INSTITUTO DE MATEMÁTICA -UFRJ
Cálculo Infinitesimal I - 2022.1 - Professor Felipe Acker
Teste 2 - 12/13 de maio

PARTE I - MÚLTIPLA ESCOLHA

Para cada questão pode haver de 0 a 4 respostas corretas. Cada resposta errada anula uma certa, dentro da mesma questão.

1. Se $f'(x) = \cos^2 x$, então $f(x)$pode ser:

   (a) $\frac{2x-\sin(2x)}{4}$.
   (b) $\frac{2x+\sin(2x)}{4}$.
   (c) $\frac{\sin(2x)-2x}{4}$.
   (d) $\frac{\sin(2x)-2x}{2}$.

2.
$$\int_1^n lnx\, dx =$$

   (a) $nln(n) - n - 1$.
   (b) $nln(n) + n + 1$.
   (c) $nln(n) + n - 1$.
   (d) $nln(n) - n + 1$.

3.
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx =$$

   (a) $\int_{-1}^{1} \cos^2 x dx$.
   (b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 x}\cos x dx$.
   (c) $\pi/2$.
   (d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx$.

4. Se
$$f(x) = \int_1^x \sin(t^2)dt,$$
então $f'(\sqrt{\pi/2})$ é

   (a) 0.
   (b) 1.
   (c) $2\sqrt{\pi/2}$.
   (d) ∞.

5. A afirmação a seguir é verdadeira:

   (a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1$.
   (b) $\int_0^1 \sqrt{x}dx = \infty$.
   (c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \infty$. Falsa
   (d) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = \infty$.

6. A área da região limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = x + 1$ é

   (a) $3\sqrt{5}$.
   (b) $\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} x^2dx - \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (x+1)dx$.
   (c) $\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (x+1)dx - \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} x^2dx$.
   (d) $\frac{1}{3}\left(9\sqrt{5} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right)$.

7.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x dx =$$

   (a) $e^{\cos x}$.
   (b) e.
   (c) $1 - 1/e$.
   (d) $e - 1$.

8. Se m é uma constante negativa e $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisfaz, para uma certa $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua,
$$mx''(t) = F(x(t))\ \forall\, t \in [a,b].$$
então
$$\int_a^b F(x(t))x'(t)dt =$$

   (a) $\frac{1}{2}mx'(b)^2 - \frac{1}{2}mx'(a)^2$.
   (b) $\frac{-m}{2}\left[x'(b)^2 - x'(a)^2\right]$.
   (c) $U(b) - U(a)$, para qualquer $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $U' = F$.
   (d) $U(a) - U(b)$, para uma certa $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $U' = F$.

9.
$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx =$$

   (a) $\pi/2$.
   (b) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.
   (c) $\ln\sqrt{1+\sqrt{2}}$.
   (d) $\pi/4$.

10. Considere as funções $f(x) = 1/x$ e $g(x) = x^5$. Suponha que queremos calcular as áreas sob os gráficos de ambas, respectivamente chamadas de s_f e s_g, no intervalo [10,20]. Se partirmos o intervalo em n partes iguais e usarmos aproximações por retângulos, usando, em ambos os casos, como altura, o maior valor da função no intervalo, o que podemos afirmar?

   (a) A aproximação obtida para s_f vai ter erro menor do que o da aproximação obtida para s_g.
   (b) A aproximação obtida para s_g vai ter erro menor do que o da aproximação obtida para s_f.
   (c) O menor erro tanto pode ser obtido para s_f ou para s_g, dependendo de n.
   (d) Todas as afirmações anteriores estão erradas.

