Relatório - Modelagem Matemática
Estudo de População de Aves na Amazônia

Usando o Modelo de Reação-Difusçao para avaliar sobrevida de populações em manchas de floresta em áreas desmatadas.

Paulo Roberto Rodrigues da Silva Filho
Pedro Paulo Dantas Silva Martins
Vicente Alves da Silva Sirufo

2024-07-20

Contents

1 Introdução

Em função do processo de desmatamento da Amazônia, percebeu-se que, dentro das regiões desmatadas, formam-se manchas florestadas isoladas. Tais manchas podem ou não ser adequadas para a sustentação de populações animais. O modelo utilizado para se avaliar a capacidade de tais manchas sustentarem populações é o Modelo de Reação/Difusão, regido pela Equação Diferencial Parcial (EDP) FKPP (Modelo Fischer-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov). Foi avaliada a capacidade de sustentação de população de uma única espécie e, também, de duas espécies em competição.

Para entender o problema, vamos, primeiro, apresentar um diagrama, representando a floresta e áreas desmatadas, conforme pode ser visto na Figura 1. Conforme essa figura, temos uma grande área de floresta e uma área desmatada que possui manchas de floresta. A área desmatada pode suportar uma população mínima dos animais em estudo, ou suportar uma população temporária de forma que permita a migração dessas populações entre a área de floresta virgem e as manchas na área desmatada.

Uma vez dada essa representação de ambiente, padrão, podemos utilizar o Modelo de Reação-Difusão, assumindo que, entrando uma determinada população em uma mancha de floresta - ou estando essa população lá isolada, antes do processo de desmatamento - há condições de a população se reproduzir dentro dessa área, estando sujeita a restrições do meio, cooperação e competição intra-específica.

Já no caso de duas populações concorrendo na mesma região, devemos também assumir que a região desmatada tenha capacidade de suportar uma quantidade muito baixa dessas populações, de forma que a hipótese da difusão faça sentido. Fazemos, então, uma análise de ambas as populações em conjunto, em competição.

Tanto no caso da população isolada, quanto na de duas populações, a geometria das manchas (tamanho) e características intrínsecas delas permitem definir uma capacidade de carregamento das populações, que afetam as dinâmicas populacionais. A identificação de um tamanho mínimo de mancha e o isolamento dessa mancha em relação à área florestada, ou a outras manchas também são características a relevantes para o estudo do problema.

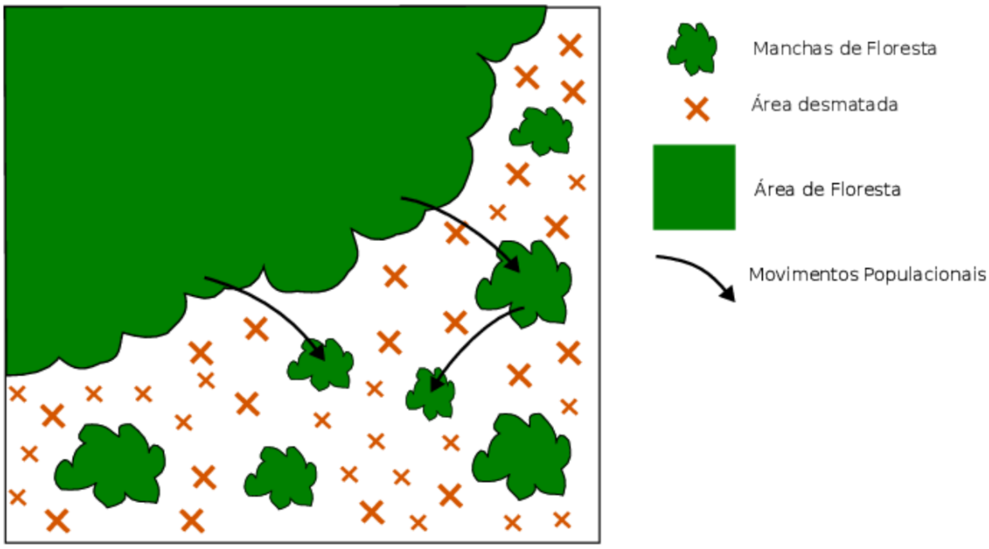

Figura 1: Representação de área florestada e de manchas de floresta. A área florestada pode ser imaginada como uma mancha de floresta de tamanho infinito, ou, apenas, uma área de tamanho grande o suficiente para ser considerada infinita.

