Computação Científica I

Lista 2: Interpolação, Integração, Derivação. Tudo é Álgebra Linear

Professor: Bernardo Costa

Monitor: Gabriel Bastianello

para 10 de Novembro de 2022

"There is hardly any theory which is more elementary [than linear algebra], in spite of the fact that generations of professors and textbook writers have obscured its simplicity by preposterous calculations with matrices."

J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Vol. 1., 1960.

"Numerical linear algebra [...] is often a fundamental part of engineering and computational science problems, such as image and signal processing, telecommunication, computational finance, materials science simulations, structural biology, data mining, bioinformatics, fluid dynamics, and many other areas."

Wikipedia (June 20, 2017).

Esta lista apresenta uma abordagem unificada para três temas do curso: derivadas, integrais e interpolação polinomial. A abordagem mais natural vai "de trás pra frente", então começaremos com interpolação — que será usada nos dois outros — e que também ajuda a fixar a notação.

Calendário de entrega:

1. Interpolação, para 10 de Novembro de 2022.
2. Integração, para 17 de Novembro de 2022.
3. Derivação, para 24 de Novembro de 2022.

1 Interpolação como aplicação linear

Seja f uma função qualquer de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$. O conjunto de todas as funções será denotado por $\mathcal{F}$, e o dos polinômios de grau menor ou igual a d, por Pol_d. Se $g(x)$ é o polinômio interpolador de Lagrange de f nos pontos x_i, podemos escrever $g(z) = \sum g_j z^j$ para coeficientes g_j. O objetivo deste exercício é estudar algumas “linearidades” desta operação.

Começamos com um conjunto com n “nós de interpolação” fixos: $X = \{x_i\}$, mas não necessariamente igualmente espaçados.

1. Seja a aplicação L_X de $\mathcal{F}$ em Pol_{n-1}, que para cada função $f \in \mathcal{F}$ dá o polinômio interpolador nos pontos x_i. Mostre que L_X é linear: ou seja, mostre que $L_X(f+g) = L_X(f) + L_X(g)$ para quaisquer funções f e g, e também que $L_X(k \cdot f) = k \cdot L_X(f)$ para um real k qualquer.

2. Seja π_X a aplicação de $\mathcal{F}$ em $\mathbf{R}^n$ que a cada função f dá o vetor $(f(x_i))$. Mostre que esta aplicação também é linear.

3. Mostre que L_X é uma projeção, ou seja, que $L_X(L_X(f)) = L_X(f)$. Em “português”, o polinômio interpolador de um polinômio de grau menor do que n é ele próprio.

4. Mostre que π_X é injetiva e sobrejetiva de Pol_{n-1} em $\mathbf{R}^n$.

5. Seja $\phi_X : \mathbf{R}^n \to \mathrm{Pol}_{n-1}$ a aplicação inversa de π_X restrita aos polinômios de grau menor do que n. Mostre que ϕ_X é uma aplicação linear.

6. Fixe $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e calcule $\phi_X(e_i)$ para os vetores e_i da base canônica de $\mathbf{R}^4$, *sem* usar π_X: quais são as raízes do polinômio $\phi_X(e_i)$? Deduza a regra para um X qualquer.

7. Mostre que, para toda função $f \in \mathcal{F}$, o polinômio $L_X(f)$ é igual ao polinômio $\phi_X(\pi_X(f))$. Explique porque isto dá uma forma explícita para a interpolação polinomial.

8. Deduza que L_X é a composta de duas aplicações lineares. Isso prova que L_X é linear, de outra forma.

9. Seja agora V um subespaço vetorial de $\mathcal{F}$, gerado por n funções ψ_i para $i = 1 \dots n$, não necessariamente polinomiais. Qual a condição sobre os valores de $\psi_i(x_j)$ para que o problema de interpolação de uma função f como combinação das n funções ψ_i tenha sempre solução?

10. Mostre que esta interpolação “generalizada” ainda é uma aplicação linear, e ainda é uma projeção (em V).