Teoria mnogości

Równoliczność zbiorów

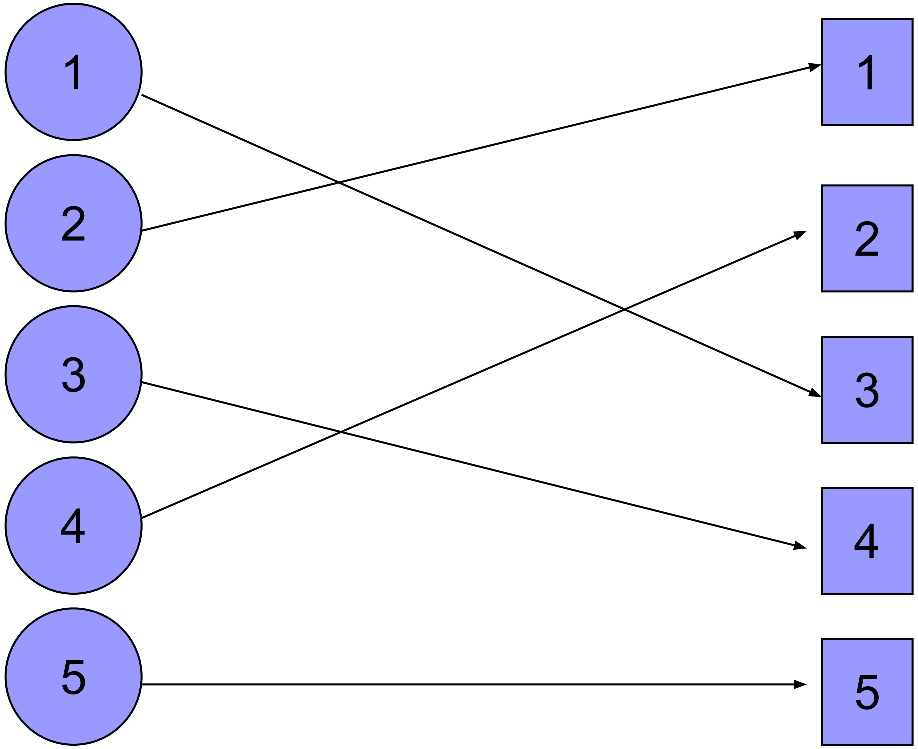
Definicja. Zbiory A i B nazywamy równolicznymi lub tej samej mocy, jeżeli pomiędzy ich elementami istnieje bijekcja.

Często zbiory równoliczne będziemy nazywać równoważnymi.

Fakt, że dwa zbiory A i B są równoliczne, zapisujemy w postaci $A \sim B$, $|A| = |B|$ lub $A \leftrightarrow B$.

Teoria mnogości

Przyklad 1.



Funkcja ustalająca równoliczność zbioru kółeczek i zbioru kwadracików.

Teoria mnogości

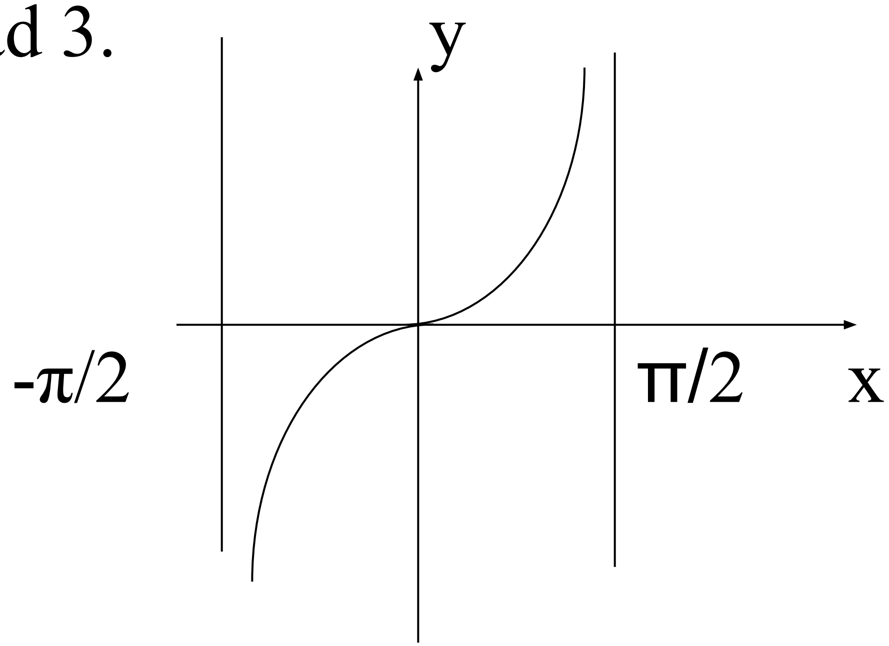
Przyklad 2.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
P = \{0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \ldots & \} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
N = \{0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & \}
\end{array}
$$

Zbiory P i N są nieskończone. Zbiór liczb parzystych jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych. Funkcja $f(x) = x \; div \; 2$ jest bijektywnym odwzorowaniem zbioru P na zbiór N.

