INSTITUTO DE MATEMÁTICA -UFRJ
Cálculo Infinitesimal I - 2022.1 - Professor Felipe Acker
Teste 1 - 5/6 de maio

PARTE I - MÚLTIPLA ESCOLHA

Para cada questão pode haver de 0 a 4 respostas corretas. Cada resposta errada anula uma certa, dentro da mesma questão.

1. Se f e g são funções deriváveis tais que $f(g(x)) = sen(\pi x)$, para todo x em $\mathbb{R}$ e sabemos que $g(4) = 5$ e que $f'(5) = 7$, então $g'(4)$ é

   (a) $1/7$. (b) $\pi/7$. (c) $\pi/5$. (d) $1/5$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 3ax + 2$. Assinale as afirmações verdadeiras:

   (a) f é sempre crescente.
   (b) Para que $f(x) = 0$ tenha 3 soluções reais distintas é necessário e suficiente que $0 < a < 1$.
   (c) Para que $f(x) = 0$ tenha 3 soluções reais distintas é necessário e suficiente que $-1 < a < 1$.
   (d) Para que $f(x) = 0$ tenha 3 soluções reais distintas é necessário e suficiente que $1 < a$.

3. Sejam a e b números reais, com $a < b$, e $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ uma função derivável em todos os pontos do intervalo $]a,b[$. Podemos, então, afirmar que

   (a) Se f é estritamente crescente em $]a,b[$, então $f'(x) > 0$ para todo x em $]a,b[$.
   (b) Se $x \in]a,b[$ e $f'(x) > 0$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $x - \varepsilon < x_1 < x < x_2 < x + \varepsilon \Rightarrow f(x_1) < f(x) < f(x_2)$.
   (c) se $f'(x) > 0$ para todo x em $]a,b[$, então f é estritamente crescente em $]a,b[$.
   (d) se $\lim_{x \to a^+} f'(x) = 0$ e $f''(x) > 0 \ \forall\, x \in]a,b[$, então f é crescente em $]a,b[$.

4. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tem derivada segunda em todos os pontos de $[a,b]$, então:

   (a) se f atinge seu máximo em x_o, temos $f'(x_o) = 0$.
   (b) se f atinge seu máximo em x_o, temos $f''(x_o) < 0$.
   (c) se $f(a) = f(b)$, f atinge seu máximo em um ponto c entre a e b..
   (d) f pode não atigir seu máximo.

5. Seja $f]a,b[\to \mathbb{R}$ uma função. f ser derivável no ponto c, sendo $f'(c)$ a derivada, é equivalente a

   (a) f ser dada por
   $$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + r(x),$$ Ok
   com
   $$\lim_{x \to c} \frac{r(x)}{x - c} = 0.$$

   (b)
   $$\lim_{\substack{\beta - \alpha \to 0 \\ c \in [\alpha, \beta]}} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(c).$$

   (c)
   $$\lim_{h \to -\infty} h(f(c + \frac{1}{h}) - f(c)) = f'(c) = \lim_{h \to \infty} h(f(c + \frac{1}{h}) - f(c)).$$

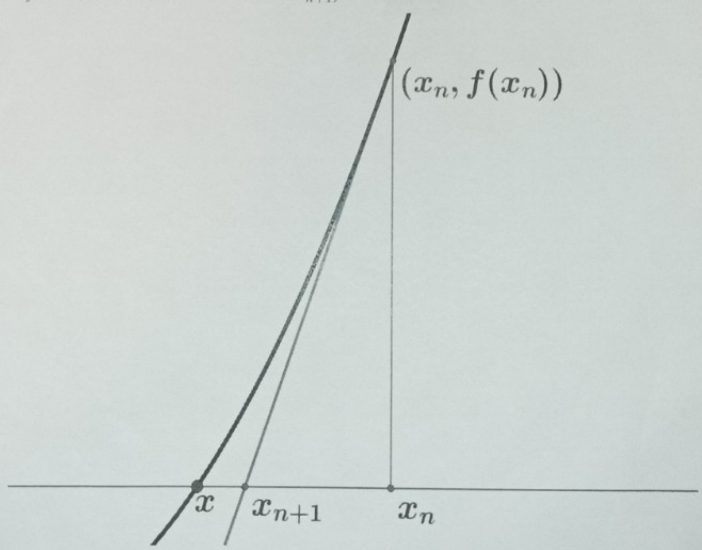
   (d) $\lim_{x \to c} f'(x) = f'(c)$.

