

# Alguns tópicos de eletrostática e de mecânica da partícula

*Carlos Farina*  
*Instituto de Física - UFRJ*

## **Seminários de Matemática Aplicada e Engenharia Matemática** *(6 de maio de 2022)*

**Colaboraram:** *L. Stolze, D. Szilard, P.P. Abrantes, Reinaldo F. de Melo e Souza e F. Rosa*

# Roteiro da apresentação

## *1ª Parte: tópicos de eletrostática*

- Introdução ao método das imagens
- Efeitos de tamanho finito em eletrostática

## *2ª Parte: tópicos de mecânica da partícula*

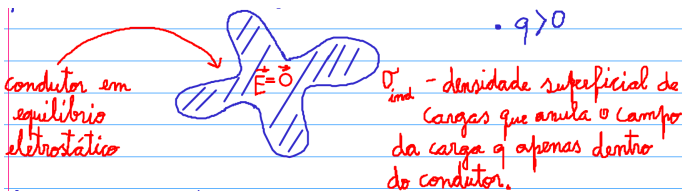
- A braquistócrona e um problema desafiador
- O teorema de Bertrand e outro problema desafiador
- Comentários finais

## 1<sup>a</sup> Parte

# Alguns tópicos de eletrostática

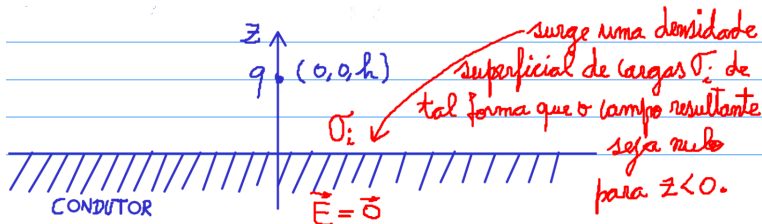
## Introdução ao método das imagens

- O que ocorre quando aproximamos uma carga puntiforme (ou uma distribuição qualquer de cargas) de um condutor de formato arbitrário?
- Não importa se o condutor está aterrado ou isolado (carregado ou não), após o equilíbrio eletrostático ser estabelecido o campo elétrico dentro do condutor será nulo.



- Da lei de Gauss, mostra-se que, dentro do condutor em equilíbrio eletrostático, a densidade volumar de cargas é nula.
- Qualquer que seja a forma do condutor, haverá uma distribuição superficial de cargas (e só uma, devido à unicidade da solução) que anula apenas dentro do condutor o campo da carga  $q$ .

- O campo total (fora e dentro) do condutor é dado pela superposição do campo da carga  $q$  com o da distribuição de cargas induzidas na superfície do condutor (descrita por  $\sigma_{ind}$ ).
- Encontrar  $\sigma_{ind}$  (o que significa resolver o problema) é em geral uma tarefa complicada.
- No entanto, há situações em que isso pode ser feito sem muito esforço, como é o caso de uma carga puntiforme  $q$  próxima a uma região semi-infinita preenchida por um condutor.





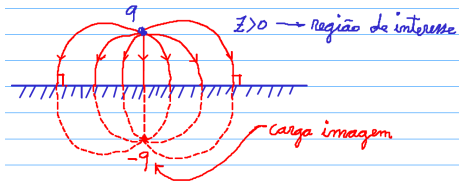
- **Resposta:** por simetria, esse campo deve ser igual ao de uma carga  $-q$  localizada no ponto  $(0, 0, -h)$ , como indica a figura:

- As expressões para o **potencial eletrostático** (tomando  $V|_{\infty} = 0$ ) e para o **campo eletrostático** na região  $z > 0$ , exceto na posição da carga  $q$  são

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - h\hat{\mathbf{z}}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + h\hat{\mathbf{z}}|} \right\} \quad (1)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{r} - h\hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r} - h\hat{\mathbf{z}}|^3} - \frac{\mathbf{r} + h\hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r} + h\hat{\mathbf{z}}|^3} \right\} \quad (2)$$

- Algumas linhas de campo estão desenhadas com linhas vermelhas contínuas na figura abaixo.



- As linhas atingem perpendicularmente a superfície condutora.



- **Força sobre a carga  $q$ :** é simplesmente a força coulombiana exercida pela carga imagem  $-q$  localizada em  $(0, 0, -h)$ !
- **Cálculo de  $\sigma_i$ :** da condição de contorno (lei de Gauss), pode-se mostrar que  $\sigma_i = \epsilon_0 E_z(x, y, 0_+)$ , donde

$$\begin{aligned}\sigma_i(b) &= \frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{z-h}{[b^2 + (z-h)^2]^{3/2}} - \frac{z+h}{[b^2 + (z+h)^2]^{3/2}} \right\} \Big|_{z \rightarrow 0_+} \\ &= -\frac{qh}{2\pi(b^2 + h^2)^{3/2}}, \quad \text{onde } b = \sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}\quad (3)$$

Note que a densidade superficial de cargas  $\sigma_i$  em um dado ponto, só depende da distância  $b$  desse ponto ao eixo  $\mathcal{OZ}$ , como esperado, por simetria.

- **Exercício:** mostre que  $\int_{Plano} \sigma_i dA = -q$  e interprete o resultado à luz da lei de Gauss.

**Obs:** nesse seminário não estaremos interessados no cálculo de  $\sigma_i$  mas, sim, na expressão da força sobre a carga  $q$ .