Teoria mnogości

Przyklad 3.



Funkcja $y = tg\ x$ jest bijektywnym odwzorowaniem zbioru liczb rzeczywistych na przedział otwarty (-π/2, π/2).

Teoria mnogości

Jeśli liczba elementów w zbiorze wynosi n, gdzie n jest liczba naturalną, to mówimy, że jest to zbiór *skończony*.

O dwóch zbiorach skończonych powiemy, że są równoliczne, gdy mają tyle samo elementów.

Zbior równoliczny ze zbiorem N liczb naturalnych nazywamy *zbiorem przeliczalnym*.

Zbior równoliczny ze zbiorem R liczb rzeczywistych nazywamy *zbiorem kontinualnym*.

Teoria mnogości

Zbiory przeliczalne

1. Zbior liczb parzystych P jest przeliczalny, bo funkcja $f(x) = x \; div \; 2$ jest bijekcja pomiędzy zbiorami P i N.

2. Zbior liczb nieparzystych NP jest przeliczalny, bo funkcja $f(x) = 2x+1$ jest bijekcja pomiędzy zbiorami N i NP.

3. Zbiór liczb całkowitych Z jest przeliczalny, bo funkcja $f(x) = 2x\text{-}1$ dla $x > 0$ i $f(x) = -2x$ dla $x \leq 0$ jest bijekcja pomiędzy zbiorami Z i N.

Teoria mnogości

Definicja. Mówimy, że zbiór A jest mocy $n \in N$ (lub skończonym) jeśli istnieje bijekcja f: $A \to \{0, \ldots, n\text{-}1\}$.

Najmniejszą nieskończonością jest ta którą posiadają liczby naturalne.

Definicja. Mówimy, że zbiór A jest mocy $\aleph_0$ jeśli $A \sim N$ ($|A| = |N|$).

Definicja. Mówimy, że zbiór A jest mocy continuum ($|A| = \boldsymbol{c}$), jeśli jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych.

Teoria mnogości

Definicja. Mówimy, że moc zbioru A jest mniejszej lub równej od mocy zbioru B (co zapisujemy jako $|A| \leq |B|$) w. i t. w., gdy istnieje injekcja $f\colon A \to B$.

Oczywiście, jeśli A podzbiór zbioru B ($A \subseteq B$) to $|A| \leq |B|$ ponieważ istnieje injekcja $f\colon A \to B$ taka że $f(x) = x$ dla każdego $x \in A$.

Definicja. Mówimy, że zbiór A jest nieskończony, jeśli istnieje przeliczalny go podzbiór B.

Teoria mnogości

Twierdzenie (Cantor-Bernstein). Jeśli

$$|A| \leq |B| \text{ oraz } |B| \leq |A| \text{ to } |A| = |B|.$$

Dowód. Nie przedstawiamy dowodu tego stwierdzenia ze względu na jego złożoność ale będziemy go dalej używać.

Lemat. Nieskończony podzbiór A zbioru przeliczalnego C jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód. Niech B jest przeliczalny podzbiór zbioru A. Z tego mamy że $|B| \leq |A|$ i $|A| \leq |C|$.

Ale $|B| = |N|$ i $|C| = |N|$. Z tego wynika, że $|N| \leq |A|$ oraz $|A| \leq |N|$, a więc na podstawie twierdzenia Cantora-Bernsteina otrzymujemy $|A| = |N|$.

Teoria mnogości

Twierdzenie. Załóżmy, że $|A| = |C|$, $|B| = |D|$, $A \cap B = \varnothing$, $C \cap D = \varnothing$. Wtedy $|A \cup B| = |C \cup D|$.

Dowód. Niech $f\colon A \to C$ oraz $g\colon B \to D$ będą bijekcjami. Wtedy $h\colon A \cup B \to C \cup D$ określone wzorem $h(x) = f(x)$ dla $x \in A$ i $h(x) = g(x)$ dla $x \in B$ jest bijekcją pomiędzy $A \cup B$ i $C \cup D$.

