INSTITUTO DE MATEMÁTICA -UFRJ

Cálculo Vetorial e Geometria Analtica - 2022.2 - Professor Felipe Acker

Prova 1 - 6 de setembro

PARTE I - MÚLTIPLA ESCOLHA

Cada questão vale 0,5 ponto. Para cada questão pode haver de 0 a 4 respostas corretas. Cada resposta errada anula uma certa, dentro da mesma questão.

1. Uma partícula, em movimento retilíneo uniforme (MRU), passou por $(2,1)$, em $t=0$, e por $(-1,-7)$, em $t=-4$. Qual sua posição em $t=2$? Suponha que o sistema de coordenadas é canônico.

   (a) $(7/2,5)$ (b) $(0.5,-3)$ (c) $(33/2,25/2)$ (d) $(5/2,9/2)$

2. Suponha que, a partir de um sistema de coordenadas canônico, construímos um novo sistema, com origem no ponto O e tendo como base os vetores $\vec{\varepsilon}_1$ e $\vec{\varepsilon}_2$. As coordenadas de O, $\vec{\varepsilon}_1$ e $\vec{\varepsilon}_2$, no sistema canônico, são, respectivamente, $O=(5,4)$, $\vec{\varepsilon}_1=(-1,1)$, $\vec{\varepsilon}_2=(3,1)$. Uma partícula, em movimento retilíneo uniforme (MRU), passou por P_o, em $t=0$, por (P_1), em $t=-4$ e por P_2, em $t=2$. No sistema definido por O, $\vec{\varepsilon}_1$ e $\vec{\varepsilon}_2$, P_o e P_1 são dados, respectivamente, por $P_o=(2,1)$ e por $P_1=(-1,-7)$. Quais as coordenadas de P_2 no sistema canônico original?

   (a) $(33/2,25/2)$ (b) $(0.5,-3)$ (c) $(5/2,9/2)$ (d) $(7/2,5)$

3. Sejam $\vec{w}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ vetores no plano. Sabendo que

$$\vec{w}=x_1\vec{u}_1+x_2\vec{u}_2,\ \vec{v}_1=3\vec{u}_1-2\vec{u}_2\ e\ \vec{v}_2=\vec{u}_1-2\vec{u}_2,$$

   determine, em função de x_1 e x_2, os escalares y_1 e y_2 tais que

$$\vec{w}=y_1\vec{v}_1+y_2\vec{v}_2.$$

   (a) $(y_1,y_2)=\frac{1}{4}(2x_1+x_2,-2x_1-3x_2)$
   (b) $y_1=4,\ y_2=-4$
   (c) $y_1=\frac{1}{2}(\vec{v}_1-\vec{v}_2),\ y_2=\frac{1}{4}(\vec{v}_1-3\vec{v}_2)$
   (d) $y_1=\frac{x_1}{4},\ y_2=\frac{x_2}{4}$

4. Sejam $P=(10,14,8)$, r a reta $r=\{t(-1,1,1),\ t\in\mathbb{R}\}$ e α o plano

$$\alpha=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \langle(x,y,z),(-1,1,1)\rangle=0\right\}.$$

   Então o ponto P_o de r mais próximo de P é

   (a) a interseção entre r e α ⇒ Há projeção (∴ Falso)
   (b) o ponto $(-t,t,t)$ tal que t minimiza a função $d(t)=\sqrt{(-t-10)^2+(t-14)^2+(t-8)^2}$
   (c) a interseção de r com o plano que passa por P e é paralelo a α
   (d) $\frac{\langle(10,14,8),(-1,1,1)\rangle}{\langle(-1,1,1),(-1,1,1)\rangle}(-1,1,1)$ ⇒ Projeção

5. A equação da reta que passa por $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ é

(a) $2(y-2) - 2(x-1) = 0$
(c) $2x - 2y = -2$
(b) $2x - 2y = 0$
(d) $y - x = 1$

6. Se A é matriz 2×2 e n é número natural, denotamos por A^n o produto $\overbrace{A \cdots A}^{n}$. Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

então o determinante de A^{11} é

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3^{11} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$
(b) $1 - 3^{11}$
(c) -2048
(d) 177147

7. Sejam

$$\vec{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \vec{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

e $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Se $v = y_1\vec{\varepsilon}_1 + y_2\vec{\varepsilon}_2$, então

(a) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

(c) y_1 e y_2 são as soluções do sistema

$$\begin{cases} (\sqrt{3}/2)y_1 - (1/2)y_2 = x_1 \\ (1/2)y_1 + (\sqrt{3}/2)y_2 = x_2 \end{cases}$$

(d) $y_1 = \langle v, \vec{\varepsilon}_1 \rangle$, $y_2 = \langle v, \vec{\varepsilon}_2 \rangle$

RESPOSTAS

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	♥	♡	♡	♡
2.	♥	♡	♡	♡
3.	♥	♡	♡	♡
4.	♡	♥	♥	♥
5.	♥	♡	♥	♥
6.	♡	♡	♥	♡
7.	♥	♥	♥	♥

PARTE II - Probleminhas - 1,5 ponto, cada

1. Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$ não colineares. Determine equação da bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$.

2. O ponto $O(t)$ se move sobre o eixo horizontal com velocidade constante $\vec{v}$ (convencione que $\vec{v}$ é dada pelo número real v; v é positivo, se $O(t)$ anda para a direita, negativo, se $O(t)$ anda para a esquerda). O ponto $P(t)$ descreve movimento circular uniforme, de raio r, em torno de $O(t)$, com velocidade angular ω (ω positiva, se o movimento se dá no sentido trigonométrico). Sabendo que $P(0) = (0,0)$, encontre as funções $x(t)$ e $y(t)$ que descrevem o movimento de $P(t) = (x(t), y(t))$. Veja a animação em https://youtu.be/UGaHPTQgaF4

3. Considere o polinômio $p(z) = (z-1)(z-2i)(z-3)(z-4)(z-300-400i)(z-300+400i)(z-400+300i)(z-400-300i)$. Para cada $r \geq 0$, sejam $\gamma_r(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ e $c_r(t) = p(\gamma_r(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Seja, como de hábito, $n(c_r, 0)$ o número de voltas que c_r dá em torno da origem (o zero de $\mathbb{C}$). Calcule, para cada natural k, com k variando de 0 a 1000, $n(c_{r_k}, 0)$, sendo $r_k = k + 0,5$.