## Outro enfoque

- O problema anterior poderia ter sido resolvido de uma outra maneira, até mais conveniente em termos práticos.
- **Problema a ser resolvido:** encontrar  $V(\mathbf{r})$  para  $z > 0$  tal que

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - h\hat{\mathbf{z}}) \quad (4)$$

com  $V(\mathbf{r})$  sujeito às condições de contorno

$$V(x, y, z = 0) = 0 \quad \text{e} \quad V(\mathbf{r})|_{\infty} = 0. \quad (5)$$

- A soma do potencial da carga  $q$  com o de uma carga  $-q$  em  $(0, 0, -h)$  respeita, na região  $z > 0$ , essas exigências:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \{V_q(\mathbf{r}) + V_{-q}(\mathbf{r})\} &= -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - h\hat{\mathbf{z}}) + \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} + h\hat{\mathbf{z}}) = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - h\hat{\mathbf{z}}) \\ \{V_q(\mathbf{r}) + V_{-q}(\mathbf{r})\} \Big|_{z=0} &= 0 \quad \text{e} \quad V(\mathbf{r})|_{\infty} = 0. \end{aligned}$$

**Devido à unicidade da solução essa é a solução do problema!**

## Resumindo

- O método das imagens consiste em encontrar uma distribuição de cargas (chamadas imagens) que, ao serem colocadas fora da região física de interesse, criem na região de interesse o mesmo campo que as cargas induzidas nas superfícies condutoras.
- Não importa o procedimento usado para se chegar nas imagens, uma vez que a solução é única.

**Obs:** um bom exercício é calcular, no problema anterior, a força exercida pelas cargas induzidas na superfície condutora sobre a carga  $q$  por integração direta, isto é,

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{Oxy} \frac{\sigma(b')(h\hat{\mathbf{z}} - b'\hat{\mathbf{b}}')}{|h\hat{\mathbf{z}} - b'\hat{\mathbf{b}}'|^3} b' db' d\phi'$$

e mostrar que o resultado é igual à força exercida pela imagem  $-q$ , como esperado.

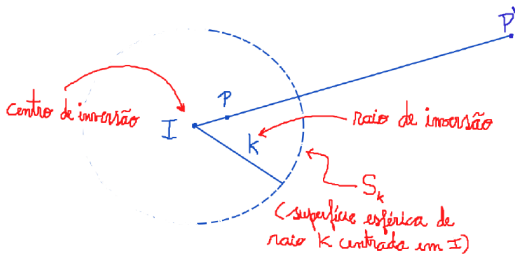
- Analisemos, agora, um problema com uma geometria mais complicada: **sistema carga-esfera**

## Carga próxima a uma esfera condutora aterrada

- **Transformação de Kelvin:** dado um ponto  $I$  (centro de inversão) e um raio  $K$  (raio de inversão), a transformação de Kelvin consiste no mapeamento de  $P$  em  $P'$  definido por

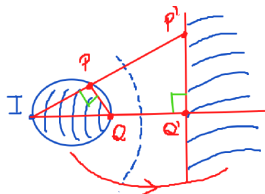
$$\overline{IP} \times \overline{IP'} = K^2,$$

onde  $I$ ,  $K$ ,  $P$  e  $P'$  estão indicados na figura abaixo

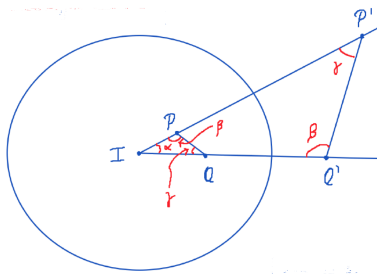


- Todos os pontos dentro da esfera de raio  $K$  serão mapeados em pontos fora dessa esfera (e vice-versa)
- A medida que  $P$  se aproxima de  $I$ ,  $P'$  tende ao infinito e quando  $P$  tende para um ponto de  $S_K$ ,  $P'$  tende a esse ponto.

- **Alguns exemplos:** esfera mapeada em esfera, disco mapeado em semiplano, etc.



- **Propriedade importante:**

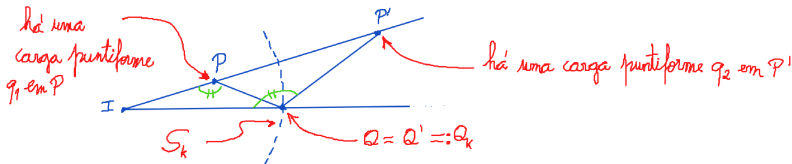


- Os triângulos  $\triangle IPQ$  e  $\triangle IQ'P'$  são semelhantes, pois têm um ângulo em comum e vale a relação  $\frac{\overline{IP}}{\overline{IQ'}} = \frac{\overline{IQ}}{\overline{IP'}}$ .
- Logo, os ângulos  $\widehat{IPQ}$  ( $\beta$ ) e  $\widehat{IQP}$  ( $\gamma$ ) são iguais, respectivamente aos ângulos  $\widehat{IQ'P'}$  e  $\widehat{IP'Q'}$ .

Consequentemente, vale a relação  $\frac{\overline{IQ}}{\overline{IP'}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}}$

## Método das imagens para carga-esfera aterrada

- Suponha que em  $P$  haja uma carga  $q_1$  e em  $P'$ , uma carga  $q_2$ . Suponha que os pontos  $Q$  e  $Q'$  estejam na superfície  $S_K$ .



- O potencial eletrostático no ponto  $Q_K$  é dado por

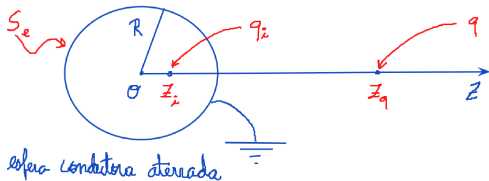
$$V(Q_K) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_1}{PQ_K} + \frac{q_2}{P'Q_K} \right\}.$$

Impondo que  $V(Q_K) = 0$ , temos

$$\frac{q_1}{PQ_K} = -\frac{q_2}{P'Q_K} \implies q_1 = -q_2 \frac{PQ_K}{P'Q_K}$$

Como  $\frac{PQ_K}{P'Q_K} = \frac{IQ_K}{IP'} = \frac{K}{IP'}$ , obtemos, finalmente,  $q_1 = -q_2 \frac{K}{IP'}$ .