	(a)	(b)	(c)	(d)	*nota*
1.	♡	♥	♡	♡	
2.	♡	♡	♡	♥	
3.	♡	♡	♥	♥	
4.	♥	♡	♡	♡	
5.	♥	♡	♡	♥	
6.	♡	♡	♥	♡	
7.	♡	♡	♡	♥	
8.	♥	♡	♥	♡	
9.	♡	♡	♡	♡	
10.	♥	♡	♡	♡	

Tabela Básica de Derivadas

f	x^{α}	$sen\ x$	$cos\ x$	$ln\ x$	e^x	$u+v$	uv	$\frac{u}{v}$	$g(u)$
f'	$\alpha x^{\alpha-1}$	$cos\ x$	$-sen\ x$	$1/x$	e^x	$u'+v'$	$u'v+uv'$	$\frac{vu'-uv'}{v^2}$	$g'(u)u'$

PARTE II - QUESTÕES CALCULE

permitido o uso de software para calcular as integrais

Explique as soluções e não use aproximações nos resultados das integrais

1. Seja C o círculo centrado em $(R,0)$ e de raio r. Suponha que $r < R$. Determine o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de C em torno do eixo x.

2. Seja D a região situada entre as curvas $y = \frac{1}{12}$, $x = 1\, x = \sqrt{3}$ e $y = \frac{1}{x+x^3}$. Calcule o volume do sólido S obtido fazendo girar a região D em torno do eixo y.

3. Seja R a região limitada entre $y = x^2 - x$ e a reta $y = x$. Encontre a equação da reta que passa pela origem e que divide R em duas subregiões de áreas iguais.

4. Seja a curva $f(x) = Mcos(x)$ definida sobre o intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, onde M é uma constante não nula. Calcule o(s) valor(es) de M de tal forma que o volume gerado pela rotação da região limitada pela curva $f(x)$ e pelas retas $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = -\frac{\pi}{4}$ e $y = 0$, em torno do eixo-x, tenha um volume igual a $\frac{\pi}{4}$.

5. Calcule a área da região limitada pelas curvas $y = \sqrt{x^2+1}$ e $y = |2x|$. Faça um esboço da região.

PARTE III - QUESTÕES EXTRA

Todas as respostas devem ser justificadas

1. Uma partícula, de massa m, se move sobre uma reta, sob a ação de uma força, $F(x)$, sendo x a posição da partícula (note que $x = x(t)$ é um número real, dado em alguma unidade de comprimento, podendo ser positivo ou negativo, de acordo com a posição da origem, fixa, que corresponde ao número 0). Temos, pois, supondo em vigor as Leis de Newton,

$$F(x(t)) = mx''(t),$$

durante um intervalo de tempo que suporemos corresponder à eternidade (para trás e para a frente). Suporemos, também, que a força, dada por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é uma função contínua. O **trabalho** realizado pela força F, entre os tempos t_1 e t_2, é definido por

$$W = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} F(y)dy.$$

Fixemos uma primitiva qualquer de F, que chamaremos de $-U$:

$$U : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

com $-U'(x) = F(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que

$$W = \frac{1}{2}m[x'(t_2)]^2 - \frac{1}{2}m[x'(t_1)]^2.$$

(b) Supondo F dada por $F(x) = -kx$ (para um certo k fixo, estritamente positivo), mostre que

$$W = k\frac{x(t_1)^2}{2} - k\frac{x(t_2)^2}{2}.$$

(c) Mostre que, qualquer que seja F, desde que contínua, a função E, definida por

$$E(t) = \frac{1}{2}m[x'(t)]^2 + U(x(t)),$$

é constante (independe de t).

2. A função gama é definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

a. Mostre que $\Gamma(x)$ está bem definida para $x > 0$ e que $\Gamma(1) = 1$.

b. Mostre que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\ \forall x > 0$. Conclua que

$$\Gamma(n) = (n-1)!\ \forall n \in N.$$

c. Mostre que

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-u^{1/x}}du.$$

3. Considere a hipérbole equilátera h, dada por

$$h = \left\{(x,y) \in R^2 | x^2 - y^2 = 1\right\}.$$

Dado $x \geq 1$, seja t a área da região limitada pelos segmentos OP_1, OP_2 e o arco de h ligando P_1 a P_2, onde $O = (0,0)$, $P_1 = (x, \sqrt{x^2-1})$ e $P_2 = (x, -\sqrt{x^2-1})$.

a. Note a analogia, se trocarmos h pelo círculo

$$c = \left\{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 = 1\right\},$$

entre t e o ângulo $\theta = arc\cos x$.

b. Calcule t em função de x.

c. Expresse x e $y = \sqrt{x^2-1}$ em função de t (x é chamado de *cosseno hiperbólico* de t e y de *seno hiperbólico* de t).