4. Sejam $P_o, P_1, \ldots, P_n = P_o$ pontos do plano.

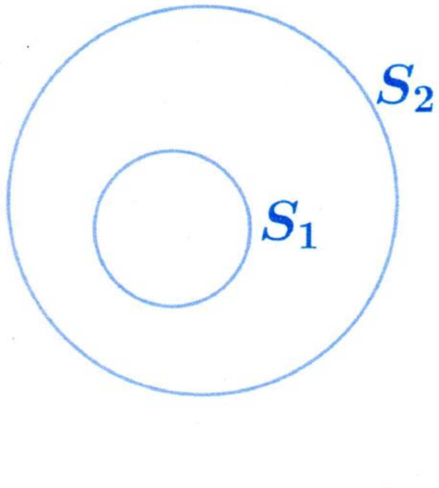
   (a) Suponha que o polígono $p = P_oP_1 \cdots P_n$ seja convexo. Mostre que a área de p é
   $$\frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n} det(P_{i-1}, P_i)\right|.$$

   (b) O mesmo resultado vale se supusermos apenas que a poligonal fechada $P_oP_1 \cdots P_n$ não tenha autointerseções?

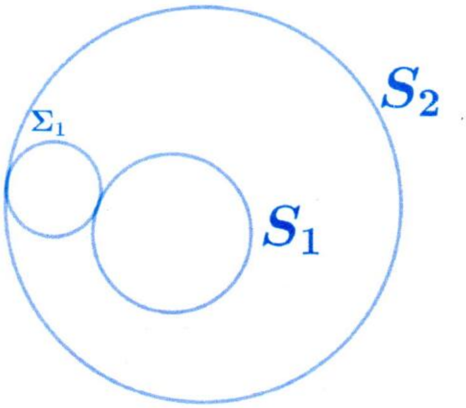
5. (a) Sejam u e v vetores fixos no plano (pense-os como pontos). Mostre que w está no círculo de diâmetro $|u - v|$ passando por u e v se, e somente se $\langle u - w, v - w\rangle = 0$. Proibido, na resolução, usar argumentos geométricos (pode usá-los para orientar seu raciocínio, mas a demonstração deve ser puramente algébrica).

   (b) Sejam u e v vetores fixos no plano (pense-os como pontos) e k um número real, fixo, entre 0 e 1. Seja
   $$S = \{w \mid |w - u| = k|w - v|\}.$$
   Mostre que S é um círculo. Proibido, na resolução, usar argumentos geométricos (pode usá-los para orientar seu raciocínio, mas a demonstração deve ser puramente algébrica).

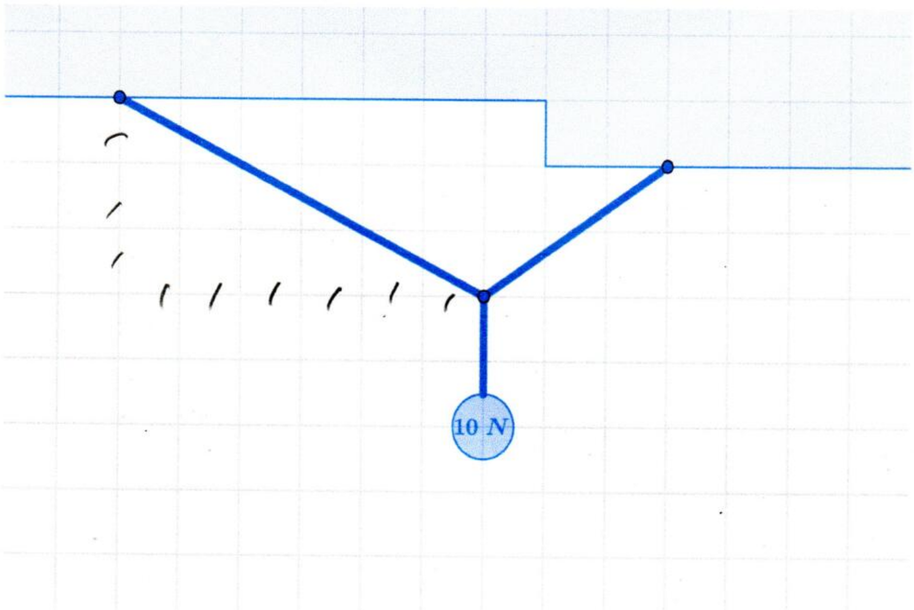
6. Sejam S_1 e S_2 dois círculos tais que S_1 está, estritamente, *dentro* de S_2 (figura). Mostre (pode argumentar geometricamente) que existe círculo S tal que, se fizermos as inversões de S_1 e S_2 em relação a S, obtemos dois círculos concêntricos.



7. Considere círculos S_1 e S_2 como no item anterior. Suponha dado um círculo Σ_1, como na figura, simultaneamente tangente a S_1 e a S_2 e coloquemo-nos a questão: será possível encontrar outros $n-1$ círculos, $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$, exteriores a S_1 e interiores a S_2, tais que cada Σ_k seja, simultaneamente, tangente a S_1, a S_2 e a Σ_{k-1}, de forma que se tenha, também, Σ_n tangente a Σ_1? Mostre que, caso a resposta seja positiva para um certo Σ_1, será positiva para qualquer outro (sempre que simultaneamente tangente a S_1 e a S_2).



8. Veja a figura e determine as tensões nas duas cordas (AC e BC) presas às paredes. A é o ponto no alto, à esquerda, B é o da direita e C é o ponto de encontro (um nó fixo, o sistema está em equilíbrio) das três cordas. Os pequenos quadriláteros são quadrados de lados horizontais e verticais.



9,58

9. Seja K o conjunto das soluções do seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases} x + y \leq 14 \\ x + 2y \geq -3 \\ 3x - y \geq -5 \end{cases}.$$

Determine o menor e o maior valores de

$$f(x, y) = 2 + 3x + 4y,$$

com a condição de que (x, y) esteja em K.

