

Relatório - Modelagem Matemática

Estudo de População de Aves na Amazônia

Usando o Modelo de Reação-Difusão para avaliar sobrevivência de populações em manchas de floresta em áreas desmatadas.

Paulo Roberto Rodrigues da Silva Filho
Pedro Paulo Dantas Silva Martins
Vicente Alves da Silva Sirufo

2024-07-20

Contents

1	Introdução	1
2	Modelagem	2
2.1	Caso 1: Uma única população	2
2.2	Caso 2: Duas populações	5
3	Simulações	5
3.1	Análise de uma população	6
3.2	Análise de duas populações em competição	6

1 Introdução

Em função do processo de desmatamento da Amazônia, percebeu-se que, dentro das regiões desmatadas, formam-se manchas florestadas isoladas. Tais manchas podem ou não ser adequadas para a sustentação de populações animais. O modelo utilizado para se avaliar a capacidade de tais manchas sustentarem populações é o Modelo de Reação/Difusão, regido pela Equação Diferencial Parcial (EDP) FKPP (Modelo Fischer-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov). Foi avaliada a capacidade de sustentação de população de uma única espécie e, também, de duas espécies em competição.

Para entender o problema, vamos, primeiro, apresentar um diagrama, representando a floresta e áreas desmatadas, conforme pode ser visto na Figura 1. Conforme essa figura, temos uma grande área de floresta e uma área desmatada que possui manchas de floresta. A área desmatada pode suportar uma população mínima dos animais em estudo, ou suportar uma população temporária de forma que permita a migração dessas populações entre a área de floresta virgem e as manchas na área desmatada.

Uma vez dada essa representação de ambiente, padrão, podemos utilizar o Modelo de Reação-Difusão, assumindo que, entrando uma determinada população em uma mancha de floresta - ou estando essa população lá isolada, antes do processo de desmatamento - há condições de a população se reproduzir dentro dessa área, estando sujeita a restrições do meio, cooperação e competição intra-específica.

Já no caso de duas populações concorrendo na mesma região, devemos também assumir que a região desmatada tenha capacidade de suportar uma quantidade muito baixa dessas populações, de forma que a hipótese da difusão faça sentido. Fazemos, então, uma análise de ambas as populações em conjunto, em competição.

Tanto no caso da população isolada, quanto na de duas populações, a geometria das manchas (tamanho) e características intrínsecas delas permitem definir uma capacidade de carregamento das populações, que afetam as dinâmicas populacionais. A identificação de um tamanho mínimo de mancha e o isolamento dessa mancha em relação à área florestada, ou a outras manchas também são características relevantes para o estudo do problema.

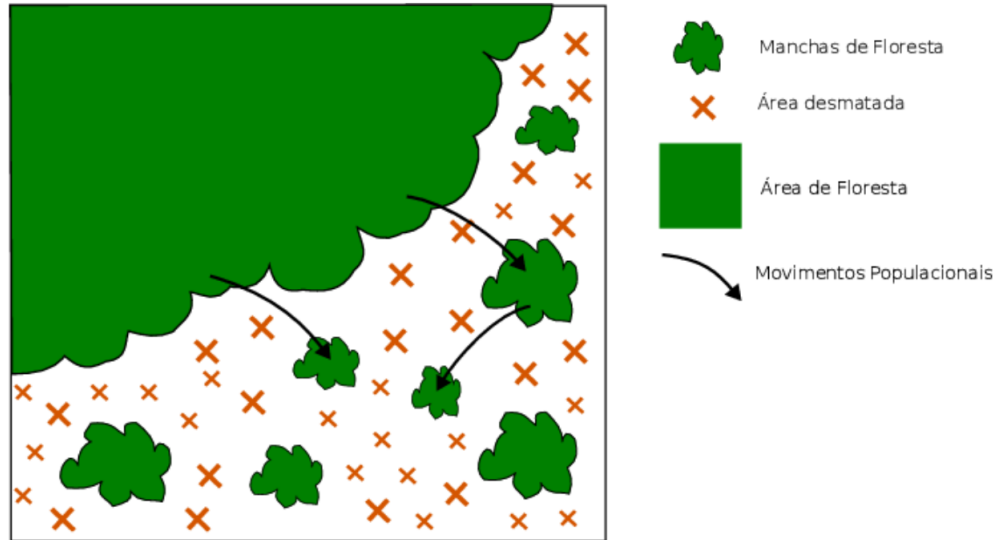


Figura 1: Representação de área florestada e de manchas de floresta. A área florestada pode ser imaginada como uma mancha de floresta de tamanho infinito, ou, apenas, uma área de tamanho grande o suficiente para ser considerada infinita.

2 Modelagem

Agora vamos apresentar os dois modelos avaliados, o modelo de uma população e o modelo de duas populações. Para ambos os casos são usados variantes da EDP FKPP, apresentadas tais variantes caso a caso.

2.1 Caso 1: Uma única população

Para o caso de uma população, o modelo considerado foi FKPP com um termo difusivo (termo de segunda ordem) e os termos reativos, com cooperação (termo linear) e com competição (termo quadrático), sobre uma população u :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha u - \beta u^2 + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Com as condições de contorno de Dirichlet:

$$u(x = 0, l) = 0$$

Sendo:

- $u(x, t)$: a população presente na posição espacial e no tempo, na mancha de floresta ou em uma área florestada.
- D : taxa de difusividade da população - unidade: **comprimento²/tempo**.
- a : Taxa de crescimento populacional da espécie - unidade: **1/tempo**
- b : Se $1/C$ é a capacidade de carregamento de uma população para uma mancha ou região de floresta, então $C = \frac{b}{a}$, de forma que b indica as condições que atrapalhem o crescimento populacional, como geometria da região de mancha, competição por comida, entre outras.

