Indukcja mat.:

Niech $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, będzie zdaniem prawdziwym lub fałszywym.

Jeżeli: 1) dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$ $p(n_0)$ jest prawdziwe

2) dla każdego $k \geq n_0$ $\underbrace{p(k)}_{\text{zał. indukcyjne}} \Rightarrow p(k+1)$ zachodzi implikacja

to $p(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich liczb nat. $n \geq n_0$.

Pr.1

Pokazać, że dla każdego nat. $n \geq 4$ $\underbrace{3^n > n^3}_{p(n)}$

1) dla $n_0 = 4$:

$L(4) = 3^4 = 81 \quad P(4) = 4^3 = 64 \ldots P(4)$ - prawda

2) Z.I.: dla $k \geq 4$ $3^k > k^3$

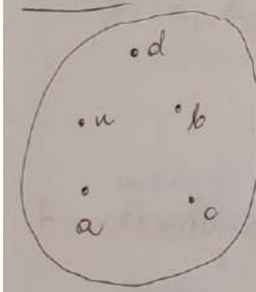
$L(k+1) = 3^{k+1}$

$P(k+1) = (k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = k^3\left(1 + \frac{3}{k} + \frac{3}{k^2} + \frac{1}{k^3}\right) \leq k^3\overbrace{\left(1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{64}\right)}^{\frac{61}{64}} < k^3 \cdot 3 \overset{z.I.}{<} 3^k \cdot 3 = L(k+1)$

$\frac{3}{k} \leq \frac{3}{4} \quad \frac{3}{k^2} \leq \frac{3}{16} \quad \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{64}$

$L(k+1) > P(k+1)$ implikacja $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ dla $k \geq 4$ jest prawdziwa

Pr.2 Dowód kombinatoryczny



$\{a,b\}, \{a,c\}, \ldots, \{d,e\}$

Fakt: liczba możliwych par elementów ze zbioru $n \geq 2$ elementowego wynosi $\frac{n(n-1)}{2}$

Dowód: 1) $n_0 = 2$ jedna para $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$

2) Z.I.: dla zbioru o $k \geq 2$ elem. mamy $\frac{k(k-1)}{2}$ par.

Rozważmy zbiór $k+1$ elementów. Podzielmy pary el. na II klasy

$\{a,b\}$ $a \leq k$, $b \leq k$	$\{a,k+1\}$ $a \leq k$
Z.I. $\frac{k(k-1)}{2}$	k

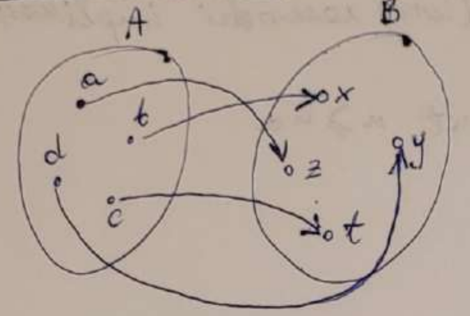
Par dla $k+1$ el. jest $\frac{k(k-1)}{2} + k = k\left(\frac{k-1}{2} + 1\right) = \frac{k(k-1+2)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$ wzór dla $n = k+1$

$\frac{n(n-1)}{2} = \ldots = 1 + 2 + \ldots + (n-1)$

Przeliczanie - wyznaczanie liczby el. zbioru

Podstawowe prawa / zasady przeliczania

I Zasada bijekcji (odwzorowanie jeden do jednego)

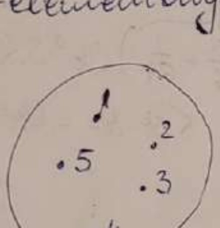


$f: A \to B$

Jeżeli:
A, B - zbiory skończone
istnieje bijekcja $f: A \to B$

to:
$|A| = |B|$ (liczba el. zbioru A jest równa liczbie el. zbioru B)

Przykład:
Liczba podzbiorów zbioru n-elementowego jest równa liczbie n-elementowych ciągów binarnych.



n=5

podzbiór $\{1,2,5\}$ reprezentujemy ciągiem $(\underset{1}{1},\underset{2}{1},\underset{3}{0},\underset{4}{0},\underset{5}{1})$

$f: \mathcal{P}(\{1,2,\dots,n\}) \to \mathbb{B}^n$

$\mathcal{P}(X)$ - zbiór podzbiorów zbioru X

$\mathbb{B} = \{0,1\}$

Podzbiór $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ odwzorowujemy w ciąg binarny mający jedynki w
$a_1 < \dots < a_k$
miejscach $a_1, a_2, \dots a_k$, a w pozostałych miejscach zera.

$(0,1,0,1,0) \leftrightarrow \{2,4\}$

II Zasada dodawania

$|A|$ - moc zbioru A, liczba el. zbioru A

Wersja elementarna

$$\left(\begin{matrix} A, B \text{ - zbiory skończone} \\ A \cap B = \emptyset \end{matrix}\right) \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$$

Z.D.: Jeśli $A_1, A_2, \dots, A_n$ są zbiorami skończonymi parami rozłącznymi, tzn. $A_i \cap A_j = \emptyset$, dla $i \neq j$ dowolnych
to $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|$$

Dowód indukcyjny wynikający z wersji elementarnej

$n=1 \quad |A_1| = |A_1|$

Z.I $\quad |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$

$$\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}_{A} \cup A_{n+1} = A \cup A_{n+1}$$

$i=1,\ldots,n \quad A_i \cap A_{n+1} = \emptyset \Rightarrow A \cap A_{n+1} = \emptyset$

$$|A \cup A_{n+1}| \overset{\text{w.e.}}{=} |A| + |A_{n+1}| \overset{\text{Z.I}}{=} \underbrace{|A_1| + \ldots + |A_n|} + |A_{n+1}|$$

$$\| $$

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}|$$

<u>Uwagi</u>

$\{1,2,5\}, \{3,5,6\}, \{3,4,6\}$
$\quad A \qquad B \qquad C$

$A \cap B \cap C \neq \emptyset$

to są zbiory <u>rozłączne</u>

$B \cap C = \{3,6\} \neq \emptyset$

ale nie są <u>parami rozłączne</u>

III Zasada mnożenia

Wersja elementarna

$$(A, B \text{ - zbiory skończone}) \Rightarrow \left(|A \times B| = |A| \cdot |B|\right)$$

<u>Przykład</u>

$A = \{1, 2, 3\} \qquad A \times B = \{\underbrace{(1,a), (1,b)}, \underbrace{(2,a), (2,b)}, \underbrace{(3,a), (3,b)}\}$

$B = \{a, b\}$

$|A \times B| = 6 \qquad |A \times B| = |A| \cdot |B|$

$|A| = 3 \qquad\qquad 6 = 3 \cdot 2$

$|B| = 2$

$$\begin{array}{cc} (1,a) & (1,b) \\ (2,a) & (2,b) \\ (3,a) & (3,b) \end{array}_{3\times 2}$$

Elementy iloczynu kartezjańskiego możemy ułożyć w tablicę prostokątną o $n = |A|$ wierszach i $m = |B|$ kolumnach.

Z.M.: $\left(A_1, \ldots, A_N \text{ - zbiory skończone}\right) \Rightarrow |A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_N| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot \ldots \cdot |A_N|$

$$\left| \mathop{\times}_{k=1}^{N} A_k \right| = \prod_{k=1}^{N} |A_k|$$

$|A \times B \times A| = 18$

$(2, b, 1) \in A \times B \times A$

<u>Przykład</u> Ile jest podzbiorów zbioru 10 elementowego?

$$\mathcal{P}(\{1,2,3,\ldots,10\}) \overset{\text{Z.B.}}{=} \underbrace{|B \times B \times B \times \ldots \times B|}_{10 \text{ razy}} \overset{\text{Z.M.}}{=} \underbrace{|B| \cdot \ldots \cdot |B|}_{10 \text{ razy}} = 2^{10} = 1024$$

Przykład Ile jest liczb 3-cyfrowych zbudowanych z cyfr nieparzystych,
a) w których żadna cyfra się nie powtarza?

np. liczba 131 to element zbioru $A \times A \times A$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$|A \times A \times A| \overset{z.m.}{=} 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

a) $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ $\quad a = 7 \quad B_7 = \{1, 3, 5, 9\}$

Uogólniona z.m.: Jeśli pewna procedura może być rozbita na N kolejnych kroków z r_1 wynikami w pierwszym kroku, r_2 wynikami w drugim kroku, ..., r_N wynikami w N-tym kroku to w całej procedurze mamy $r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_N$ możliwych wyników.