- **Resumindo:** Como  $Q_K$  é um ponto arbitrário de  $S_K$ , se uma carga  $q_2$  for colocada em  $P'$  e uma carga  $q_1 = -q_2 \frac{K}{IP'}$  for colocada em  $P$ , imagem de  $P'$  por mapeamento de Kelvin, então o potencial eletrostático em  $S_K$  será nulo.
- Em notação mais amigável:



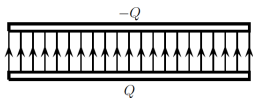
- Carga imagem:  
 $q_i = -q \frac{R}{z_q}$
- Posição da carga imagem:  $z_i = \frac{R^2}{z_q}$

Da discussão anterior, vemos que com  $q_i$  na posição  $(0, 0, z_i)$ , temos  $V(\mathbf{r})|_{S_K} = 0$ .

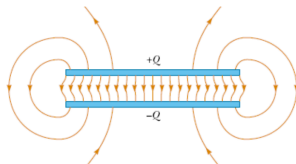
- **Generalização:** para uma esfera (não aterrada) e com carga  $Q$ , basta adicionar na origem uma carga  $Q - q_i$ .

## Efeitos de tamanho finito em eletrostática

- Efeitos de tamanho finito em eletrostática podem ter significados variados.
- Podem significar efeitos de borda em sistemas que em uma situação idealizada são considerados infinitos

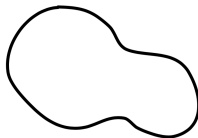


(situação idealizada)



([sites.ifi.unicamp.br](http://sites.ifi.unicamp.br))

- Efeitos de tamanho finito em objetos que em uma situação idealizada têm dimensões desprezíveis ([cortesia L. Stolze](#))



- Nesse tópico discutiremos 2 exemplos do último caso.



- **Objetivo:** comparar a solução exata do problema em questão com a solução do problema idealizado.
- Podemos estudar tais efeitos em sistemas variados (dielétricos, condutores, ...). Optaremos por sistemas com condutores, pois **coisas bizarras podem acontecer:**

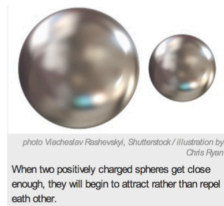
NATURE | NEWS

## Like attracts like?

Everything you thought you knew about electrostatics is probably wrong.

Philip Ball

23 May 2012

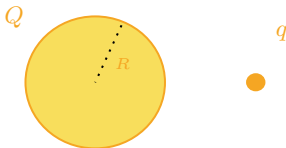


*“Make two metal spheres positively electrically charged, bring them close together, and what happens? Theyll repel one another, because like charges repel right?”*

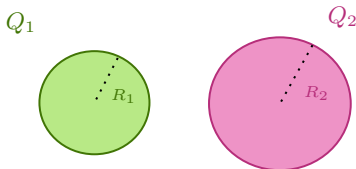
**Wrong.** According to physicist John Lekner [...] they will most probably attract one another, violating the intuitions of basic physics. The counterintuitive result [...] in the Proc Royal Soc A.”

- Discutiremos os **efeitos de tamanho finito** em dois problemas de eletrostática envolvendo condutores, a saber: (todas as figuras foram cortesia de L. Stolz)

1. Uma carga puntiforme próxima a uma esfera condutora



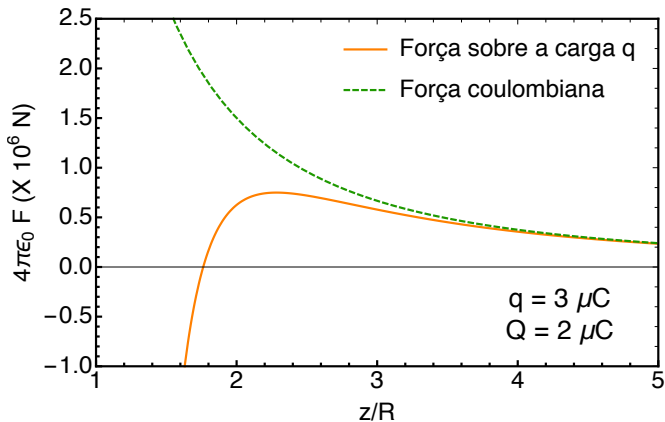
## 2. Duas esferas condutoras carregadas e isoladas





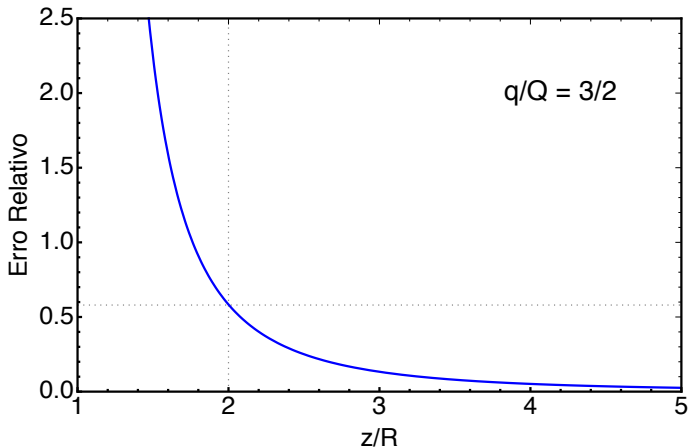
- Podemos reescrever essa força como

$$\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Qq}{z^2} + \frac{Rq^2}{z^3} - \frac{Rq^2}{z\left(z - \frac{R^2}{z}\right)^2} \right\} \hat{\mathbf{z}} \quad (7)$$