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica - 2022.2 - Prof. Felipe Acker

Prova 1 - 6 de Setembro

- Parte 1 - Multipla Escolha

1 - MRU : $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 + t\vec{v}$

$\vec{p}_0(0) = \vec{p}_0 + 0\vec{v} = \vec{p}_0 = (2,1)$

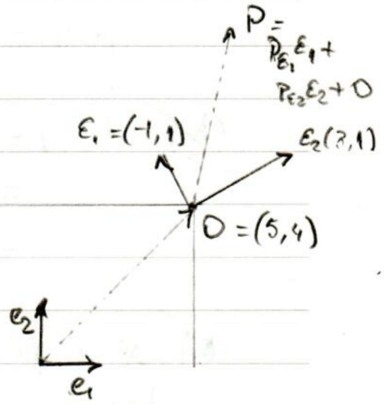
$\vec{p}(-4) = \vec{p}_0 + (-4)\vec{v} = (2,1) - 4(v_x, v_y) = (-1,7)$

$\Rightarrow (-1,7) = (2,1) - (4v_x, 4v_y) = (2-4v_x, 1-4v_y)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow -1 = 2-4v_x \Rightarrow -3 = -4v_x \Rightarrow v_x = 3/4 \\ \Rightarrow -7 = 1-4v_y \Rightarrow -8 = -4v_y \Rightarrow v_y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{p}(t) = (2,1) + t\,(3/4, 2)$$

$\Rightarrow \vec{p}(2) = (2,1) + 2\,(3/4, 2) = (2,1) + (6/4, 4) = (2,1) + (3/2, 4) = (7/2, 5)$

$\therefore$ Resposta: (a) (b) (c) (d)



2 - $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ canônica

$(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$: Novo Sistema não canônico fixado em O

$\Rightarrow$ Sistema S

Partícula em MRU

$\vec{p}(0) = P_0 = (2,1)_S = 2\vec{\varepsilon}_1 + 1\vec{\varepsilon}_2 + O = 2(-1,1) + 1(3,1) + (5,4) = P_0$

$\vec{p}(-4) = P_1 = (-1,-7)_S = -1\cdot\vec{\varepsilon}_1 - 7\vec{\varepsilon}_2 + O = -1(-1,1) - 7(3,1) + (5,4) = P_1$

$\Rightarrow P_0 = (-2,2) + (3,1) + (5,4) = (-2+3+5, 2+1+4) = (6,7)$

$P_1 = (1,-1) - (21,7) + (5,4) = (1-21+5, -1-7+4) = (-15,-4)$

$\vec{p}(0) = P_0 = (6,7)$

$\vec{p}(-4) = P_1 = (-15,-4)$

$\vec{p}(2) = P_2 = ?$

$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 + t\vec{v}$

$\vec{p}(0) = \vec{p}_0 = (6,7)$

$\vec{p}(-4) = (6,7) + (-4)(v_x, v_y) = (6-4v_x, 7-4v_y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6-4v_x = -15 \Rightarrow 4v_x = 15+6 = 21 \Rightarrow v_x = 21/4 \\ 7-4v_y = -4 \Rightarrow 4v_y = 11 \Rightarrow v_y = 11/4 \end{cases}$$

$\Rightarrow p(t) = (6,7) + t\left(\frac{21}{4}, \frac{11}{4}\right) \Rightarrow p(2) = (6,7) + 2\left(\frac{21}{4}, \frac{11}{4}\right) = (6,7) + \left(\frac{21}{2}, \frac{11}{2}\right)$

$= \left(\frac{33}{2}, \frac{25}{2}\right)$

$\therefore$ Resposta: (a) (b) (c) (d)

3_ $\vec{w}, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2}$ ⇒ Vetores no plano – Aplicar mudança de base de (u_1, u_2) para (v_1, v_2)

$\vec{w} = x_1\vec{u_1} + x_2\vec{u_2}$

$\vec{v_1} = 3\vec{u_1} - 2\vec{u_2}$ $\quad (-1) \quad (-3)$

$\vec{v_2} = \vec{u_1} - 2\vec{u_2}$

$\vec{v_1} - \vec{v_2} = 2\vec{u_1} \Rightarrow \vec{u_1} = \frac{1}{2}\vec{v_1} - \frac{1}{2}\vec{v_2}$

$\vec{v_1} - 3\vec{v_2} = 4\vec{u_2} \Rightarrow \vec{u_2} = \frac{1}{4}\vec{v_1} - \frac{3}{4}\vec{v_2}$

$\therefore \vec{w} = x_1\left(\frac{1}{2}\vec{v_1} - \frac{1}{2}\vec{v_2}\right) + x_2\left(\frac{1}{4}v_1 - \frac{3}{4}\vec{v_2}\right)$

$= \frac{x_1}{2}\vec{v_1} - \frac{x_1}{2}\vec{v_2} + \frac{x_2}{4}\vec{v_1} - \frac{3x_2}{4}\vec{v_2}$

$= \frac{2x_1 + x_2}{4}\vec{v_1} + \frac{-2x_1 - 3x_2}{4}\vec{v_2}$

$\therefore (y_1, y_2) = \frac{1}{4}(2x_1 + x_2, -2x_1 - 3x_2)$

4_ X (a) ⇒ Existe projeção do vetor $\vec{P}$ em $\vec{P_r} = (1,1,1)$ → Ver letra (d), abaixo, portanto essa letra é falsa

(b) ✓ $d(t) = \|P - P_0\| = \|P_0 - P\| = \|(10, 14, 8) - t(-1,1,1)\| =$
$= \|t(-1,1,1) - (10,14,8)\| = \|(-t-10, t-14, t-8)\| =$
$= \sqrt{(-t-10)^2 + (t-14)^2 + (t-8)^2}$, que deve ser minimizado

(c) ✓ α é perpendicular a r e a distância de P_0 a P precisa estar em uma reta perpendicular a r e que passe por P.

