Rachunek zdań

Nieformalnie *zdanie* jest dowolne stwierdzenie, które można interpretować jako sensowne stwierdzenie odnoszące się do rzeczywistości.

Dla nas *zdaniem* będzie dowolne stwierdzenie, które jest albo prawdziwe albo fałszywe i które nie może być jednocześnie prawdziwe i fałszywe.

Rachunek zdań

Zdanie nazywamy prostym, jeżeli nie jest zbudowane z innych zdań.

Zatem *zdanie* jest to stwierdzenie, któremu można przypisać wartość logiczną prawda (1) lub fałsz (0), lecz nie obie wartości jednocześnie.

Rachunek zdań

Syntaktyka i semantyka rachunku zdań

W rachunku zdań, dla zdań prostych będziemy zazwyczaj używać alfabetu: $K = \{A, B, C, \ldots, A_1, x_1, y, \ldots\}$ oraz następujących spójników logicznych przeznaczonych do budowy zdań złożonych:
$\{\neg$ ("nie", negacja, $\neg$), $\vee$ ("lub", alternatywa, dysjunkcja), $\wedge$ ("i", koniunkcja), $\rightarrow$ (implikacja), $\leftrightarrow$ ("wtedy i tylko wtedy", równoważność)$\}$.

Proste zdania $A, B, \ldots \in K$ nazywamy zdaniami *atomarnymi*.

Rachunek zdań

Przykład.

1. Poniższe stwierdzenia są zdaniami:

a) $2 + 2 = 4$,

b) $2 + 3 = 7$.

c) Jeżeli zbiór A ma n elementów, to $B(A)$ ma 2^n elementów.

d) Juliusz Cezar był prezydentem Stanów Zjednoczonych.

Rachunek zdań

2. Następujące sformułowania nie są zdaniami:

a) To twoje czy moje miejsce ?
b) Dlaczego indukcja jest ważna ?
c) $x - y = y - x$.

Wykorzystując pojęcie indukcji, podamy definicje syntaktyki rachunku zdań, która pozwala spośród wszystkich słów w alfabecie K wyróżnić słowa, które będziemy nazywać *prawidłowo zbudowanymi zdaniami*.

Rachunek zdań

Syntaktyka

Definicja (Definicja syntaktyki). Prawidłowo zbudowane zdanie (PZZ) jest:

1. 0, 1 i zdanie atomarne,
2. jeżeli A jest PZZ, to $\neg A$ też jest PZZ,
3. jeżeli A i B są PZZ, to $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ też są PZZ,
4. pozostałe wyrażenia, tj. nie spełniajce warunków 1-3, nie są PZZ.

Rachunek zdań

Semantyka

Definicja. Przypisywanie atomom A_1, A_2, …, A_n PZZ wartości logicznych $h(A_i)$ nazywamy interpretacją PZZ.

Jeżeli A jest PZZ, to $h(A)$ oznacza jego wartość logiczną. Zatem, jeśli F jest zdaniem złożonym, to jeżeli $F = \neg A$, to

$$h(F) = h(\neg A) = \neg h(A),$$

a jeżeli $F = B \circ C$, to

$$h(F) = h(B \circ C) = h(B) \circ h(C), \text{ dla } \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}.$$

Rachunek zdań

Stąd wynika, że wartość logiczna zdań złożonych całkowicie zależy od wartości logicznych zdań atomarnych pod warunkiem, że zdefiniowane są wartości logicznie dla zdań atomarnych i spójników logicznych.

Semantyka rachunku zdań konieczne jest, aby opisać, jak dokonać obliczenia, które określa zdanie logiczne, i tak, że obliczenia te mog wykonać komputer.

Rachunek zdań

Definicja (Definicja semantyki). Jeżeli A i B są PZZ i h jest interpretają PZZ, to:

a) wartość $h(\neg A) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(A) = 0$, i $h(\neg A) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(A) = 1$;

b) wartość $h(A \vee B) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(A) = 1$, lub $h(B) = 1$;

c) wartość $h(A \wedge B) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(A) = 1$, i $h(B) = 1$;

d) wartość $h(A \rightarrow B) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(A) \leq h(B)$;

c) wartość $h(A \leftrightarrow B) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h(A) = h(B)$.

