Podstawy logiki i teorii mnogości

6. Relacje równoważności.

Niech A będzie dowolnym zbiorem oraz niech $S \subset A \times A$. Relację S nazywamy *relacją równoważności* wtedy i tylko wtedy, gdy S jest relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią.

Jeśli $S \subset A \times A$ jest relacją równoważności oraz $a \in A$ jest dowolne, to *klasą równoważności* (lub *klasą abstrakcji, warstwą*) elementu a względem relacji S nazywamy zbiór

$$[a]_S = \{x \in A : aSx\}.$$

Dla dowolnych $a_1, a_2 \in A$ mamy następującą własność:

$$[a_1]_S = [a_2]_S \Leftrightarrow a_1 S a_2.$$

Zadania.

Zadanie 1 Zbadać, czy podana relacja jest relacją równoważności i wyznaczyć jej wszystkie klasy równoważności (o ile to możliwe):

a) $S \subset \mathbb{N}^2, \quad \forall_{x,y \in \mathbb{N}}\, xSy \Leftrightarrow 3|x+y,$

b) $S \subset \mathbb{Z}^2, \quad \forall_{x,y \in \mathbb{Z}}\, xSy \Leftrightarrow 5|x-y,$

c) $S \subset \mathbb{N}^2, \quad \forall_{x,y \in \mathbb{N}}\, xSy \Leftrightarrow 2|x+y,$

d) $S \subset \mathbb{C}^2, \quad \forall_{x,y \in \mathbb{C}}\, xSy \Leftrightarrow \mathrm{Im}x = \mathrm{Im}y,$

e) $S \subset \mathbb{C}^2, \quad \forall_{x,y \in \mathbb{C}}\, xSy \Leftrightarrow x+y \in \mathbb{R}.$