Dowód dla $N = 2$

A - zbiór możliwych wyników w pierwszym kroku $|A| = r_1$

$a \in A$ przez B_a oznaczamy zbiór możliwych wyników w drugim kroku jeśli w pierwszym wybrano a. $|B_a| = r_2$

$\{(a, b)\}$ $\begin{matrix} a \in A \\ b \in B_a \end{matrix}$

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{r_1}\}$ możliwe wyniki ~~pro~~ procedury
(a_1, b) $b \in B_{a_1}$ - r_2 możliwych
(a_2, b) $b \in B_{a_2}$ - -//-
$\vdots$
(a_{r_1}, b) $b \in B_{a_{r_1}}$ - -//-

mamy:
r_1 wierszy i r_2 kolumn
razem:
$r_1 \cdot r_2$ możliwych par

SCHEMATY WYBORU

wybieramy k-elementów z n możliwych

I) Czy kolejność jest istotna?
TAK - wariacja
NIE - kombinacja

II) Czy elementy mogą się powtarzać?
TAK - ... z powtórzeniami
NIE - ... bez powtórzeń

1. (T, T) - wariacje z powtórzeniami

~~[illegible]~~ $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

wariacje k-el. ze zbioru n-el. to k-elementowy ciąg o elementach z tego zbioru A

$$|\underbrace{A \times A \times ... \times A}_{k}| \overset{z.M.}{=} |A|^k = n^k$$

$\boxed{\bar{V}_n^k = n^k}$ - liczba k-el. wariacji z powtórzeniami ze zb. n-elem.

2. (T, N) - wariacje bez powtórzeń

k-elementowy ciąg o elem. ze zbioru n-elem., w którym wyrazy nie mogą się powtarzać

$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$ - liczba k-elem. wariacji bez powtórzeń ze zb. n-elem.

WYKŁAD 3. 06.03.23

Schematy wyboru c.d

1) Kolejność   (T, T) wariacje z powtórzeniami (b, a, c, a)
2) Powtarzanie $\overline{V}_n^k = n^k$

↓ 4-elem. wariacja z powtórzeniami ze zbioru A

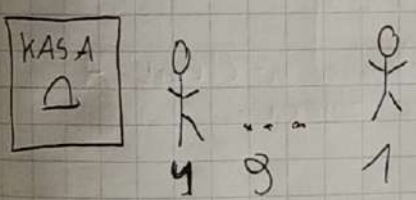
(T, N) - wariacje bez powtórzeń   (b, e, a) - 3-elem. wariacja bez powtórzeń ze zbioru A

$$V_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Wykorzystujemy wszystkie elementy zbioru (b, a, e, d, c) - przestawienie lub permutacja

Liczba permutacji zbioru n-elementowego $V_n^n = P_n =$
$= n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$ (n silnia)

<u>Przykład</u>: na ile sposobów możemy ustawić 10 osób w kolejce?



Odp: 10!

$$\left\{ P_n = \frac{n!}{0!} \quad 0! \text{ to } 1 \right\}$$

(N, N) - kombinacje bez powtórzeń (b, e, a)   (e, a, b)

$\{a, b, e\}$

(a, b, e)

$$V_5^3 = \frac{5!}{2!}$$

$\boxed{P_3 = 6 \text{ tyle różnych ustawień tych samych elementów}}$

K! wariacji bez powtórzeń daje tę samą k-el. kombinację

V_n^k dzielimy na grupy wariacji zawierających te same elementy ~~w każdej grupie~~

w każdej grupie mamy K! wariacji

Liczba grup wariacji

to $\frac{V_n^k}{k!} = C_n^k$ - liczba k-el. kombinacji bez powtórzeń w zbiorze n-elem.

$$C_5^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 10$$

$\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,b,e\}$, $\{a,c,d\}$, $\{a,c,e\}$,
$\{a,d,e\}$, $\{b,c,d\}$, $\{b,c,e\}$, $\{b,d,e\}$, $\{c,d,e\}$

Kolejność się nie liczy

Def: k-el. kombinacją bez powtórzeń ze zbioru n-elem. A nazywamy k-wyrazowy podzbiór tego zbioru

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{k}$$ n nad k
Symbol dwumianowy Newtona

Przykład: Ile jest 5-elem. ciągów binarnych mających dokładnie 3 jedynki?

$\{a,b,e\} \leftrightarrow (1,1,0,0,1)$

Odp: 10

Wersja ogólna przykładu: n-elem., k jedynek:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\, k!}$$

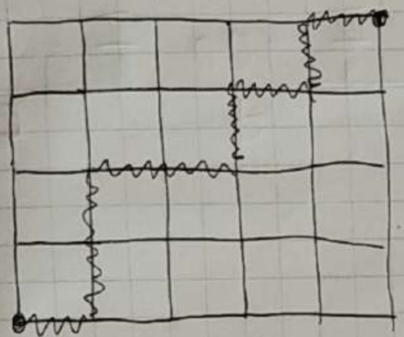
Kolejny przykład

$n=20$
$k=10$

$$\frac{20!}{10!\cdot 10!} = \frac{\cancel{10!}\cdot 11\cdot \cancel{12}^{3}\cdot 13\cdot \cancel{14}\cdot \cancel{15}\cdot \cancel{16}^{2}\cdot 17\cdot \cancel{18}^{2}\cdot 19\cdot \cancel{20}}{\cancel{10!}\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{7}\cdot \cancel{8}\cdot \cancel{9}\cdot \cancel{10}}$$

$$= 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 4$$

Przykład:



Liczba najkrótszych tras z punktu $(0,0)$ do $(5,4)$

$(0,1,1,0,0,1,0,1,0)$

4 jedynki, 5 zer

Odp: $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!\,5!} = \frac{\cancel{6}\cdot 7\cdot \cancel{8}^{2}\cdot 9}{\cancel{2\cdot 3\cdot 4}} = 2\cdot 7\cdot 9 = 126$

↑
z.B.

$\rightarrow$ 0 $\quad\uparrow$ 1

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b) = \dots \underbrace{\binom{n}{k}}_{?} a^k b^{n-k}$$

⇕
dwumian

z k czynników wybraliśmy a
z n-k -"- -"- b

jeśli wybraliśmy a to pod czynnikiem piszemy 1

$n=4 \quad \underset{1}{(a+b)}\,\underset{0}{(a+b)}\,\underset{1}{(a+b)}\,\underset{1}{(a+b)} \quad \underbrace{\;?\;}\, a^3 b$

trzy jedynki i jedno 0

Tyle razy otrzymujemy $a^k b^{n-k}$ ile jest ciągów binarnych długości n mających dokładnie k jedynek

$$(a+b)^5 = \dots + \underbrace{10}\, a^3 b^2 +$$

(N, T) – kombinacje z powtórzeniami

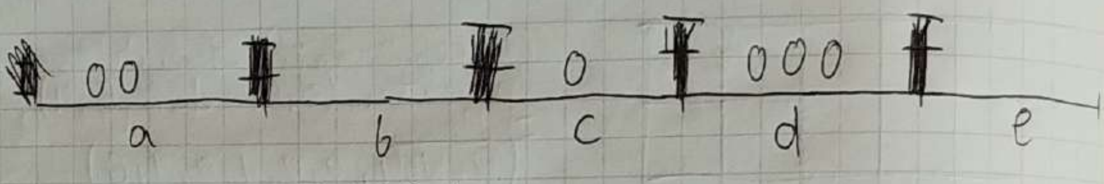
$A = \{a, b, c, d, e\}$ $n=5$ $k=6$

$\{a, a, c, d, d, d\}$ – multizbiór

Def: k-elem. komb. z powt. ze zbioru n-elem. A nazywamy k-wyrazowy multizbiór o wyrazach z A.

z powtórzeniami

$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$



0011010001

ścianka to 1

Przykład: 1100010010
$\{c, c, c, d, d, e\}$

k zer
n-1 jedynek

$$\binom{k+n-1}{n-1}$$

$$C_{k+n-1}^{n-1} = \frac{k+n-1}{(n-1)!\,k!} = \binom{k+n-1}{k}$$

$$\overline{C}_5^6 = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\,4!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4} = 210$$

Przykład: Ile różnych bukietów składających się z 6 kwiatów możemy ułożyć jeśli wybieramy z róż, tulipanów i gerberów.

$n=3$ $k=6$

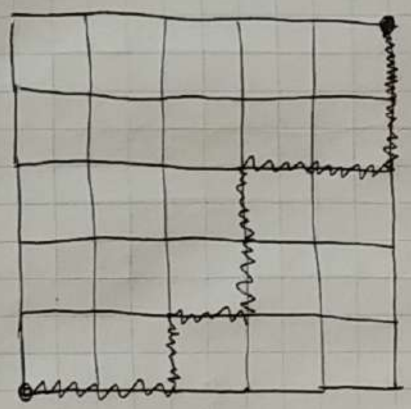
$$\overline{C}_3^6 = \binom{8}{6} = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{7\cdot 8}{2} = 28$$

Ile bukietów możemy ułożyć, zawierających przynajmniej 1 kwiat każdego rodzaju?