Teste 2 - Cálculo Infinitesimal I - 2022.1 - Prof. Felipe Acker

Parte I.

1 - $f'(x) = \cos^2 x \quad \therefore \quad f(x) = \int f'(x)\,dx$

$\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x \cos x\,dx$

$u'v = \cos x \cdot \cos x \Rightarrow u'(x) = \cos x \quad v(x) = \cos x$

$\therefore u(x) = \text{sen}(x)$

$\therefore (uv)' = u'v + uv' \Rightarrow (\text{sen}\,x \cos x)' = \cos x \cos x - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,x$

$\Rightarrow \int (\text{sen}\,x \cos x)'\,dx = \int \cos x \cos x\,dx - \int \text{sen}\,x\,\text{sen}\,x\,dx$

$\Rightarrow \text{sen}\,x \cos x = \int \cos^2 x\,dx - \int \text{sen}^2 x\,dx = \int \cos^2 x - \int (1 - \cos^2 x)\,dx$

$\Rightarrow \text{sen}\,x \cos x = \int \cos^2 x\,dx - \int dx + \int \cos^2 x\,dx = 2\int \cos^2 x\,dx - x + C_1$

$\Rightarrow 2\int \cos^2 x\,dx = \text{sen}\,x \cos x + x - C_1 \Rightarrow \int \cos^2 x\,dx = \dfrac{\text{sen}\,x \cos x + x - C_1}{2}$

$\Rightarrow \int \cos^2 x\,dx = \dfrac{\frac{1}{2}\text{sen}\,2x + x}{2} + C = \left(\dfrac{\text{sen}\,2x + 2x}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\text{sen}\,2x + 2x}{4}$

Resposta: (a) ~~(b)~~ (c) (d)

2 - I - Encontrar a primitiva:

$\int \ln x\,dx = \int 1 \cdot \ln x\,dx \Rightarrow$ Integral por partes:

$1 \cdot \ln x = u'v \Rightarrow u'(x) = 1, \; v = \ln x \quad \therefore \quad u(x) = x, \; v = \ln x$

$\Rightarrow (uv)' = u'v + uv' \Rightarrow (x \ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot 1/x = \ln x + 1$

$\Rightarrow \int (x \ln x)'\,dx = \int (\ln x + 1)\,dx \Rightarrow x \ln x = \int \ln x\,dx + \int dx = \int \ln x\,dx + x + c$

$\Rightarrow x \ln x - x - c = \int \ln x\,dx$

Assumindo $c = 0 \Rightarrow \int_1^n \ln x\,dx = \left[x \ln x - x\right]_1^n = n \ln n - n - (1 \cdot \ln 1 - 1)$

$= n \ln n - n + 1$

Resposta: (a) (b) (c) ~~(d)~~

2

3) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ e $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

Se $x = \operatorname{sen} t \Rightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{\operatorname{sen} t = -1}^{\operatorname{sen} t = 1} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\, \cos t\, dt = (1)$

$$(1) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\, \cos t\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}\, \cos x\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 x}\, \cos x\, dx$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos x\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \left. \frac{2x + \operatorname{sen}(2x)}{4} \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{2.\pi/2 + \cancelto{0}{\operatorname{sen}(2.\pi/2)}}{4} - \frac{2.(-\pi/2) + \cancelto{0}{\operatorname{sen}(2.(-\pi/2))}}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi/2$$

Resposta: (a) (b) ~~(c)~~ ~~(d)~~

π

4) $f(x) = \int_{1}^{x} \operatorname{sen}(t^2)\, dt \Rightarrow f'(x) = \operatorname{sen}(x^2) \therefore f'(\sqrt{\pi/2}) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 0$

Resposta: ~~(a)~~ (b) (c) (d)

