Cálculo Infinitesimal I - 2022.1 - Professor Felipe Acker
Teste 3 - 26/27 de Maio

Parte 1 - Múltipla Escolha

1 - (a) Falsa. Pois se $\sum a_n$ converge, então (a_n) converge e $|a_n|$ converge, mas a recíproca não é verdadeira

(b) Falsa. Pois se $|a_n| \to 0$, não há garantias de que $\sum a_n x^n$ convirja, principalmente se $x \geq 1$.

(c) Falsa. Uma série com todos os elementos em $\mathbb{Q}$ pode convergir para um número irracional.

~~(d)~~ Verdadeiro - Se $\sum a_n^2$ converge, então $a_n^2 \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$ $\Rightarrow |a_{n+1} - a_n| \to 0$

Pelo critério de Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} \left|(n+1)^{-1} \cdot a_{n+1} - n^{-1} a_n\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n a_{n+1} - (n+1) a_n}{(n+1) n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n a_{n+1} - n a_n - a_n}{n(n+1)}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{n(a_{n+1} - a_n)}{n(n+1)} - \frac{a_n}{n(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\overset{0}{a_{n+1} - a_n}}{\cancel{n+1}} - \frac{a_n}{\cancel{n(n+1)}}\right|$$

$$= 0 //$$

2 - (a) Falso. Pelo método da raiz: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|x^n|}$

$$= \lim_{n\to\infty} \alpha \cdot \sqrt[n]{|x^n|} = \lim_{n\to\infty} \alpha \cdot |x| < \alpha^2$$

Converge apenas se $\alpha < 1$

~~(b)~~ Verdadeiro. Pelo teste do limite, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n x^n}{a_n b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{b^n} < 1$

~~(c)~~ Verdadeiro Pelo teste da raiz, $\lim \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| < \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$$

~~(c)~~ Pelo método da razão $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} \cdot x^{n+1}|}{|a_n \cdot x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |x| < \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$
Verdadeiro

3 - ~~(a)~~ Verdadeiro, pois, apesar de ser ilimitada dentro do intervalo, ela é definida em todos os pontos do domínio e, em todos eles $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

(b) Errado - Em $\mathbb{Q} \cap [0,2]$ a função é ilimitada, tanto para $+\infty$, quanto para $-\infty$

~~(c)~~ Verdadeiro, a função existe em todos os pontos de $\mathbb{Q} \cap [0,2]$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ em todos os pontos do seu domínio

(d) Errado, a função não se anula em nenhum ponto pertencente a $\mathbb{Q} \cap [0,2]$

4 - Resposta: (a) (b) ~~(c)~~ (d)

Se $x \in]-1,1[$, a parcela $\frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} < \left|\frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}\right| =$
$= \frac{|x^n|}{n} = \frac{1}{n} \cdot |x^n|$ e $\frac{1}{n} \to 0$ e $|x^n| < 1$ e $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ converge

Se $x=1$, a série é a série harmônica alternada, condicionalmente convergente

Se $x=-1$, a série é a série harmônica negativa, que diverge.

5 - ~~(a)~~ Verdadeira

(b)

(c)

~~(d)~~

6 - ~~(a)~~ (b) ... ~~(c)~~ ~~(d)~~

Respostas Múltipla Escolha

	(a)	(b)	(c)	(d)	Nota:
1.	♡	♡	♡	♥	
2.	♡	♥	♥	♥	
3.	♥	♡	♥	♡	
4.	♡	♡	♥	♡	
5.	♥	♡	♡	♥	
6.	♥	♡	♡	♡	

Parte II - Exercícios

1- Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta$ tal que se $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta$

Assim, a gente sabe que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ e algum $|x - x_0| < \delta$

Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequencia e $x_n \to x_0$, a gente sabe que $\exists n > N$ tal que $|x_n - x_0| < \delta_1$. Se $\delta_1 = \delta$, então $|f(x_n) - f(x_0)| < \delta \Rightarrow \lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(x_0)$

2- Se f é continua em I, então, $\forall x, x_0 \in I$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, mas se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sequencia em I, com $x_n \to x_0$ e $f(x_0) = \infty$, implica que $f(x_0)$ não é bem definido em I, o que é uma contradição.
Portanto x_0 não pode pertencer a I

3- Se f é continua em I, então $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \forall \varepsilon, \exists \delta$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta$
$\Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$. Como é para todo ε,

④

Escolho $\varepsilon = \frac{a}{2} \Rightarrow a - \frac{a}{2} < f(x) < a + \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} < f(x) < 3\frac{a}{2}$

$\Rightarrow f(x) > a/2$ $\not\!\!\downarrow$

4- A gente sabe que $\forall n > n_0$, $a_n > a$
Assim, a gente também sabe que $\exists n > n_1$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon$, $a_n \neq a$, em um caso em que $a_n \to a+$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Mas há outra situação em que a_n não converge a a, mas a qualquer valor $b > a$, podendo ser b maior que qualquer $c \in \mathbb{R}$, sendo essa a definição de $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Agora vamos assumir um $b > a$ e que $\exists n > n_1$ tal que $|a_n - b| < \varepsilon$
Nesse caso sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = b > a$

Da combinação dos três casos, sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n \geq a$

Parte III

Teorema de Bolzano-Weierstrass:
Toda sequência limitada (a_n) possui uma subsequência convergente

1- Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, sabemos que, em $[a,b]$, f possui um máximo. (obs, a opção de $M = \infty$ não faz sentido, porque $[a,b]$ é um intervalo fechado e f é contínua), assim $M = \sup f([a,b])$, sendo $f([a,b])$ a imagem de f.

Assim, se há $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em I, $f(x_n)$ é uma sequência em $f([a,b])$ e $f([a,b])$ possui supremo $\sup f([a,b])$, implicando que $f(x_n) \leq \sup f([a,b])$

$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ por Bolzano-Weierstrass, que existe uma subsequência limitada tal que $b_n \to b_0$ e $f(b_n) \to f(b_0) = \sup f([a,b]) \geq f(x), \forall x \in [a,b]$

Questões 2, 3, 4 $\leadsto$ Não consegui fazer no tempo dado, pois não consegui estudar todo conteúdo da lista.