(d) ✓ Seja $P_T = Proj_v \vec{P}$, $v = (-1,1,1)$. Esse vetor representa o ponto mais próximo de P em r.

$$Proj_v \vec{P} = \frac{\langle \vec{P}, v\rangle}{\|v\|^2} v = \frac{\langle (10,14,8), (-1,1,1)\rangle}{\langle (-1,1,1), (-1,1,1)\rangle}(-1,1,1)$$

5_ $a = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ $\quad \vec{v} = b - a = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

$r: p = a + \vec{v}t = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}t = \begin{bmatrix}1+2t\\2+2t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$\left.\begin{matrix}x = 1 + 2t\\ y = 2 + 2t\end{matrix}\right)^{-1}$ $\Rightarrow 2t = x - 1$

$y = 2 + x - 1 \Rightarrow x - y = 1 - 2$

$x - y = 1 - 2 \Rightarrow x - y = -1 \Rightarrow 2x - 2y = -2 \Rightarrow y - x = 1$

$x = y - 1$

$y = x + 1$

$2(y-2) - 2(x-1) =$

$2y - 4 - 2x + 2 =$

$2y - 2x - 2 = 0$

$\Rightarrow 2y - 2x = 2$

$y - x = 1$

$\therefore$ (a) ✓

(b) X

(c) ✓

(d) ✓

6 – $A^n = \overbrace{A \dots A}^{n \text{ vezes}}$, $\text{Det } A \cdot A = \text{Det } A \cdot \text{Det } A$ (Teorema de Binet)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\text{Det } A = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2$

$\therefore \text{Det } A^{11} = (\text{Det } A)^{11} = (-2)^{11} = -2048$

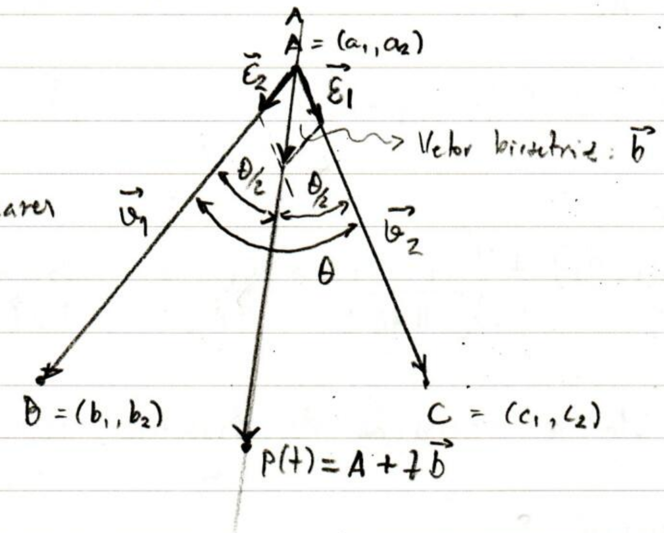
Resposta: (a) ✗ (b) ✗ (c) ✓ (d) ✗

7 – (a) ✓ Verdadeiro, pela Definição
(b) ✓ Verdadeiro – pela definição de transformação de mudança de base
(c) ✓ Verdadeiro
↳ Outra forma de escrever a e b
(d) ✓ $\|\varepsilon_1\| = \sqrt{3/4 + 1/4} = \sqrt{4/4} = 1$
$\|\varepsilon_2\| = \sqrt{1/4 + 3/4} = \sqrt{4/4} = 1$

$y_1 = \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{\varepsilon_1} \rangle}{\|\vec{\varepsilon_1}\|} = \langle \vec{v}, \vec{\varepsilon_1} \rangle$ e $y_2 = \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{\varepsilon_2} \rangle}{\|\varepsilon_2\|} = \langle \vec{v}, \vec{\varepsilon_2} \rangle$ $\therefore$ Verdadeiro

---

Parte 2 – Probleminhas



1 – $\left.\begin{aligned} A &= (a_1, a_2) \\ B &= (b_1, b_2) \\ C &= (c_1, c_2) \end{aligned}\right\}$ Não colineares

A: Origem

$\vec{v_1} = \vec{AB} \Rightarrow \vec{\varepsilon_1} = \dfrac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$

$\vec{v_2} = \vec{AC} \Rightarrow \vec{\varepsilon_2} = \dfrac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}$

Vetor bissetriz: $p(t) = A + t\vec{b}$, $\vec{b} = \dfrac{\vec{\varepsilon_1} + \vec{\varepsilon_2}}{\|\vec{\varepsilon_1} + \vec{\varepsilon_2}\|}$, $t \in \mathbb{R}_+$ (Bissetriz é uma SEMI-reta)

(4)

Portanto:

$$p(t) = A + \frac{\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2}{\|\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2\|} t = A + \frac{1}{\|\epsilon_1 + \epsilon_2\|} (\epsilon_1 + \epsilon_2) t = A + \frac{1}{\|\epsilon_1 + \epsilon_2\|} \cdot \left(\frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} + \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}\right) t$$

$$\therefore P(t) = A + \frac{1}{\|\epsilon_1 + \epsilon_2\|} \left(\frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} + \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}\right) t = A + \frac{1}{\left\| \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} + \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|} \right\|} \left(\frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} + \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}\right) t.$$

Como $\frac{1}{\left\| \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} + \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|} \right\|}$ é um escalar constante, que não altera a direção da bissetriz, podemos re-parametrizar a função por:

$$s = \frac{t}{\left\| \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} + \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|} \right\|} \quad \text{e:}$$

$$p(t) = p(s) = A + \left(\frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} + \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}\right) s$$

Vetores: $\vec{AB} = B - A = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$

$\vec{AC} = C - A = (c_1, c_2) - (a_1, a_2) = (c_1 - a_1, c_2 - a_2)$, $\|\vec{AC}\| = \sqrt{(c_1-a_1)^2 + (c_2-a_2)^2}$

$$\Rightarrow p(s) = (a_1, a_2) + \left[\frac{(b_1 - a_1, b_2 - a_2)}{\|\vec{AB}\|} + \frac{(c_1 - a_1, c_2 - a_2)}{\|\vec{AC}\|}\right] s$$

$$= (a_1, a_2) + \left(\frac{b_1 - a_1}{\|\vec{AB}\|} + \frac{c_1 - a_1}{\|\vec{AC}\|}, \frac{b_2 - a_2}{\|\vec{AB}\|}, \frac{c_2 - a_2}{\|\vec{AC}\|}\right) s,$$ $\|\vec{AB}\|$ e $\|\vec{AC}\|$ dados acima,

Sendo a equação da Bissetriz, paramétrica em s.