5) ~~(a)~~ $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2}\, dx = -x^{-1} = -1/x$

$\Rightarrow \int_{1}^{\infty} (1/x^2)\, dx = \left. -1/x \right|_{1}^{\infty} = 0 - (-1) = 1$ (Verdadeiro)

(b) $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \int_0^1 x^{1/2}\, dx = \left. \frac{1}{3/2} \cdot x^{3/2} \right|_0^1 = \left. \frac{2}{3} x^{3/2} \right|_0^1 = \frac{2}{3} \cdot 1^{3/2} - 0 \neq \infty$

(falso)

(c) $\int_0^1 (1/\sqrt{x})\, dx = \int_0^1 x^{-1/2}\, dx = \left. \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot x^{1/2} \right|_0^1 = \left. 2 \cdot \sqrt{x} \right|_0^1 = 2 \neq 0$

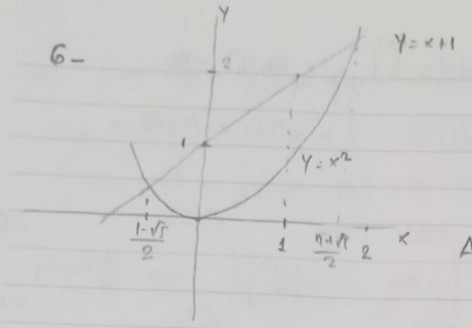
(falso)

~~(d)~~ $\int_0^1 (1/\sqrt{x^3})\, dx = \int_0^1 x^{-3/2}\, dx = \left. \frac{1}{-(\frac{3}{2})} \cdot x^{-3/2} \right|_0^1 = \left. -\frac{2}{3} x^{-3/2} \right|_0^1 = -\frac{2}{3} + \lim_{x \to 0} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$ ∞

$= \infty$ (verdadeiro)

(3)

6 -



$x^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$

$x = (1 \pm \sqrt{5})/2$

$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$A = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (x+1)\,dx - \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} x^2\,dx$$

$$\Rightarrow A = \int_{(1-\sqrt{5})/2}^{(1+\sqrt{5})/2} (x+1-x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]\Bigg|_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]\Bigg|_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right] = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + x\Bigg|_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right]$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right] =$$

$$= \frac{\cancel{1}+2\sqrt{5}+\cancel{5}-\cancel{1}+2\sqrt{5}-\cancel{5}}{8} + \frac{\cancel{1}+\sqrt{5}-\cancel{1}+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5} - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right] = \frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{9\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right) = \frac{13\sqrt{5}}{6}$$

Resposta (a) (b) ~~(c)~~ (d)

7. $$\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x} \cos x\,dx = \int_0^1 e^u\,du = e^1 - e^0 = e - 1$$

(*) $u(x) = \operatorname{sen}(x)$; $u(0) = 0$; $u(\pi/2) = 1$

Resposta (a) (b) (c) ~~(d)~~

(9)

8. $m < 0$, $m x''(t) = F(x(t))\ \forall t \in [a,b]$, $x: [a,b] \to \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_a^b F(x(t))\, x'(t)\, dt = \int_a^b m\, x''(t)\, x'(t)\, dt = \int_a^b m\, x'(t)\, x''(t)\, dt =$$

(por substituição)

$$= \int_{x'(a)}^{x'(b)} m\, u\, du, \quad u = x'(t) \quad = m \int_{x'(a)}^{x'(b)} u\, du = m\left(\frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_{x'(a)}^{x'(b)} = \frac{1}{2} m u^2 \Bigg|_{x'(a)}^{x'(b)}$$

$$= \frac{1}{2} m \left\{ [x'(b)]^2 - [x'(a)]^2 \right\} = \frac{1}{2} m [x'(b)]^2 - \frac{1}{2} m [x'(a)]^2$$

Resposta: ~~(a)~~ (b) ~~(c)~~ (d)

9. Seja $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx$ Se $x = tg\, t \Rightarrow dx = sec^2 t\, dt$

Assim $I = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + tg^2 t} \cdot sec^2 t\, dt = \int_0^{\pi/4} sec\, t \cdot sec^2 t\, dt = \int_0^{\pi/4} sec^3 t\, dt$