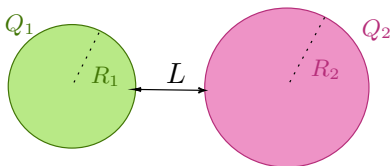


- Erro relativo:

$$\varepsilon = \frac{F_{\text{coulomb}} - F}{F_{\text{coulomb}}} = -\frac{q}{Q} \frac{1}{\beta} \frac{1 - 2\beta^2}{(1 - \beta^2)^2} \quad \text{com} \quad \beta = \frac{z}{R} \quad (8)$$



## 2. Duas esferas condutoras carregadas



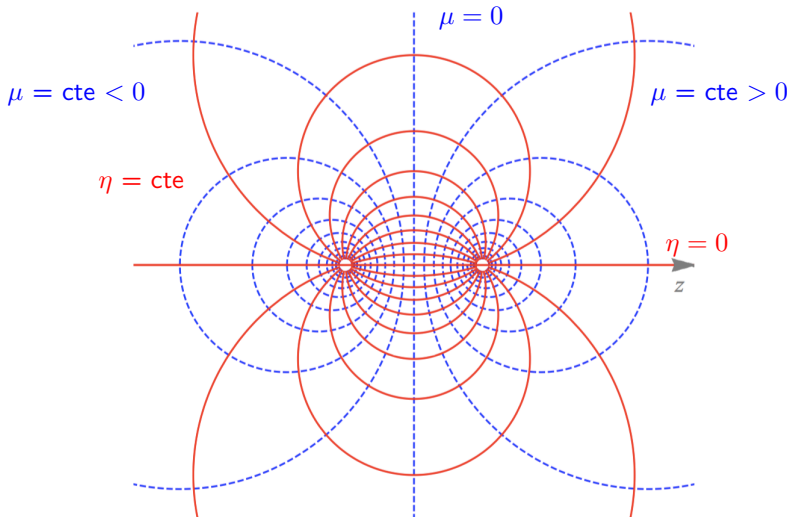
- Esferas condutoras carregadas **com cargas de mesmo sinal**.
- **Objetivo:** calcular a **força** entre as esferas
- Motivados pela geometria do problema, é conveniente utilizar as chamadas **coordenadas biesféricas**

$$\mu = \arcsin \left[ \frac{2az}{\sqrt{(r^2+a^2)^2 - (2az)^2}} \right] \quad -\infty < \mu < +\infty$$

$$\eta = \arccos \left[ \frac{r^2 - a^2}{\sqrt{(r^2+a^2)^2 - (2az)^2}} \right] \quad 0 \leq \eta < \pi$$

$$\varphi = \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

# Coordenadas biesféricas



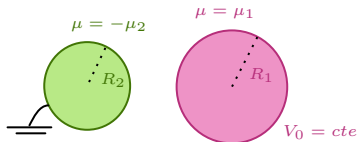
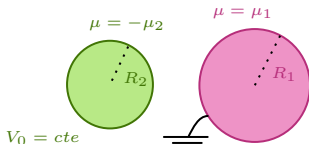
$$\mu = \mu_0 \Rightarrow x^2 + y^2 + (z - a \coth \mu_0)^2 = (a \operatorname{csch} \mu_0)^2 \quad (9)$$

- **Estratégia** para o cálculo da **força**:  
é conveniente calcularmos a **energia eletrostática** do sistema,

$$U = \frac{1}{2} \tilde{Q} \mathbb{C}^{-1} Q \quad \text{onde} \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

Pecisamos então calcular os a **matriz de capacitância**  $\mathbb{C}$ .

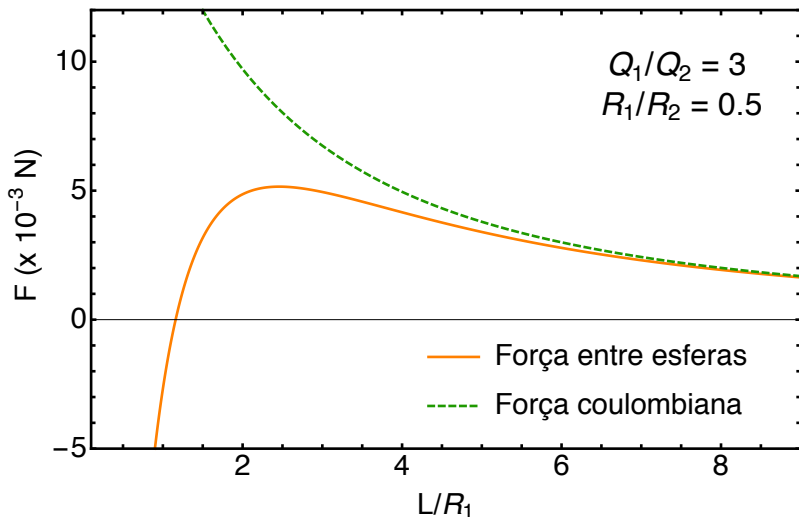
- Isso pode ser feito dividindo o problema em **duas partes**:
  - Esfera em  $\mu = -\mu_2$  com potencial  $V_0$  e a esfera em  $\mu = \mu_1$  aterrada
  - Esfera em  $\mu = -\mu_2$  aterrada e a esfera em  $\mu = \mu_1$  com potencial  $V_0$







- No entanto, na maior parte das situações, para distâncias próximas o suficiente, as esferas se atraem!



