Cálculo Infinitesimal I - 2ª Lista de exercícios

Parte III - Integrais

4.1 - a) Se a trajetória satisfaz $m\ddot{x}(t) = F(x(t)),\ \forall t \in [a,b]$

$$\Rightarrow W = \int_a^b F(x(t))\cdot\dot{x}(t)\,dt = \int_a^b m\ddot{x}(t)\cdot\dot{x}(t)\,dt \qquad (1)$$

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \Rightarrow$

$$(1): \int_a^b m(\ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3(t))\cdot(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t))\,dt =$$

$$= \int_a^b m[\ddot{x}_1(t)\dot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t)\dot{x}_2(t) + \ddot{x}_3(t)\dot{x}(t)]\,dt \qquad (1)$$

Sabemos que $\frac{d}{dt}[\dot{x}_1(t)]^2 = 2\dot{x}_1(t)\ddot{x}(t) \qquad (2)$

$$\text{De (1)}: m\int_a^b [\ddot{x}_1(t)\dot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t)\dot{x}_2(t) + \ddot{x}_3(t)\dot{x}(t)]\,dt =$$

$$= m\cdot\frac{1}{2}\int_a^b 2[\ddot{x}_1(t)\dot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t)\dot{x}_2(t) + \ddot{x}_3(t)\dot{x}_3(t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}m\int_a^b 2\dot{x}_1(t)\ddot{x}(t)\,dt + \int_a^b 2\dot{x}(t)\ddot{x}(t)\,dt + \int_a^b 2\dot{x}_3(t)\ddot{x}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}m\left[[\dot{x}_1(t)]^2\Big|_a^b + [\dot{x}_2(t)]^2\Big|_a^b + [\dot{x}_3(t)]^2\Big|_a^b\right] =$$

$$= \frac{1}{2}m\{[\dot{x}_1(b)]^2 - [\dot{x}_1(a)]^2\} + \frac{1}{2}m\{[\dot{x}_2(b)]^2 - [\dot{x}_2(a)]^2\} + \frac{1}{2}m\{[\dot{x}_3(b)]^2 - [\dot{x}_3(a)]^2\}$$

$$= \frac{1}{2}m\{[\dot{x}_1(b)]^2 + [\dot{x}_2(b)]^2 + [\dot{x}_3(b)]^2 - [\dot{x}_1(a)]^2 - [\dot{x}_2(a)]^2 - [\dot{x}_3(a)]$$

$$= \frac{1}{2}m\{|\dot{x}(b)|^2 - |\dot{x}(a)|^2\} \quad \square$$

b) $F(x) = m\ddot{x}(t) = -\frac{GMm}{|x|^3}x$, mas $E(t) = \frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2 - \frac{GMm}{|x(t)|} = k$,

K é uma constante.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m|\dot{x}(a)|^2 - \frac{GMm}{|x(a)|} = \frac{1}{2}m|\dot{x}(b)|^2 - \frac{GMm}{|x(b)|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m|\dot{x}(b)|^2 - \frac{1}{2}m|\dot{x}(a)|^2 = \frac{GMm}{|x(b)|} - \frac{GMm}{|x(a)|} \quad (1)$$

Mas $W = \frac{1}{2}m|\dot{x}(b)|^2 - \frac{1}{2}|\dot{x}(a)|^2$, portanto, de (1)

$$W = \frac{GMm}{|x(b)|} - \frac{GMm}{|x(a)|}$$

42 - a) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, diferenciável, dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

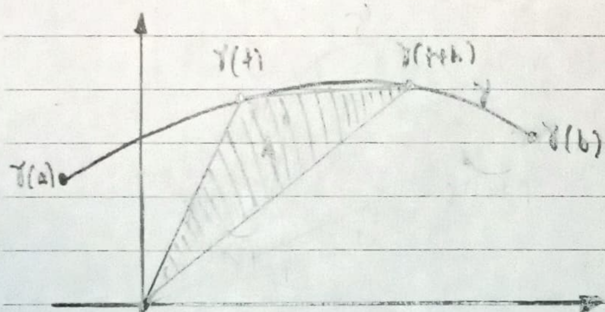


Figura 1

$P_1 = \gamma(t) = (x(t), y(t))$
$P_2 = \gamma(t+h) = (x(t+h), y(t+h))$
$P_3 = (0,0)$

Como temos três pontos no plano, podemos calcular a área do triângulo pelo determinante:

$$A_T = \frac{1}{2}\det T = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x(t) & y(t) & 1 \\ x(t+h) & y(t+h) & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left[x(t)\,y(t+h) - x(t+h)\,y(t)\right]$$