$*)$ $\int sec^3 t\, dt = \int sec\, t \cdot sec^2 t\, dt$ – $u(t) = sec\, t$ $v'(t) = sec^2 t$
$u'(t) = tg\, t\, sec\, t$ $v(t) = tg(t)$

$(sec\, t \cdot tg\, t)' = tg\, t \cdot sec\, t \cdot tg\, t + sec\, t \cdot sec^2 t$
$(sec\, t \cdot tg\, t)' = sec\, t \cdot tg^2 t + sec^3 t$
$(sec\, t \cdot tg\, t)' = sec\, t\, (1 + sec^2 t) + sec^3 t$
$(sec\, t \cdot tg\, t)' = sec\, t + sec^3 t + sec^3 t = sec\, t + 2 sec^3 t$

$$\Rightarrow \int (sec\, t \cdot tg\, t)' = \int sec\, t\, dt + 2 \int sec^3 t\, dt$$

$$\Rightarrow sec\, t \cdot tg\, t = \int sec\, t\, dt + 2 \int sec^3 t\, dt \Rightarrow 2 \int sec^3 t\, dt = sec\, t\, tg\, t - \int sec\, t\, dt$$

$$\int sec\, t\, dt = \int \frac{sec\, t\, (sec\, t + tg\, t)}{sec\, t + tg\, t}\, dt = \int \frac{sec^2 t + sec\, t \cdot tg\, t}{sec\, t + tg\, t}\, dt$$

$u = sec\, t + tg\, t$ $u' = tg\, t\, sec\, t + sec^2 t$

$$\therefore \int sec\, t\, dt = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(sec\, t + tg\, t)$$

$\Rightarrow \int \sec^3 t\, dt = \frac{1}{2}\left[\sec t\, tg\, t - \ln(\sec t + tg\, t)\right]$ (5)

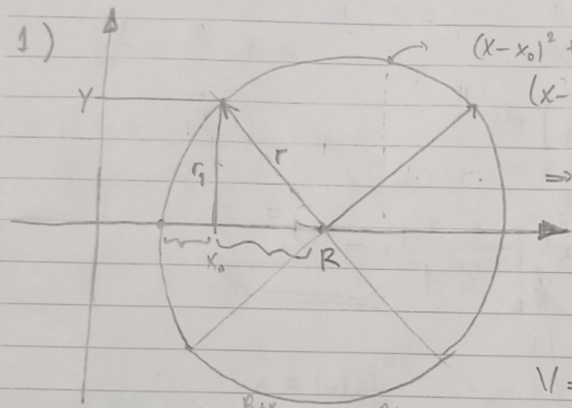
$\int_0^{\pi/4} \sec^3 t\, dt = \frac{1}{2}\left[\sec t\, tg\, t - \ln(\sec t + tg\, t)\right]\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}/2}\cdot 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}/2} + 1\right)\right] - 0 + \cancel{\ln(1)}_{\to 0}$

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}+1)\right)$ // $\Rightarrow$ Não consegui fazer

10_ ~~(a)~~ (b) (c) (d)

Parte II

1)



$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 \quad x_0 = R,\ y_0 = 0$

$(x-R)^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - (x-R)^2}$

$\Rightarrow A(x) = \pi \cdot y^2(x) = \pi\left(r^2 - (x-R)^2\right)$

$$V = \int_{R-r}^{R+r} \pi\left(r^2 - (x-R)^2\right) dx$$

$$V = \pi \int_{R-r}^{R+r} \left[r^2 - (x-R)^2\right] dx =$$

$$= \pi\left\{r^2 \int_{R-r}^{R+r} dx - \int_{R-r}^{R+r} (x-R)^2 dx\right\}$$

$$= \pi\left\{r^2 \cdot x\Big|_{R-r}^{R+r} - \frac{(x-R)^3}{3}\Big|_{R-r}^{R+r}\right\}$$