- Erro relativo

$$\mathcal{E} = \frac{F_{\text{coulomb}} - F}{F_{\text{coulomb}}} \quad (12)$$

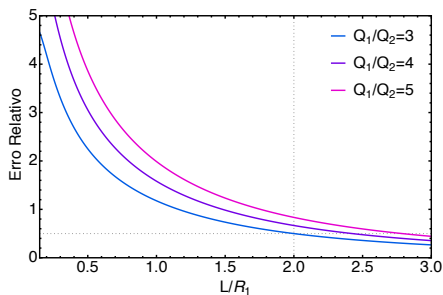
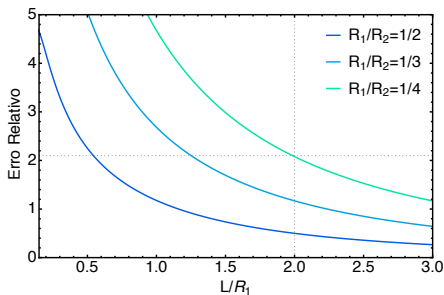
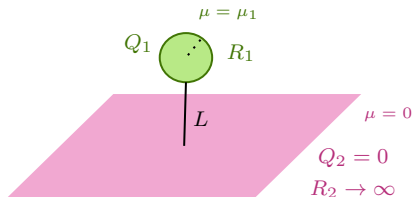


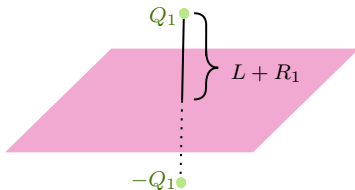
Figura: Erro relativo para diferentes raios e cargas

## Esfera próxima a um plano condutor infinito

- Por fim, fazendo o limite  $R_2 \rightarrow \infty$ , chegamos no caso da **esfera próxima a um plano infinito**



- Pelo método das imagens, sabemos o caso da **carga puntiforme próxima a um plano infinito aterrado**



- Força no sistema esfera condutora - plano condutor infinito:

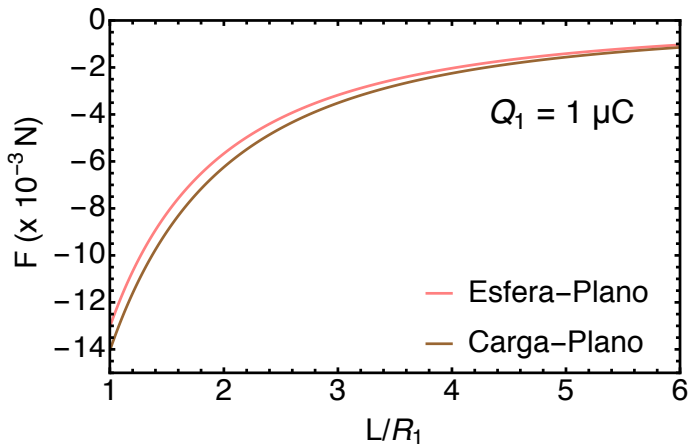


Figura: Força entre esfera e plano

## *2ª Parte*

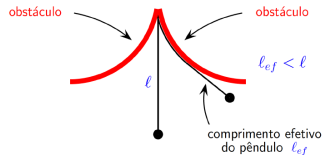
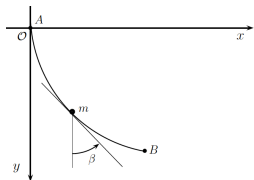
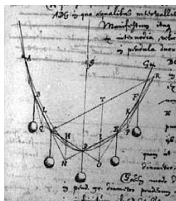
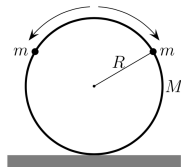
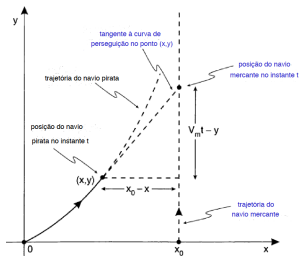
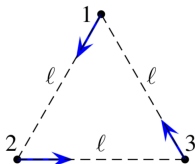
Alguns tópicos de mecânica da partícula

## Qual o papel dos problemas desafiadores?

- Há inúmeras respostas (**o mundo é movido a perguntas, ...**).
- Em vez de dar uma resposta, prefiro citar um trecho do livro *"Brigther than a Thousand Suns"*, de **Robert Jungk**:

*"Young physicists from all over the world were studying under Sommerfeld in Munich. They even took their problems with them into the cafés. [...] The waiters of the Café Lutz in the Hofgarten, regularly frequented by the Munich physicists, had strict instructions never to wipe the tables without special permission. For if a problem had not been solved by the time the café closed for the night, the further necessary calculations were carried out the following evening. It happened fairly often, moreover, that some unknown person would have the audacity to jot dow the solution during the night."*

# Exemplos de problemas desafiadores em mecânica



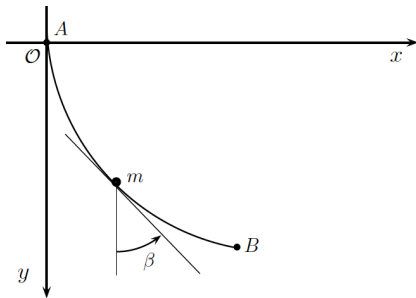


## O problema da braquistócrona

- Em maio de 1696, Johann Bernoulli propôs aos matemáticos da época um problema ao qual denominou problema da **braquistócrona** (do grego: **menor tempo**), usando as palavras:

*Eu, Johann Bernoulli, me dirijo aos matemáticos mais brilhantes do mundo. Nada é mais atraente às pessoas inteligentes do que um problema desafiador, honesto, cujas soluções possíveis darão fama e permanecerão como um duradouro monumento. Seguindo o exemplo estabelecido por Pascal, Fermat, etc., Eu espero ganhar a gratidão de toda a comunidade científica por apresentar diante dos melhores matemáticos de nosso tempo um problema que testará seus métodos e o poder de seus intelectos. Caso alguém me comunique a solução do problema proposto, Eu o declararei publicamente merecedor de elogio.*

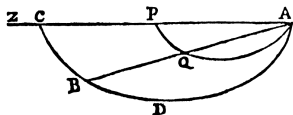
- Dados dois pontos  $A$  e  $B$  em um plano vertical, qual é a curva traçada por um ponto sobre o qual atua somente a gravidade, que começa em  $A$  e atinge  $B$  no menor tempo.



- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

*Comentários:*

- Conta-se que Newton teria resolvido o problema no mesmo dia em que o recebeu, após chegar em casa cansado do trabalho.
- Ao receber uma solução anônima vinda da Inglaterra,



Johann Bernoulli teria dito “ex *ungue leonem*”:

*"é pela pata que se reconhece o leão."*

- Galileo já havia considerado esse problema em 1638 (*Duas Novas Ciências*), mas não chegou na resposta correta..
- Johann havia escrito a Leibniz em 09-06-1696 propondo o problema privadamente. Leibniz respondeu em 16 de junho pedindo mais tempo, para que matemáticos franceses e italianos recebessem a *Acta Eruditorum*, de lenta distribuição.
- Na verdade, o 1º problema de cálculo variacional foi formulado e resolvido por Newton em 1685.

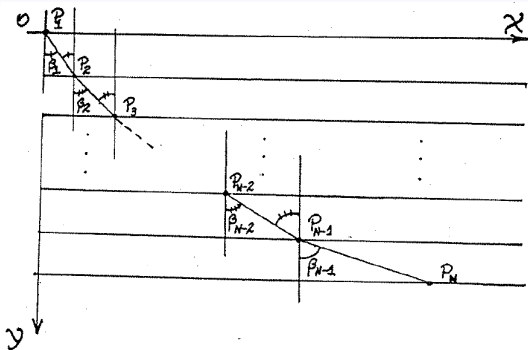
## Solução de Bernoulli via teorema de Fermat

- Apresentaremos o método usado por Johan Bernoulli em 1697.
- O método se baseia em idéias da **óptica geométrica**: na utilização apropriada da **lei de Snell**,

$$\frac{\sin \beta_1}{v_1} = \frac{\sin \beta_2}{v_2} . \quad (13)$$

- Mas na dedução dessa fórmula via **princípio de Fermat**, não é necessário considerar raios luminosos (lembre do problema do guardião de piscina salvando a criancinha se afogando)
- **Essência do método**:  
pensar na **curva como uma poligonal** com trechos muito curtos de modo que a velocidade da partícula seja constante em cada trecho e **aplicar a lei de Snell repetidas vezes**.

- Curva como uma poligonal:



- Para que o tempo de percurso entre  $P_1$  e  $P_N$  seja mínimo, imporemos que os tempos de percurso nos trechos entre os pontos  $P_1$  e  $P_3$ ,  $P_2$  e  $P_4$ , ...,  $P_{N-2}$  e  $P_N$  sejam mínimos:

$$\frac{\sin \beta_1}{v_1} = \frac{\sin \beta_2}{v_2}; \quad \frac{\sin \beta_2}{v_2} = \frac{\sin \beta_3}{v_3}; \quad \dots; \quad \frac{\sin \beta_{N-2}}{v_{N-2}} = \frac{\sin \beta_{N-1}}{v_{N-1}}$$

onde  $v_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) é o módulo da velocidade da partícula no  $i$ -ésimo segmento de reta, suposto constante.

- Tomando o limite  $N \rightarrow \infty$  nas equações anteriores, obtemos

$$\frac{\text{sen}\beta}{v} = \text{cte} , \quad (14)$$

onde  $v$  é o módulo da velocidade da partícula em um ponto genérico  $P$  de sua trajetória e  $\beta$  é o ângulo entre a tangente à trajetória em  $P$  e a direção vertical, isto é:

$$\tan \beta = \frac{dx}{dy} . \quad (15)$$

- Supondo que a partícula seja abandonada em  $P_1$  do repouso, obtemos a partir da conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gy} , \quad (16)$$

donde

$$\frac{\text{sen}\beta}{\sqrt{2gy}} = \text{cte} \Rightarrow y(\beta) = 2R \text{sen}^2\beta = R(1 - \cos 2\beta) , \quad (17)$$

onde  $R$  é uma constante com dimensão de comprimento.

- Para encontrarmos  $x(\beta)$ , lembramos que  $dx = \tan\beta dy$ . E da expressão de  $y(\beta)$  temos  $dy = 4R\sin\beta\cos\beta d\beta$ , de modo que

$$dx = 4R \tan \beta \sin \beta \cos \beta d\beta = 2R(1 - \cos 2\beta)d\beta , \quad (18)$$

Integrando a última equação, obtemos:

$$x(\beta) = R(2\beta - \sin 2\beta) + C_o , \quad (19)$$

onde  $C_o$  é uma constante arbitrária de integração.

- Definindo  $\theta = 2\beta$  e usando o fato de que a origem está no  $P_1$ , obtemos as equações paramétricas da braquistócrona:

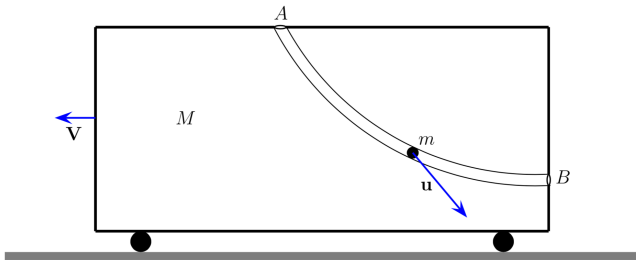
$$\begin{aligned} x(\theta) &= R(\theta - \sin \theta) \\ y(\theta) &= R(1 - \cos \theta) . \end{aligned} \quad (20)$$

Identificamos uma **ciclóide** cujo círculo gerador tem raio  $R$ , sendo  $\theta$  o ângulo de giro desse círculo.