	(a)	(b)	(c)	(d)	*nota*
1.	♡	♥	♡	♡	
2.	♡	♡	♡	♥	
3.	♡	♥	♥	♥	
4.	♡	♡	♡	♡	
5.	♥	♥	♥	♡	

PARTE II - DISCURSIVA

Todas as respostas devem ser justificadas

1. O Método de Newton para cálculo de soluções de equações do tipo $f(x) = 0$ consiste em chutar uma solução aproximada inicial, x_o, e, de cada solução aproximada, x_n, obter uma nova, x_{n+1}, dada segundo "fórmula"dada pela figura (a reta que passa por $(x_n, f(x_n))$ é tangente ao gráfico de f e corta o eixo das variáveis em x_{n+1})



(a) Mostre que vale a fórmula de recorrência

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n}{f'(x_n)}.$$

(b) Use o Método de Newton para obter uma aproximação para $\sqrt[3]{3}$, fazendo $f(x) = x^3 - 3$ e $x_0 = 3/2$. Calcule x_{10}.

(c) Obtenha x_2 na forma p/q, com p e p inteiros positivos. Dê uma estimativa para a diferença entre x_2 e $\sqrt[3]{3}$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com derivada segunda em todos os pontos e tal que:

   (i) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$;

   (ii) $f(-10) < -1$;

   (iii) $f(-6) = -2$;

   (iv) $f''(x) > 2\ \forall x \in]-10,0[$;

   (v) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$.

   (a) Em quantos pontos, no mínimo, f se anula?

   (b) E f' ?

   (c) Qual é o sinal de $f(-4)$?

   (d) É verdade que $\forall x > 0\ \exists\, y > x \mid f''(y) < 0$.

3. Suponha que duas partículas, A e B, se movem sobre a mesma reta, no mesmo sentido. Sabemos que, no tempo t_o, A está atrás de B. Mas também sabemos que a velocidade de A em cada instante, é maior do que a de B. Podemos, então, garantir que, em algum tempo t_1, com $t_1 > t_o$, A alcança B?

4. Para cada número real positivo r, seja $n(r)$ o número de soluções (a,b) em $\mathbb{Z}^2$ para $a^2 + b^2 \leq r^2$. Em outras palavras, $n(r)$ é o número de pares ordenados de coordenadas inteiras dentro do círculo de centro na origem e raio r. Calcule

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r^2}.$$

(1)

Prova - Cálculo Infinitesimal I - 2022.1 - Prof. Felipe Acker

PARTE I

1 - $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(g(x)) = \text{sen}(\pi x)$

$\Rightarrow [f(g(x))]' = f'(g(x))\,g'(x) = [\text{sen}(\pi x)]'$

$[\text{sen}(\pi x)]' = \cos(\pi x)\cdot\pi = \pi\cos(\pi x)$

$\therefore\ f'(g(x))\cdot g'(x) = \pi\cos(\pi x)$

$g(4) = 5 \Rightarrow f'(5) = f'(g(4)) = 7 \Rightarrow f'(g(4))\,g'(4) = \pi\cdot\cos(\pi\cdot 4)$

$\Rightarrow 7g'(4) = \pi\cos 4\pi = \pi \Rightarrow 7g'(4) = \pi \Rightarrow g'(4) = \pi/7$

Resposta: (a) $1/7$ $\cancel{(b)}$ $\pi/7$ (c) $\pi/5$ (d) $1/5$

2 - Para verificar as soluções, é necessário fazer estudo de sinais

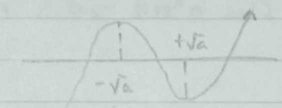
I - $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3 - 3ax + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 3a$ — $f'(x)$ deve ter, pelo menos, dois zeros reais

$f''(x) = 6x$

$f'(x) = 3x^2 - 3a \Rightarrow 3x^2 = 3a \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow a > 0$

I - se $a > 0$, $x = \pm\sqrt{a}$ -



$\boxed{\begin{array}{l} f(-\sqrt{a}) > 0 \ (\mathrm{I}) \\ f(+\sqrt{a}) < 0 \ (\mathrm{II}) \end{array}}$

I: $f(-\sqrt{a}) = (-\sqrt{a})^3 - 3a(-\sqrt{a}) + 2 = -a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} + 2 > 0$

$\Rightarrow 2a\sqrt{a} + 2 > 0 \Rightarrow 2a\sqrt{a} > -2 \Rightarrow a > 0$

II: $f(+\sqrt{a}) = (\sqrt{a})^3 - 3a\sqrt{a} + 2 = a\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} + 2 = -2a\sqrt{a} + 2 < 0$