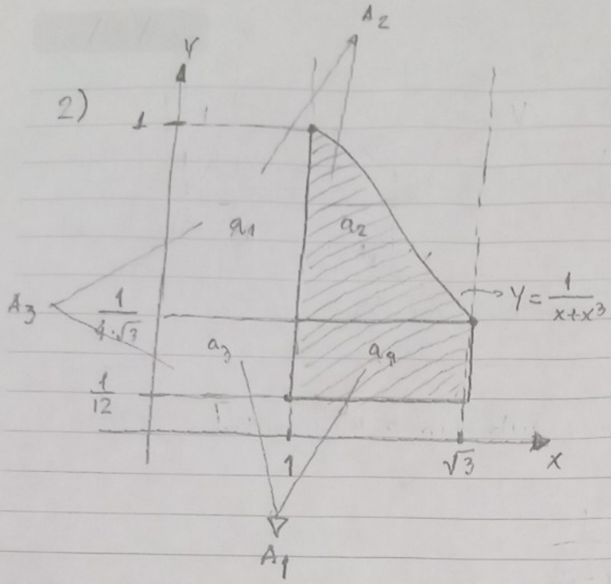
$$= \pi\left\{r^2(R+r) - r^2(R-r) - \left[\frac{(\cancel{R}+r-\cancel{R})^3}{3} - \frac{(\cancel{R}-r-\cancel{R})^3}{3}\right]\right\}$$

$$= \pi\left\{r^2R + r^3 - (r^2R - r^3) - \left[\frac{r^3}{3} + \frac{r^3}{3}\right]\right\} = \pi\left\{r^2R + r^3 - r^2R + r^3 - \frac{2}{3}r^3\right\}$$

$$= \pi\left\{2r^3 - \frac{2}{3}r^3\right\} = \pi\frac{6r^3 - 2r^3}{3} = \pi\frac{4}{3}$$

$$\underline{V = \pi \cdot \frac{4}{3} r^3} \; //$$

2)



$A_1 = a_3 + a_4$

$A_2 = a_1 + a_2$

$A_3 = a_1 + a_3$

$A = A_1 + A_2 - A_3$

$$A_1 = \int_{1/12}^{1/4\sqrt{3}} \sqrt{3}\, dy = \sqrt{3}\, y \Big|_{1/12}^{1/4\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{4\sqrt{3}} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}$$

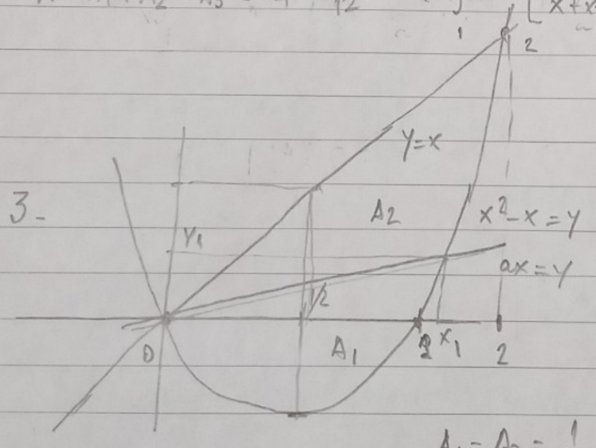
$$A_3 = \int_{1/12}^{1} 1 \cdot dy = y \Big|_{1/12}^{1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

$$A_2 = \pi \int_{\frac{1}{4\sqrt{3}}}^{1} [x(y)]^2 dy = \pi \int_1^{\sqrt{3}} x^2 \left[\frac{1}{x+x^3}\right]' dx$$

$$A = A_1 + A_2 - A_3 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} + \pi \int_1^{\sqrt{3}} x^2 \left[\frac{1}{x+x^3}\right]' dx - \frac{11}{12} \;//$$

3.



$A_1 = A_2 = \frac{1}{2} A$

$f_1(x) = x$

$f_2(x) = x^2 - x$

$$A = \int_0^2 f_1 - f_2 = \int_0^2 (x - x^2 + x)\, dx$$

$$= \int_0^2 2x - x^2\, dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^2$$

(só deu para fazer até aqui!)