Rachunek zdań

Z definicji tej wynika, że jeżeli *A* i *B* są PZZ, to dla poniższych formuł mamy następujące tablice ich wartości logicznych:

A	$\neg A$	A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0
		0	1	1	0	1	0
		0	0	0	0	1	1

Rachunek zdań

Za pomocą tych tablic możemy zbudować tablicę wartości logicznych (macierz logiczna) zdania złożonego, zbudowanego ze zdań prostych A, B, C, . . . Tablica taka podaje wartości zdania złożonego w zależności od wartości logicznych zdań prostych A, B, C, . . .

Zdania A, B, C, . . . nazywamy zmiennymi zdaniowymi macierzy i zdania złożonego. Wartość logiczną zdania złożonego możemy obliczyć, wyznaczając kolejno wartości logiczne zdań prostych, z których jest ono zbudowane.

Rachunek zdań

Przykład. Zdanie $P = (A \wedge B) \vee \neg(A \rightarrow B)$ jest zbudowane z dwóch zdań prostych A i B. Możliwe są zatem tylko cztery kombinacje wartości logicznych dla A i B:

A	B	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$\neg(A \rightarrow B)$	$(A \wedge B) \vee \neg(A \rightarrow B)$
1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0

Rachunek zdań

Definicja. Mówimy, że zdanie A jest prawdziwe dla pewnej interpretacji h atomów wtedy i tylko wtedy, gdy $h(A) = 1$.

Jeżeli $h(A) = 0$, to mówimy, że zdanie A jest fałszywe w interpretacji h.

Definicja. Zdanie A nazywamy tautologią (sprzecznością), jeżeli jest ono zawsze prawdziwe (fałszywe) niezależnie od interpretacji h.

Rachunek zdań

Definicja. Jeżeli zdanie $A \rightarrow B$ jest tautologią, to mówimy, że ze zdania logicznego A wynika zdanie B, lub, że zdanie A implikuje zdanie B.

Jeżeli zdanie $A \leftrightarrow B$ jest tautologią, to mówimy, że zdania A i B są zdaniami logicznie równoważnymi.

Korzystając z tablicy wartości logicznych, zawsze możemy sprawdzić czy dane wyrażenie jest tautologią czy nie jest.

Rachunek zdań

Przykład. Czy formuła $((A \to B) \to B) \to B$ jest tautologią?

Zgodnie z tablicami wartości logicznych dla spójnika $\to$ otrzymujemy

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to B$	$((A \to B) \to B) \to B$
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	1

i jak widać z ostatniej kolumny, zdanie to nie jest tautologią, ponieważ dla interpretacji $h(A) = 1$ i $h(B) = 0$ jest ono fałszywe.

Rachunek zdań

1. Zdania A i $A \to B$ są prawdziwe. Pokazać, że zdanie B też jest zdaniem prawdziwym.

Dowód.

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0

Jeżeli zdanie B jest fałszywe, wówczas $A \to B$ jest fałszywe, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem B musi być prawdziwym.

Rachunek zdań

2. Czy zdanie $A \rightarrow A$ jest tautologia ?

Zgodnie z tablicą wartości logicznych dla spojnika $\rightarrow$ otrzymujemy

A	$A \rightarrow A$
1	1
0	1

Jest to więc tautologia.

Rachunek zdań

Za pomocą tablic wartości logicznych łatwo przekonać się, że dla spojników logicznych $\neg$, $\vee$, $\wedge$ prawdziwe są prawa przemiennoši:

$$A \wedge B = B \wedge A,\ A \vee B = B \vee A,$$

łączności:

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C,\ A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C,$$

rozdzielności:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C),\ A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$$

pochłaniania:

$$(A \wedge B) \vee A = A,\ (A \vee B) \wedge A = A,$$

de Morgana: $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B},\ \overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B},$

Rachunek zdań

Rzeczywiście, dla spójnika $\wedge$ mamy

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Stąd wynika, że $A \wedge B = B \wedge A$, ponieważ formuły $A \wedge B$ i $B \wedge A$ mają jednakowie wartości logicznie dla każdej interpretacji h.