- **l**: Comprimento (não adimensionalizado) da mancha ou região florestada

Para facilitar a análise, as seguintes transformações são feitas, para se adimensionalizar a equação e, então, avaliar as suas propriedades:

$$\begin{aligned}x &= x' \sqrt{\frac{D}{a}} \\ \partial_x &= \partial_{x'} \sqrt{\frac{a}{D}} \\ l &= L \sqrt{\frac{D}{a}} \\ t &= t' \frac{1}{a} \\ \partial_t &= \partial_{t'} a\end{aligned}$$

Depois, retornando o nome da variável de distância de \mathbf{x}' para \mathbf{x} e de tempo de \mathbf{t}' para \mathbf{t} , temos a nova equação:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(x, t) - Cu^2(x, t) \\ C(x) &= \begin{cases} C_1, & \text{se } |x| < L/2 \\ C_0, & \text{se } |x| > L/2 \end{cases}\end{aligned}$$

Onde C_1 e C_0 são a capacidade de carregamento da região interna e externa, respectivamente, de forma que espera-se que a região interna assuma um regime estacionário enquanto a população externa vá assintoticamente para $1/C_0$

Fazemos a seguinte transformação para auxiliar na resolução da EDP:

$$\begin{aligned}u &= \frac{3}{2} \frac{\phi}{C_1}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi - \frac{3}{2} k * (x) \phi^2 \\ k(x) &= \begin{cases} k = \frac{C_0}{C_1}, & \text{se } |x| > L/2 \\ 1, & \text{se } |x| < L/2 \end{cases}\end{aligned}$$

É importante ressaltar que \mathbf{k} pode ser interpretado como um indicador do nível de "isolamento" da região interna, como o quão difícil é sair da região ideal ou o quanto a região interna é mais atrativa do que a externa.

Como ϕ é uma função contínua e simétrica, e $\frac{2}{3}k$ é uma solução para a parte externa, temos as seguintes condições:

$$\begin{aligned}\phi_{xx} + \phi - \frac{3}{2}k\phi^2 &= 0, \quad x < L/2, \\ \phi_{xx} + \phi - \frac{3}{2}k\phi^2 &= 0, \quad 0 > x > -L/2, \\ \phi^o\left(-\frac{L}{2}, \cdot\right) &= \phi^i\left(-\frac{L}{2}, \cdot\right), \\ \phi_x^o\left(-\frac{L}{2}, \cdot\right) &= \phi_x^i\left(-\frac{L}{2}, \cdot\right), \\ \phi^o(-\infty, \cdot) &= \frac{2}{3k}.\end{aligned}$$

Onde os índices i/o representam as regiões interna/externa respectivamente.

Resolvendo as equações para vários \mathbf{k} e \mathbf{L} temos os resultados apresentados nas figuras 2 e 3.

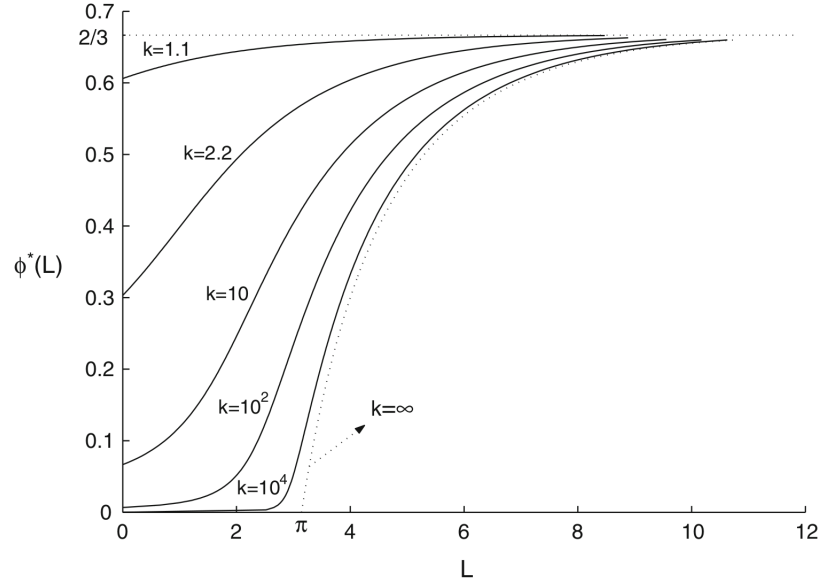


Figura 2: Valor máximo de ϕ X L (vários k).

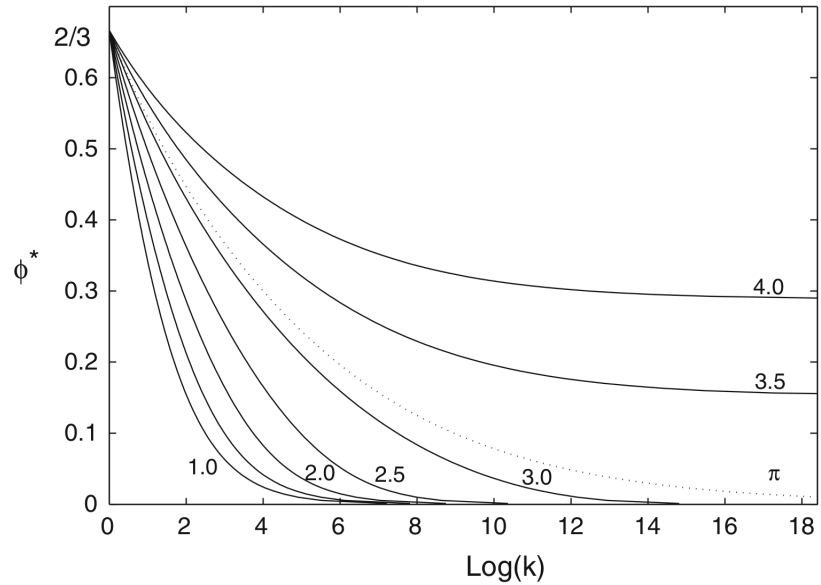


Figura 3: Valor máximo de ϕ X $\log k$ (vários L).

A partir da análise do comportamento de \mathbf{k} e de \mathbf{L} , podemos concluir que para valores menores de \mathbf{k} , pode ser que não exista um tamanho necessário para a sobrevivência da espécie, enquanto alterações no valor de \mathbf{k} , quando \mathbf{k} pequeno, impactam mais do que se a mesma alteração fosse feita para valores maiores de \mathbf{k} . Além disso, para qualquer valor de \mathbf{k} , se \mathbf{L} for maior ou igual a π , a população vai sobreviver. Porém, se \mathbf{L} for menor, a tendência é a população se extinguir na região. Ou seja \mathbf{L}_c (tamanho crítico) é sempre menor ou igual a π . Por fim, quanto maior for a taxa de crescimento, menor o tamanho necessário à mancha florestada para a sobrevivência da espécie. O oposto ocorre para o índice de difusividade.