- Determina-se  $R$  impondo que a ciclóide passe por  $P_N$ .
- A relação  $d\theta = 2d\beta$  é uma propriedade fundamental da ciclóide

## Primeiro problema desafiador

Considere um bloco de massa  $M$ , inicialmente em repouso, no qual existe um túnel estreito, contido em um plano vertical, que liga os pontos  $A$  e  $B$ . Uma partícula de massa  $m$  é abandonada no ponto  $A$  e, posteriormente, sai pelo ponto  $B$ .



Desprezando o atrito entre o bloco e o solo, e o atrito na partícula dentro do túnel, determine a forma do túnel para que o tempo gasto pela partícula dentro dele seja mínimo.



## O teorema de Bertrand e outro problema desafiador

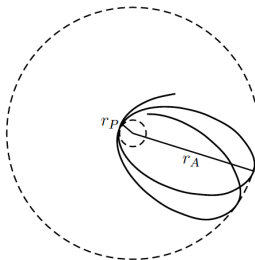
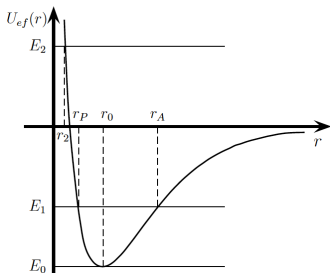
- **Pergunta:**

quais são os potenciais centrais para os quais **todas** as órbitas limitadas são fechadas?

- A palavra “**todas**” é fundamental, pois dependendo das condições iniciais podemos encontrar órbitas fechadas para uma infinidade de potenciais.
- De fato, qualquer potencial central atrativo admite órbitas circulares como soluções.
- A resposta a essa pergunta foi dada em 1873 por Joseph Louis François Bertrand (1822-1900) e esse resultado é conhecido como **Teorema de Bertrand**, que enunciamos a seguir:

*as únicas forças centrais para as quais **todas** as órbitas limitadas são fechadas são  $\mathbf{f} = -\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$  e  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$  com  $k > 0$ . Ou seja, ou é a força inversamente proporcional ao quadrado da distância (Kepler) ou obedece à lei de Hooke (OH).*

- Nem toda órbita limitada é fechada!
- Considere o potencial efetivo  $U_{ef}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}$  da figura abaixo. Para  $E = E_1$ , sem resolver o problema, só podemos afirmar que a órbita é limitada, ou seja,  $r_P \leq r \leq r_A$ .



- **Condição de fechamento da órbita:**  
o período das oscilações radiais e de revolução devem ser comensuráveis para todas as órbitas limitadas

$$n_r T_r = n_\varphi T_\varphi, \quad (21)$$

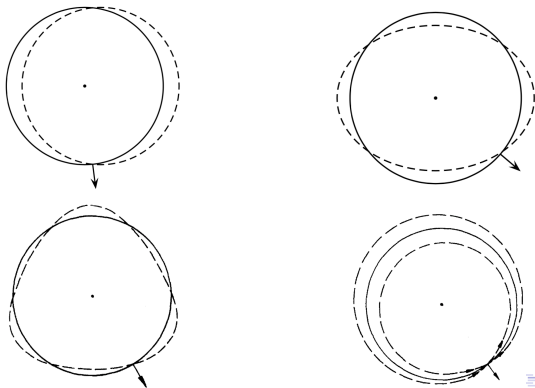
onde  $n_r$  e  $n_\varphi$  são números inteiros positivos

- Para órbitas próximas de órbitas circulares, a condição de fechamento já impõe sérias restrições, fazendo com que os potenciais admissíveis sejam da forma

$$U(r) = \kappa r^{q^2-2}; \quad (q \in Q^*). \quad (22)$$

Dependendo do valor de  $q^2-2$ ,  $\kappa$  deve ser positiva ou negativa.

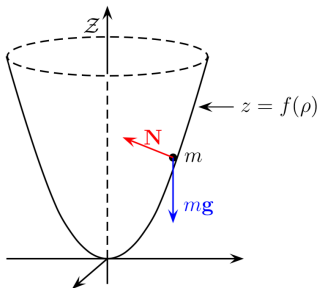
- Dentre esses potenciais estão o de Kepler ( $q=1$ ) e o OH ( $q=2$ )
- Exemplos: Kepler ( $T_\varphi = T_r$ ), OH ( $T_\varphi = 2T_r$ ),  $T_\varphi = 3T_r$  e  $T_\varphi = \frac{1}{2}T_r$ :



- Considerando-se perturbações maiores, ou seja, órbitas cada vez mais distantes das circulares, rapidamente esse conjunto se reduz aos potenciais de Kepler e OH.
- Como esses problemas têm soluções exatas, e todas as suas órbitas limitadas são fechadas, segue o teorema de Bertrand.

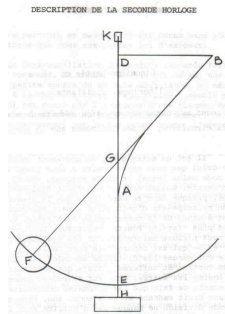
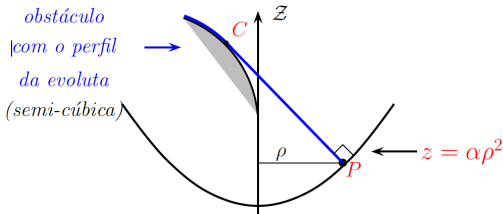
### Movimentos sobre superfícies de revolução lisas

- A razão para mencionarmos esses movimentos é que o 2º problema desafiador a ser proposto está relacionado com ele.