Rachunek zdań

Dalej pokażemy, że $A = A \vee 0$:

A	$A \vee 0$
0	0
1	1

Analogicznie jak w poprzednim przypadku, z powyższej tablicy otrzymujemy, że $A = A \vee 0$.

Rachunek zdań

W ten sam sposób udowadniamy prawdziwość praw de Morgana:

A	B	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \vee B)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

A	B	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B)$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Rachunek zdań

Funkcje Boole'a

Definicja. Funkcję f: $X^n \rightarrow Y$ nazywamy funkcją Boole'a jeżeli $X = Y = \{0,1\}$.

Definicja. Ciąg $(x_1, x_2, \ldots , x_n)$ jest ciągiem Boole'a jeżeli $x_i \in \{0,1\}$.

Więc, dowolne zdanie z n zmiennymi jest n-argumentową funkcją wartości logicznych (funkcja Boole'a).

Zdania równoważne mają jedną i tę samą funkcję wartości logicznych.

Rachunek zdań

Powstaje pytanie: ile można utworzyć różnych funkcji, na przykład, jednoargumentowych lub dwuargumentowych?

Dla funkcję f: $\{0,1\}\rightarrow \{0,1\}$oczywista odpowiedź to 4, bo można utworzyć cztery (2^2) różne tablice logiczne.

	f_1	f_2	f_3	f_4
0	1	0	1	0
1	0	1	1	0

Tablica wszystkich funkcji jednoargumentowych

Rachunek zdań

Ile jest różnych funkcji dwuargumentowych

$$f\colon \{0,1\}\times\{0,1\} \to \{0,1\}?$$

Oczywiście 2^4, czyli 16.

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Tablica wszystkich funkcji dwuargumentowych

Rachunek zdań

Pełny system spójników

Pojawia się więc uzasadnione pytanie: czy wszystkie funkcje Boole'a mogą być przedstawione zdaniami logicznymi?

Twierdzenie. Dowolna funkcja wartości logicznych jest pewnym zdaniem, które posiada tylko spójniki $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Dowód. Niech $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest daną funkcją wartości logicznych. Oczywiste jest, że f może być przedstawiona za pomocą tablicy wartości logicznych z 2^n wierszami, gdzie każdy wiersz przedstawia pewien zbiór wartości logicznych dla zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz odpowiednią wartość $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Rachunek zdań

Ponumerujemy wiersze tej tablicy za pomocą liczb naturalnych 1, 2, . . . , 2^n. Niech dla każdego $i = 1, 2, \ldots, 2^n$,

$$C_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_i^{\,1})' \wedge (x_i^{\,2})' \wedge \ldots \wedge (x_i^{\,n})',$$

gdzie $(x_i^{\,j})'$ oznacza x_j, jeżeli w i-tym wierszu tablicy wartości logicznych x_j jest prawdziwe, lub $\neg x_j$, jeżeli x_j jest fałszywe.

Niech D będzie dysjunkcją wszystkich zdań C_i takich, że f w i-tym wierszu jest prawdziwe:

$$D\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_i^{\,1})' \wedge (x_i^{\,2})' \wedge \ldots \wedge (x_i^{\,n})' \vee$$
$$\vee (x_k^{\,1})' \wedge (x_k^{\,2})' \wedge \ldots \wedge (x_k^{\,n})' \vee \ldots \vee (x_l^{\,1})' \wedge (x_l^{\,2})' \wedge \ldots \wedge (x_l^{\,n})'.$$

Rachunek zdań

Jeżeli takich wierszy nie ma, to f jest zawsze fałszywe i dla tej funkcji możemy wykorzystać zdania postaci

$$x_1 \wedge \neg x_1.$$

Pokażemy, że tablica wartości logicznych dla D jest równa f.

Niech w wierszu k-tym dany będzie pewien zbiór wartości logicznych dla zdań atomarnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz wartość funkcji f odpowiadająca temu zbiorowi.