Wybieramy po 1 kwiat każdego rodzaju

pozostałe dobieramy losowo $k=3 \quad n=3$

$$\bar{C}_3^3 = \binom{5}{3} = 10$$



najkrótsze trasy od $(0,0)$ do $(5,5)$

$$\binom{10}{5}$$

+ warunek że nie wychodzą poza przekątną

0010110011

$\rightarrow$ w każdym przedrostku liczba jedynek nie jest większa niż liczba zer

13.03. 2023

Kombinacje bez powtórzeń k-wyraz. ze zb. n-elem. $\iff$ n-elem. ciągi binarne mające dokładnie k jedynek $\longleftrightarrow$ słowa dł. n nad alfabetem $\{0,1\}$ mające k jedynek oraz n-k zer

$$\begin{matrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \longleftrightarrow \{a, c, d\}$$

$A=\{a,b,c,d\}$ - alfabet - liczba słów zawierających: k_1 liter a, k_2 lit. b, k_3 lit. c, k_4 lit. d — permutacje z powtórzeniami

np. cdcaa $k_1=2$, $k_2=0$, $k_3=2$, $k_4=1$

Jeśli $k_1=k_2=k_3=k_4=1$ np badc to mamy permutację zbioru A.

I sposób

Rozróżniamy literki a, tzn wychodzimy od literki $a_1, a_2, \dots, a_{k_1}$
b — " — $b_1, b_2, \dots, b_{k_1}$

itd.

$k_1+\dots+k_4$ różnych liter robimy z nich zwykłą permutację. Następnie „zapominamy", że były różne litery a, b, c, d

$$\frac{(k_1+k_2+k_3+k_4)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!\cdot k_4!}$$

$c_1 d c_2 a_2 a_1 \longleftrightarrow c_2 d c_1 a_2 a_1$

$c_1 d c_2 a_1 a_2 \quad c_2 d c_1 a_1 a_2$

cdcaa

$$\frac{5!}{2!\cdot 0!\cdot 2!\cdot 1!}=30$$

$|A|=n$ liter w alfabecie
k_1 lit. 1-ego rodzaju
⋮
k_n lit. n-ego rodzaju

Liczba wszystkich liter w słowie to $k_1+k_2+\dots+k_n$ itd.

II sposób

1) Ustalamy miejsca na pierwszą literę $\binom{k_1+k_2+\dots+k_n}{k_1}$ możliwości.

2) Ustalamy miejsca na drugą literę $\binom{k_2+k_3+\ldots+k_n}{k_2}$ możliwości.

3) Ustalamy miejsca na trzecią literę $\binom{k_3+k_4+\ldots+k_n}{k_3}$ możliwości.

⋮

n-1) Ustalamy msc na przedostatnią literę $\binom{k_{n-1}+k_n}{k_{n-1}}$ możliwości.

n) — // — na ostatnią literę $\binom{k_n}{k_n}$ możliwości.

Z zasady mnożenia liczba ~~możliwych~~ wszystkich wyników

$$\binom{5}{2}\binom{3}{0}\binom{3}{2}\binom{1}{1}$$

cdcaa

$$\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!\cdot\cancel{(k_2+k_3+\ldots+k_n)!}}\cdot\frac{\cancel{(k_2+k_3+\ldots+k_n)!}}{k_2!\cdot\cancel{(k_3+k_4+\ldots+k_n)!}}\cdot\frac{\cancel{(k_3+\ldots+k_n)!}}{k_3!\cdot(k_4+\ldots+k_n)!}\cdot\ldots\cdot\frac{(k_{n-1}+k_n)!}{k_{n-1}!\cdot\cancel{k_n!}}\cdot\frac{\cancel{k_n!}}{k_n!\cdot 0!}=$$

$$=\boxed{\frac{(k_1+\ldots+k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}}=\binom{k_1+k_2+\ldots+k_n}{k_1,k_2,\ldots,k_n}$$

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

np. $(x+y)^5=\binom{5}{0}x^0y^5+\binom{5}{1}xy^4+\binom{5}{2}x^2y^2+\binom{5}{3}x^3y^2+$
$+\binom{5}{4}x^4y+\binom{5}{5}x^5=$
$=y^5+5xy^4+10x^2y^3+10x^3y^2+5x^4y+x^5$

Uwaga!

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

---

słowo cdcaa $(x_1=a,\ x_2=b\ldots)$

$(x_1+x_2+x_3+x_4)^5=(x_1+x_2+\underline{x_3}+x_4)(x_1+x_2+x_3+\underline{x_4})(x_1+x_2+\underline{x_3}+x_4)(\underline{x_1}+x_2+x_3+x_4)(\underline{x_1}+x_2+x_3+x_4)$

wybór x_i z czynnika $\leftrightarrow$ miejsce literki w słowie

<u>Fakt:</u> Współczynnik w $(x_1+x_2+\ldots+x_n)^m$ przy składniku $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$, gdzie $k_1+k_2+k_3+\ldots+k_n=m$ jest równy $\frac{m!}{k_1!\,k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$

Zasada szufladkowa Dirchleta

Jeśli rozkładamy n przedmiotów do m szuflad i $n > k \cdot m$, $k \in \mathbb{N}$ to istnieje szuflada zawierająca przynajmniej $k+1$ przedmiotów.

Dowód: (od absurdum)
a.a.

Zaprzeczenie tezy: Każda szuflada zawiera co najwyżej k przedmiotów.

Liczba przedmiotów w pierwszej szufladzie $n_1 \leq k$
— // — w drugiej szufladzie $n_2 \leq k$
⋮
— // — w m-tej szufladzie $n_m \leq k$

Liczba wszystkich przedmiotów $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m \leq m \cdot k$ – sprzeczne z założeniem, że $n > k \cdot m$

Przykład:

Niech A będzie 10-elementowym podzbiorem zbioru liczb $\{1, 2, \ldots, 50\}$.
np. $A = \{8, 27, 3, 13, 34, 17, 37, 44, 21, 1\}$

Wtedy A zawiera dwa różne 5-elementowe podzbiory takie, że sumy wszystkich elementów każdego z nich są ~~różne~~. równe.

podzbiór 5-elem.

$\underbrace{\quad}_{15} \ldots \underbrace{\quad}_{19} \; \underbrace{\quad}_{\text{suma}=20} \; \underbrace{\quad}_{21} \ldots \underbrace{\quad}_{5 \cdot 50 - (1+2+3+4) = 240}$

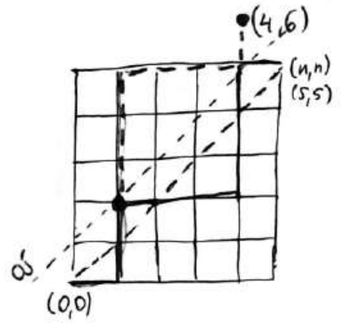
razem 226 szuflad

$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$ podzbiorów (które umieszczamy w szufladkach)

$252 > 226$

Z zasady szufladkowej Dirchleta będą min. 2 różne podzbiory mające taką samą liczbę elementów.

np. $\{8, 3, 13, 27, 34\}$
$\{8, 3, 13, 17, 44\}$



Liczba dróg ~~rosnących~~ $\to \uparrow$ z $(0,0)$ do (n,n), które nie wychodzą poza przekątną.

Wszystkich dróg rosnących z $(0,0)$ do (n,n) jest $\binom{2n}{n}$.

Drogi ~~złe~~: Jest ich tyle samo ile tras rosnących z punktu $(0,0)$ do punktu $(n-1,n+1)$

Dowód:

Utworzymy bijekcję

$\Rightarrow$ odbijamy złą trasę w „ponad-przekątnej" od pierwszego „złego" punktu.

$\Leftarrow$ ~~zła~~ trasa z $(0,0)$ do $(n-1,n+1)$ musi przeciąć przekątną. Odbijając ją w pierwszym punkcie ponad przekątną otrzymujemy „złą" trasę z $(0,0)$ do (n,n)

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{(2n)!\cdot(n+1)}{n!\cdot n!\cdot(n+1)}-\frac{n(2n)!}{n(n-1)!(n+1)!}=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\left[n+1-n\right]=\boxed{\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}}=C_n$$

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

n-ta liczba Catalana

e

$) = 381$

nie może

WYKŁAD 6

Tożsamość Pascala

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

liczba k-el. podzbiorów n-el.