Se calcularmos a área, começando em (0,0), no sentido do relógio, considerando a figura 1 acima.

b) Temos que, para um A_T qualquer, $t \in [a,b]$

$$A_T = \frac{1}{2}\left[x(t)y(t+h) - x(t+h)y(t)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x(t)y(t+h) - x(t)y(t) + x(t)y(t) - x(t+h)y(t)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{x(t)\left[y(t+h) - y(t)\right] - y(t)\left[x(t+h) - x(t)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{x(t)\frac{y(t+h) - y(t)}{h} - y(t)\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right\} \cdot h$$

Se chamamos $\left.\begin{array}{l} t = t_i \\ t+h = t_{i+1} \end{array}\right\} \Rightarrow h = t_{i+1} - t_i$

$$\Rightarrow A_{T_i} = A_i = \frac{1}{2}\left[x(t_i)\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - y(t_i)\frac{x(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right](t_{i+1} - t_i)$$

Se temos uma partição de $[a, b] = (t_0 = a, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n = b)$

$$\Rightarrow A = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2}\left[x(t_i)\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - y(t_i)\frac{x(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right](t_{i+1} - t_i)$$

Se $\sup\{|t_{i+1} - t_i|\} \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{\sup\{|t_{i+1} - t_i|\} \to 0} A =$

$$= \lim_{\sup\{|t_{i+1} - t_i|\} \to 0} \sum_{i=0}^{n \to \infty} \frac{1}{2}\left[x(t_i)\underbrace{\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}}_{y'(t)} - y(t_i)\underbrace{\frac{x(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}}_{x'(t)}\right]\underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{dt}$$

$$= \int_{t_0 = a}^{t_n = b} \frac{1}{2}\left[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\right]dt = \frac{1}{2}\int_a^b \left[-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)\right]dt$$

$\square$

O sinal de S indica se $\gamma(t)$ varia horário ou contra-horário, na medida em que t aumenta de a para b.

43. Precisa aplicar o conceito de torção da curva - para mostrar que a curva tem torção zero e é, portanto, plana - não deu tempo de estudar - vou entregar o exercício posteriormente

44. Problema da braquistócrona é complexo - não deu tempo de estudar - vou entregar o exercício posteriormente.

45. Exercício difícil - não consegui fazer - entregar posteriormente. Não consegui encontrar uma definição clara de curva fechada convexa.

46. Tabela básica de integrais - Integrais indefinidas

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + C$
$\sec^2 x$	$\operatorname{tg} x + C$
$\operatorname{cossec}^2 x$	$-\operatorname{cotg} x + C$
$(\sec x)(\operatorname{tg} x)$	$\sec x + C$
$\operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x$	$-\operatorname{cossec} x + C$
$\operatorname{tg} x$	$\ln\lvert \sec x\rvert + C$
$\operatorname{cotg} x$	$\ln\lvert \operatorname{sen} x\rvert + C$
$\sec x$	$\ln\lvert \sec x + \operatorname{tg} x\rvert + C$
$\operatorname{cossec} x$	$\ln\lvert \operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x\rvert + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\operatorname{arc\,sen}(x/a) + C$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}(x/a) + C$
$\frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}(x/a) + C$

47. a) $\int \sec x \, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos x \cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos^2 x}$ (1)

Se $\cos x \, dx = du \Rightarrow u = \text{sen}\, x$

Assim, por substituição: (1): $\int \frac{\cos x \, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x \, dx}{1 - \text{sen}^2 x} = \int \frac{du}{1-u^2}$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \int \frac{du}{(1+u)(1-u)} = \int \left[\frac{A}{(1+u)} + \frac{B}{(1-u)}\right] du \quad (2)$$

Mas: $\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u} = \frac{A(1-u) + B(1+u)}{(1+u)(1-u)} = \frac{(A+B) + (B-A)u}{(1+u)(1-u)}$

$\Rightarrow A + B = 1 \quad A - B = 0 \quad \Rightarrow A = B = 1/2$

Assim (2) $\int \left[\frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u}\right] du = \int \left[\frac{1/2}{1+u} + \frac{1/2}{1-u}\right] du =$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right) du = \frac{1}{2}\left[\int \frac{du}{1+u} + \int \frac{du}{1-u}\right] = \frac{1}{2}\left[\ln|1+u| - \ln|1-u|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+\text{sen}\, x}{1-\text{sen}\, x}\right| + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{(1+\text{sen}\, x)(1+\text{sen}\, x)}{(1-\text{sen}\, x)(1+\text{sen}\, x)}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{(1+\text{sen}\, x)^2}{\cos^2 x}\right| + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+\text{sen}\, x}{\cos x}\right|^2 + C = \frac{2}{2} \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\right| + C =$$