Eliminando s:

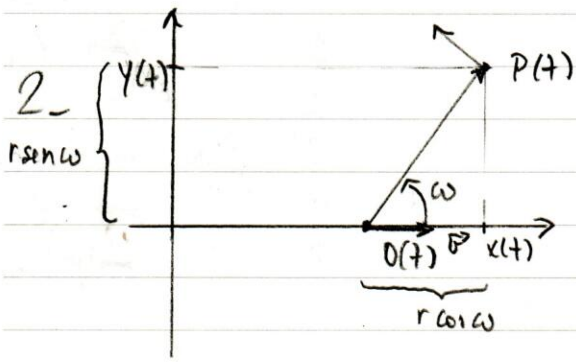
$$x = a_1 + s\left(\frac{b_1 - a_1}{\|\vec{AB}\|} + \frac{c_1 - a_1}{\|\vec{AC}\|}\right) \Rightarrow s = (x - a_1)\left(\frac{b_1 - a_1}{\|\vec{AB}\|} + \frac{c_1 - a_1}{\|\vec{AC}\|}\right)^{-1}$$

$$y = a_2 + s\left(\frac{b_2 - a_2}{\|\vec{AB}\|} + \frac{c_2 - a_2}{\|\vec{AC}\|}\right) \Rightarrow y = a_2 + (x - a_1) \frac{\left(\frac{b_2 - a_2}{\|\vec{AB}\|} + \frac{c_2 - a_2}{\|\vec{AC}\|}\right)}{\left(\frac{b_1 - a_1}{\|\vec{AB}\|} + \frac{c_2 - a_2}{\|\vec{AC}\|}\right)}$$

$$\Rightarrow y = a_2 + (x-a_1)\,\frac{\|\vec{AC}\|\,(b_2-a_2) + \|\vec{AB}\|\,(c_2-a_2)}{\|\vec{AC}\|\,(b_1-a_1) + \|AB\|\,(c_1-a_1)}$$, com $\|\vec{AB}\|$ e $\|\vec{AC}\|$ dados

acima, a equação sintética da Bissetriz.

2_



$v > 0 \Rightarrow$ O move-se para a direita

$v < 0 \Rightarrow$ O move-se para a esquerda

$\omega > 0 \Rightarrow$ gira sentido trigonométrico (anti-horário)

$\omega < 0 \Rightarrow$ gira sentido anti-trigonométrico (horário)

$$x(t) = O_x(t) + r\cos\omega t = x_0 + vt + r\cos\omega t$$
$$y(t) = O_y(t) + r\,\text{sen}\,\omega t = y_0 + r\,\text{sen}\,\omega t$$

$$x(0) = x_0 + \underbrace{v_0 \cdot 0}_{=0} + r\underbrace{\cos\omega\cdot 0}_{=1} = x_0 + r = 0 \;\therefore\; x_0 = -r$$

$$y(0) = y_0 + r\underbrace{\text{sen}\,\omega\cdot 0}_{=0} = 0 \;\therefore\; y_0 = 0$$

Assim

$$x(t) = -r + v\cdot t + r\cos\omega t$$
$$y(t) = r\,\text{sen}\,\omega t$$

//

3_ Dado o polinômio:

$$p(z) = (z-1)(z-2i)(z-3)(z-4)(z-300-400i)(z-300+400i)(z-400+300i)(z-400-300i)$$

E considerando $\forall r \geq 0$, $\gamma_r(t) = (r\cos t, r\,\text{sen}\,t)$, $t \in [0, 2\pi]$
$c_r(t) = p(\gamma_r(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ } $n(c_r, 0) \Rightarrow$ número de voltas de c_r em $0+0i$ (Zero)

Sabemos que existem zeros nos círculos (no domínio) com raios:

d = distâncias dos zeros à origem.

Zeros: 1, $d=1$ $-300 \pm 400i$, $d = 500$

$-2i$, $d=2$ $-400 \pm 300i$, $d = 500$

-3, $d=3$

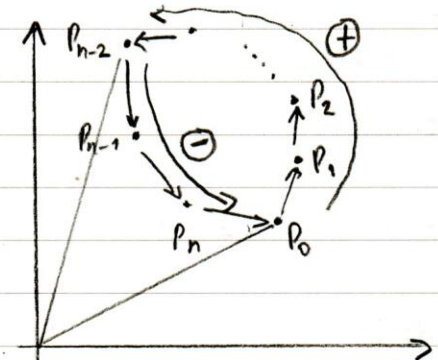
-4, $d=4$

⑥

Assim, os valores de todos os $n(C_{r_K}, O)$, para $K \in \{x \in \mathbb{N};\ x > 0 \text{ e } x \leq 1000\}$, são dados pela tabela abaixo:

Intervalo de K	Intervalo de r_K	$n(C_{r_K}, O)$	Exemplo
$\{0\}$	$\{0{,}5\}$	0	$\Rightarrow n(C_{0,5}, O) = 0$
$\{1\}$	$\{1{,}5\}$	1	$\rightarrow n(C_{1,5}, O) = 1$
$\{2\}$	$\{2{,}5\}$	2	$\rightarrow n(C_{2,5}, O) = 2$
$\{3\}$	$\{3{,}5\}$	3	$\rightarrow n(C_{3,5}, O) = 3$
$\{4, \ldots, 499\}$	$\{4{,}5; \ldots; 499{,}5\}$	4	$\Rightarrow n(C_{300}, O) = 4$
$\{500, \ldots, 1000\}$	$\{500{,}5; \ldots; 1000{,}5\}$	8	$\rightarrow n(C_{700}, O) = 8$

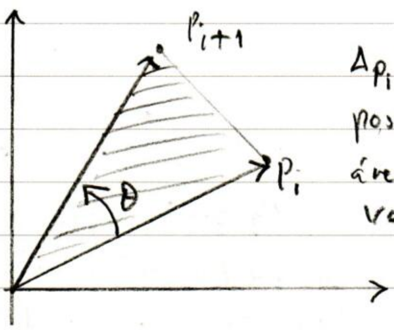
4) a)



Giro positivo e negativo dos vetores

Se cada ponto P_i do polígono for representado por um vetor posição $\vec{P_i}$, a área definida por dois pontos e a origem é definida por:

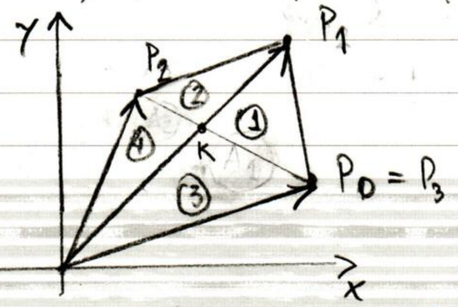
$$A_{P_iP_{i+1}} = \frac{1}{2}\langle \vec{P_i}, P_{i+1} \rangle$$ e θ é o ângulo entre $\vec{P_i}$ e $\vec{P_{i+1}}$.