Prawa strona - liczba k-el podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$

I klasa - podzbiory zawierające $n+1$

$\{\dots, n+1\}$

$k-1$ do 1 do n $\binom{n}{k-1}$

II klasa - podzbiory niezawierające $n+1$

$\{\dots\}$

k el. od 1 do n $\binom{n}{k}$

$I \cup II$ - szukane podzbiory $\overset{Z.D.}{\Rightarrow} |I| + |II| = \binom{n+1}{k}$

$I \cap II = \emptyset$

Lewa strona

Tożsamości kombinatoryczne: Równości wynikające z różnego (sposobu) przeliczenia tego samego zbioru lub z równoliczności różnych zbiorów pomiędzy którymi istnieje bijekcja

Tożsamość Newtona

$P(\{1,\dots,n\})$ - podzbiory zbioru $\{1,\dots,n\}$

$|P(\{1,\dots,n\})| = 2^n$

Rozbijemy P na klasy w zależności od liczby elementów zbioru

$A_0 = \{\emptyset\}$

A_1 = podzbiory 1-elementowe $\{1\},\{2\},\dots,\{n\}$

A_2 = podzbiory 2-el. $\{1,2\},\{1,3\},\dots$

A_n — || — $\{1,2,\dots,n\}$

$|A_0| = 1 = \binom{n}{0}$

$|A_1| = n = \binom{n}{1}$

$|A_2| = \binom{n}{2}$

2 Z.D. $|A_0|+|A_1|+\dots+|A_n| = |P|$

$$\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n} = 2^n\right]$$

Inne dowody: indukcyjny.

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ | $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

dla $a=1$, $b=1$: $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

$(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ...

$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\dots$

Mamy klasę w ...

Liczba delegacji ...

Podzielmy możliwe ... od liczby dziew...

A_0 - zero dziew...

A_k — || — $\binom{n}{k}$ ...

Z ...

$(1+x)^n(1+x)^n = ($ ...

~~$(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+$~~ ...

$(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+$ ...

$\dots + x^n(\binom{n}{0}\binom{n}{n}+$ ...

na 3: niedziel. ...
3+: 3 tożsamości
4: dowód Pascala

od liczby

$\dots, \{n\}$

$+2ab+b^2)$

$(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$ - wzór Cauchy'ego

Mamy klasę w której jest n-dziewcząt i n chłopców

Liczba delegacji n-elementowych $\binom{2n}{n}$

Podzielmy możliwe delegacje ~~na~~ w zależności od liczby dziewczyn

A_0 - zero dziewcząt $|A_0| = 1$ ...

A_k -||- $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ ZD $= \binom{2n}{n}$

Z.M.N.

$(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n} = \dots + \binom{2n}{n} x^n + \dots$

$\cancel{\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots\right)\left(-\,+\,-\right)}$

$\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots\right)\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n\right) =$

$\dots + x^n\left(\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}\right) + x^{n+1}() + \dots$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

na 3: wiedzieć czym są tożsamości komb. i Pascala

3+: 3 tożsamości

4: dowód Pascala

n - osób   na ile sposobów wybrać delegację

Pd   Liczba delegacji z kierownikiem

Równania rekurencyjne: Wyznaczamy element a_n ciągu odwołując się do znajomości poprzednich wyrazów

C.F.

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $f_0 = f_1 = 1$

$f_2 = f_1 + f_0 = 2$

$f_3 = f_2 + f_1 = 3$

$f_4 = f_3 + f_2 = 5$ ...

Problem: Na ile obszarów dzieli płaszczyznę n prostych w położeniu ogólnym:
(żadne 2 nie są równoległe, żadne 3 nie przecinają się w jednym punkcie)

a_n - liczba obszarów

$a_1 = 2$

$a_2 = 4$

$a_3 = 7$

$a_4 = 11$

Jak a_{n+1}

$n+1$ pro pr

n punktach

każda częś

$a_{n+1} =$

$a_4 = a_3$

$a_5 = a_4$

$a_n = n +$

$n + ($

$n + (n$

$a_{n,k}$

$a_{n,k-1}$

$a_{n,0} = a$

ment

poprzednich

ie

ają się

Jak a_{n+1} zależy od poprzednich

n+1 prosta przecina się z poprzednimi po n punktach i otrzymujemy podział na n+1 części

każda część dzieli na 2 nowe

$$a_{n+1} = a_n + (n+1)$$

$$a_4 = a_3 + 4 = 11$$

$$a_5 = a_4 + 5 = 16 \dots$$

$$a_n = n + a_{n-1} = n + (n-1) + a_{n-2} =$$

$$n + (n-1) + (n-2) + a_{n-3} = \dots$$

wzrost w zależności od n $O(n^2)$

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + a_1 = n + \dots + 2 + 1 + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

wykładnik o indeksie niestandardowym

$a_{n,k}$ np. $\binom{n}{k}$

$$a_{n,k-1} + a_{n,k} = a_{n+1,k}$$

$$a_{n,0} = a_{n,n} = 1$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

D_m - nieporządki n-el. (inna komb. niż pocz.) miejscami

Fakt: $D_m = (m-1)(D_{m-1} + D_{m-2})$

$D_1 = 0 \quad D_2 = 1 \quad D_3 = 2 = (3-1)(1+0) = 2 \cdot 1 = 2$

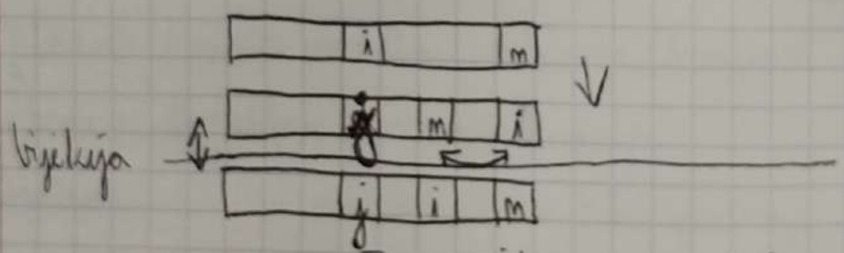
Podzielmy D_m na 2 klasy

I Klasa: m zamienia się z liczbą i miejscami

$(D_{m-2})(m-1)$

nieporządki pozostałych elem. — wybór i

II Klasa: $m \to i \quad i \to$ inny element $(j) \neq m$



m przeszło na siebie a pozostałe wyrazy tworzą nieporządek

$(D_{m-1}) \cdot (m-1)$

możliwych i

$D_m = |I| + |II| = D_{m-2}(m-1) + D_{m-1}(m-1)$

$B_j = \frac{D_j}{j!}$

$m! B_m =$

$m B$

$m(B_m - B$

$m A_m = -$

$B_1 = 0$

$B_m = A_m$

$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!}$

$D_m =$

$B_j = \frac{D_j}{j!} \qquad D_j = B_j \cdot j!$

$$m!\, B_m = \underbrace{(m-2)!\,(m-1)}_{(m-1)!} \cdot B_{m-2} + (m-1)\,(m-1)! \cdot B_{m-1} \ / : (m-1)!$$

$$m\, B_m = B_{m-2} + (m-1)\, B_{m-1}$$

$$m\,(B_m - B_{m-1}) = -\,(B_{m-1} - B_{m-2})$$

$$m\, A_m = -A_{m-1} \qquad A_m = \frac{1}{m} \cdot A_{m-1} =$$

$$-\frac{1}{m} \cdot \left(-\frac{1}{m-1}\right) A_{m-2} = \ldots = (-1)^m \frac{1}{m!}$$

$$B_1 = 0 \qquad B_2 = \frac{1}{2} \qquad A_2 = B_2 - B_1 = \frac{1}{2}$$

$$B_m = A_m + B_{m-1} = \frac{(-1)^m}{m!} + A_{m-1} + B_{m-2} = \ldots =$$

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$D_m = m! \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!}$$

03.04.2023

Rekurencje liniowe jednorodne o stałych współczynnikach

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r}$ (liniowa bo kolejne wyrazy występują w pierwszych potęgach)

$f(x) = ax + \cancel{b}$ ← w jednorodnych nie ma b

$c_1, c_2, \ldots, c_r$ - ustalone liczby, stałe

$a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ - muszą być znane (dane początkowe)

Rekurencje głębokości r - musimy znać r wyrazów poprzedzających

$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$

$c_1 = 2,\ c_2 = 3$

$a_0 = 1$

$a_1 = -2$

$a_2 = 2\cdot(-2) + 3\cdot 1 = -1$

$\vdots$

Zad. (przykładowe na kolokwium)

$r=1$, $a_n = c_1 a_{n-1}$, a_0 - dane

$a_1 = c_1 \cdot a_0$

$a_2 = c_1 \cdot c_1 \cdot a_0 = c_1^2 \cdot a_0$

$a_3 = c_1^3 a_0$

$\vdots$

$a_n = c_1^n a_0$ - ciąg geometryczny $\boxed{\frac{a_n}{a_{n-1}} = q}$

I) Szukamy rozwiązania rekurencji w postaci $a_n = \lambda^n$ λ - do wyznaczenia

$\lambda^n = c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \ldots + c_r \lambda^{n-r} \quad / : \lambda^{n-r}$

$\boxed{\lambda^r = c_1 \lambda^{r-1} + c_2 \lambda^{r-2} + \ldots + c_r}$ równanie charakterystyczne rekurencji

$w(\lambda) = \lambda^r - c_1 \lambda^{r-1} + \ldots - c_r$ - wielomian charakterystyczny

$w(\lambda) = 0$

Pr. 1

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4$

$\lambda_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \qquad \lambda_2 = \frac{2+4}{2} = 3$

Dwa rozwiązania rekurencji $a_n' = 3^n \quad a_n'' = (-1)^n$

Podstawowe twierdzenie algebry:

Wielomian stopnia r o współczynnikach zespolonych ma dokładnie r pierwiastków liczonych z krotnościami.

