalne formuły (aksjomaty) są wyprowadzalne formuły;

(2) jeśli A jest wyprowadzalną formułą, a B jest formułą otrzymaną z A za pomocą operacji podstawienia, to B jest wyprowadzalną formułą;

(3) jeśli A i $A \rightarrow B$ są formułami wyprowadzalnymi, to formuła B otrzymana za pomocą reguły wnioskowania jest formułą wyprowadzalną.

Rachunek zdań

Aksjomaty rachunku zdań

I

1. $a \rightarrow (b \rightarrow a)$.
2. $((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$.

II

1. $a \wedge b \rightarrow a$.
2. $a \wedge b \rightarrow b$.
3. $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b \wedge c))$.

Rachunek zdań

Aksjomaty rachunku zdań

III

1. $a \rightarrow a \vee b.$
2. $b \rightarrow a \vee b.$
3. $(a \rightarrow c) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow ((a \vee b) \rightarrow c)).$

IV

1. $(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg b \rightarrow \neg a).$
2. $a \rightarrow \neg\neg a.$
3. $\neg\neg a \rightarrow a.$

Rachunek zdań

Aksjomaty systemu T upraszczają się, jeśli uważać, że symbol $\wedge$ jest silniejszy od wszystkich ostatnich, $\vee$ jest silniejszy od $\rightarrow$.

Ze względu na te zasady, na przykład formuła

$$(A \wedge B) \vee C$$

może być zapisana w postaci

$$A \wedge B \vee C.$$

Zauważmy że aksjomaty systemu T dzielą się na cztery grupy w zależności od symboli zawartych w nich połączeń logicznych.

Rachunek zdań

Reguly wyprowadzenia

1. *Regula zastępstwa* (RZ). Niech A będzie formułą zawierającą literę a. Wtedy, jeśli A jest wyprowadzalną formułą systemu T, to zastępując wszędzie w niej występowanie litery a formułą B, otrzymamy wyprowadzalnę formułę rachunku zdań.

2. *Reguła konkluzji* (modus ponens (MP)). Jeśli A i $A \rightarrow B$ są wyprowadzalnymi formułami rachunku zdań, to B jest wyprowadzalną formułą rachunku zdań.

Aksjomaty i reguły wyprowadzania całkowicie definiują pojęcie wyprowadzalnej formuły rachunku zdań.

Rachunek zdań

Przykłady. Pokażmy, że formuła

$$(a \to b) \to (a \to a)$$

jest wyprowadzalną formułą systemu T. Rzeczywiście, wyprowadzenie tej formuły z aksjomatów wygląda jak:

1. $((a \to (b \to a)) \to ((a \to b) \to (a \to a))$ (RZ, I.2).
2. $(a \to b) \to (a \to a)$ (MP 1, I.1).

Podobnie dla formuly $\neg\neg\neg a \to \neg a$ mamy:

1. $(a \to \neg\neg a) \to (\neg\neg\neg a \to \neg a)$ (RZ, IV.1)
2. $\neg\neg\neg a \to \neg a$ (MP 1, I.2).

Rachunek zdań

Definicja. *Wyprowadzeniem formuly w systemie T* nazywamy dowolny ciąg formuł

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

taki, że każda formuła A_i jest *wyprowadzalną* lub bezpośrednim wnioskiem z pewnych poprzednich formuł za pomocą regul wyprowadzenia.

Jest oczywiste, że wszystkie formuly w ciągu są wyprowadzalne.

Definicja. Formułą A nazywamy *twierdzeniem systemu T*, jeżeli istnieje wyprowadzenie $A_1, A_2, \dots, A_n$ w T dla A takie, że ostatnim elementem w tym wyprowadzeniu jest formuła A ($A=A_n$). Dowód ten nazywamy dowodem A w teorii T.

Rachunek zdań

Formuły systemu aksjomatycznego T dla rachunku zdań można interpretować jako formuły rachunku zdań. W tym celu zmienne zdaniowe będziemy traktować jako zmienne rachunku zdań, czyli takie, które przyjmują wartości 0 i 1. Symbole operacji logicznych definiujemy jak w rachunku zdań.

Twierdzenie (o poprawności). Każde twierdzenie systemu aksjomatycznego jest tautologią.

Dowód. Nietrudno sprawdzić, że wszystkie aksjomaty są tautologiami. Jeżeli formuły $A \to B$ i A są tautologiami, to formuła B również jest tautologią. Zatem wszystkie twierdzenia są tautologiami.