2.2 Caso 2: Duas populações

O modelo para duas espécies em competição usa duas EDP FKPP integradas uma à outra, através das seguintes equações:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} &= u_1 [\alpha_1 - \beta_1 u_1 - \gamma_{12} u_2] + D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} &= u_2 [\alpha_2 - \beta_2 u_2 - \gamma_{21} u_1] + D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Onde as variáveis \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 representam as populações e os valores de α_1 e α_2 representam cooperação internas dessas espécies, β_1 e β_2 representam competição interna e γ_{12} e γ_{21} representam a competição entre as espécies.

Com as seguintes conclusões esperadas:

1. Se L for muito pequeno, ambas populações desaparecem.
2. Se L for grande o suficiente, $\gamma_1 < 1$ e $\gamma_2 < 1$, populações coexistem.
3. Se L for grande o suficiente, $\gamma_1 < 1$ e $\gamma_2 > 1$, eliminação da espécie 2.
4. Se L for grande o suficiente, $\gamma_1 > 1$ e $\gamma_2 > 1$, eliminação da espécie 1.
5. Se L for grande o suficiente, $\gamma_1 > 1$ e $\gamma_2 < 1$, dependendo da condição inicial, ou 1 ou 2 são eliminados.

Mas, em espaço limitado, podemos fazer um ajuste das equações e analisar a área, assumindo:

1. $D_1 = 1$
2. $D_2 = \kappa$
3. $\alpha_1 = \beta_1 = 1$
4. $\gamma_{12} = \gamma_1$
5. $\alpha_2 = \beta_2 = \alpha$
6. $\gamma_{21} = \alpha\gamma_2$

O que implica em:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} &= u_1 [1 - u_1 - \gamma_1 u_2] + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} &= u_2 [\alpha - \alpha u_2 - \alpha\gamma_2 u_1] + \kappa \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\end{aligned}$$

A análise do comportamento dessas populações e do \mathbf{L} é apresentada posteriormente, na apresentação dos resultados de simulação.

3 Simulações

Nessa seção serão apresentadas as simulações numéricas da EDP FKPP, para os problemas analisados, variando-se uma série de parâmetros, principalmente no tocante ao tamanho da área das manchas de floresta.

3.1 Análise de uma população

Foi assumida a EDP de reação e difusão, com o espaço unidimensional, para uma única espécie:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha u - \beta u^2 + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Usando o método de diferenças finitas para resolver essa EDP em um espaço limitado com condições de contorno de Dirichlet.

$$u(x=0, L) = 0$$

Discretizando a EDP via diferenças finitas temos:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{u(x-dx,t) - 2u(x,t) + u(x+dx,t)}{dx^2}$$

Todos os resultados são apresentados nas figuras (...), (...), abaixo. Os parâmetros e o código fonte para se chegar nesses resultados estão no arquivo *ipynb* (Python Notebook), *Reação-Difusão Modelagem - uma população.ipynb*, em anexo.

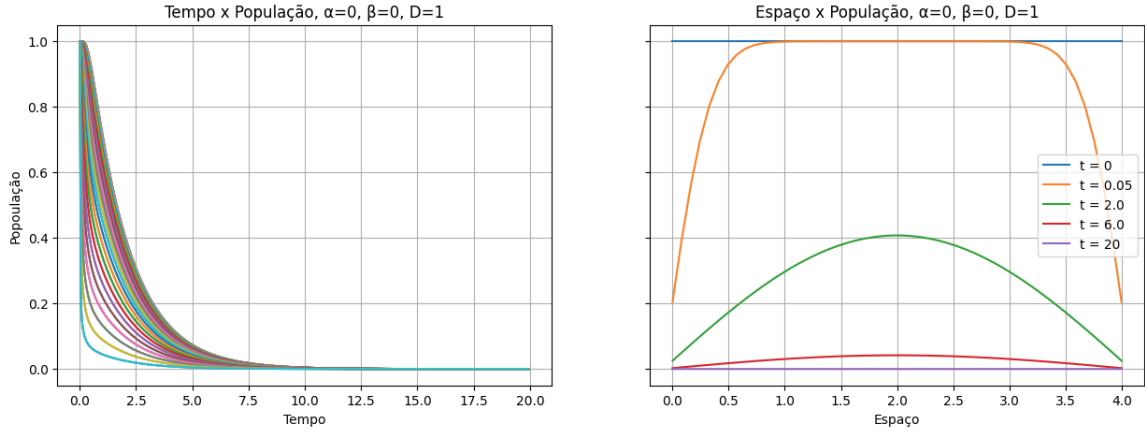


Figura 4: ...

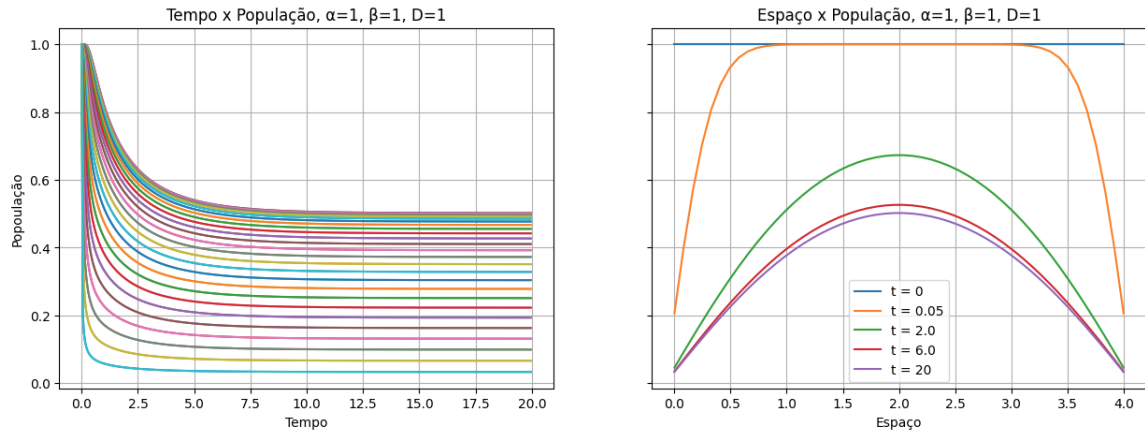


Figura 5: ...