Jeśli wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego są różne to otrzymujemy r rozwiązań $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_r^n$. - rozw. podstawowe

Wniosek: $\alpha_1 3^n + \alpha_2 (-1)^n$ - też jest rozwiązaniem rekurencji (z Pr. 1)

Twierdzenie:

Dowolna kombinacja liniowa $\alpha_1 a_n' + \alpha_2 a_n''$ dwóch rozwiązań a_n', a_n'' rekurencji liniowej jednorodnej jest rozwiązaniem tej rekurencji.

Dowód:
$$a_n' = c_1 a_{n-1}' + \dots + c_r a_{n-r}' \quad | \cdot \alpha_1$$
$$a_n'' = c_1 a_{n-1}'' + \dots + c_r a_{n-r}'' \quad | \cdot \alpha_2$$
$$\alpha_1 a_n' + \alpha_2 a_n'' = \alpha_1 c_1 a_{n-1}' + \alpha_2 c_1 a_{n-1}'' + \dots + \alpha_1 c_r a_{n-r}' + \alpha_2 c_r a_{n-r}''$$
$$\underbrace{\alpha_1 a_n' + \alpha_2 a_n''}_{n\text{-ty wyraz}} = c_1 \underbrace{(\alpha_1 a_{n-1}' + \alpha_2 a_{n-1}'')}_{(n-1)\text{-wyraz}} + \dots + c_r(\alpha_1 a_{n-r}' + \alpha_2 a_{n-r}'')$$

Wartości α_1, α_2 wybieramy tak, żeby były spełnione dane początkowe

$n=0 \quad a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 1$

$n=1 \quad a_1 = 3\alpha_1 - \alpha_2 = -2$ (z Pr. 1)

$4\alpha_1 = -1 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{4}$

$\alpha_2 = \frac{5}{4}$

$a_n = -\frac{1}{4} \cdot 3^n + \frac{5}{4} \cdot (-1)^n$

$\alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$ - rozwiązanie rekurencji

$1(\ -\,\text{"}\,-\ ) + \alpha_3 \lambda_3^n \quad -\,\text{"}\,-$

II) Z r rozwiązań podstawowych tworzymy rozwiązanie ogólne rekurencji

$$\alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n + \ldots + \alpha_r \lambda_r^n$$

a wartości parametrów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ustalamy z danych podstawowych

np $r=3$

$$a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$
$$a_1 = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3$$
$$a_2 = \alpha_1 \lambda_1^2 + \alpha_2 \lambda_2^2 + \alpha_3 \lambda_3^2$$

a_0, a_1, a_2 - dane
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - szukane

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$ - równanie macierzowe

Wyznacznik macierzy rozkładu równań

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)$$

iloczyn różnic

Równanie $\neq 0$ dla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ różnych

wyznacznik Vandermonde'a

Uwaga!
Jeśli λ_k ma krotność d_k to odpowiada mu d_k rozwiązań podstawowych

$$\lambda_k^n, n \cdot \lambda_k^n, n^2 \lambda_k^n, \ldots, n^{d_k - 1} \lambda_k^n$$

Prz. 2

$$a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2} \qquad a_0 = 1,\ a_1 = -9$$

I $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$

$\Delta = 36 - 4 \cdot 9 = 0 \qquad \lambda_1 = \frac{-6}{2} = -3$

II rozwiązanie podstawowe: $(-3)^n, n \cdot (-3)^n$

spr. $a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = n \cdot (-3)^n + 6(n-1)(-3)^{n-1} + 9 \cdot (n-2) \cdot (-3)^{n-2} =$

$= (-3)^{n-2}[n \cdot 9 + 6(n-1) \cdot (-3) + 9(n-2)] = (-3)^{n-2}[9n - 18n + 18 + 9n - 18] = 0$

$a_n = \alpha_1(-3)^n + \alpha_2 \cdot n(-3^n)$

$n=0 \quad \alpha_1 = 1$

$n=1 \quad -3\alpha_1 - 3\alpha_2 = -9 \Leftrightarrow -3-3\alpha_2 = -9 \Leftrightarrow \alpha_2 = 2$

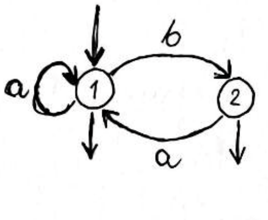
$a_n = (1+2n)\cdot(-3)^n$

<u>Prz. 3</u>

Automat skończony akceptujący język nad alfabetem $\{a, b\}$, gdzie w słowie nie może być liter b obok siebie.

ε, a, b, aa, ab, ba, aaa, aab, aba, baa, bab, ...

słowo puste



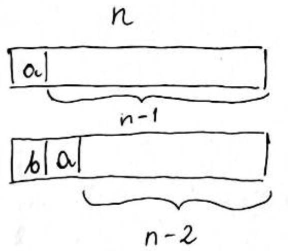
c_n - liczba słów długości n

$c_0 = 1$

$c_1 = 2$

$c_2 = 3$

$c_3 = 5$



c_{n-1}

$\xrightarrow{z\ Z.D.} c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ — rekurencja Fibonacciego

c_{n-2} możliwych słów

$c_4 = 5+3 = 8$

Ciąg Fibbonacciego

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = F_1 = 1$

<u>Fakt</u>: $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^{n-1}, \quad n \geq 1$

Dowód indukcyjny:

$n=1: \; L = F_2 \cdot F_0 - F_1^2 = 1 \qquad P = (-1)^0 = 1$

$n+1: \; L_{n+1} = F_{n+2}\cdot F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1}+F_n)\cdot F_n - (F_n+F_{n-1})^2 = F_{n+1}\cdot F_n + F_n^2 - F_{n+1}^2 =$

$= F_{n+1}(\underbrace{F_n - F_{n+1}}_{F_n + F_{n-1}}) + F_n^2 = F_{n+1}\cdot F_{n-1} + F_n^2 = -L_n \overset{z\ Z.I.}{=} -(-1)^{n-1} = (-1)^n = P_{n+1}$

$F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n = ?\ F_{n+2} - 1$

Rekurencje liniowe niejednorodne o stałych współczynnikach

$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_r a_{n-r} + f(n)$

składnik niejednorodny

$a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + 3^n \qquad a_0 = 0 \quad a_1 = 1$

Załóżmy, że znamy r niezależnych rozwiązań podstawowych $a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(r)}$ rekurencji jednorodnej

$a_n^0 = \alpha_1 a_n^{(1)} + \ldots + \alpha_r a_n^{(r)}$ jest rozwiązaniem części jednorodnej

$\alpha_1, \ldots, \alpha_r \to$ parametry rozwiązania ogólnego części jednorodnej rekurencji

$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$

$\Delta = 49 - 40 = 9 \quad \sqrt{\Delta} = 3$

$\lambda_1 = \frac{7-3}{2} = 2$

$\lambda_2 = \frac{7+3}{2} = 5$

$a_n^0 = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 5^n$ rozwiązanie ogólne części jednorodnej

Twierdzenie. Rozwiązanie ogólne rekurencji niejednorodnej jest sumą rozwiązania ogólnego rekurencji jednorodnej i rozwiązania szczególnego rekurencji niejednorodnej.