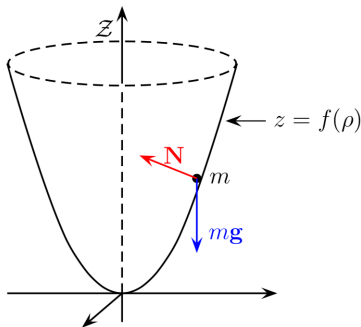
- Como a superfície é lisa, a energia mecânica da partícula se conserva:  $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U = cte$
- Como as forças não têm componentes horizontais, a componente vertical do momento angular da partícula se conserva:  $\ell_z = m\rho^2\dot{\varphi} = cte$

- Há exemplos interessantes e de grande valor histórico, como é o caso em que a superfície é um **parabolóide de revolução**.
- Nesse caso, pode-se mostrar que todos os possíveis movimentos circulares uniformes têm **o mesmo período!**
- **Christiaan Huygens** usou essa propriedade para construir um pêndulo cônico isócrono (*Horologium Oscillatorium*, 1673)



## Segundo problema desafiador

Considere uma superfície de revolução lisa cujo formato seja descrito pela equação  $z = f(\rho)$ . Uma partícula de massa  $m$  se move sobre essa superfície sob a ação da gravidade e da reação vincular exercida pela superfície, como ilustra a figura.



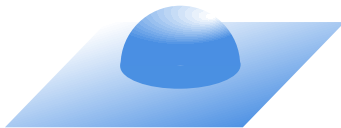
Determine  $f$  para que todas as órbitas limitadas sejam fechadas (considere somente os movimentos nos quais a partícula sempre mantenha o contato com a superfície).

## Comentários finais

- O método das imagens é útil tanto em situações simples, como uma carga entre placas condutoras infinitas e paralelas (figura tirada de Pumplin, AJP, 1969)



quanto em situações envolvendo superfícies condutoras mais exóticas, como o “chapéu do chefe” e o plano furado,



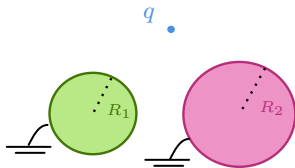
**Obs:** no caso da carga entre as placas, o efeito das placas faz com que, em uma direção paralela às placas, o potencial seja **atenuado exponencialmente!**

- Discutimos os **efeitos de tamanho finito** em dois exemplos,



e vimos que coisas surpreendentes podem acontecer, como a **atração das esferas condutoras com cargas de mesmo sinal**.

- A **transformação de Kelvin** pode ser usada para resolver problemas extremamente complicados, como por exemplo,



**Obs:**

resolvido o problema de uma carga próxima a uma superfície condutora, o **método de Eberlein-Zietal** nos dá a interação de van der Waals dispersiva entre o átomo e a superfície.



- **Problemas desafiadores:** são eles que movem o mundo, ...
- Vale citar as palavras de **D. Hilbert**, um dos maiores matemáticos do século XX:

*The profound significance of well-posed problems for the advancement of mathematical science is undeniable*

**Hilbert** propôs no Congresso Internacional de Matemática de Paris (1900) uma lista de 23 problemas, sem solução até aquela data, que influenciaram a matemática do século XX.

- Um exemplo em física/matemática: a **equação de Kepler** (**Astronomia Nova**, 1609)

$$\omega t = E - \epsilon \sin E$$

*It is enough for me to believe that I could not solve this a priori, owing to the heterogeneity of the arc and the sine. Anyone who shows me my error and points the way will be for me the great Apollonius.*

- Apesar da sua aparente simplicidade, a equação de Kepler desafiou por séculos alguns matemáticos notáveis, como **Newton, Lagrange, Cauchy e Bessel**, entre outros.
- Em seus esforços para encontrar uma solução, importantes avanços em matemática ocorreram, ou seja,

*a equação de Kepler gerou matemática nova!*

- Poderíamos aqui continuar listando problemas desafiadores,
  - curvas de proteção para lançamentos com  $\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$
  - precessão de Venus causada pelos outros planetas: por que o modelo de anel não funciona?
  - ...
- Porém, o mais importante é que:  
**cada um de vocês crie seus problemas desafiadores!!**
- Finalizamos imitando Johann Bernoulli:

*Caso alguma pessoa encontre a solução de um dos problemas desafiadores propostos, ela será declarada publicamente merecedora de elogio.*

## Referências

- [1] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics 3rd ed., John Wiley and Sons, Inc., (1998).
- [2] P. M. Morse and H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, Vol. 2, McGraw-Hill Book Company, Inc., (1953).
- [3] Dissertação de Patrícia Pinto Abrantes, *Algumas aplicações da eletrodinâmica quântica em interações atômicas*. UFRJ, 2017.
- [4] Lekner, J. 2012. Electrostatics of two charged conducting spheres. Proc. R. Soc. A.46828292848
- [5] Ball, P. Like attracts like?. Nature (2012).  
<https://doi.org/10.1038/nature.2012.10698>
- [6] Dissertação de Diego Uzêda, *Tópicos em Mecânica Clássica*, UFRJ, 2011.
- [7] Herman H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Springer-Verlag (1980).
- [8] J. Bertrand, *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*, C. R. Acad. Sci. Paris **77** (1873), 849853.
- G. Darboux, *Étude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution*, Bulletin de la S. M. F., **5**, 100-113 (1877).

*MUITO OBRIGADO!!*