$\Rightarrow -2a\sqrt{a} + 2 < 0 \Rightarrow -2a\sqrt{a} < -2 \Rightarrow 2a\sqrt{a} > 2 \Rightarrow a\cdot\sqrt{a} > 1$

$\Rightarrow a > 1$

$\therefore\ a > 0$ e $a > 1 \Rightarrow a > 1$

Resposta: (a) (b) (c) $\cancel{(d)}$

3 - (a) falso - F estritamente crescente pode ter uma inflexão horizontal, onde $f'(x) = 0$

② ③

(a) Verdadeira — Na vizinhança do ponto, deve haver dois pontos que respeitem o Teorema do Valor médio //

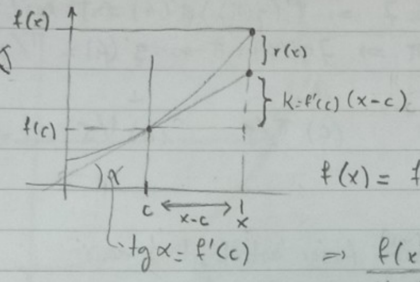
(b) Verdadeira (A recíproca não é)

(c) Verdadeira $\Rightarrow f''(x) > 0, \forall x \in]a,b[\Rightarrow f'$ é crescente e $f'(a) > 0, \forall x \in]a,b[$

$\therefore f$ possui inclinação positiva, $\forall x \in]a,b[\Rightarrow f$ é crescente

4 – Todas estão erradas

5 – (a)



$$\frac{k}{x-c} = f'(c) \Rightarrow k = f'(c)(x-c)$$

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + r(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x-c} = \frac{f(c)}{x-c} + f'(c) + \frac{r(x)}{x-c}$$

$$\Rightarrow \frac{r(x)}{x-c} = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c) \Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{r(x)}{x-c} = \lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{r(x)}{x-c} = \underbrace{\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{f'(c)} - f'(c) = 0$$

$\therefore$ (a) é verdadeira

(b) Verdadeira, porque fixa a reta secante em torno de c, no limite tornando-a a tangente

e) Seja $\Delta c = \frac{1}{h} \Rightarrow \lim_{h\to -\infty} h\left(f\left(c+\frac{1}{h}\right) - f(c)\right) = \lim_{\Delta c \to 0^-} \frac{f(c+\Delta c) - f(c)}{\Delta c}$, $'(x$

$$\lim_{h\to\infty} h\left(f\left(c+\frac{1}{h}\right) - f(c)\right) = \lim_{\Delta c\to 0^+} \frac{f(c+\Delta c) - f(c)}{\Delta c}$$

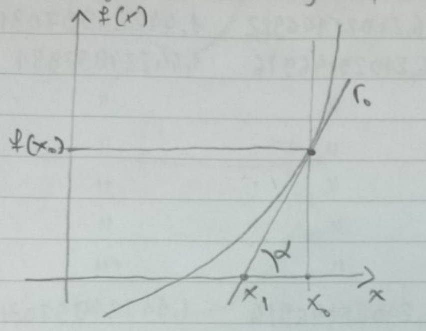
d) E se a função for derivável apenas em c? A definição de derivada da função não traz informações topológicas da própria derivada

Prova - Cálculo Infinitesimal II - 2022.1 - Prof Felipe Acker

PARTE II

1-a) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; contínua e diferenciável

Seja $(x_0, f(x_0))$ um par ordenado qualquer, representando um ponto sobre o gráfico da função f, como na figura abaixo:



A reta tangente a f, em $(x_0, f(x_0))$ é dada por $r_0(x) = ax + b$, $a = tg\alpha$, $tg\alpha = f'(x_0)$

$\therefore r_0(x) = f'(x_0)x + b$

Se $x = x_0$, $r_0(x_0) = f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$, o que implica que $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

Assim, r_0 é dada por: $r_0(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

A primeira aproximação x_1 é dada por: $r_0(x_1) = 0$

$\Rightarrow r_0(x_1) = 0 = f'(x_0) \cdot x_1 + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \Rightarrow f'(x_0) \cdot x_1 = f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0)$

$\Rightarrow x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$

Podemos, analogamente, repetir para x_i, $i=2$, $r_1(x) = f'(x_1)x + f(x_1) - f'(x_1) \cdot x$

Se a aproximação de x_2 é dada por: $r_1(x_2) = 0$

$\Rightarrow x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$; em procedimento análogo ao de x_1