Odwrotne stwierdzenie jest trudniejsze do udowodnienia.

Rachunek zdań

Niektóre reguły systemu aksjomatycznego

Dalej R będzie oznaczać dowolnę formulę wyprowadzalnę.

Twierdzenie. $b \rightarrow R$ jest formulą wyprowadzalną.

Dowód.

1. R (wyprowadzalną);
2. $R \rightarrow (b \rightarrow R)$ (RZ I.1);
3. $(b \rightarrow R)$ (MP 1, 2).

Rachunek zdań

Twierdzenie. $a \to a$ jest formułą wyprowadzalną.

Dowód.

1. $((a \to (b \to a)) \to ((a \to b) \to (a \to a))$ (RZ, I.2);
2. $(a \to b) \to (a \to a)$ (MP 1, I.1);
3. $(a \to R) \to (a \to a)$ (RZ 2);
4. $(a \to R)$ Twierdzenie;
5. $(a \to a)$ (MP 3, 4).

Rachunek zdań

Istnieją inne sposoby udowodnienia tego twierdzenia.

Przykład.

1. $(d\to((d\to d)\to d)) \to ((d\to(d\to d)) \to (d\to d))$ (PZ I.2);
2. $d\to((d\to d)\to d)$ (PZ I.1);
3. $(d\to(d\to d)) \to (d\to d)$ (MP 1,2);
4. $(d\to(d\to d))$ (PZ I.1);
5. $(d\to d)$ (MP 3,4).

Rachunek zdań

Niech Γ będzie pewnym zbiorem formuł.

Wyprowadzone z Γ formuły RZ są określane w następujący sposób:

(1) jeśli A jest formułą z Γ, to A jest formułą wyprowadzalną z Γ;

(2) jeśli A jest formułą wyprowadzalną, to A jest formułą wyprowadzalną z Γ;

(3) jeśli A i $A \to B$ są formułami wyprowadzanymi z Γ, to formuła B otrzymana za pomocą reguły wnioskowania jest formułą wyprowadzalną z Γ.

Rachunek zdań

Definicja. Skończony ciąg formuł, z których każda jest formułą wyprowadzalną z Γ lub otrzymaną z poprzednich za pomocą reguły MP nazywany jest *wyprowadzeniem* formuły A z Γ. Ostatnią formułą ciągu jest formuła A, nazywana *wyprowadzalną* z Γ.

Definicja. Jeśli formuła A jest wyprowadzalna z Γ, to w tym przypadku piszemy $\Gamma \vdash A$.

Jeśli Γ jest puste, to piszemy $\vdash A$ i powiemy, że A jest wyprowadzalną w RZ.

Rachunek zdań

Twierdzenie (o dedukcji). Niech G będzie zbiorem formuł i niech A i B będą formułami. Jeśli $G, A \vdash B$, to $G \vdash A \rightarrow B$.

Dowód. Musimy skonstruować wyprowadzenie formuły $A \rightarrow B$ z G. Niech $C_1, C_2, \ldots, C_n$ będzie wyprowadzeniem formuły $B = C_n$ z $G \cup \{A\}$. Przekształćmy to wyprowadzenie do następującego ciągu formuł:

$$(A \rightarrow C_1), (A \rightarrow C_2), \ldots, (A \rightarrow C_n).$$

Ten ciąg kończy się formułą

$$(A \rightarrow B).$$

Rachunek zdań

Przekształćmy ten ciąg (przechodząc od lewej strony ciągu do prawej strony ciągu i dodając niektóre formuły) do wyprowadzenia formuly $(A\rightarrow B)$.

Niech dotarliśmy do formuły $(A\rightarrow C_i)$. Z założenia formuła C_i albo równa się A, albo należy do G, albo jest wyprowadzalna, albo wynika z dwóch poprzednich zgodnie z regułą MP.

Rozważmy po kolei wszystkie te przypadki.

Rachunek zdań

(1) Jeśli C_i jest A, to formuła ma postać $A \to A$. Ona jest wyprowadzana. Dodajemy te wyprowadzenie przed formułą $A \to A$.

(2) Niech C_i należy do G. Następnie wstawiamy formuły C_i i $C_i \to (A \to C_i)$. Zastosowanie reguły MP do tych formuł daje formułę $(A \to C_i)$.

(3) Te same formuły można dodać, jeśli S_i jest wyprowadzaną formułą RZ.

