INSTITUTO DE MATEMÁTICA -UFRJ

Cálculo Vetorial e Geometria Analtica - 2022.2 - Professor Felipe Acker

Prova 4 - 23 de dezembro

PARTE I - Contas (4 pontos) - Justifique suas respostas

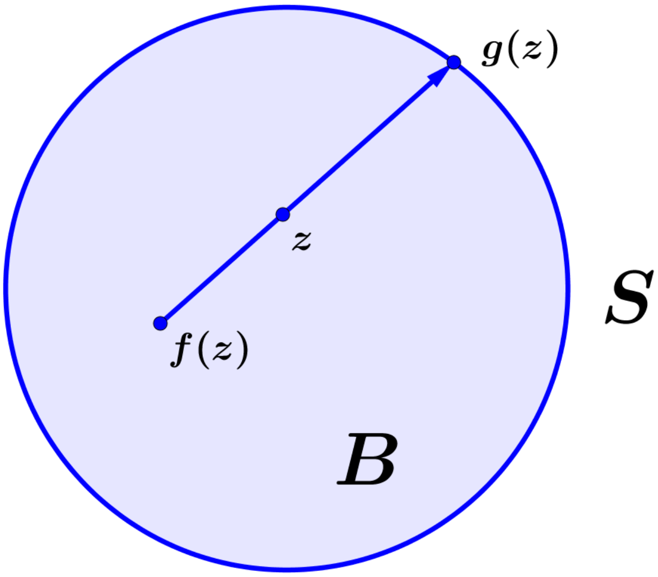
1. Sejam

$$B = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| \leq 1 \right\}, \quad S = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| = 1 \right\}.$$

Suponha que $f : B \to B$ é tal que

$$f(z) \neq z \ \forall \, z \in \ B.$$

Para cada z em B, obtenha um ponto $g(z)$ em S da seguinte forma: $g(z)$ é a interseção com S da semirreta que parte de $f(z)$ e contém z.



(a) Obtenha a expressão de $g(z)$ em função de z e de $f(z)$. Atenção: trata-se de obter a interseção entre uma semirreta e um círculo. Tem contas, mas é algo que você **tem que saber fazer**. Se não souber fazer, não terei o menor remorso em reprovar você neste curso (mas vou, é claro, me sent1r um péssimo professor). **(valor: 2 pontos)**

(b) Mostre que a função $g : B \to S$ acima definida satisfaz as seguintes propriedades:

i. $f(z) = z \ \forall \, z \in \ S$; **(valor: 0,5 ponto)**

ii. é de classe C^k, se f for de classe C^k. **(valor: 0,5 ponto)**

2. Seja $p(z)$ o polinômio a coeficientes complexos, dado por

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_o, \text{ com } a_o \neq 0.$$

Suponha que p não é constante (ou seja, $n > 0$).

(a) Faça $q(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_o$. Mostre que existe $R > 0$ (real, claro) tal que

$$|z| \geq R \Rightarrow |q(z)| < |z^n|.$$

Exiba um tal R, maior do que 1, em função dos coeficientes de q. **(valor: 0,5 ponto)**

(b) Faça $q(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ (real, claro) tal que

$$|z| \leq \varepsilon \Rightarrow |q(z)| < |a_o|.$$

Exiba um tal ε, menor do que 1, em função dos coeficientes de p. **(valor: 0,5 ponto)**

PARTE II - Homotopias - 1,5 pontos, cada - Justifique suas respostas

1. Sejam Ω um aberto do plano (que identificaremos a $\mathbb{C}$) e $F : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função de classe C^1 (isto é, F é contínua e tem derivadas parciais contínuas - se você não fez Cálculo II, não se martirize, é apenas um detalhe técnico).