3.2 Análise de duas populações em competição

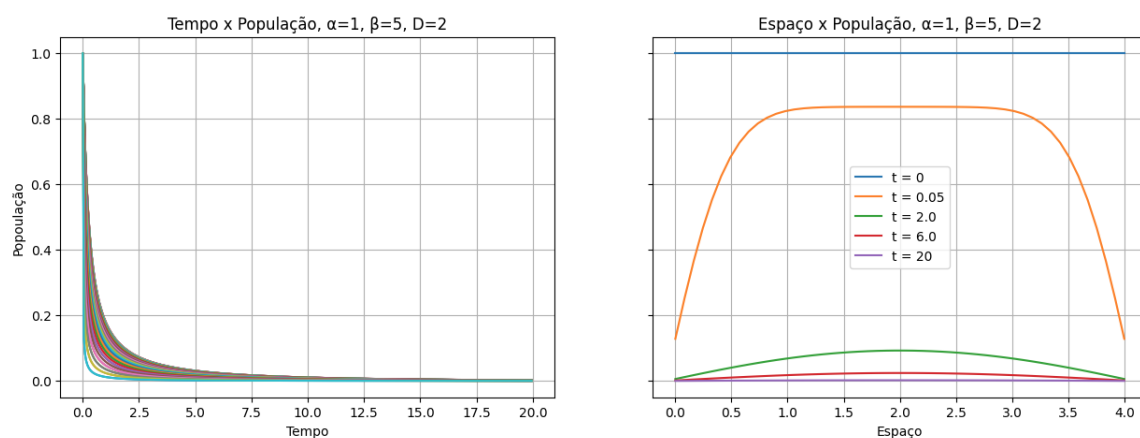


Figura 6: ...

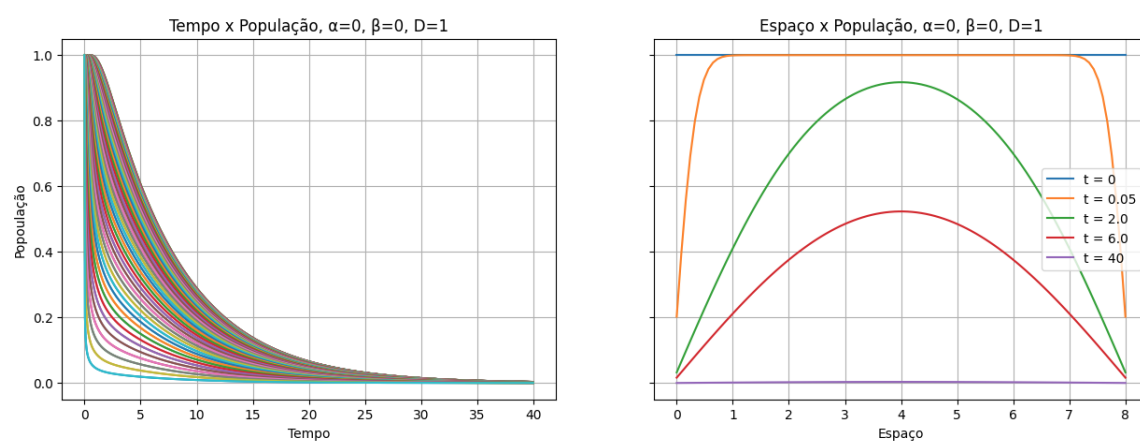


Figura 7: ...

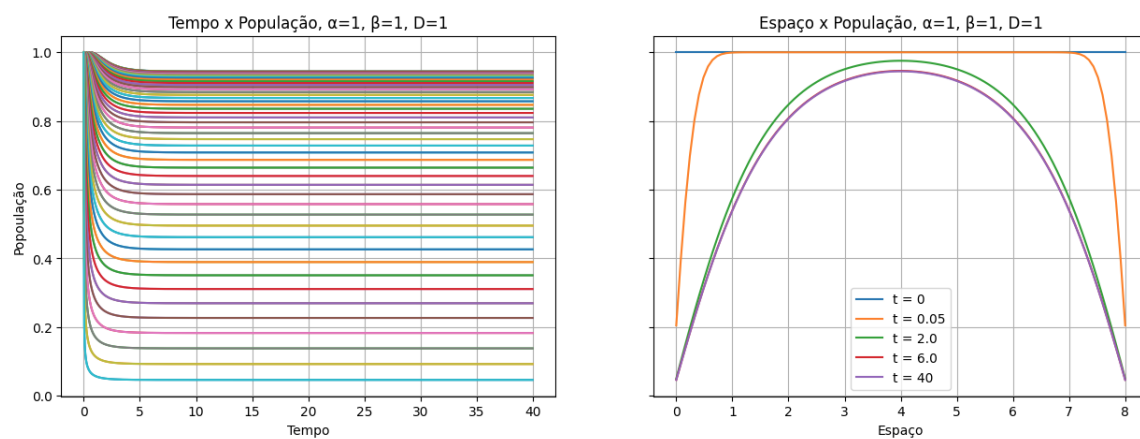


Figura 8: ...

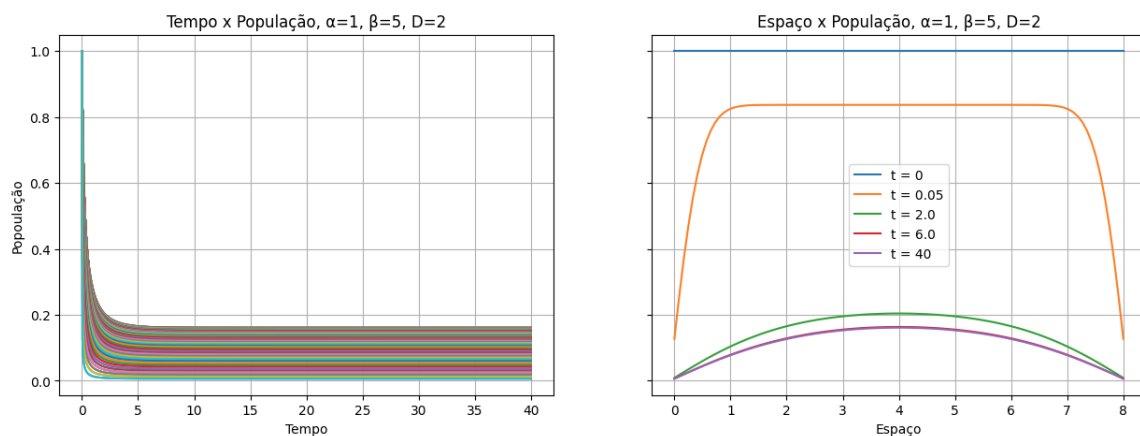


Figura 9: ...