Assim, em procedimento análogo a x_2, para x_i, $i=3$, temos que:

$r_2(x) = f'(x_2)x + f(x_2) - f'(x_2)x \Rightarrow x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2)$

E, em procedimento análogo para x_i, $i = n+1$, temos que:

$r_n(x) = f'(x_n)x + f(x_n) - f'(x_n)x \Rightarrow x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. /

④

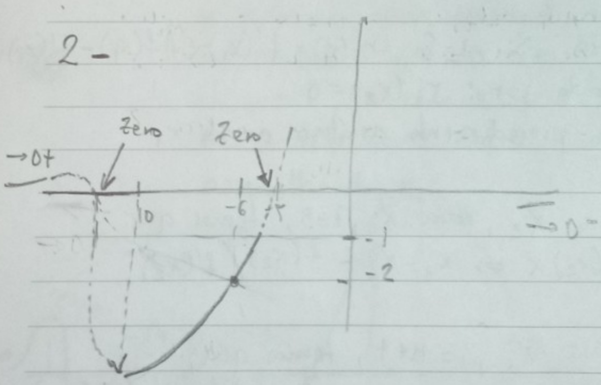
b) $f'(x) = 3x^2$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1} $[= x_n - f(x_n)/f'(x_n)]$
0	1,5	0,375	6,75	1,444...
1	1,444.....	0,01371742112	6,259259259...	1,44225290379
2	1,44225290379	0,00002080183	6,24028031548	1,44224957032
3	1,44224957032	0,00000000005	6,24025146922	1,44224957031
4	1,44224957031	0,00000000000	6,24025146916	1,44224957031
5	"	"	"	"
6	"	"	"	"
7	"	"	"	"
8	"	"	"	"
9	"	"	"	"
10	1,44224957031	0,000000000	6,24025146916	1,44224957031

* Todos iguais, pois ultrapassou a precisão da planilha eletrônica.

c) $x_2 = \dfrac{144225290379}{100000000000}$, Estimativa $x^2 - \sqrt[3]{3} = 0{,}00000333348$
$= 3{,}33348 \cdot 10^{-6}$

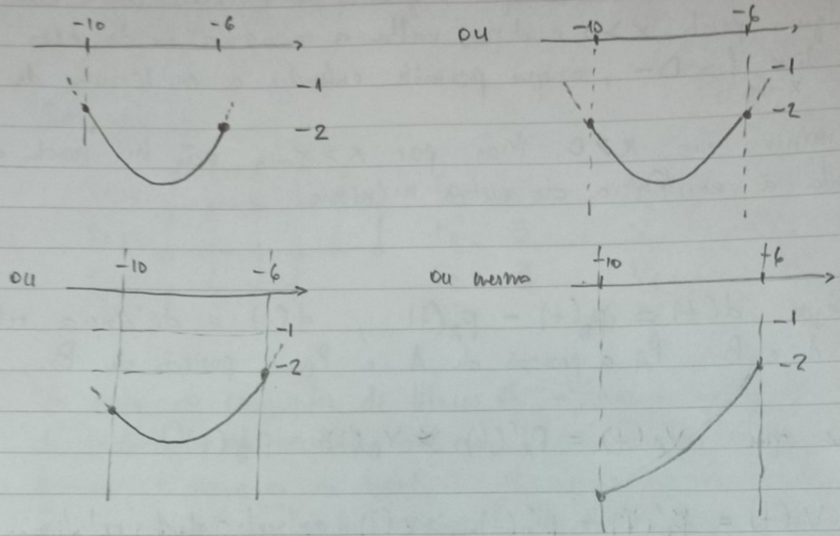
2 -



I - Se x é positivo em $-\infty$ e negativo em -10, então no intervalo $(-\infty, -10)$ há um zero.

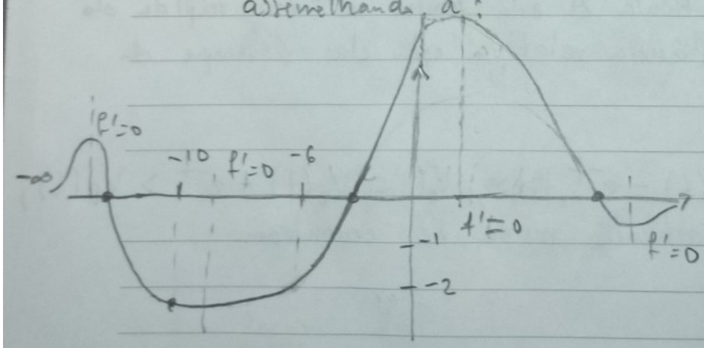
II - Entre -10 e -6, a inclinação está crescendo a uma taxa superior à 2 por unidade, de forma monotônica, de forma que não há zeros entre -10 e -6, pois $f(-10)$ e $f(-6)$ ainda são negativos.

