Cálculo Infinitesimal I

prof. Felipe Acker

1^a lista de exercícios

Esta lista será discutida na primeira semana do curso. Ela contém um apanhado das idéias que trabalharemos ao longo de todo o semestre. Seria interessante que você desse uma olhada nela antes do início das aulas. O ideal, é claro, é que você pense nas questões que ela coloca e venha para a primeira aula preparado para discutir suas dificuldades.

Como você pode notar, ela não contém exercícios mecânicos e é bem provável que você a ache pesada (é provável que você leve horas, ou mesmo dias, se não tiver uma dica, tentando resolver alguns dos problemas). Não se assuste: daqui a seis meses você vai achá-la fácil. Mas lembre-se: acabou aquele tempo em que você assistia às aulas e depois ia brincar. O tempo gasto tentando resolver os problemas nunca é perdido: ele prepara o espírito para enfrentar as dificuldades e fará com que, quando trabalharmos a teoria correspondente, você compreenda mais rápido.

Se você achou a lista fácil, procure-me no início do curso para conversarmos. Se achou impossível, ótimo: finalmente você tem desafios à altura da sua inteligência. Venha às aulas para aprender.

Parte I: somas infinitas

1. Sejam a e b dois números reais e n um natural. Mostre que

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

2. Sejam a e q reais e n natural. Mostre que

$$\sum_{i=0}^{n-1} aq^i = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Dê uma demonstração geométrica para o caso $q > 0$.

3. Note que as fórmulas acima valem também se a, b e q são números complexos.

4. Se $|q| < 1$, quanto vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n?$$

Por quê?

5. A soma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é finita ou infinita?
6. E

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}?$$

7. O que você acha do seguinte "‘paradoxo"’ de Zenon: o guerreiro Aquiles nunca conseguirá alcançar uma tartaruga, já que, para fazê-lo, terá primeiro que percorrer a distância que os separa; porém, ao chegar a este ponto, a tartaruga já terá andado um pouco, de forma que será necessário percorrer a nova distância; novamente, porém, a tartaruga terá andado, e assim sucessivamente.
8. Seja n um natural. Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

9. Sejam n e k naturais. Encontre uma fórmula de recorrência para

$$\sum_{i=1}^{n} i^k.$$

Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} i^k=p_k(n),$$

onde $p_k(n)$ é um polinômio de grau $k+1$, cujo termo de maior grau é $\frac{n^{k+1}}{k+1}$.
10. Mostre que $\sqrt{2}$ é irracional. Existe alguma base de numeração em que $\sqrt{2}$ tenha uma representação finita?
11. O que é uma soma infinita? O que é um número real?

Parte II: áreas e comprimentos

12. Seja a um número real positivo. Calcule a área limitada pela curva de equação $y=x^2$, a reta horizontal $y=0$ (eixo dos x) e a reta vertical $x=a$.
13. Sejam a um número real positivo e n um número natural. Calcule a área limitada pela curva de equação $y=x^n$, a reta horizontal $y=0$ (eixo dos x) e a reta vertical $x=a$.
14.Sejam a e b números reais positivos. Sejam A a área limitada pela curva de equação $y=\frac{1}{x}$, a reta $y=0$ e as retas $x=1$ e $x=a$ e B a área limitada pela curva de equação $y=\frac{1}{x}$, a reta $y=0$ e as retas $x=b$ e $x=ab$. Mostre que $A=B$.
15. O que é área (particularmente no caso de uma figura limitada por linhas curvas)? Como se calcula?
16. Sejam A e B dois polígonos convexos tais que $A\subset B$. Mostre que o perímetro de A é menor (ou igual, se $A=B$) que o de B.
17. O que é comprimento (de uma linha curva)? Como se calcula?

18. Mostre que existe uma constante (que chamaremos π_1) tal que, para qualquer r, a razão entre a área do disco de raio r e r^2 é π_1.
19. Mostre que existe uma constante (que chamaremos π_2) tal que, para qualquer r, a razão entre o comprimento do círculo de raio r e r é $2\pi_2$.
20. Mostre que $\pi_1 = \pi_2$.
21. Seja c um arco de um círculo de raio r. Mostre que a área do correspondente setor circular é $\frac{r}{2}$ vezes o comprimento de c.
22. Sendo o ângulo θ definido como razão entre o comprimento do arco e o raio, mostre que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\theta}{\theta} = 1.$$

Parte III: velocidade e tangente

23. Considere a curva c correspondente ao gráfico da função $f(x) = x^2$. Calcule o coeficiente angular da secante a c passando pelos pontos $(2, 4)$ e $(2 + \Delta x, 4 + 4\Delta x + \Delta x^2)$. Calcule o coeficiente angular da tangente a c no ponto $(2, 4)$. Calcule o coeficiente angular da tangente a c no ponto (a, a^2), a qualquer.
24. Seja n um número natural. Calcule o coeficiente angular da tangente ao gráfico de $f(x) = x^n$ em um ponto (a, a^n) qualquer.
25. O que é tangente? Como se calcula?
26.Uma caixa (sem tampa) vai ser construída a partir de uma folha de cartolina de lados a e b, com $a < b$. Para isto, cortam-se quadrados de lado x em cada um dos cantos, de forma que as dimensões da caixa serão $a - 2x$, $b - 2x$ e x. Determine x de maneira que o volume da caixa seja o maior possível.
27. Quantas raízes reais tem o polinômio $p(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 9$? E $q(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 2$?
28.Um motorista passa pelo posto de pedágio de uma estrada, situado no quilômetro 67, às 15:41. Às 16:29 é parado no posto da Polícia Rodoviária, situado no quilômetro 175. O patrulheiro pede para ver o recibo do pedágio (que informa data, hora e placa do carro) e aplica multa por excesso de velocidade. Como pode ele ter certeza de que em algum momento o motorista andou a velocidade superior a 110km/h?
29. O que é velocidade instantânea?
30. Para $a > 1$, seja $L(a)$ a área compreendida entre o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ e as retas $y = 0$, $x = 1$ e $x = a$. Com que velocidade, em relação à variável a, varia a área $L(a)$? Qual o coeficiente angular da tangente ao gráfico de L no ponto $(a, L(a))$?