$a_n = a_n^0 + a_n^{sz}$

$\to$ szukamy rozwiązania szczególnego rek. niejednorodnej.

a_n^s – dobieramy je w zależności od postaci $f(n)$

I. Jeśli $f(n) = c \cdot \beta^n$ oraz β nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego części jednorodnej rekurencji to a_n^s szukamy w postaci $\alpha \cdot \beta^n$, $\alpha = const$

$a_n^s = \alpha \cdot 3^n$

$\alpha \cdot 3^n = 7\alpha \cdot 3^{n-1} - 10\alpha \cdot 3^{n-2} + 3^n \quad / : 3^{n-2}$

$9\alpha = 21\alpha - 10\alpha + 9$

$-2\alpha = 9$

$\alpha = -4{,}5$

$a_n^s = -\frac{9}{2} \cdot 3^n$

$a_n = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot 5^n - \frac{9}{2} \cdot 3^n$

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{9}{2} \\ 1 = 2\alpha_1 + 5\alpha_2 - \frac{27}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{9}{2} = \alpha_1 + \alpha_2 \quad / \cdot (-2) \\ 14{,}5 = 2\alpha_1 + 5\alpha_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 = -2\alpha_1 - 2\alpha_2 \\ 14{,}5 = 2\alpha_1 + 5\alpha_2 \end{cases}$$

$5{,}5 = 3\alpha_2 \quad /:3$

$\alpha_2 = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

$\alpha_1 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

$a_n = \frac{8}{3} 2^n + \frac{11}{6} \cdot 5^n - \frac{9}{2} \cdot 3^n$

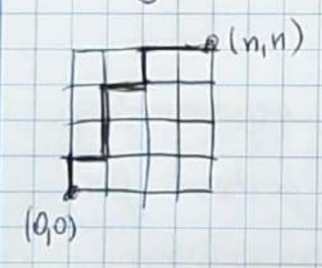
Dowód:

$a_n^0 = c_1 a_{n-1}^0 + \dots + c_1 a_{n-r}^0$

$a_n^s = c_1 a_{n-1}^s + \dots + c_1 a_{n-r}^s + f(n)$

~~a_n^s~~ Nie wiem co on pisze

Liczby Catalana



liczba takich tras to
$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Twierdzenie. Liczby Catalana spełniają rekurencję

$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \dots + C_n C_0 \qquad C_0 = 1$

Rekurencja Catalana jest rekurencją o nieokreślonej głębokości.

$$c_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{\cancel{6!}\, 5\cdot 6}{\cancel{4\cdot 3!}\cdot 3!} = \frac{5\cdot 6}{6} = 5$$

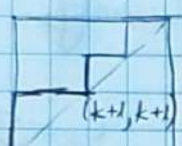
$$c_1 = c_0 \cdot c_0 = 1$$

$$c_2 = c_1 c_0 + c_0 c_1 = 2$$

$$c_3 = c_0 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_1 + c_2 \cdot c_0 = 5$$

Dowód: Trasy z $(0,0)$ do (n,n) które nie dotykają przekątnej jest C_{n-1}

Rozbijmy trasy z $(0,0)$ do $(n+1, n+1)$ na podzbiory w zależności od pierwszego „dotknięcia" przekątnej



$k = 0, \dots, n$

Takich tras jest $\underset{\uparrow}{C_k} \cdot C_{n-k}$

bez dotknięcia

Z zasady dodawania wszystkich tras — sumujemy liczbę tras w każdym podzbiorze $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$

Problem Catalana rozstawienia nawiasów

$(a\ b)(c\ d)$, $(((a\ b)\ c)d)$, $(a(b\ c))d$,

$a((b\ c)\ d)$, $a\,(b\,(c\ d))$

$(ab)c$, $a(bc)$

$a_0, a_1 \dots a_n$

<u>Fakt</u> Liczba rozstawień nawiasów w iloczynie $a_1 \dots a_n$ spełnia rekurencję Catalana.

Dowód:

Podzielmy rozstawienie o iloczynie $a_0 \dots a_{n+1}$ na rozłączne parami podzbiory w zależności od rozstawienia zewnętrznych nawiasów

$$\underbrace{a_0 \dots a_k}_{\substack{C_k \\ \text{rozstawień}}} \mid \underbrace{a_{k+1} \dots a_{n+1}}_{\substack{C_{n-k} \\ \text{rozstawień}}}$$

$c_k c_{n-k}$ rozstawień w każdym podziale.

Z zasady dodawania $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot c_{n-k}$

Wniosek: Liczba rozstawień nawiasów w iloczynie $a_0, \dots, a_n$ wynosi $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Dane liczby $1, \dots, 2n$ ile mamy sposobów rozmieszczenia ich w dwuszeregu $\underbrace{\square\square\cdots\square}_{n}$ 2 tak żeby w każdym szeregu liczby rosły, a liczba w drugim szeregu była większa niż liczba w pierwszym szeregu w tej samej kolumnie

1	2	3
4	5	6

1	2	4
3	5	6

1	3	5
2	4	6

1	3	4
2	5	6

1	2	5
3	4	6

$C_3 = 5$

Czy zatem ustawień w dwuszeregu, równy wzrost liczbe n Catalana?

WYKŁAD 8.5.23

Funkcje tworzące

Dany ciąg $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_n)_{n \in N_0}$

Funkcja tworząca $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Przykład 1

Ciąg stały, $(a_n)_{n \in N_0} = (1, 1, 1, \ldots)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

szereg geometryczny

uogólnienie $(1, a, a^2, a^3, \ldots)$ $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a^n x^n}_{(ax)^n} = \frac{1}{1-ax}, \quad |ax| < 1$

Przykład 2

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$(a_k)_{k \in \{0, \ldots, m\}}, \quad a_k = \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)}{k!}$$

ma sens dla $k > m$ bo w iloczynie $m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)$ będziemy mieć czynnik 0.

$$\left(\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \ldots, \binom{m}{m}, 0, 0, \ldots \right)$$

$$\binom{n}{k} = C_n^k$$

$(1+x)^n$ - funkcja tworząca ciągu opisującego kombinacje bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego

_ _ _ _ _ _ _

Twierdzenie

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+k-1}{k}}_{\overline{C}_n^k} x^k$$ → f. tworząca kombinacji z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego.

_ _ _ _ _ _

Dowód

Indukcja ze względu na n

$n=1$

$$L = \frac{1}{1-x}, \quad P = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$ szereg geometryczny

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$ - szereg potęgowy - term. an. mat.

$|x| < r$ ← promień zbieżności szeregu

Lemat: W obszarze zbieżności możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz po wyrazie.

$$f'(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{l=1}^{\infty} l a_l x^{l-1}$$

Z.I. $L_n = P_n$

$$\left[\frac{1}{(1-x)^n}\right]' = \left[(1-x)^{-n}\right]' = -n(1-x)^{-n-1}(-1)$$

$$L_{n+1} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{(1-x)^n}\right]' \overset{Z.1}{=} \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k\right]' =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\cdot k\cdot x^{k-1} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+1}{n}\binom{n+l}{l+1}x^l$$

$$\boxed{\begin{matrix} k-1=l \\ k=l+1\end{matrix}}$$

$$\frac{l+1}{n}\cdot\frac{(n+l)!}{(l+1)!\,(n-1)!} = \frac{(n+l)!}{l!\,n!} = \binom{n+l}{l} = \binom{n+1+l-1}{l} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\binom{n+1+l-1}{l}x^l$$

$$P_{n+1} = \sum_{l=0}^{\infty}\binom{n+1+l-1}{l}x^l$$

□ koniec

— — — — — —

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}x^k$$

$$\binom{n}{k}$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$$

$a \in R$

— — — — — —

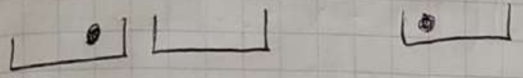
$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdot\ldots\cdot(-n-k+1)}{k!}(-x)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}{k!}x^k$$

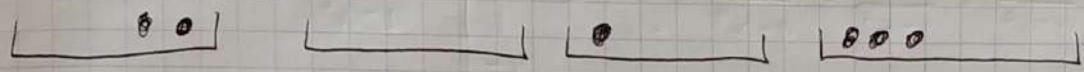
$$\frac{(n+k-1)\cdot\ldots\cdot n\cdot(n-1)!}{k!\,(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

$$\overbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}^{n} = \dots + \underline{\quad}\, x^k + \dots$$

liczba rozmieszczeń
k-kul w n szufladkach,
bez powtórzeń



$$(1+x+\underline{x^2}+\dots)(\underline{1}+x+x^2+\dots)(1+\underline{x}+x^2+\dots)(1+x+x^2+\underline{x^3}+\dots) =$$



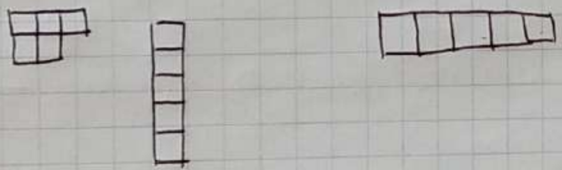
$$= \quad + \underline{\quad}\, x^6 + \dots$$

liczba rozkładów 6 kul do 4 szuflad,
z powtórzeniami

Podziały (partycje) liczb

podział na składniki (większe skł. na początku)

5 $\quad 3+2,\ 1+1+1+1+1,\ 5$



→ diagram Ferrersa

$P(n)$ - ilość partycji liczby n, $n \in N$

$P(1) = 1$

$P(2) = 2$, $\quad 2$ lub $1+1$

$P(3) = 3$ $\quad 3,\ 2+1,\ 1+1+1$

$P(4) = 5$

$\Pi(x) = p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} p(k) x^k$

f. tworząca partycji

$\boxed{2+1+1}$

$(1 + x + \underline{x^2} + x^3 + \ldots)(1 + \underline{x^2} + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + \ldots) \ldots$

jedynki — $\frac{1}{1-x}$, dwójki — $\frac{1}{1-x^2}$, trójki — $\frac{1}{1-x^3}$