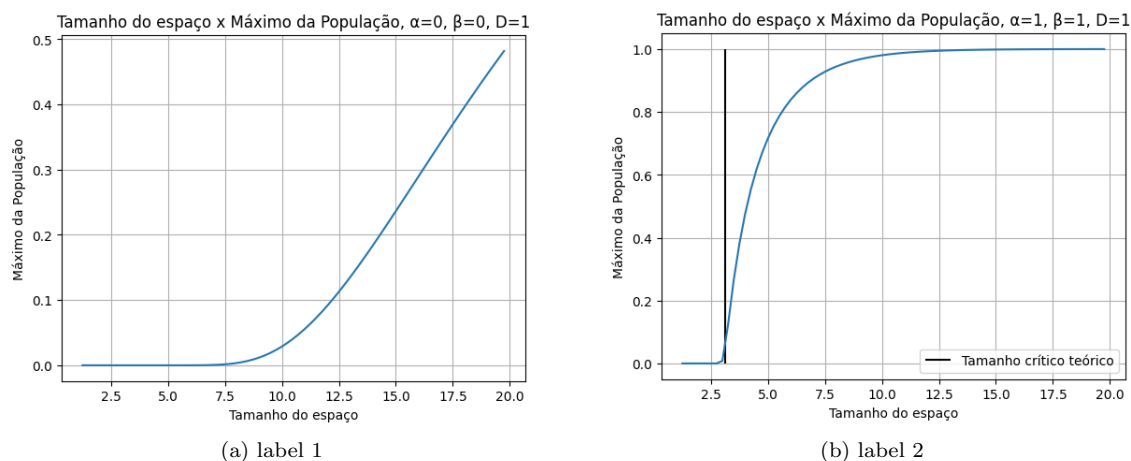


Figura 10: ...

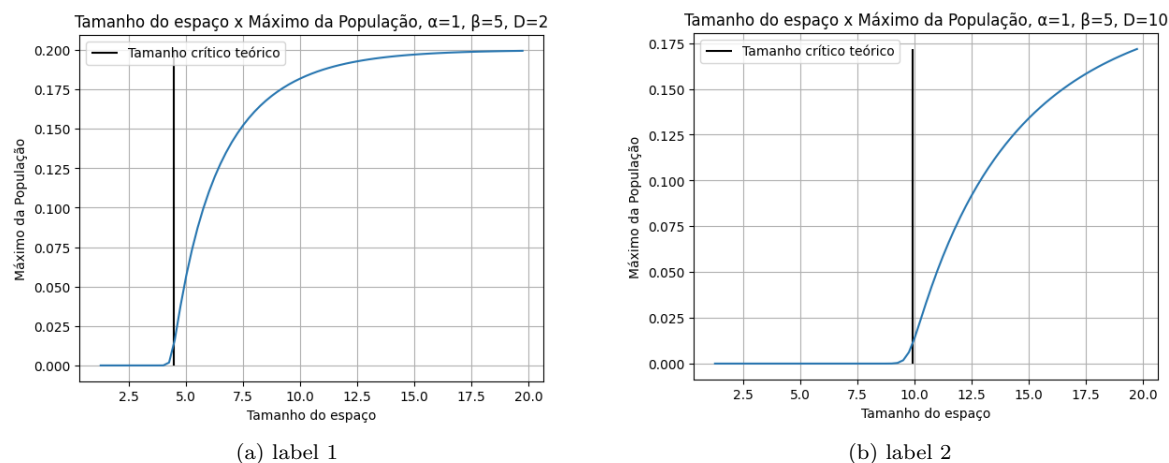
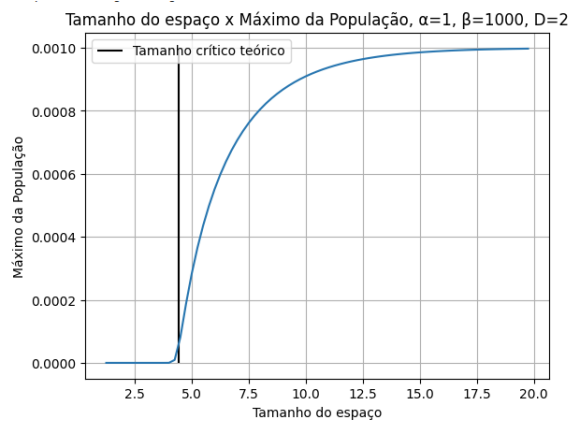
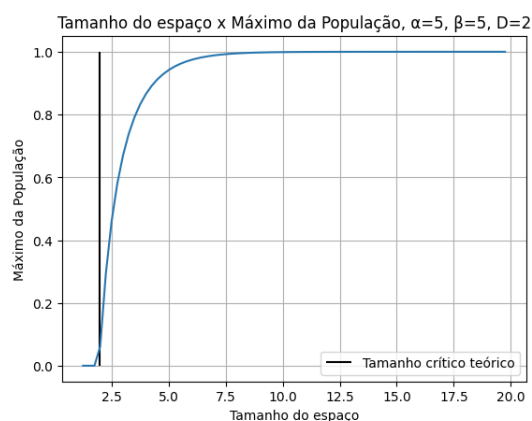


Figura 11: ...

