Podstawy logiki i teorii mnogości

8. Algebry Boole'a.

Algebrą Boole'a nazywamy zbiór B z dwoma działaniami dwuargumentowymi $\vee, \wedge$, działaniem jednoargumentowym $'$ oraz różnymi elementami $0, 1$ spełniającymi poniższe warunki.

• **prawa przemienności:**

1a) $x \vee y = y \vee x$,

1b) $x \wedge y = y \wedge x$,

• **prawa łączności:**

2a) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$,

2b) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$,

• **prawa rozdzielności:**

3a) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,

3b) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,

• **prawa identyczności:**

4a) $x \vee 0 = x$,

4b) $x \wedge 1 = x$,

• **prawa dopełnienia:**

5a) $x \vee x' = 1$,

5b) $x \wedge x' = 0$.

Algebrę Boole'a oznaczamy $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$. Działanie $\vee$ nazywamy *sumą*, działanie $\wedge$ nazywamy *iloczynem*, a działanie $'$ nazywamy *dopełnieniem*.

Przykład 1 Algebrą Boole'a jest $(\{0, 1\}, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, gdzie 0 i 1 oznaczają wartości logiczne fałszu i prawdy, $\vee$ jest działaniem alternatywy, $\wedge$ jest działaniem koniunkcji i dopełnieniem jest działanie negacji $\neg$.

Przykład 2 Niech S będzie dowolnym zbiorem. Wtedy $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap, ^c, \emptyset, S)$ jest algebrą Boole'a.

Zauważmy, że jeśli zamienimy ze sobą działania $\vee$ i $\wedge$ w prawach definiujących algebrę Boole'a i jednocześnie zamienimy ze sobą 0 i 1, to otrzymamy z powrotem te prawa (w każdym punkcie definicji prawa a i b zamienią się ze sobą). Konsekwencją tej obserwacji jest poniższa zasada.

Zasada dualności: Jeśli zamienimy ze sobą znaki $\vee$ i $\wedge$ oraz 0 i 1 wszędzie we wzorze prawdziwym we wszystkich algebrach Boole'a, to otrzymany wzór będzie też prawdziwy we wszystkich algebrach Boole'a.

Wyrażenia boolowskie mogą być realizowane jako układy elektroniczne i wyrażenia równoważne odpowiadają układom elektronicznym, które działają identycznie, tzn. dają te same wyniki dla takich samych danych. Z tego powodu interesuje nas "upraszczanie" wyrażeń boolowskich. Ich optymalną postać możemy znaleźć na przykład za pomocą metody tablic Karnaugha.

Zadania.

Zadanie 1 Udowodnić, że $X = \{0,1\}^n$, $n \geqslant 2$, gdzie $\{0,1\}$ ma takie samo znaczenie jak w Przykładzie 1, jest algebrą Boole'a.

Zadanie 2 Udowodnić, że w każdej algebrze Boole'a zachodzą poniższe prawa.

- **prawa idempotentności:**

6a) $x \vee x = x$,

6b) $x \wedge x = x$,

- **prawa identyczności:**

7a) $x \vee 1 = 1$,

7b) $x \wedge 0 = 0$,

- **prawa pochłaniania:**

8a) $(x \wedge y) \vee x = x$,

8b) $(x \vee y) \wedge x = x$.

Zadanie 3 Udowodnić, że w każdej algebrze Boole'a zachodzą poniższe **prawa de Morgana**:

9a) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$,

9b) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.

Wskazówka: Pokazać, że jeśli $w \vee z = 1$ i $w \wedge z = 0$, to $z = w'$.

Zadanie 4 Sprawdzić, że relacja $\leqslant$ określona na algebrze Boole'a wzorem

$$w \leqslant y \Leftrightarrow x \vee y = y$$

jest częściowym porządkiem.

Zadanie 5 Udowodnić, że w dowolnej algebrze Boole'a zachodzi równoważność

$$x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x.$$

Zadanie 6 Znaleźć optymalną postać podanego wyrażenia boolowskiego za pomocą metody tablic Karnaugha:

a) $(p \vee q)' \vee [r \wedge \big(p' \vee (q \vee r')\big)]$,

b) $[(p' \vee q) \wedge r'] \vee [p \vee (q \wedge r)]'$.

Zadanie 7 Wyznaczyć minimalną postać APN i KPN podanych zdań korzystając z metody tablic Karnaugha:

a) $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow [p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)]$,

b) $[p \vee (q \vee r)] \Rightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$,

c) $\neg(p \wedge q) \Rightarrow [(q \Leftrightarrow r) \vee p]$,

d) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)]$.