$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^4} \cdot \ldots = \prod_{l=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^l}$

Partycje z różnymi składnikami

$P_d(n)$

$P_d(4)$ 2 $(4, 3+1)$

$\Pi_d(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_d(k) x^k = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) \ldots =$

$= \prod_{l=1}^{\infty} (1+x)^2$

$\ldots + \lfloor 2 \rfloor + x^4$

Partycja z nieparzystymi składnikami

$P_o(n)$

$P_o(4) = 2$

$\Pi_o(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_o(k) x^k = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \ldots =$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2i-1}}$$

— — — — —

$P_d(3) = 2 \qquad (3, 2+1)$

$P_o(3) = 2 \qquad (3, 1+1+1)$

$P_d(5) = 3 \qquad 5, 4+1, 3+2$

$P_o(5) = 3 \qquad 5, 3+1+1, 1+1+1+1+1$

— — — —

<u>~~Hipoteza~~</u> $\quad P_d(n) = P_o(n) \qquad \forall n \in N$

<u>Twierdzenie</u>

<u>Dowód:</u> Pokażemy, że $\Pi_d(x) = \Pi_o(x)$

$$\Pi_o(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^7} \cdot \ldots =$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1-x^2}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^4} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^6} \cdot \frac{1}{1-x^7} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{1-x}} \frac{\cancel{(1-x)}(1+x)}{1-x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{1-x^3}} \cdot \frac{\cancel{(1-x^2)}(1+x^2)}{\cancel{1-x^4}} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{\cancel{(1-x^3)}(1+x^3)}{1-x^6} \cdot \frac{1}{1-x^7} \ldots$$

$$= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) \cdot \ldots = \Pi_d(x)$$

Wykład

15.05.2023

Dany jest ciąg $(a_k)_{k\in N_0} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$

Funkcja tworząca $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

szereg formalny (nie interesuje nas zbieżność)

Dodawanie: $f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$

Mnożenie: $f(x) \cdot g(x) = \cancel{\sum_{k=0}^{\infty}} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots) =$

$= a_0 b_0 + x(a_0 b_1 + a_1 b_0) + x^2(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) +$

$+ x^3(a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) + \dots =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

Iloczyn Cauchy'ego szeregów

Różniczkowanie: $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

Całkowanie: $\int f(x)\,dx = C + \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \frac{x^{k+1}}{k+1}$

Przykład

$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \quad a_0 = 3 \quad a_1 = 4$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 3 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + 6a_{n-2}) x^n =$

$= 3 + 4x + x \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1}}_{\hat{n} = n-1} + 6x^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}}_{\tilde{n} = n-2} = (*)$

$= \cancel{\sum_{\hat{n}=0}} \quad \sum_{\hat{n}=1}^{\infty} a_{\hat{n}} x^{\hat{n}} =$

$\sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} a_{\tilde{n}} x^{\tilde{n}} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) = f(x)$

$= (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) = f(x) - a_0$

$(*) = 3 + 4x + x \cdot (f(x) - 3) + 6x^2 \cdot f(x) =$

$f(x) = 3 + 4x + x \cdot f(x) - 3x + 6x^2 \cdot f(x)$

$f(x) = 3 + x + x \cdot f(x) + 6x^2 \cdot f(x)$

$$f(x)\left[1-x-6x^2\right]=3+x$$

$$f(x)=\frac{3+x}{1-x-6x^2}=\frac{3+x}{(1-3x)(1+2x)}=\frac{2}{1-3x}+\frac{1}{1+2x}=2\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n=(*)$$

$$\frac{A}{1-3x}+\frac{B}{1+2x}=\frac{A(1+2x)+B(1-3x)}{(1-3x)(1+2x)}=\frac{A+2Ax+B-3Bx}{(1-3x)(1+2x)}$$

$$\begin{cases}A+B=3 \quad /\cdot(-2)\\ 2A-3B=1\end{cases}$$

$$\frac{1}{1-ax}=\sum_{k=0}^{\infty}a^k x^k$$

$$\begin{cases}-2A-2B=-6\\ 2A-3B=1\end{cases}$$

$$=\quad -5B=-5 \quad /:(-5)$$

$$B=1 \qquad A=2$$

$$(*)=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(2\cdot 3^n+(-2)^n\right)}x^n \qquad \text{stąd} \quad a_n=2\cdot 3^n+(-2)^n$$

Ciąg Catalana $c_0=1 \quad c_{n+1}=c_0\cdot c_n+c_1\cdot c_{n-1}+\ldots+c_n c_0=\sum_{k=0}^{n}c_k c_{n-k}$

$$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

$$C(x)\cdot C(x)=c_0 c_0+x(c_0c_1+c_1c_0)+x^2(c_0c_2+c_1c_1+c_2c_0)+x^3(c_0c_3+c_1c_2+c_2c_1+c_3c_0)$$

$$+\ldots=c_1+x\cdot c_2+x^2\cdot c_3+x^3\cdot c_4=\frac{C(x)-1}{x}$$

$$x\left[C(x)\right]^2-C(x)+1=0$$

$$a=x \quad b=-1 \quad c=1$$

$$\Delta=(-1)^2-4\cdot x\cdot 1=1-4x$$

$$C(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x} \qquad \text{Nie może być „+" bo daje wyrażenie } \left(\frac{2}{0}\right)$$

$$C(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$(1-4x)^{\frac12} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac12}{k}(-4x)^k = 1 + \frac{\frac12}{1!}(-4x) + \frac{\frac12(\frac12-1)}{2!}(-4x)^2 +$$

$$+ \frac{\frac12(\frac12-1)(\frac12-2)}{3!}\cdot(-4x)^3 + \dots + \frac{\frac12(\frac12-1)(\frac12-2)\cdot\ldots\cdot(\frac12-k+1)}{k!}(-4x)^k + \dots =$$

$$= 1 - \frac{2x}{1!} - \frac{4x^2}{2!} - \frac{3\cdot 2^3 x^3}{3!} - \dots - \frac{(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-3))\cdot 2^k x^k}{k!} + \dots$$

$$C(x) = \frac{\frac{2^1x^1}{1!} + \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{3\cdot2^3x^3}{3!} + \dots + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2k-3)}{k!}2^kx^k + \dots}{2x} =$$

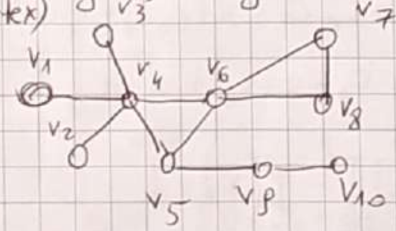
$$= \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3\cdot2^2x^2}{3!} + \dots + \underbrace{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-3)}{k!}2^{k-1}}_{c_{k-1}} x^{k-1} + \dots$$

$$c_k = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{(k+1)!}\cdot 2^k \cdot \frac{k!}{k!} =$$

$$= \frac{(2k)!}{(k+1)!\,k!} = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$$

Teoria Grafów

Definicja: Grafem prostym nazywamy parę $G=(V,E)$, gdzie V jest zbiorem (skończonym), którego elementy nazywamy wierzchołkami (vertex), E jest zbiorem par wierzchołków, którego elementy nazywamy krawędziami (edge)



$V=\{v_1, v_2, \dots, v_{10}\}$ $\quad E=\{\{v_1,v_4\},\{v_2,v_4\},\{v_3,v_4\},$
$\{v_4,v_6\},\{v_4,v_5\},\{v_5,v_6\},\{v_6,v_8\},\{v_6,v_7\},$
$\{v_7,v_8\},\{v_5,v_9\},\{v_9,v_{10}\}\}$

Kolejność elementów w parze jest nieistotna, pary nie składają się dwóch takich samych wierzchołków, wszystkie pary nie powtarzają się.