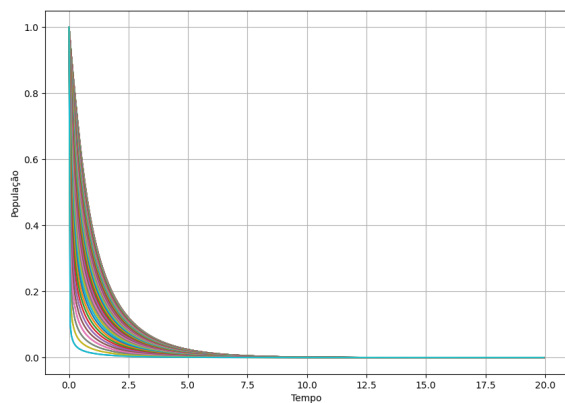


(a) label 1

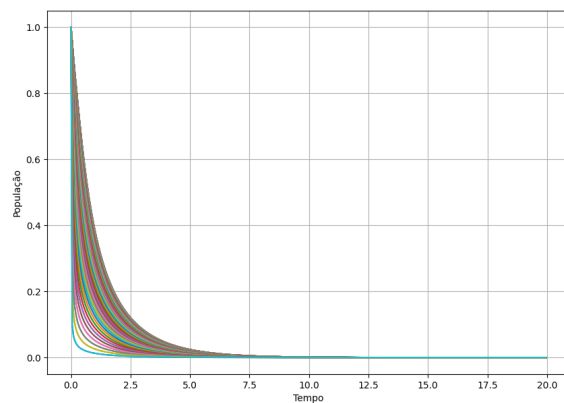


(b) label 2

Figura 12: ...

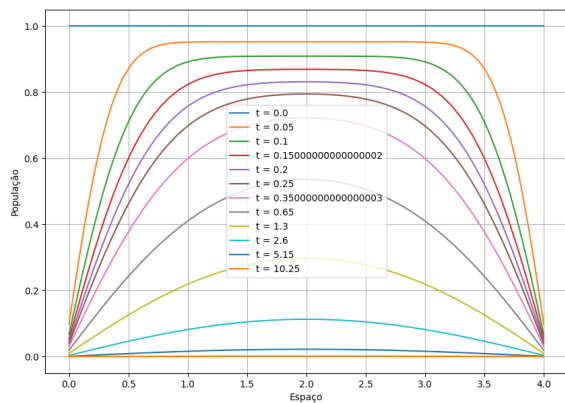


(a) label 1

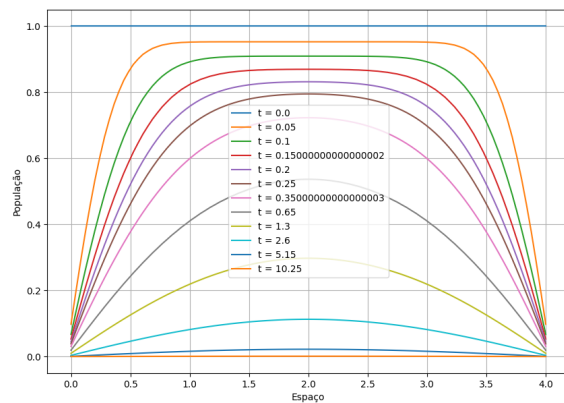


(b) label 2

Figura 13: ...

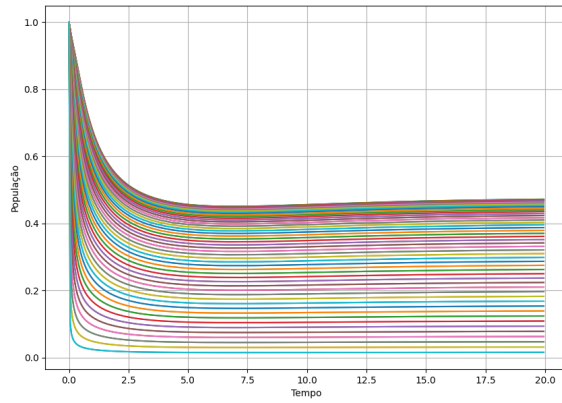


(a) label 1

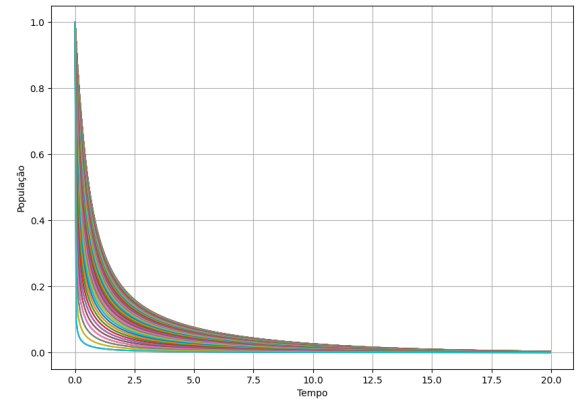


(b) label 2

Figura 14: ...

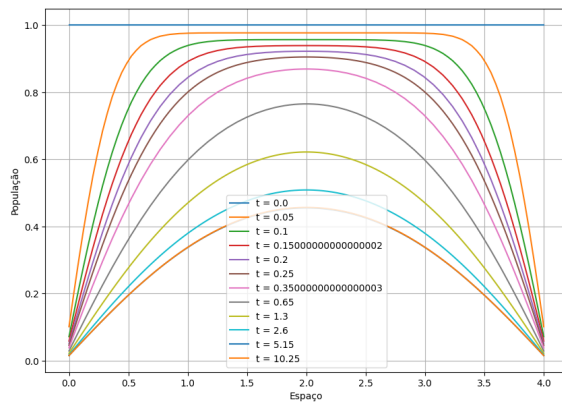


(a) label 1

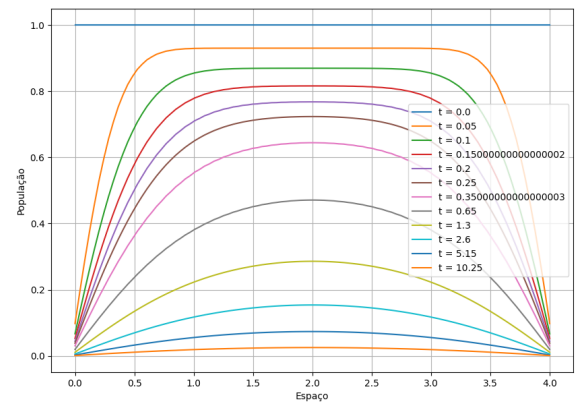


(b) label 2

Figura 15: ...