$A_{P_iP_{i+1}}$, θ é positivo, e área é positiva

As áreas em que a orientação de θ é trigonométrica, ou seja, que $\vec{P_{i+1}}$ representa um giro anti-horário em relação a P_i, são positivas. Caso θ seja anti-trigonométrico, as áreas são negativas.

Assim, podemos provar que a relação vale para $i = 3$:



Olhando a figura ao lado, temos que a área ① + área ③ é igual a:

$$A_1 + A_3 = \left|\frac{1}{2}\langle \vec{P_0}, \vec{P_1} \rangle\right|, \text{ e}$$

$$A_2 + A_4 = \left|\frac{1}{2}\langle P_1, P_2 \rangle\right|$$

Sendo essas áreas positivas.

Mas $A_4 + A_3 = \left|\frac{1}{2}\langle \vec{P_2}, \vec{P_3} \rangle\right| = \left|\frac{1}{2}\langle \vec{P_2}, \vec{P_0} \rangle\right|$, uma área negativa

Mas a área do triângulo é igual a $A_1 + A_2$ e

$$A_1 + A_2 = \underbrace{A_1 + A_3} + A_2 + A_4 - (A_4 + A_3)$$
$$= \frac{1}{2}\langle \vec{P_0}, \vec{P_1} \rangle + \frac{1}{2}\langle \vec{P_1}, \vec{P_2} \rangle + \underbrace{\frac{1}{2}\langle \vec{P_2}, \vec{P_3} \rangle}$$

Lembrando-se, essa área é negativa.

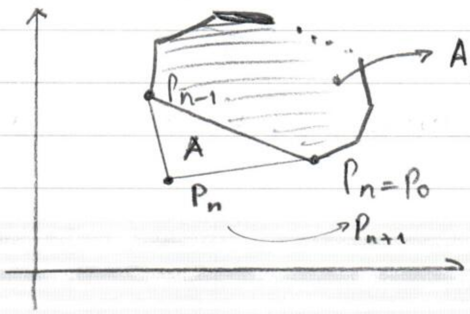
Para evitar resultados finais negativos, temos que:

$$A_{P_0P_1P_2} = \left| \frac{1}{2}\langle \vec{P_0}, \vec{P_1} \rangle + \frac{1}{2}\langle \vec{P_1}, \vec{P_2} \rangle + \frac{1}{2}\langle \vec{P_2}, \vec{P_3} \rangle \right| =$$
$$= \frac{1}{2}\left| \langle \vec{P_0}, \vec{P_1} \rangle + \langle \vec{P_1}, \vec{P_2} \rangle + \frac{1}{2}\langle \vec{P_2}, \vec{P_3} \rangle \right|$$
$$= \frac{1}{2}\left| \sum_{n=1}^{3} \langle \vec{P_{n-1}}, \vec{P_n} \rangle \right|$$

Mas $\langle \vec{P_{n-1}}, \vec{P_n} \rangle = \det(P_{n-1}, P_n)$, portanto

$$A_{P_0P_1P_2} = \frac{1}{2}\left| \sum_{n=1}^{3} \det(P_{n-1}, P_n) \right|.$$

Agora, vamos supor que a relação acima é valida para um polígono com n pontos e adicionamos mais um ponto entre P_{n-1} e P_n, esse novo ponto se tornando P_n e $P_0 = P_{n+1}$



A gente vê que em $A_{P_0 \dots P_n = 0}$ adicionamos

$$A = \frac{1}{2}\left| \langle P_0, P_{n-1} \rangle + \langle P_{n-1}, P_n \rangle + \langle P_n, P_{n+1} \rangle \right|$$

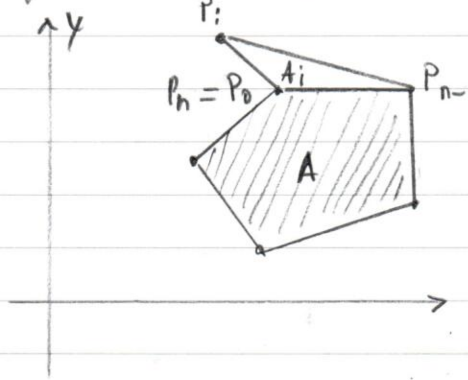
E $\quad A_{P_0 \dots P_n P_{n+1}} = \frac{1}{2}\left|\sum_{n=1}^{n} \det(P_{n-1}, P_n)\right| + \frac{1}{2}\left| \langle P_0, P_{n-1}\rangle + \langle P_{n-1}, P_n\rangle + \langle P_n, P_{n+1}\rangle \right|$

Se abrirmos os módulos (ou fizermos as somas das áreas dos triângulos a partir do início, da definição da área) temos que:

$$A_{P_0 \dots P_{n+1}=P_0} = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n+1} \det(P_{i-1}, P_i)\right|,$$

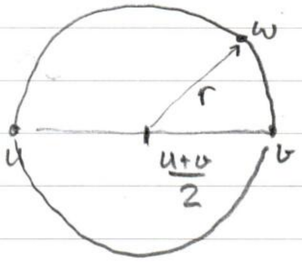
Provando, por indução em n, que a igualdade é válida para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

b) Certamente que vai funcionar. Se você vir a figura abaixo, foi adicionado um P_i que cria uma concavidade, mas que não invalida o argumento acima:



A_i é adicionado a A, com o mesmo argumento de indução, se P_i for colocado como ponto entre P_{n-1} e P_n

5 a) O círculo considerado é o lugar geométrico no qual o raio



é $r = \frac{|v-u|}{2}$ e $r = \left| w - \frac{u+v}{2} \right|$ pois o centro é $C: \frac{u+v}{2}$

Obs.: Os pontos são considerados vetores, assim $|P| = \sqrt{\langle P, P\rangle}$ e não usaremos a notação de vetores com setinha.