Jeżeli kolejność jest istotna → para uporządkowana → graf skierowany

Jeżeli para składa się z takich samych wierzchołków → pętla

Jeżeli para występuje wielokrotnie → multizbiór - krawędzie wielokrotne → graf ogólny

Stopień wierzchołka v ($\deg v$) - liczba krawędzi wychodzących z wierzchołka

$\deg v = 5$

Twierdzenie: Jeżeli $G = (V, E)$ graf ogólny to $\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$

Dowód: Ustalmy V i przeprowadzimy indukcję ze względu na liczbę krawędzi. Jeżeli nie ma krawędzi to ~~stopień~~

$\deg v = 0 \quad \forall_{v \in V}$

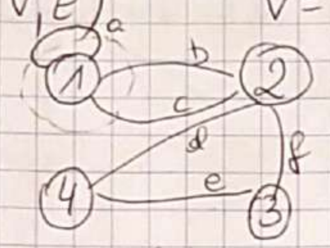
$L = \sum 0 \quad P = 2 \cdot 0$

Jeśli wzór jest słuszny dla n krawędzi

$\sum_{v \in V} \deg v = 2n$ i dołączymy krawędź v_1 — v_2 to deg każdego z tych wierzchołków wzrośnie o 1 i sumę wzrośnie o 2, a jeżeli dołączymy pętlę przy v_1: $\deg v_1 \to \deg v_1 + 2$

22.05.2023

$G(V,E)$ $V=\{1,2,3,4\}$, $E=\{11, 12, 12, 23, 24, 34\}$



$$D(G)=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}=\operatorname{diag}(4,4,2,2)$$ → macierz stopni wierzchołków

$$\underset{\overset{\|}{12}}{\sum_{v\in V}\deg v} = \underset{\overset{\|}{2\cdot 6}}{2|E|}$$

Macierz sąsiedztwa

$A(G)$ $|V|\times|V|$ $A(G)_{ij}$ = liczba krawędzi łączących wierzchołek i-ty z j-tym

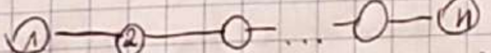
↑
adjacency

$$A(G)=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$

Macierz incydencji $I(G)$ $|V|$ wierszy, $|E|$ krawędzi

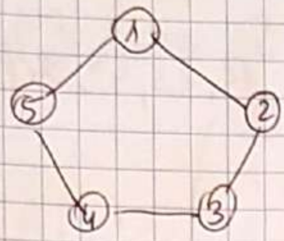
$$I(G)_{ij}=\begin{cases}1 & \text{– wierzchołek } i \text{ jest incydentny z krawędzią } j\\ 0 & \text{– nie jest}\end{cases}$$

$$I(G)=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

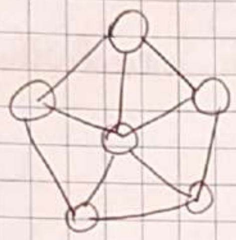


I_n odcinek o n wierzchołkach

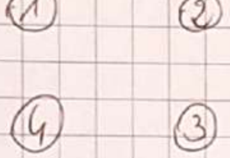
$$A(I_4)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$



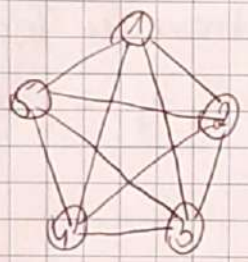
C_5 - cykl o 5 wierzchołkach



W_6 - koło o 6 wierzchołkach



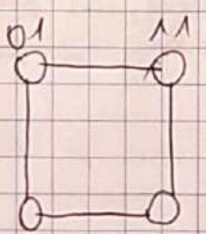
N_4 - graf zerowy



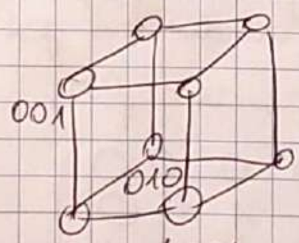
K_5 - graf pełny o 5 wierzchołkach (klika)

Q_N - kostka N-wymiarowa

Q_2

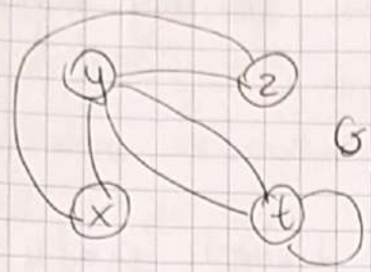


Q_3

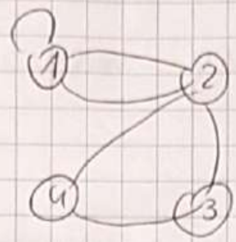


$V(Q_N)$ - N-elementowe ciągi binarne

$E(Q_N) \ni$ pary ciągów różniących się dokładnie na jednej współrzędnej (odległość Hamminga = 1)



G_2



G_1

Def: Mówimy, że grafy $G_1(V_1, E_1)$ ~~o zbiorze wierzchołków~~ jest <u>izomorficzny</u> z grafem $G_2(V_2, E_2)$ jeśli istnieje odwzorowanie bijektywne $f: V_1 \to V_2$, takie że $\forall_{u,v \in V_1}$ liczba krawędzi łączących u i v jest równa liczbie krawędzi łączących odpowiadające im wierzchołki $f(u)$ i $f(v)$

$f(1) = t \qquad f(3) = x$

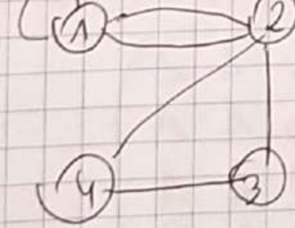
$f(2) = y \qquad f(4) = z$

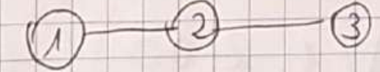
$G_1 \sim G_2$ jeśli G_1 jest izomorficzny z G_2

- zwrotne
- symetryczne
- przechodnie

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f_{12}"] \arrow[rr, bend right, "f_{13} = f_{23} \circ f_{12}"'] & G_2 \arrow[r, "f_{23}"] & G_3 \end{tikzcd}$$

Klasy równoważności relacji bycia izomorficznym $\leftrightarrow$ grafy nieoznaczone



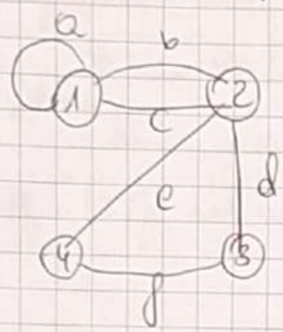


Def: Mówimy, że $G_1(V_1, E_1) \subset G_2(V_2, E_2)$ jeśli $V_1 \subset V_2$, $E_1 \subset E_2$

W przypadku grafów nieoznakowanych musimy najpierw odpowiednio oznakować wierzchołki.

Trasy w grafie

Def: Trasą w grafie nazywamy ciąg krawędzi grafu $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_k)$ takich, że początek następnej krawędzi jest końcem poprzedniej $e_{i+1} = \{v_i, v_{i+1}\}$, $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$



$(c, b, a, b, e) = (\{1,2\}, \{2,1\}, \{1,1\}, \{1,2\}, \{2,4\})$

$\{v_0, v_1\} - e_1$

v_0 – wierzchołek początkowy

v_k – wierzchołek końcowy, k – długość trasy

$v_0 = v_k$ – trasa zamknięta

trasa łączy v_0 z v_k

Def: Mówimy, że graf $G(V, E)$ jest spójny, jeśli $\forall_{u,v \in V}$ istnieje trasa w G łącząca u i v

Twierdzenie: Liczba tras w grafie G łączących ~~v_i z v_j~~ $v_i, v_j \in V$ długości k jest równe $[A(G)^k]_{ij}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$k=4$ $i=1$ $j=3$ $10+2+4+2=18$

np. (a, a, c, d)

Dowód:

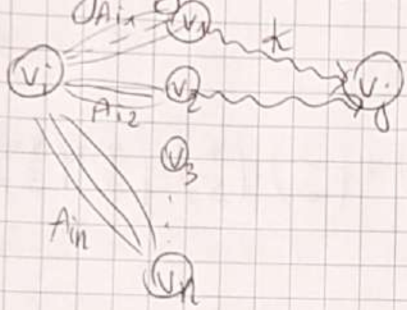
$A, B, \quad (AB)_{ij} = \sum_l A_{il} B_{lj}$

Indukcja ze względu na k

$k=1$ - definicja macierzy sąsiedztwa, bo trasy długości 1 to krawędzie

Z.I. tw. jest równe dla $k \geq 1$

Pokażemy słuszność dla $k+1$



Liczba tras z pierwszym krokiem do v_1

$A_{i1} \cdot$ (liczba tras długości k z v_1 do v_j)

$\Updownarrow$ Z.I.

$\boxed{A(G)^k}_{1j}$

$v_i \to v_2 \to \ldots \to v_j \qquad A_{i2} \cdot [A(G)^k]_{2j}$

Zbiór tras długości $k+1$ z v_i do v_j dzielimy na rozłączne parami podzbiory w zależności od pierwszego odwiedzonego wierzchołka.

Z zasady dodawania liczba wszystkich tras długości $k+1$ z v_i do v_j jest równe

$$A(G)_{i1} \cdot [A(G)^k]_{1j} + A(G)_{i2}[A(G)^k]_{2j} + \ldots + A(G)_{in}[A(G)^k]_{nj} =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} A_{il} (A^k)_{lj} = (A^{k+1})_{ij}$$