   Sejam r_o e r_1 reais, com $0 \leq r_o < r_1$. Suponha que Ω contém a coroa circular

   $$K[r_o, r_1] = \{z \in \mathbb{C} \mid r_o \leq |z| \leq r_2\}.$$

   Seja
   $$H : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \text{ dada por } H(s,t) = F([(1-s)r_o + sr_1](\cos t + i \sin t)).$$
   Para cada s em $[0,1]$, seja $c_s : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ a curva definida por

   $$c_s(t) = H(s,t).$$

   Chame de γ_o e γ_1 as curvas definidas, respectivamente, por

   $$\gamma_o(t) = F(r_o(\cos t + i \sin t)), \quad \gamma_1(t) = F(r_1(\cos t + i \sin t)).$$

   Mostre que:

   (a) H é de classe C^1;
   (b) $c_s(2\pi) = c_s(0)$, para todo s em $[0,1]$;
   (c) $c_o(t) = \gamma_o(t)$, para todo t em $[0, 2\pi]$.
   (d) $c_1(t) = \gamma_1(t)$, para todo t em $[0, 2\pi]$.

2. Suponha $c_o, c_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ são duas curvas parametrizadas, fechadas (istoé: $c_o(b) = c_o(a)$ e $c_1(b) = c_1(a)$), de classe C^k. Defina $v : [a,b] \to \mathbb{C}$ por

   $$v(t) = c_1(t) - c_o(t).$$

   Seja
   $$H : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{C}, \text{ dada por } H(s,t) = c_o(t) + sv(t).$$

   Mostre que:

   (a) H é de classe C^k;
   (b) $c_s(b) = c_s(a)$, para todo s em $[0,1]$;
   (c) $H(0,t) = c_o(t)$, para todo t em $[a,b]$.
   (d) $H(1,t) = c_1(t)$, para todo t em $[a,b]$;
   (e) se $c_o(t) \neq O$ para todo t em $[a,b]$ e $|v(t)| < |c_o(t)|$ para todo t em $[a,b]$, então $c_s(t) \neq O$ para todo t em $[a,b]$ e para todo s em $[0,1]$.

PARTE III - Teoremas - 7 pontos - Justifique suas respostas

Se $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é uma curva fechada ($c(b) = c(a)$) de classe C^1, dada por

$$c(t) = (x(t), y(t)),$$

definimos o **índice** de c em relação a $O = (0,0)$, $n(c,O)$, por

$$n(c,O) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\,dt.$$

Se $c_o, c_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ são curvas fechadas de classe C^1, uma homotopia de caminhos fechados, de classe C^k, entre c_o e c_1 é uma função

$$H : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{R}^2$$

tal que

1. H é de classe C^k;
2. $H(s,b) = H(s,a)$, para todo s em $[0,1]$;
3. $H(0,t) = c_o(t)$, para todo t em $[a,b]$.
4. $H(1,t) = c_1(t)$, para todo t em $[a,b]$;

Admitiremos provados os seguintes resultados:

Resultado 1: O índice, quando definido, é sempre um número inteiro.

Resultado 2: se existe homotopia C^1 de caminhos fechados, H, entre c_o e c_1 e a origem, O, não está na imagem de H (ou, dito de outra forma, se podemos deformar c_o em c_1 sem passar por O), então $n(c_1,O) = n(c_o,O)$.

Teorema Fundamental da Álgebra(valor:4 pontos): Se $p(z)$ é um polinômio não constante a coeficientes complexos, então p tem, pelo menos, uma raiz em $\mathbb{C}$.

1. Dê uma olhada na playlist TFA. Use os resultados das partes I e II.
2. Defina, para $r \geq 0$, a curva $c_r : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ por
$$c_r(t) = p(r(\cos t + i\sin t)).$$
Mostre que $n(c_o,O) = 0$ e que, caso p não tenha raiz, então $n(c_r,O) = 0$ para todo r.
3. Seja, para $r > 0$, $\gamma_r : [0,2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{O\}$ dada por
$$\gamma_r t = r^n(\cos(nt) + i\sin(nt)).$$
Mostre que
$$n(\gamma_r,O) = k, \quad \text{sendo } k \text{ o grau de } p.$$
4. Mostre que, se R é suficientemente grande, então existe homotopia de caminhos fechados entre γ_R e c_r em $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$.
5. Conclua a demonstração do TFA.

Teorema de Irretratabilidade de B em S(valor: 2 pontos): Com as definições da questão 1 da Parte I, não existe $g : B \to S$, de classe C^1, com $g(z) = z$ para todo z em S.