$= \ln|\sec x + \text{tg}\, x| + C.$ ///

b) $\int \cos^5 x \, dx = \int \cos^4 x \cos x \, dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx = \int (1 - \text{sen}^2 x)^2 \cos x \, dx$ (1)

Se $u = \text{sen}\, x$, $du = \cos x \, dx$, então:

(1): $\int (1-\text{sen}^2 x)^2 \cos x \, dx = \int (1-u^2)^2 du = \int (1 - 2u^2 + u^4) du =$

$= u - 2\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \text{sen}\, x - \frac{2}{3}\text{sen}^3 x + \frac{1}{5}\text{sen}^5 x + C.$ ///

⑥

c) Essa integral é extremamente trabalhosa, então apresento apenas as etapas:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2(x-1)^3} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1+1)^2(x-1)^3} = \int \underbrace{\frac{dx}{[(x+1)^2+1]^2(x-1)^3}}_{\text{I - Aplica Frações Parciais}}$$

$$= \int \Bigg[\underbrace{\frac{A}{[(x+1)^2+1]^2} + \frac{B}{(x+1)^2+1}}_{\text{II - Aplica Substituição de Variáveis Aqui para as integrais parciais}} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3} \Bigg] dx$$

d/e/f – Todas essas integrais dão $\emptyset$ (Zero), porque se integra em um intervalo que representa um período completo em todas as funções, que são periódicas.

48. Sejam dadas as integrais:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{n\to 0} \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$$

Dada a integral indefinida, $p \neq 1$ e $p \neq 0$

$$\int \frac{1}{x^p}\,dx = \int x^{-p}\,dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}$$

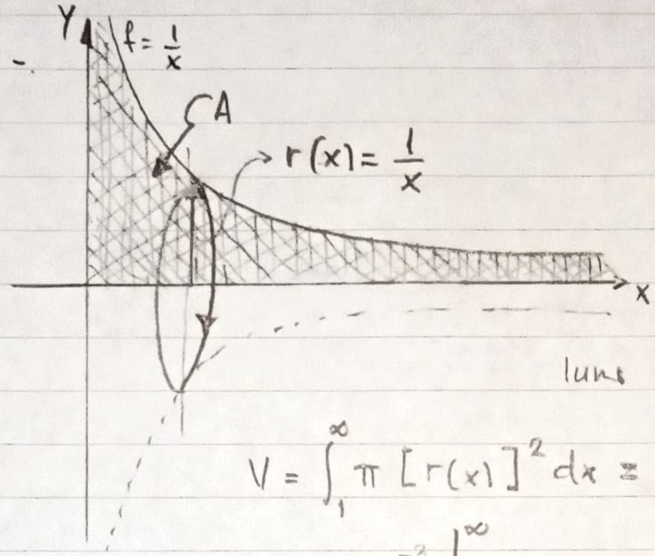
Assim $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{n\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^n = \lim_{n\to\infty} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p};$$

Se $p > 1$, o limite acima existe, e é positivo. Se $p < 1$, o limite tende a infinito. Se $p = 1$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \ln\Big|_1^\infty$, que diverge, também

A integral $\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx$ tem lógica inversa. Se $p<1$, a integral converge, enquanto se $p>1$, a integral diverge.

49.



$$V = \int_1^\infty \pi[r(x)]^2 dx$$

$$A = \int_1^\infty 2\pi \cdot r(x)\sqrt{1+[r'(x)]^2}\, dx$$

Vamos começar deduzindo o volume V:

$$V = \int_1^\infty \pi\,[r(x)]^2 dx = \pi \int_1^\infty \left[\frac{1}{x}\right]^2 dx = \pi \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \pi \int_1^\infty x^{-2} dx$$

$$= \pi \frac{x^{-3}}{-3}\Bigg|_1^\infty = \lim_{n\to\infty} -\pi \frac{x^{-3}}{3}\Bigg|_1^n = \lim_{n\to\infty} \cancelto{0}{-\pi \frac{n^{-3}}{3}} + \pi \frac{1^{-3}}{3}$$

$\therefore V = \frac{\pi}{3}$, que é um valor finito.

Agora vamos deduzir a área A:

$$A = \int_1^\infty 2\pi \cdot \frac{1}{x}\sqrt{1+\left[\left(\frac{1}{x}\right)'\right]^2}\, dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]^2}\, dx =$$

$$= 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{-2x}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x^4}}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{x^4}+4}\left(\frac{2x^2\, \text{arcsenh}\,(2x^2)}{\sqrt{4x^4+1}} - 1\right)\Bigg|_1^\infty$$, que diverge.