2 Modelagem

Agora vamos apresentar os dois modelos avaliados, o modelo de uma população e o modelo de duas populações. Para ambos os casos são usados variantes da EDP FKPP, apresentadas tais variantes caso a caso.

2.1 Caso 1: Uma única população

Para o caso de uma população, o modelo considerado foi FKPP com um termo difusivo (termo de segunda ordem) e os termos reativos, com cooperação (termo linear) e com competição (termo quadrático), sobre uma população u:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha u - \beta u^2 + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Com as condições de contorno de Dirichlet:

$$u(x = 0, l) = 0$$

Sendo:

- **u(x,t)**: a população presente na posição espacial e no tempo, na mancha de floresta ou em uma área florestada.
- **D**: taxa de difusividade da população - unidade: $\mathbf{comprimento^2/tempo}$.
- **a**: Taxa de cresimento populacional da espécie - unidade: $\mathbf{1/tempo}$
- **b**: Se $\mathbf{1/C}$ é a capacidade de carregamento de uma população para uma mancha ou região de floresta, então $C = \frac{b}{a}$, de forma que **b** indica as condições que atrapalhem o crescimento populacional, como geometria da região de mancha, competição por comida, entre outras.
- **l**: Comprimento (não adimensionalizado) da mancha ou região florestada

Para facilitar a análise, as seguintes transformações são feitas, para se adimensionalizar a equação e, então, avaliar as suas propriedades:

$$x = x'\sqrt{\frac{D}{a}}$$

$$\partial_x = \partial_{x'}\sqrt{\frac{a}{D}}$$

$$l = L\sqrt{\frac{D}{a}}$$

$$t = t'\frac{1}{a}$$

$$\partial_t = \partial_{t'}a$$

Depois, retornando o nome da variável de distância de **x'** para **x** e de tempo de **t'** para **t**, temos a nova equação:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(x,t) - Cu^2(x,t)$$

$$C(x) = \begin{cases} C_1, & \text{se } |x| < L/2 \\ C_0, & \text{se } |x| > L/2 \end{cases}$$

Onde C_1 e C_0 são a capacidade de carregamento da região interna e externa, respectivamente, de forma que espera-se que a região interna assuma um regime estacionário enquanto a população externa vá assintoticamente para $1/C_0$

Fazemos a seguinte transformação para auxiliar na resolução da EDP:

$$u = \frac{3}{2}\frac{\phi}{C_1},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi - \frac{3}{2}k * (x)\phi^2$$

$$k(x) = \begin{cases} k = \frac{C_0}{C_1}, & \text{se } |x| > L/2 \\ 1, & \text{se } |x| < L/2 \end{cases}$$

É importante ressaltar que **k** pode ser interpretado como um indicador do nível de "isolamento" da região interna, como o quão difícil é sair da região ideal ou o quanto a região interna é mais atrativa do que a externa.

Como ϕ é uma função contínua e simétrica, e $\frac{2}{3}k$ é uma solução para a parte externa, temos as seguintes condições:

$$\phi_{xx} + \phi - \frac{3}{2}k\phi^2 = 0, \quad x < L/2,$$

$$\phi_{xx} + \phi - \frac{3}{2}k\phi^2 = 0, \quad 0 > x > -L/2,$$

$$\phi^o\left(-\frac{L}{2}, \cdot\right) = \phi^i\left(-\frac{L}{2}, \cdot\right),$$

$$\phi^o_x\left(-\frac{L}{2}, \cdot\right) = \phi^i_x\left(-\frac{L}{2}, \cdot\right),$$

$$\phi^o(-\infty, \cdot) = \frac{2}{3k}.$$

Onde os índices i/o representam as regiões interna/externa respectivamente.

Resolvendo as equações para vários **k** e **L** temos os resultados apresentados nas figuras (...) e (...).

2.2 Caso 2: Duas populações

lalalalala