Rachunek zdań

(4) Jest jasne, że formuła C_1 albo równa się A, albo należy do G, albo jest wyprowadzalną. Zatem formuła $A \to C_1$ jest wyprowadzalną z G. To samo dotyczy formuły C_2. Na koniec niech formułę C_3 otrzymamy z dwóch poprzednich C_1 i C_2 zgodnie z regułą MP. Oznacza to, że poprzednie formuły to C_1 i $C_2 = C_1 \to C_3$.

Wtedy w nowym ciągu (z formułą A) będą już formuły

$$(A \to C_1) \text{ i } (A \to (C_1 \to C_3)).$$

Formuły te są wyprowadzalnymi z G. Rzeczywiście mamy ciągi:

C_1, $C_1 \to (A \to C_1)$, $A \to C_1$;

$C_1 \to C_3$, $(C_1 \to C_3) \to (A \to (C_1 \to C_3))$, $A \to (C_1 \to C_3)$,

które są wyprowadzeniem tych formuł z G.

Rachunek zdań

Dlatego możemy dodać do ciągu

C_1, $C_1 \rightarrow (A \rightarrow C_1)$, $A \rightarrow C_1$, $C_1 \rightarrow C_3$, $(C_1 \rightarrow C_3) \rightarrow$
$\rightarrow (A \rightarrow (C_1 \rightarrow C_3))$, $A \rightarrow (C_1 \rightarrow C_3)$,

formuły

$((A \rightarrow (C_1 \rightarrow C_3)) \rightarrow ((A \rightarrow C_1) \rightarrow (A \rightarrow C_3))$ (PZ);
$((A \rightarrow C_1) \rightarrow (A \rightarrow C_3))$ (MP);
$(A \rightarrow C_3)$ (MP).

Zatem formuła $A \rightarrow C_3$ jest wyprowadzalną z G. Kontynuując w ten sposób, otrzymujemy, że formuła $A \rightarrow C_n$ jest wyprowadzalna z G. Twierdzenie zostało udowodnione.

Rachunek zdań

Niektóre twierdzenia i reguły RZ

Twierdzenie 1.

$$\vdash (a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)).$$

Dowód. Rozważmy formuły $(a \to b)$, $(b \to c)$ i a. Z tych formuł, korzystając z reguły MP, można wyprowadzić formułę c. Naprawdę:

1. $(a \to b)$ (formuła);
2. $(b \to c)$ (formuła);
3. a (formuła);
4. b (MP 1,3);
5. c (MP 2,4).

Zgodnie z twierdzeniem o dedukcji, formuła

$$\vdash (a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$$

jest wyprowadzalnej w RZ.

Rachunek zdań

Regula sylogizmu (przechodniości)

Zrobimy podstawienia w ostatniej formule: zamiast *a* podstawimy formulę *A*, zamiast *b* podstawimy formulę *B*, zamiast *c* podstawimy formulę *C*. Otrzymujemy wyprowadzalnę formulę

$$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)).$$

Jeżeli formuly $(A \to B)$ i $(B \to C)$ są wyprowadzalne, to zgodnie z regułą MP formula $(A \to C)$ również jest wyprowadzalną. Więc, otrzymujemy *regułę sylogizmu*, które można zapisać w następujący sposób

$$\frac{A \to B,\ B \to C}{A \to C}$$

Rachunek zdań

Twierdzenie 2.

$$\vdash (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (b \rightarrow (a \rightarrow c)).$$

Dowód. Rozważmy formuly $a \rightarrow (b \rightarrow c)$, b i a. Z tych formuł, korzystając z reguły MP, można wyprowadzić formułę c.

Zgodnie z twierdzeniem o dedukcji, formula

$$(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (b \rightarrow (a \rightarrow c))$$

jest wyprowadzalną. Podobnie jak w poprzednim przypadku, otrzymujemy *regułę permutacji*

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{B \rightarrow (A \rightarrow C)}$$

Rachunek zdań

Twierdzenie 3.

$$\vdash a \rightarrow (b \rightarrow a \wedge b).$$

Dowód. Pokażmy że

$$(R \rightarrow a) \rightarrow ((R \rightarrow b) \rightarrow (R \rightarrow a \wedge b)),\ a,\ b \vdash a \wedge b,$$

gdzie R, jak poprzednio, oznacza dowolnę wyprowadzalnę formulę. Dalej pierwsza formuła w ciągu będzie oznaczona przez U.