Wniosek. *Suma $A \cup B$ zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym* ($A \cap B = \varnothing$).

Winika z tego, że $|A| = |N|$, $|B| = |N|$, $|N| = |P|$, $|N| = |NP|$, $P \cap NP = \varnothing$ i $P \cup NP = N$.

Teoria mnogości

Lemat. Jeśli A nieskończony zbiór, B zbiór przeliczalny (skończony) i $A \cap B = \varnothing$, to $|A \cup B| = |A|$.

Dowód. Niech C jest przeliczalny podzbiór zbioru A. Wtedy $|C \cup B| = |C|$. Z tego mamy, że $|A \cup B| = |A|$, ponieważ $A = (A \setminus C) \cup C$, $A \cup B = (A \setminus C) \cup (C \cup B)$ i $(A \setminus C) \cap (C \cup B) = \varnothing$, $(A \setminus C) \cap C = \varnothing$ ($|A \setminus C| = |A \setminus C|$, $|C \cup B| = |C|$ i twierdzenie).

Wniosek. Zbiory $[0,1]$ i $(0,1)$ są równolicznymi. Wynika z tego, że $[0,1] = (0,1) \cup \{0,1\}$.

Teoria mnogości

Twierdzenie. $|N \times N| = \aleph_0$.

Dowód. Niech f: $N \times N \to N$ będzie funkcją określoną wzorem $f(n,m) = 2^n(2m+1)$ -1. Zauważmy, że funkcja f jest injektywna (różnowartościowa).

Rozważmy dowolną liczbę naturalna a. Istnieją wtedy takie liczby naturalne n i m, że $a + 1 = 2^n(2m+1)$. Więc funkcja f jest surjektywna (zadanie do domu).

Zatem f jest bijekcją pomiędzy zbiorami $N \times N$ oraz N.

Teoria mnogości

Twierdzenie. *Załóżmy, że* $|A| = |C|$, $|B| = |D|$. *Wtedy* $|A \times B| = |C \times D|$.

Dowód. Niech $f: A \to C$ oraz $g: B \to D$ będą bijekcjami. Dla $(x,y) \in A \times B$ określamy $h(x,y) = (f(x), g(y))$. Wtedy h jest bijekcją pomędzy zbiorami $A \times B$ i $C \times D$.

Wniosek. Zbiór Q wszystkich liczb wymiernych jest zbiorem przeliczalnym.

Wynika to z tego, że $|Z| = |N|$. Zatem $|Z \times N| = |N \times N| = |N|$.

Teoria mnogości

Twierdzenie (Kantora). $|X| < |2^X|$, gdzie 2^X zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X.

Dowód. Jeśli X jest zbiorem pustym, to twierdzenie jest prawdziwe, bo $|X| = 0$, $|2^X| = 1$.

Oczywiście $|X| \le |2^X|$ bo istnieje injekcja

$$f\colon X \to \{\{x\}, x \in X\}.$$

Pokażemy że takie odwzorowanie nie może być surjektywnym. Przypuśćmy przeciwne. Wtedy dla każdego $A \subseteq 2^X$ istnieje $a \in X$ takie że $f(a) = A$. Rozważmy zbiór

$$Z = \{x \in X, x \notin f(x)\}.$$

Oczywiście Z $\subseteq 2^X$. Więc istnieje a_0 takie że $f(a_0) = Z$.

Teoria mnogości

Rozważymy dwa możliwe przypadki:

1. $a_0 \in Z$,
2. $a_0 \notin Z$.

W pierwszym przypadku z założenia $a_0 \in Z$ i na mocy definicji zbioru Z mamy $a_0 \notin f(a_0) = Z$. Sprzeczność.

W drugim przypadku jeżeli $a_0 \notin Z$ to ponieważ $f(a_0) = Z$, więc $a_0 \in f(a_0) = Z$. Sprzeczność.

Więc funkcja f nie noże być surjektywnej.

Teoria mnogości

Twierdzenie. Zbiór A wszystkich funkcji f: $N \rightarrow \{0,1\}$ jest *nieprzeliczalny*.

Dowód. Niech taki zbiór jest przeliczalny. Więc, istnieje bijekcja g ze zbioru A w zbiór N. To oznacza że dla każdej funkcję f prawdziwe są równości $g(f) = n$ *i* $g^{-1}(n) = f$.