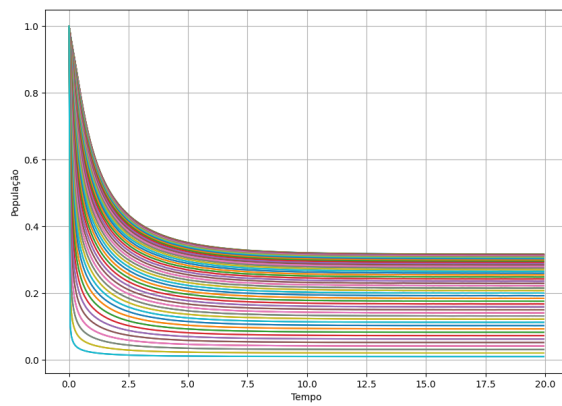


(a) label 1

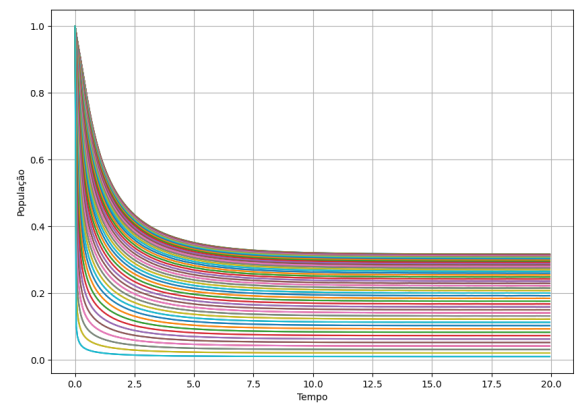


(b) label 2

Figura 16: ...

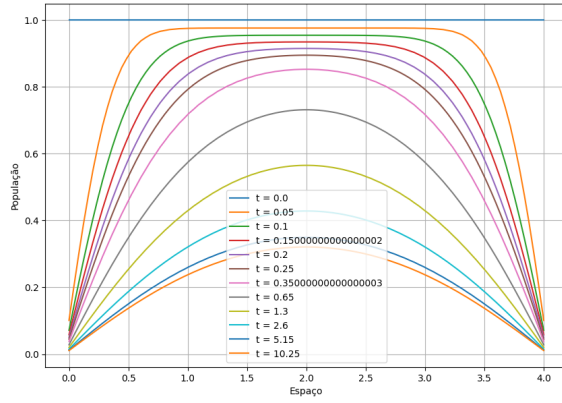


(a) label 1

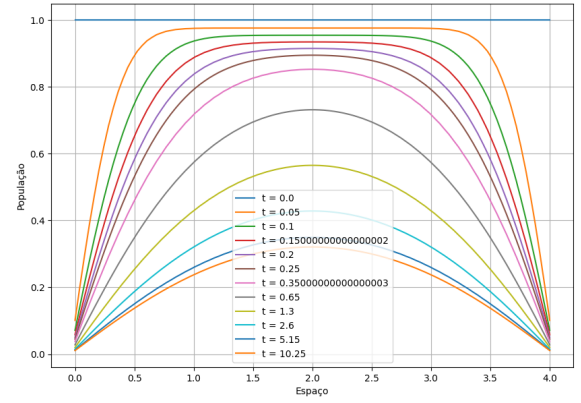


(b) label 2

Figura 17: ...

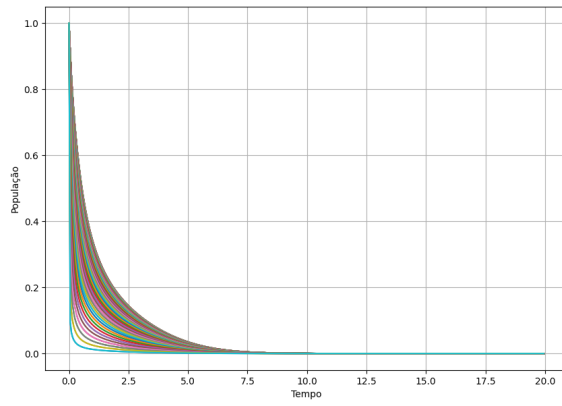


(a) label 1

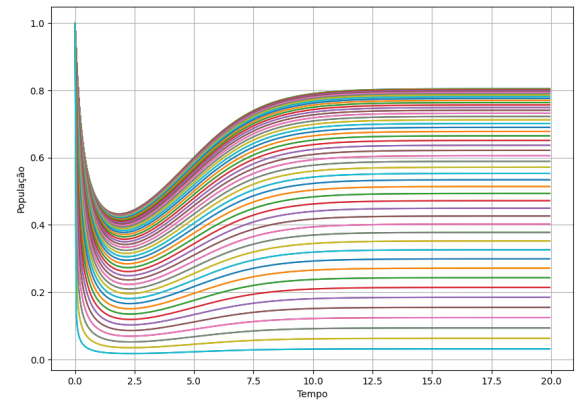


(b) label 2

Figura 18: ...

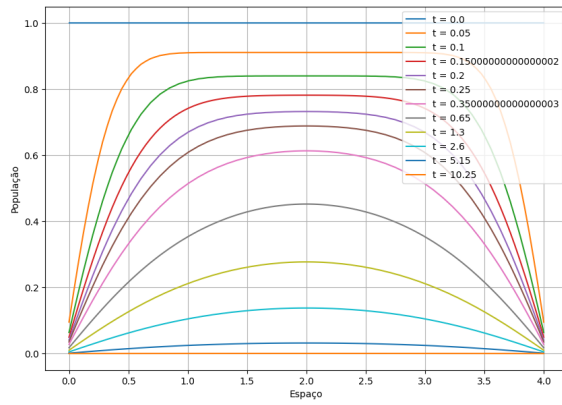


(a) label 1

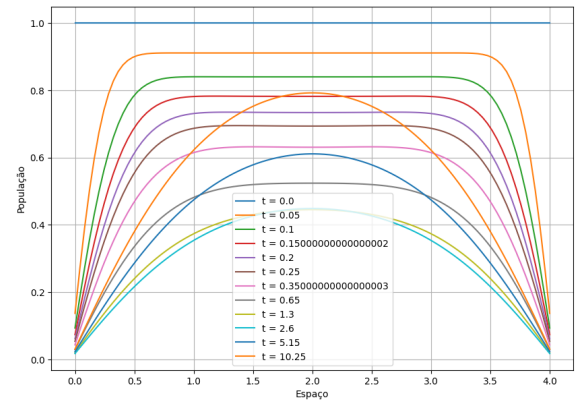


(b) label 2

Figura 19: ...