Formuła $a \rightarrow (R \rightarrow a)$ jest wyprowadzalna. Zatem formułę $R \rightarrow a$ można wyprowadzić z formuly a, a tym bardziej z formul U, a, b. Więc, będziemy mieli:

$$U, a, b \vdash R \rightarrow a.$$

Rachunek zdań

Podobnie otrzymujemy

$$U, a, b \vdash R \to b.$$

Formułę $a \wedge b$ można wyprowadzić z U za pomocą reguły MP. Więc,

$$U, a, b \vdash a \wedge b.$$

Stąd, zgodnie z twierdzeniem o dedukcji, będziemy mieli

$$\vdash U \to (a \to (b \to a \wedge b)).$$

Ale U jest formułą wyprowadzalną. Jej można otrzymać za pomocą RZ w aksjomacie II.3. Zgodnie z regułą MP

$$\vdash a \to (b \to a \wedge b).$$

Rachunek zdań

Z tego stwierdzenia wynika reguła:

$$\frac{A,\ B}{A \wedge B}\ .$$

Reguła odwrotna

$$\frac{A \wedge B}{A,\ B}\ .$$

wynika z aksjomatów.

Z tych dwóch reguł wynika następująca reguła:

$$\frac{A \wedge B}{B \wedge A}\ .$$

Rachunek zdań

Twierdzenie 4.

$$\text{a) } \vdash (a \to (b \to c)) \to (a \wedge b \to c),$$

$$\text{b) } \vdash (a \wedge b \to c) \to (a \to (b \to c)).$$

Dowód. a) Mamy

$$a \to (b \to c),\ a \wedge b \vdash c.$$

Rzeczywiście formuły

$$a \wedge b \to a \text{ i } a \wedge b \to b$$

są aksjomatami. Dlatego formuły a i b są wyprowadzalnymi z formuł

$$a \to (b \to c) \text{ i } a \wedge b.$$

Rachunek zdań

Zgodnie z regułą MP z formuł a, b, $a \to (b \to c)$ otrzymujemy, że formuła c jest wyprowadzalną z formuł

$$a \to (b \to c) \text{ i } a \wedge b.$$

Stąd, przez twierdzenie o dedukcji, otrzymujemy dowód punktu a).

Aby udowodnić punkt b), pokażemy, że prawdziwa jest zależność

$$a \wedge b \to c,\ a,\ b \vdash c.$$

Z twierdzenia 3 mamy

$$\vdash a \to (b \to a \wedge b).$$

Rachunek zdań

Z tego wynika, że formula $a \wedge b$ jest wyprowadzalną z formuł

$$a \wedge b \rightarrow c,\ a,\ b.$$

Wtedy formuła c jest wyprowadzałną z tych formuł. Dalej, przez twierdzenie o dedukcji, otrzymujemy dowód punktu b).

Z tego twierdzenia wynikają dwie reguly:

$$\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{A \wedge B \rightarrow C} \qquad \frac{A \wedge B \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C)}$$

Pierwsza nazywa się regułą *połączenia*, druga to reguła *rozłączenia*.

Rachunek zdań

Teraz możemy udowodnić

Twierdzenie (o zupełności). Każda tautologia jest wyprowadzalną w systemu T.

Idea dowodu. Niech A będzie dowolną formułą zawierającą zmienne p, q, r. Załóżmy, że wartość A wynosi 1, gdy wszystkie trzy zmienne są równe 1. Wtedy, jak pokażemy poniżej, $p, q, r \vdash A$.

Ogólnie, każdemu zestawu wartości zmiennych formuły A odpowiada twierdzenie o wyprowadzeniu.

Rachunek zdań

Na przykład, jeśli wartość A jest równa 0 na zbiorze wartości 0, 0, 1 zmiennych, to

$$\neg p, \neg q, r \vdash \neg A.$$

Jeśli formuła A jest tautologią, to okazuje się, że da się ją wyprowadzić ze wszystkich możliwych interpretacji (przedstawionych w postaci zbiorów atomów).

Jeśli teraz $p, q, \neg r \vdash A$ i $p, q, r \vdash A$, to możemy otrzymać $p, q, (r \vee \neg r) \vdash A$. Rzeczywiście

$$p, q \vdash \neg r \rightarrow A \text{ i } p, q \vdash r \rightarrow A$$

przez twierdzenie o dedukcji.