Assim: $\left|w - \frac{u+v}{2}\right| = \left|\frac{v-u}{2}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|2w-u-v\right| = \frac{1}{2}\left|v-u\right|$

$\Leftrightarrow |2w-u-v| = |v-u|$

$\Leftrightarrow \langle 2w-u-v, 2w-u-v\rangle^2 = \langle v-u, v-u\rangle^2$

$\Rightarrow \langle 2w-u-v, 2w-u-v\rangle = \langle v-u, v-u\rangle$ ou $\underbrace{\langle 2w-u-v, 2w-u-v\rangle = -\langle v-u, v-u\rangle}_{\text{Simétrico} \to \text{ignorar}}$

Portanto vamos nos focar em $\langle 2w-u-v, 2w-u-v\rangle = \langle v-u, v-u\rangle$

Mas $\langle v-u, v-u\rangle = \langle v, v-u\rangle - \langle u, v-u\rangle = \langle v,v\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle u,u\rangle$ (1)

E $\langle 2w-u-v, 2w-u-v\rangle = \langle u-w+v-w, u-w+v-w\rangle =$

$= \langle u-w, u-w\rangle + 2\langle u-w, v-w\rangle + \langle v-w, v-w\rangle$

$= \langle u,u\rangle - 2\langle u,w\rangle + \langle w,w\rangle + 2\langle u-w, v-w\rangle + \langle v,v\rangle - 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle$ (2)

Mas (1) = (2) e:

$\cancel{\langle v,v\rangle} - 2\langle u,v\rangle + \cancel{\langle u,u\rangle} = \cancel{\langle u,u\rangle} - 2\langle u,w\rangle + \langle w,w\rangle + 2\langle u-w, v-w\rangle +$

$\cancel{\langle v,v\rangle} - 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle$

$-2\langle u,v\rangle = 2\langle u-w, v-w\rangle + 2\langle w,w\rangle - 2\langle u,w\rangle - 2\langle v,w\rangle$

$\Leftrightarrow \cancel{2}\langle u-w, v-w\rangle = \cancel{2}\langle u,w\rangle + \cancel{2}\langle v,w\rangle - \cancel{2}\langle u,v\rangle - \cancel{2}\langle w,w\rangle$

$\Leftrightarrow \langle u-w, v-w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle - \langle u,v\rangle - \langle w,w\rangle$

$= \langle u, w-v\rangle + \langle v-w, w\rangle$

$= \langle u, w-v\rangle + \langle w, v-w\rangle$

$= -\langle u, v-w\rangle + \langle w, v-w\rangle$

$= \langle w-u, v-w\rangle$

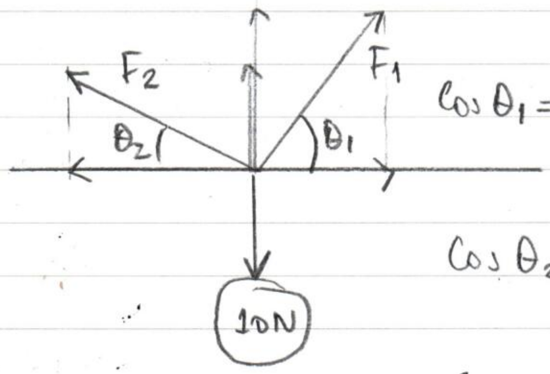
$= -\langle u-w, v-w\rangle$

$\Leftrightarrow \langle u-w, v-w\rangle = -\langle u-w, v-w\rangle \Leftrightarrow 2\langle u-w, v-w\rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle u-w, v-w\rangle = 0$

1.0 — 5.b — Não consegui ter a visão geométrica — portanto não consegui ter a intuição algébrica. ///

8 —



$\cos\theta_1 = \frac{3}{\sqrt{13}}$ $\quad \operatorname{sen}\theta_1 = \frac{6}{\sqrt{13}}$

$\cos\theta_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\left.\begin{array}{l} F_1\cos\theta_1 = F_2\cos\theta_2 \\ F_1\operatorname{sen}\theta_1 + F_2\operatorname{sen}\theta_2 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow F_1\frac{3}{\sqrt{13}} = F_2\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow F_1 = F_2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$F_1\frac{2}{\sqrt{13}} + F_2\frac{1}{\sqrt{5}} = 10 \Rightarrow F_2\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{13}}}{3} \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{13}}} + F_2\frac{1}{\sqrt{5}} = 10$$

$$F_2\frac{4}{3\sqrt{5}} + F_2\frac{1}{\sqrt{5}} = 10$$

$$F_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{4}{3}+1\right) = 10 \Rightarrow F_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{7}{3} = 10 \Rightarrow F_2 = \frac{30\sqrt{5}}{7}$$

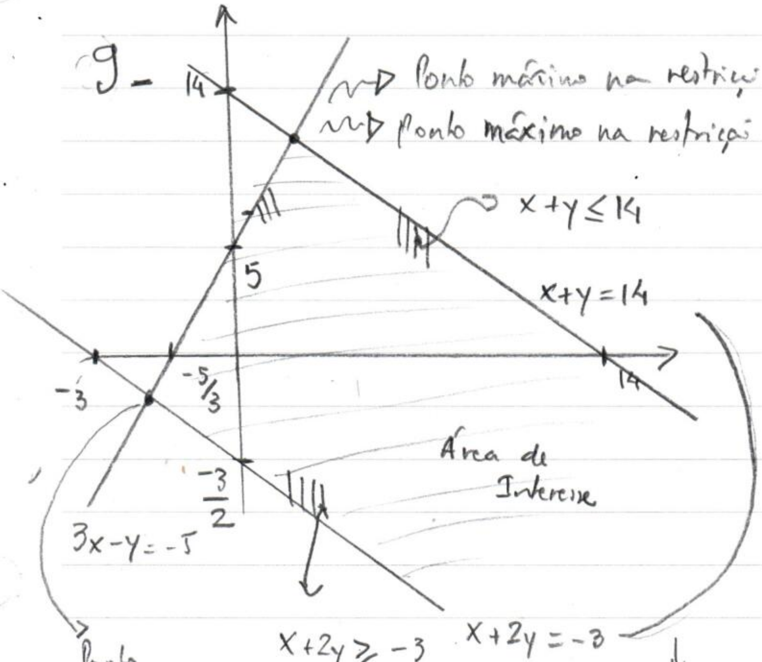
$$F_1 = \frac{30\sqrt{5}}{7} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3} = \frac{20\sqrt{13}}{7}$$

Portanto as tensões são:

$F_1 = \frac{20\sqrt{13}}{7}$, na corda à direita

$F_2 = \frac{30\sqrt{5}}{7}$, na corda à esquerda

9 -



→ Ponto máximo na restrição $3x-y=-5$

→ Ponto máximo na restrição $x+y=14$

Ponto mínimo na restrição $x+2y=-3$

restrições se encontram no ponto máximo da restrição $x+2y=-3$ e mínimo de $x+y=14$

(Figura mal feita, não representa as restrições direito - A área restrita é fechada!)