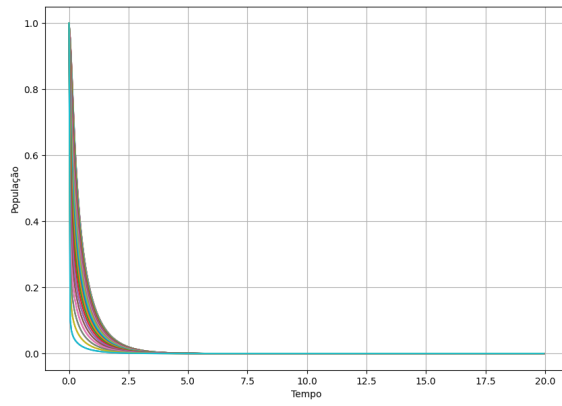


(a) label 1

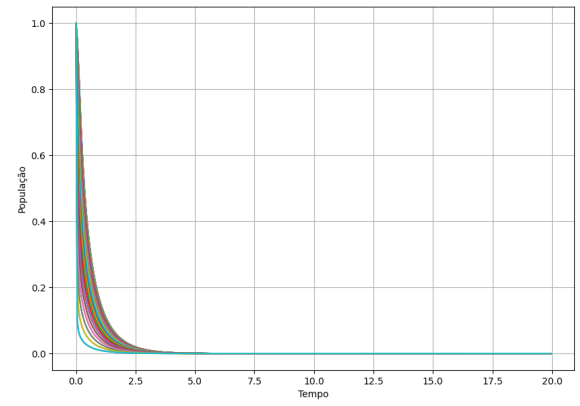


(b) label 2

Figura 20: ...

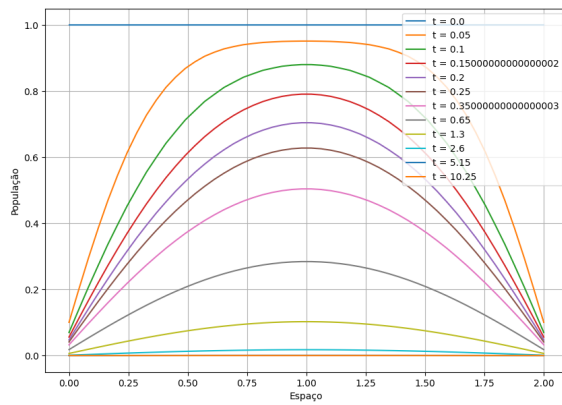


(a) label 1

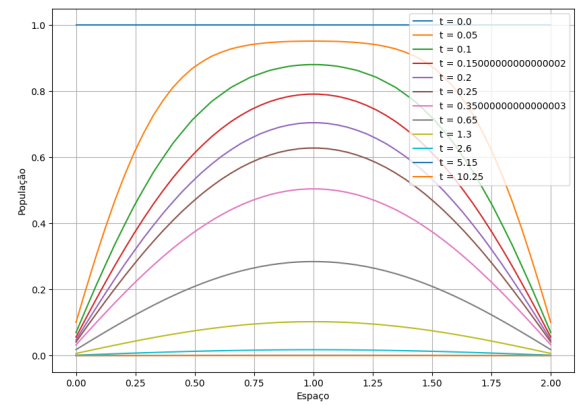


(b) label 2

Figura 21: ...



(a) label 1



(b) label 2

Figura 22: ...

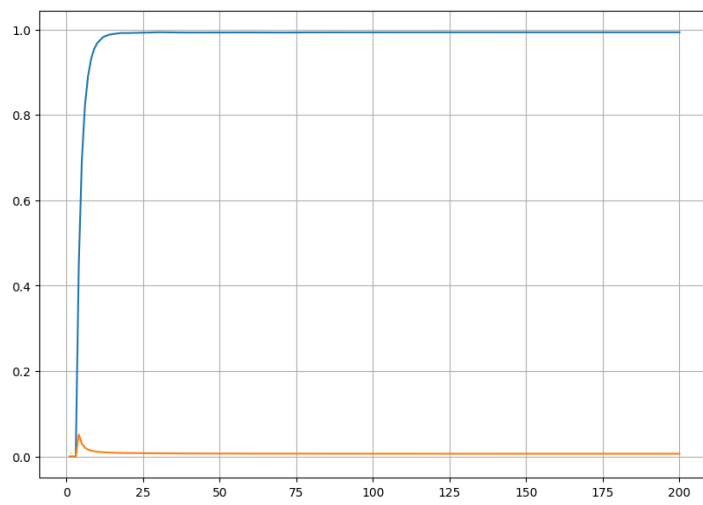
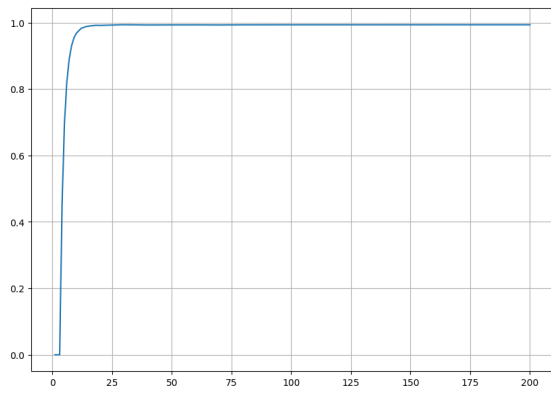
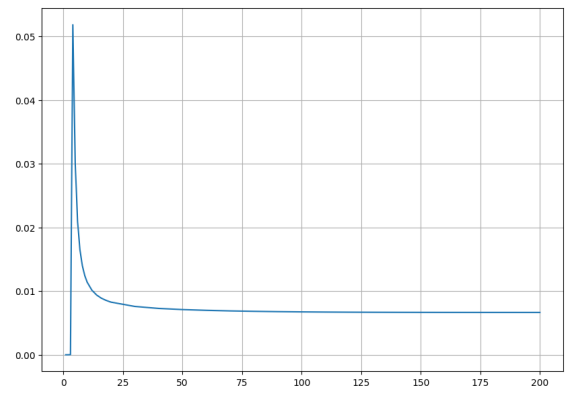


Figura 23: ...



(a) label 1



(b) label 2

Figura 24: ...