Rachunek zdań

Z aksjomatu III.3 otrzymujemy

$$\vdash (r \to A) \to ((\neg r \to A) \to (r \vee \neg r \to A)).$$

Zgodnie z regułą MP

$$p, q \vdash r \vee \neg r \to A,$$

to jest,

$$p, q, r \vee \neg r \vdash A.$$

Ponieważ $\vdash r \vee \neg r$, to $p, q \vdash A$.

Poniżej przedstawimy te rozważania bardziej szczegółowo. Ale najpierw mamy lemat.

Rachunek zdań

Lemat. Dla dowolnych formuł P i Q:

$P,Q \vdash (P \wedge Q)$; $P,Q \vdash (P \vee Q)$;
$P,\neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$; $P,\neg Q \vdash (P \vee Q)$;
$\neg P,Q \vdash \neg(P \wedge Q)$; $\neg P,Q \vdash (P \vee Q)$;
$\neg P,\neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$; $\neg P,\neg Q \vdash \neg(P \vee Q)$;

$P,Q \vdash (P \to Q)$; $P \vdash \neg(\neg P)$;
$P,\neg Q \vdash \neg(P \to Q)$; $\neg P \vdash \neg P$.
$\neg P,Q \vdash (P \to Q)$;
$\neg P,\neg Q \vdash (P \to Q)$;

Rachunek zdań

Dowód. Na przykład dla formuły $P, Q \vdash (P \wedge Q)$ dowód otrzymujemy zgodnie z regułą

$$\frac{A,\ B}{A \wedge B}.$$

Dla formuły $\neg P, Q \vdash \neg(P \wedge Q)$ z aksjomatu IV.1 mamy

$$\vdash ((P \wedge Q) \rightarrow P) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg(P \wedge Q)).$$

Ale $\vdash (P \wedge Q) \rightarrow P$ (aksjomat II.1), a więc przez regułę MP $\vdash (\neg P \rightarrow \neg(P \wedge Q))$. Temu

$$\neg P \vdash \neg(P \wedge Q).$$

Rachunek zdań

Dla formuły $P, \neg Q \vdash (P \vee Q)$ z III.1 otrzymujemy

$$\vdash P \rightarrow (P \vee Q).$$

Więc, $P \vdash (P \vee Q)$ i $P, \neg Q \vdash (P \vee Q)$.

Dla formuły $P, Q \vdash (P \rightarrow Q)$ mamy na mocy aksjomatu I.1

$$\vdash Q \rightarrow (P \rightarrow Q).$$

Więc, $Q \vdash (P \rightarrow Q)$.

Jeśli chodzi np. o formuł z negacją, pierwsza z nich wynika z aksjomatu IV.2, druga z twierdzenia $\vdash A \rightarrow A$.

Rachunek zdań

Lemat. Jeżeli A jest dowolną formułą ze zmiennymi $p_1, \dots , p_n$, to dla każdej interpretacji I (zbiór atomów) twierdzenie

$$p'_1, \dots , p'_n \vdash A$$

jest prawdziwe, gdzie $p'_i = p_i$ lub $p'_i = \neg p_i$.

Lemat dowodzi się przez indukcję, konstruując formułę A i korzystając z poprzedniego lematu.

Następnie rozważamy interpretacje różniące się pozycją p_1 (w jednej interpretacji mamy p_1, w drugiej $\neg p_1$) i wykluczamy zmienną p_1. Robiąc to dla wszystkich par, otrzymujemy 2^{n-1} wyprowadzeń, których lewe części nie mają p_1. Powtarzamy ten proces ze zmiennymi p_2 i $\neg p_2$ itd. Ostatecznie otrzymujemy, że formuła A jest wyprowadzalna, jak stwierdza twierdzenie o zupełności.

Rachunek zdań

Niesprzeczność RZ

Problem niesprzeczności jest jednym z najważniejszych problemów logiki matematycznej.

Definicja. Rachunek logiczny nazywamy *niesprzecznym*, jeśli nie istnieje w nim żadnych dwóch wyprowadzalnych formuł, z których jedna jest zaprzeczeniem drugiej.

Innymi słowy, *rachunek niesprzeczny* jest takim rachunkiem, że dla dowolnej formuly A, formuly A i $\neg A$ nigdy nie mogą być jednocześnie wyprowadzone z aksjomatów rachunku zdań.

Problem niesprzeczności jest następujący: czy rachunek jest sprzeczny, czy nie?