Rozważmy ciągi wartości funkcji $f_0, f_1, \ldots$:

$$\begin{array}{l} f_0(0), f_0(1), f_0(2), \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_1(0), f_1(1), f_1(2), \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_2(0), f_2(1), f_2(2), \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

gdzie $f_n = g^{-1}(n)$.

Teoria mnogości

Niech

$$h(i)=\begin{cases}0, \text{ gdy } f_i(i)=1\\1, \text{ gdy } f_i(i)=0\end{cases}$$

Funkcja h należy do zbioru A i różni się od wszystkich funkcji f_i. Jeżeli $g(h) = m$, to $g^{-1}(m) = h$. Ale $g^{-1}(m) = f_m$. To oznacza że $g(h) = m$, $g(f_m) = m$. Więc, odwzorowanie g: $A \leftrightarrow N$ nie jest injektywnym.

Teoria mnogości

Lemat. Zbiór liczb rzeczywistych z przedziału (0,1) jest *nieprzeliczalny*.

Wniosek. Zbiór *R* liczb rzeczywistych jest zbiorem *nieprzeliczalnym.*

Winika z tego, że funkcja

$$f(x) = 1/\pi \ \ arctg\, x + 1/2$$

jest bijekcją pomiędzy zbiorami *R* i (0,1).

Teoria mnogości

Lemat. *Suma* $A \cup B$ *zbiorów kontinualnych jest zbiorem kontinualnym.*

Dowód. Niech f: $A \to (0,1/2)$ oraz g: $B \to [1/2,1)$ będą bijekcjami i $A \cap B = \varnothing$. Wtedy $|A \cup B| = |\,(0,1/2) \cup [1/2,1)\,| = |(0,1)| = \mathbf{c}$.

Jeśli $A \cap B \neq \varnothing$ to rozważmi zbiory $A \setminus (A \cap B)$ i B. Jeśli zbiór $A \setminus (A \cap B)$ jest kontinualnym to $|A \cup B| = |A \setminus (A \cap B) \cup B| = \mathbf{c}$.

Jeśli zbiór $A \setminus (A \cap B)$ jest przeliczalny to $|A \cup B| = |A \setminus (A \cap B) \cup B| = |B|$.

Teoria mnogości

Liczby kardynalne

Definicja. Liczba kardynalna zbioru *X* jest moc zbioru *X*. Wieć,

1. liczbą kardynalną zbioru pustego jest 0.
2. liczbą kardynalną dowolnego zbioru skonczonego jest licz jego elementów.
3. zbiory równoliczne mają jednakowe liczby kardynalne.

Na moce rozważań na poprzednich slajdach i przyjentych definicji zbiór liczb naturalnych jest przeliczalny, a zbiór liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny. Stąd wniosek

$$c \neq \aleph_0 .$$

Teoria mnogości

Porównywanie liczb kardynalnych

Definicja. Nich $|X| = \alpha$, $|Y| = \beta$. Powiemy, że liczba kardynalna α jest mniejsza lub równa liczbie kardynalnej β ($\alpha \leq \beta$) wtedy i tylko wtedy gdy istnieje injekcja $f: X \rightarrow Y$. Powiemy, że liczba kardynalna α jest mniejsza liczby kardynalnej β ($\alpha < \beta$) wtedy i tylko wtedy gdy istnieje injekcja $f: X \rightarrow Y$ i nie istnieje bijekcja $g: X \rightarrow Y$.

Wniosek. Ponieważ zbiór liczb naturalnych N jest podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych R, zatem

$$\aleph_0 \leq \boldsymbol{c}.$$

Teoria mnogości

Definicja. Dla dowolnych liczb kardynalnych α, β, γ,

1. $\alpha \leq \alpha$,
2. jeśli $\alpha \leq \beta$ i $\beta \leq \gamma$, to $\alpha \leq \gamma$,
3. jeśli $\alpha \leq \beta$ i $\beta \leq \alpha$, to $\alpha = \beta$ (Twierdzenie Cantora-Bernstejna).

Czy istnieją inne liczby kardynalne niż $\aleph_0$ i $\boldsymbol{c}$?. Odpowiedź na to pytanie i metodę konstrukcji nieskończonego ciągu różnych liczb kardynalnych daje twierdzenie Cantora.

Zbiory M, $2^M, 2^{2^M}$ . . . mają wszystkie różne moce.

W szczególności wynika stąd że $|N| < |2^N|$ i zbiór wszystkich podzbiorów zbioru N jest *nieprzeliczalny*.