$ax_1 = x_1^2 - x_1 \Rightarrow x_1^2 - (a+1)x_1 = 0 \Rightarrow x_1(x_1 - (a+1)) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

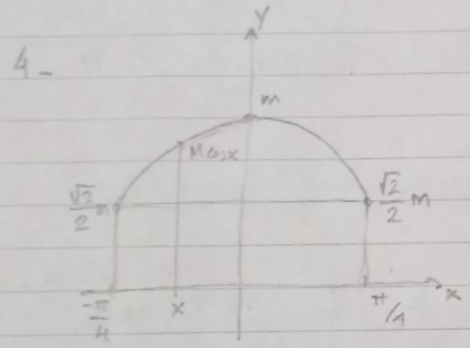
$x_1 = a+1$

$$A_1 = \int_0^{a+1} (ax - x^2 + 1)\,dx = \int_0^{a+1} (a+1)x - x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{(a+1)x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=0}^{a+1}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}A \Rightarrow \underbrace{\left[\frac{(a+1)x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=0}^{2} = \frac{1}{2}\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{x=0}^{a+1}}_{\text{Calcula para } x_1 \text{ então isola o } a}$$

4.



$$r(x) = M\cos x \Rightarrow A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \pi\,(M\cos x)^2\,dx$$

$$\Rightarrow A = \pi M^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 x\,dx =$$

$$= \pi M^2 \left[x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x\right]\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$$

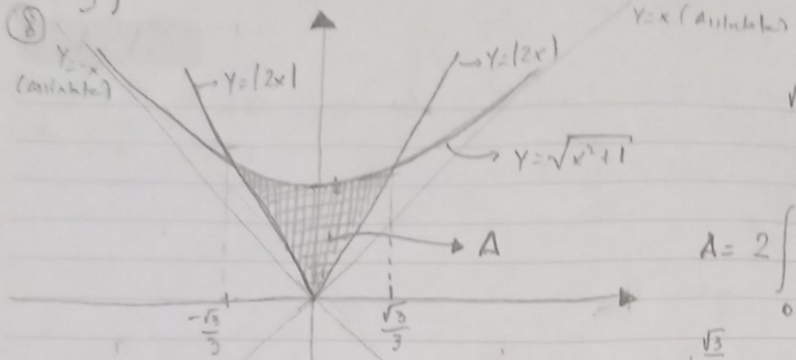
$$\Rightarrow \cancel{\pi} M^2 \left[x + \operatorname{sen} x \cos x\right]\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\cancel{\pi}}{4} \Rightarrow M^2\left[\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow M^2\left[\frac{2\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = M^2\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = M^2\left[\frac{\pi}{2} + 1\right] = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow M = \sqrt{\frac{1}{4\left(\frac{\pi}{2}+1\right)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}} \quad \therefore \quad M = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}}$$

8

5)



$$\sqrt{x^2+1} = 2x$$
$$x^2+1 = 4x^2$$
$$3x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{x^2+1} - 2x\right)dx$$

$$A = 2\left[\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\,x + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) - x^2\right]\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Parte 3 -

$$\int F(y)\,dy = \int F(x(t))\,dx$$

1-a) $F(x(t)) = m\,x''(t)$

$$W = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} F(y)\,dy \overset{*}{=} \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} m\,x''(t)\,dx \quad , \quad \frac{dx}{dt}(t) = x'(t)$$

$$\Rightarrow \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} m\,x''(t)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} m\,x''(t)\,x'(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\,x'(t)\,x''(t)\,dt =$$

$$= \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} m\,x'\,dx = m\int_{x(t_1)}^{x(t_2)} x'\,dx = m\left(\frac{(x')^2}{2}\right)\Bigg|_{x(t_1)}^{x(t_2)} = m\cdot\frac{1}{2}\left[x'(t_2)\right]^2 - m\,\frac{1}{2}\left[x'(t_1)\right]^2$$

b) [Infelizmente tive que parar por aqui!!!]