

Fórmulas do Triedro de Frenet

Paulo Roberto Rodrigues da Silva Filho

2022-10-01

Tabela de Fórmulas Considere o comprimento de arco $s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\vec{r}}{du} \right\| du$

Conceito	Parametrização	
	Variável Qualquer	Comprimento de Curva
Curva	$r = \vec{r}(t)$	$r = \vec{r}(s)$
Derivada	$\frac{dr}{dt}(t) = \dot{r}(t)$	$\frac{dr}{ds}(s) = r'(s)$
Tangente	$\vec{T}(t) = \frac{\dot{r}(t)}{\ \dot{r}(t)\ }$	$\vec{T}(s) = r'(s)$
Normal	$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}(t)}{\ \vec{T}(t)\ }$	$\vec{N}(s) = \frac{\vec{T}'(s)}{\ \vec{T}'(s)\ } = \frac{r''(s)}{\ r''(s)\ }$
Binormal	$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \frac{\vec{r}(t) \times \ddot{r}(t)}{\ \vec{r}(t) \times \ddot{r}(t)\ }$	$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \frac{r'(s) \times r''(s)}{\ r''(s)\ }$
Curvatura	$\kappa = \frac{\ \ddot{r}(t)\ }{\ \dot{r}(t)\ } = \frac{\ \vec{r}(t) \times \ddot{r}(t)\ }{\ \dot{r}(t)\ ^3}$	Definição: $\kappa = \left\ \frac{d\vec{T}}{ds}(s) \right\ = \ r''(s)\ $ Interpretação em curva plana $(\mathbb{R}^2, \text{ o plano Osculatório})$: Seja $\phi(s) = \angle(\vec{T}(s), 0x)$, $\kappa(s) = \left\ \frac{d\phi}{ds} \right\ $
Raio de Curvatura	$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$	$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$
Torção	$\tau(t) = \frac{(\vec{r}(t), \ddot{r}(t), \dddot{r}(t))}{\ \dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)\ ^2} = \frac{[\vec{r}(t) \times \ddot{r}(t)] \cdot \dddot{r}(t)}{\ \dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)\ ^2}$	Definição: $\tau(s) = \vec{B}(s) \cdot \vec{N}'(s) = -\vec{B}'(s) \cdot \vec{N}(s)$ Formula por comprimento: $\tau(s) = \frac{(r'(s), r''(s), r'''(s))}{\ r''(s)\ ^2} = \frac{[r'(s) \times r''(s)] \cdot r'''(s)}{\ r''(s)\ ^2}$
Equações de Frenet		$\frac{d\vec{T}}{ds}(s) = \kappa \vec{N}(s)$ $\frac{d\vec{N}}{ds}(s) = -\kappa \vec{T}(s) + \tau \vec{B}(s)$ $\frac{d\vec{B}}{ds}(s) = -\tau \vec{N}(s)$
Curvatura com Sinal	$\kappa_s(t) = \frac{\ddot{r}(t)}{\ \dot{r}(t)\ } \cdot \vec{N}(t)$	$\kappa_s(s) = \vec{T}'(s) \cdot \vec{N}(s)$
Evoluta Se a curva for regular (ou seja, κ_s nunca é zero):	$\vec{E}(t) = \vec{r}(t) + \rho(t) \vec{N}(t)$ $= \vec{r}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \vec{N}(t)$	$\vec{E}(s) = \vec{r}(s) + \rho(s) \vec{N}(s)$ $= \vec{r}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \vec{N}(s)$ Obs.: essa fórmula é igualmente válida para s e para t, porque s pode ser, também, considerada apenas uma parametrização.
Velocidade	$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \dot{r}(t)$	$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}(t) \vec{T}(s(t))$
Aceleração	$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \ddot{r}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t) = \ddot{r}(t)$	$\vec{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}(t) \vec{T}(s(t)) + \left(\frac{ds}{dt}(t)\right)^2 \kappa \vec{N}(t)$ Onde: Aceleração Tangencial: $a_t(t) = \frac{d^2s}{dt^2}(t)$ Aceleração Centrípeta: $a_c(t) = \kappa \left(\frac{ds}{dt}(t)\right)^2 = \frac{\left(\frac{ds}{dt}(t)\right)^2}{\rho(t)}$
Rapidez	$R = \ \vec{v}(t)\ $	$R = \frac{ds}{dt}(t)$