1. Veja o vídeo Lema de Brouwer.
2. Suponha que uma tal g exista. Usando a ideia da questão 1 da Parte II, construa uma homotopia entre uma curva constante (a imagem é um ponto) e uma que percorre S uma vez.
3. Prove o Teorema.

Teorema de Brouwer(**valor: 1 ponto**): Se $f : B \to B$ é de classe C^1, então existe z_o em B tal que $f(z_o) = z_o$.

1. Suponha que tal z_o não exista. Construa g contrariando o Teorema de Irretratabilidade de B em S.

PARTE IV - Mecânica - 7 pontos - Justifique suas respostas

1. Suponha que I é um intervalo em $\mathbb{R}$ e $c : I \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (x(t), y(t))$ é de classe C^1 e tal que

$$-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t) \neq 0 \;\forall\; t \in\; I.$$

   Mostre que podemos reparametrizar c de forma a fazer valer a lei das áreas, isto é: existem um intervalo J e uma função bijetiva,

$$t : J \to I$$

   tais que, se definirmos $\gamma : J \to \mathbb{R}^2$ por

$$\gamma(s) = c(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)),$$

   então γ, como função de s, satisfará a Lei das Áreas.(**valor: 2 pontos**)

2. Sejam m um real estritamente positivo e k : $[0, \infty[\to]0, \infty[$ uma função contínua. O objetivo deste problema é estudar as possíveis soluções da equação diferencial

$$(*)\; m\ddot{x}t = -k(|x(t)|^2)x(t).$$

   (i) Justifique sucintamente, com base em seus conhecimentos de Cálculo de uma variável real, as afirmações a seguir.

      (a) Para todo R>0, existem k_1 e k_2, com $0 < k_1 \leq k_2$, tais que, para r real,

$$r^2 \leq R^2 \Rightarrow k_1 \leq k(r^2) \leq k_2.$$

      (b) Existe $U : [0, \infty[\to [0, \infty[$ (expresse U por meio de uma integral), com $U(0) = 0$ e

$$U'(s) = k(s) \;\forall\; s \in [0, \infty[.$$

   (ii) Suponha que I é um intervalo em $\mathbb{R}$ e que $x : I \to \mathbb{R}^3$ é uma solução de $(*)$. Mostre que:

      (a) a função $L : I \to \mathbb{R}^3$,

$$L(t) = x(t) \otimes m\dot{x}(t),$$

      é constante;

      (b) a função $E : I \to \mathbb{R}$,

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(m|\dot{x}(t)|^2 + U(|x(t)|^2)\right),$$

      é constante.

   (iii) Suponha que I é um intervalo em $\mathbb{R}$ e que $x : I \to \mathbb{R}^3$ é uma solução de $(*)$. Suponha também que, para um certo t_o em I, os vetores $x(t_o) = x_o$ e $\dot{x}(t_o = v_o)$ são linearmente independentes. Mostre que:

      (a) existe um plano, α (exiba, em função de x_o e v_o, um ponto de α e um vetor não nulo normal a α), tal que $x(t) \in \alpha$ para todo t em I;

      (b) $x(t)$ não passa pela origem;

      (c) não existe uma reta, γ, tal que $x(t) \in \gamma$ para todo t em I.

   (iv) Você acha que, nas condições do problema, é possível garantir que, fixados, x_o e v_o, sempre existe uma correspondente solução $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de $(*)$ (com $x(t_o) = x_o$ e $\dot{x}(t_o) = v_o$ e definida para todo "tempo"t)? Explique!

   (v) Suponha que a resposta para o item anterior seja positiva. Mostre que, para todo $R > 0$ e para todo x_o, existe v_o tal que uma correspondente solução, $x(t)$ vai ser tal que, para algum t, teremos $|x(t)| > R$.

(vi) Suponha que

$$\int_0^\infty k(s)\, ds = \infty.$$

Mostre que toda solução de $(*)$ é limitada, isto é: que se $x : I \to \mathbb{R}^3$ é solução de $(*)$, então existe R tal que $|x(t)| \leq R$ para todo t em I.

3.

4.

5.

6.