As topologias aceitáveis para o gráfico da função entre -10 e -6 são:



Nos quatro casos as inclinações sempre crescentes, porque $f'' > 2 > 0$ //

III - Entre -6 e 0, o gráfico deve cortar o eixo do X, porque a inclinação do gráfico de f varia a uma $tg\alpha > 2$, depois de, no máximo, uma unidade após -6 (ou seja, em -5). Mesmo assumindo $tg\alpha = 0$ em -6, em -5 já seria $tg\alpha = 2$ e até -4, o eixo X teria sido alcançado, levando a ter mais dois zeros entre -6 e $+\infty$, com o gráfico final assemelhando a:



Assim:

a) f se anula em, pelo menos, 3 pontos

b) f' se anula e, pelo menos 4 pontos

⑥

c) Considerando a taxa de $f'' > 2$, $f(-4)$ possui sinal positivo.

d) Não é verdade. Sabe-se que o gráfico de f intercepta o eixo x em algum ponto $x > 0$ e depois volta a se aproximar do eixo (pois $\lim_{x \to \infty} f = 0-$, o que permite entender a existência de um mínimo em $x > 0$. Mas, par $x > x_{min}$, não há nada que garanta a existência de outro mínimo.

3- Seja $d(t) = p_B(t) - p_A(t)$, $d(t)$ a distância relativa entre A e B, P_A a posição de A e P_B a posição de B.

Sabemos que $V_A(t) = P_A'(t) > V_B(t) = P_B'(t)$

$\Rightarrow v(t) = p_B'(t) - p_A'(t)$, $v(t)$ a velocidade relativa entre A e B, $v(t) = V_B(t) - V_A(t) < 0$ pois $\forall x$, $V_A(t) > V_B(t)$

Mas, em $t = t_0$, $d(t_0) = P_B(t_0) - P_A(t_0) > 0$

Assim, a distância relativa entre A e B inicia-se com um valor positivo, mas tem inclinação sempre negativa.

Se assumirmos $d(t) = e^{-t}$, $t > t_0$, teremos $v(t) = -e^{-t}$, $t > t_0$, o que significa que a partícula A está sempre e^{-t} mais rápida do que a partícula B e, a distância relativa entre elas é sempre de e^{-t}, $\forall t$.

Ou seja, se $P_A(t) = P_B(t) - e^{-t}$, $t > t_0 > 0$, $V_A(t) = V_B(t) + e^{-t} > V_B(t)$, para todo t, mas as partículas nunca se encontram.

4 – Quando temos blocos de retângulos, o número de vértices é dado por:

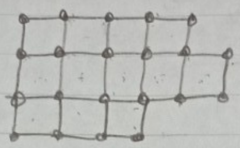
$$V_n = \sum_{i=1}^{n}\left[(r_i+1)\cdot 2 - \min(r_{i-1}+1, r_i+1)\right] + (r_0+1)\cdot 2$$

Exemplo:

$i=0$

$i=1$

$i=2$



$r_0 = 4$ $\quad V_0 = (r_0+1)\cdot 2 = 10$

$r_1 = 5$ $\quad V_1 = (r_1+1)\cdot 2 - (r_0+1) = 7$

$r_2 = 3$ $\quad V_2 = (r_2+1)\cdot 2 - (r_2+1) = 4$

$\therefore V = 21$

No caso de conjuntos de blocos de retângulos unitários (quadrados de lado 1), na medida em que o número de blocos se torna muito grande, o número de vértices se aproxima do número de blocos, se tornando portanto, próximo à área representada pelos blocos. Isso é especialmente verdadeiro em blocos compactos, com muitos vértices em comum.

Assim, para n muito grandes, $V_n \longrightarrow A_n$, sendo A_n a área representada pelos blocos unitários.

Assim, para o problema apresentado, o número de pares ordenados, (a,b) em $\mathbb{Z}^2$, $a^2+b^2 \leq r^2$ é o número de vértices dos blocos unitários dentro do círculo de raio r, que, para números muito grandes, se aproxima da área do círculo.

Assim $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{n(r)}{r^2} = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\pi r^2}{r^2} = \pi$

$\therefore \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{n(r)}{r^2} = \pi$