Fórmulas do Triedro de Frenet

Paulo Roberto Rodrigues da Silva Filho

2022-10-01

Tabela de Fórmulas Considere o comprimento de arco $s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\vec{r}}{du} \right\| du$

Conceito	**Parametrização**	
	Variável Qualquer	**Comprimento de Curva**
Curva	$r = \vec{r}(t)$	$r = \vec{r}(s)$
Derivada	$\frac{dr}{dt}(t) = \dot{r}(t)$	$\frac{dr}{ds}(s) = r'(s)$
Tangente	$\vec{T}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\|}$	$\vec{T}(s) = \vec{r'}(s)$
Normal	$\vec{N}(t) = \frac{\dot{\vec{T}}(t)}{\left\|\dot{\vec{T}}(t)\right\|}$	$\vec{N}(s) = \frac{\vec{T}'(s)}{\left\|\vec{T}'(s)\right\|} = \frac{\vec{r''}(s)}{\left\|\vec{r''}(s)\right\|}$
Binormal	$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \frac{\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)}{\left\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\right\|}$	$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \frac{\vec{r'}(s) \times \vec{r''}(s)}{\left\|\vec{r''}(s)\right\|}$
Curvatura	$\kappa = \frac{\left\|\dot{\vec{T}}(t)\right\|}{\left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\|} = \frac{\left\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\right\|}{\left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\|^3}$	Definição: $\kappa = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds}(s) \right\| = \left\| \vec{r''}(s) \right\|$ Interpretação em curva plana ($\mathbb{R}^2$, o plano Osculatório): Seja $\phi(s) = \measuredangle(\vec{T}(s), 0x)$, $\kappa(s) = \left\| \frac{d\phi}{ds} \right\|$
Raio de Curvatura	$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$	$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$
Torção	$\tau(s) = \frac{(\dot{\vec{r}}(t), \ddot{\vec{r}}(t), \dddot{\vec{r}}(t))}{\left\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\right\|^2} = \frac{[\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)] \cdot \dddot{\vec{r}}(t)}{\left\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\right\|^2}$	Definição: $\tau(s) = \vec{B}(s) \cdot \vec{N}'(s) = -\vec{B}'(s) \cdot \vec{N}(s)$
Equações de Frenet		$\frac{d\vec{T}}{ds}(s) = \kappa \vec{N}(s)$ $\frac{\vec{N}}{ds}(s) = -\kappa \vec{T}(s) + \tau \vec{B}(s)$ $\frac{d\vec{B}}{ds}(s) = -\tau \vec{N}(s)$
Curvatura com Sinal	$\kappa_s(t) = \frac{\dot{\vec{T}}(t)}{\left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\|} \cdot \vec{N}(t)$	$\kappa_s(s) = \vec{T}'(s) \cdot \vec{N}(s)$
Evoluta Se a curva for regular (ou seja, κ_s nunca é zero):	$\vec{E}(t) = \vec{r}(t) + \rho(t)\vec{N}(t)$ $= \vec{r}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\vec{N}(t)$	$\vec{E}(s) = \vec{r}(s) + \rho(s)\vec{N}(s)$ $= \vec{r}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\vec{N}(s)$ Obs.: essa fórmula é igualmente vália para s e para t, porque s pode ser, também, considerada apenas uma parametrização.
Velocidade	$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$	$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}(t)\vec{T}(s(t))$
Aceleração	$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$	$\vec{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}(t)\vec{T}(s(t)) + \left(\frac{ds}{dt}(t)\right)^2 \kappa \vec{N}(t)$ Onde: Aceleração Tangencial: $a_t(t) = \frac{d^2s}{dt^2}(t)$ Aceleração Centrípeta: $a_c(t) = \kappa \left(\frac{ds}{dt}(t)\right)^2 = \frac{\left(\frac{ds}{dt}(t)\right)^2}{\rho(t)}$
Rapidez	$R = \left\|\vec{v}(t)\right\|$	$R = \frac{ds}{dt}(t)$