Rachunek zdań

Jeżeli $f(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$ w s-tym wierszu, to w tym wierszu

$$C_i\,(x_1, x_2, \dots x_n) = 0,\ C_k\,(x_1, x_2, \dots x_n) = 0,\ \dots ,$$
$$C_l\,(x_1, x_2, \dots x_n) = 0.$$

Więc, $D(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$.

Jeżeli $f(x_1, x_2, \dots x_n) = 1$w danym wierszu, to jedno z

$$C_i(x_1, x_2, \dots x_n),\ C_k(x_1, x_2, \dots x_n),\ \dots ,\ C_l(x_1, x_2, \dots x_n)$$

równe się 1 w tym wierszu. Więc, $D(x_1, x_2, \dots x_n), = 1$.

Rachunek zdań

Dysjunkcją D wszystkich zdań C_i takich, że f w i-tym wierszu jest prawdziwe będziemy nazywać *postacią kanoniczną* dla funkcję f wartości logicznych.

Jak otrzymać postać kanoniczną?

Metoda 1. Dla dowolnej funkcję f wartości logicznych znaleźć tablicę logiczną. Utwożyć dysjunkcję D wszystkich zdań C_i takich, że f w i-tym wierszu jest prawdziwe. D jest postać kanoniczna.

Rachunek zdań

Metoda 2. Najpierw korzystamy z praw De Morgana, aby przenieść dopelnienia do symboli atomowych.

Następmpnie rozdzielamy mnożenie względem dodawania.

Wtedy zastępmpujemy xx symbolem x i xx' zerem tam, gdzie jest to potrzebne oraz wstawiamy dodatkowe zmienne korzystając z równości $x \bigvee x' = 1$.

Rachunek zdań

Przykład.

1)

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	1

Zgodnie z dowodem twierdzenia, budujemy formuły C_2, C_3 i C_4, ponieważ dla tych interpretacji funkcja $f(x_1, x_2)$ jest prawdziwa:

$$C_2 = \neg x_1 \wedge x_2,\ C_3 = x_1 \wedge \neg x_2 \text{ i } C_4 = \neg x_1 \wedge \neg x_2.$$

Rachunek zdań

Ostatecznie budujemy dyzjunkcję postaci

$$D = C_2 \vee C_3 \vee C_4 = (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee$$
$$(\neg x_1 \wedge \neg x_2).$$

2)

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

Rachunek zdań

Analogicznie jak i w poprzednim przykładzie, otrzymujemy

$$C_1 = x_1 \wedge x_2,\ C_2 = \neg x_1 \wedge x_2,\ C_4 = \neg x_1 \wedge \neg x_2.$$

Wówczas mamy:

$$D = C_1 \vee C_2 \vee\ C_4 = (x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2).$$

Wykorzystując prawa łączności, przemienności i rozdzielności otrzymujemy:

$$D = (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee ((x_1 \vee \neg x_2) \wedge x_2) = (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee x_2 =$$
$$(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_2) = \neg x_1 \vee x_2.$$

Zauważmy, że $f(x_1, x_2)$ jest funkcją wartości logicznych dla zdania $x_1 \rightarrow x_2$, tzn.

$$x_1 \rightarrow x_2 = \neg x_1 \vee x_2.$$

Rachunek zdań

3)

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

$C_1 = x_1 \wedge x_2$, $C_2 = \neg x_1 \wedge \neg x_2$. Mamy wówczas:

$$D = (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_2) =$$
$$(\neg x_1 \vee (x_1 \wedge x_2)) \wedge (\neg x_2 \vee (x_1 \wedge x_2)) = ((\neg x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)) \wedge$$
$$\wedge ((\neg x_2 \vee x_1) \wedge (\neg x_2 \vee x_2)) = (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_1).$$

Zatem

$$x_1 \leftrightarrow x_2 = (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_1) = (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1).$$

Rachunek zdań

Twierdzenie. Dowolna funkcja wartości logicznych f jest pewnym zdaniem, które ma tylko jedną z następujących par spójników logicznych: $(\neg, \wedge)$, $(\neg, \vee)$, $(\rightarrow, \neg)$.

Dowód wynika z poprzedniego twierdzenia i praw de Morgana.