Em $x+y=14$, $y=14-x$

$$f(x,y)=f(x)=2+3x+4(14-x)$$
$$=2+3x+56-4x$$
$$=58-x$$

Em $3x-y=-5$, $y=3x+5$

$$f(x,y)=f(x)=2+3x+4(3x+5)$$
$$=2+15x+20=$$
$$=15x+22$$

Em $x+2y=-3$, $2y=-3-x$

$$f(x,y)=f(x)=2+3x+2(-3-x)$$
$$=2+3x-6-2x$$
$$=x-4$$

Assim, ponto máximo em $\begin{cases} x+y=14 \\ 3x-y=-5 \end{cases}$ $4x=9$ $x=9/4$, $y=45/4$

Ponto mínimo em $\begin{cases} 3x-y=-5 \\ x+2y=-3 \end{cases}$ $7x=-13$, $x=-13/7$, $y=\left(-3+\frac{13}{7}\right)/2=-\frac{4}{7}$

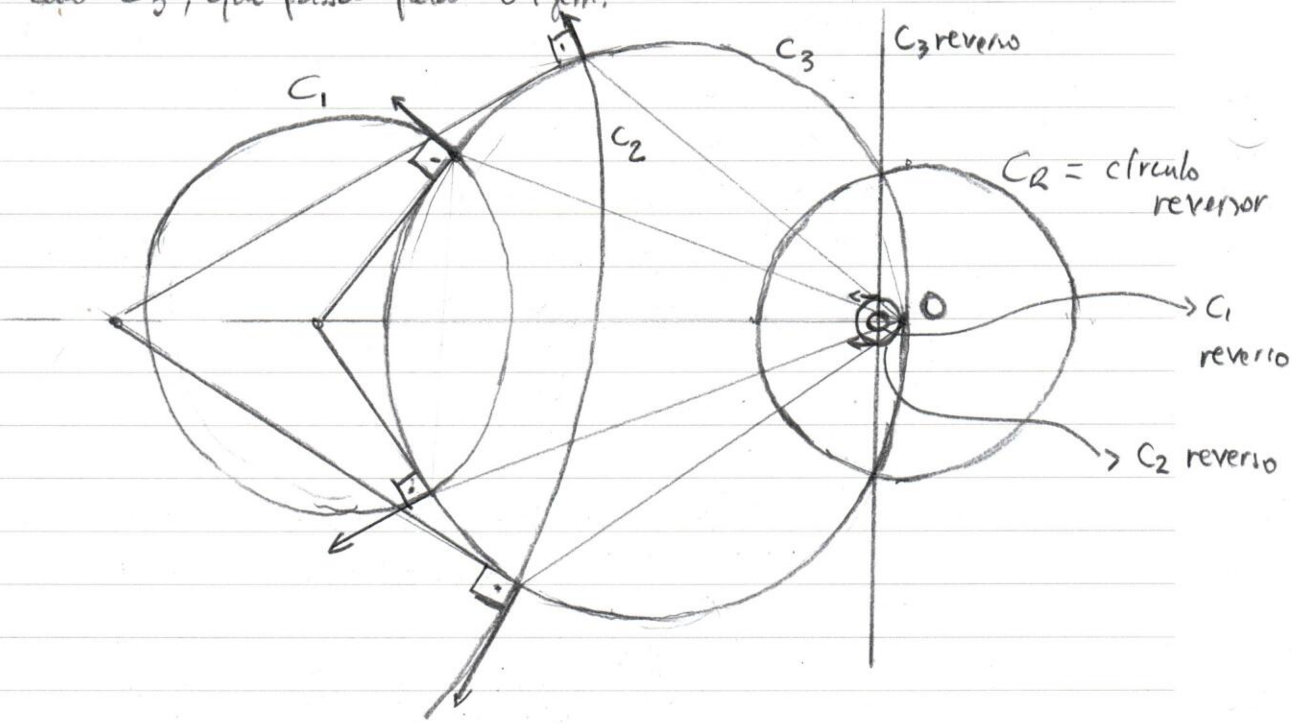
Máximo em: $f\left(\frac{9}{4},\frac{45}{4}\right)=2+3\cdot\frac{9}{4}+4\cdot\frac{45}{4}=\frac{8+3\cdot 9+4\cdot 45}{4}=\frac{215}{4}$

Mínimo em: $f\left(\frac{-13}{7},\frac{-4}{7}\right)=2+3\cdot\left(\frac{-13}{7}\right)+4\cdot\left(\frac{-4}{7}\right)=\frac{14-3\cdot 13-4\cdot 4}{7}=\frac{-34}{7}$ //

6 _ O argumento geométrico assume duas propriedades das inversões:

1- Os ângulos são preservados
2- Círculos que passam em O se tornam retas que não passam em O

Dados dois círculos C_1 e C_2, na seguinte relação com um círculo C_3, que passa pela origem:



C_3 reverso é uma reta que não passa pela origem e C_2 intersecta em angulos retos C_3 e C_1 também intersecta em ângulos retos C_3, C_1 sendo englobado por C_2. O eixo horizontal passa pelos centros de C_1, C_2 e C_3

Ao reverter C_1 e C_2, em C_R, C_3 será revertido em uma reta, e os pontos de encontro de C_1, C_2 e C_3 estarão todos revertidos sobre a reta C_3 reverso, conservando os ângulos de 90°. Uma reta cortando uma circunferência em um ângulo de 90°, corta-a pelo diâmetro. Assim, C_1 reverso e C_2 reverso são cortados pelo diâmetro por C_3 reverso

Mas não apenas isso - Ambos círculos são cortados ao meio pelo eixo horizontal.

Assim, o centro de ambos os círculos reversos estão sobre C_3 Reverso (que corta ambos C_1 e C_2 reversos ao centro horizontal) e sobre o eixo horizontal $\Rightarrow$ portanto C_1 e C_2 reversos compartilham o mesmo centro, sendo concêntricos.

Questão 7 - Não deu tempo.