Podstawy logiki i teorii mnogości

7. Zbiory uporządkowane.

Relację dwuargumentową $\leqslant$ w zbiorze X nazywamy *relacją począzdku częściowego* (lub *relacją porządku*), gdy jest ona zwrotna, antysymetryczna i przechodnia. Parę złożoną ze zbioru X i relacji porządku $\leqslant$ na nim określonej nazywamy *zbiorem częściowo uporządkowanym* i oznaczamy $(X, \leqslant)$.

Przykład 1 Zbiorem cześciowo uporządkowanym jest $(\mathbb{R}, \leqslant)$, gdzie $\leqslant$ jest "zwykłą" relacją "mniejszy lub równy".

Częściowy porządek $\leqslant$ w zbiorze X możemy przedstawić graficznie. Niech każdy element zbioru X będzie reprezentowany przez wierzchołek. Niech $x, y \in X$. Mówimy, że y *nakrywa* x, gdy $x \leqslant y$ oraz nie istnieje w X taki element z, że

$$z \neq x \text{ oraz } z \neq y \text{ oraz } x \leqslant z \text{ oraz } z \leqslant y.$$

Jeśli element y nakrywa element x, to wierzchołki x i y łączymy krawędzią oraz umieszczamy y wyżej niż x. Otrzymujemy w ten sposób *diagram Hassego.*

Element x_0 nazywamy *największym* w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \leqslant)$, gdy

$$\forall_{y \in X}\ y \leqslant x_0.$$

Element x_0 nazywamy *najmniejszym* w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \leqslant)$, gdy

$$\forall_{y \in X}\ x_0 \leqslant y.$$

Element x_0 nazywamy *maksymalnym* w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \leqslant)$, gdy nie istnieje $y \in X$ takie, że

$$x_0 \neq y \text{ oraz } x_0 \leqslant y.$$

Element x_0 nazywamy *minimalnym* w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, \leqslant)$, gdy nie istnieje $y \in X$ takie, że

$$x_0 \neq y \text{ oraz } y \leqslant x_0.$$

Zauważmy, że elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne mogą nie istnieć w zbiorze częściowo uporządkowanym (takim zbiorem jest na przykład $(\mathbb{R}, \leqslant)$ z Przykładu 1).

Element największy i element najmniejszy jest zawsze dokładnie jeden (o ile istnieje). Natomiat elementów maksymalnych i minimalnych może być wiele.

Zadania.

Zadanie 1 Narysować diagram Hassego zbioru częściowo uporządkowanego $(\mathcal{P}(X), \subset)$ i podać jego elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne, gdy

a) $X = \{1, 2, 3\}$,

b) $Y = \{1, 2, 3, 4\}$.

Zadanie 2 Narysować diagram Hassego zbioru częściowo uporządkowanego $(\mathcal{P}(X) \setminus X, \subset)$ i podać jego elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne, gdy

a) $X = \{1, 2, 3\}$,

b) $Y = \{1, 2, 3, 4\}$.

Zadanie 3 Podać przykład zbioru częściowo uporządkowanego w którym istnieje element najmniejszy i nie ma elementów maksymalnych.

Zadanie 4 Wykazać, że relacja $m|n$ (m dzieli n) w zbiorze $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ jest relacją częściowego porządku.

Zadanie 5 Narysować diagram Hassego podanego zbioru częściowo uporządkowanego i podać jego elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne.

a) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leqslant)$, gdzie dla $(x, y), (x', y') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mamy

$$(x, y) \leqslant (x', y') \Leftrightarrow x \leqslant x' \wedge y \leqslant y',$$

b) $\{2, 3, \ldots, 16\}$ z relacją podzielności $|$,

c) $\{2, 3, 4, 5, 6, 30, 60\}$ z relacją podzielności $|$,

d) $\{1, 2, 3, 5, 11, 13\}$ z relacją podzielności $|$,

e) $\{1, 2, 3, 6, 12, 24\}$ z relacją podzielności $|$,

f) $\{2, 4, 6, 12, 24, 36\}$ z relacją podzielności $|$,

g) $\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}$ z relacją podzielności $|$,