Cálculo Infinitesimal I - 2022.1 - Professor Felipe Acker
Prova 4 - 29 de Julho
- Nome: Paulo Roberto Rodrigues da Silva Filho
- DRE: 122065831

Parte I -

Questão 1:

✓ a) $p(x) = a_m x^m \left(1 + \frac{a_{m-1}}{a_m} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_i}{a_m} \cdot \frac{1}{x^{m-i}}\right)$

$q(x) = b_n x^n \left(1 + \frac{b_{n-1}}{b_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{b_j}{b_n} \cdot \frac{1}{x^{n-j}}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_m x^n \left(1 + \underbrace{\frac{a_{m-1}}{a_m} \cdot \frac{1}{x}}_{\to 0} + \dots + \underbrace{\frac{a_i}{a_m} \cdot \frac{1}{x^m}}_{\to 0}\right)}{b_n x^n \left(1 + \underbrace{\frac{b_{n-1}}{b_n} \cdot \frac{1}{x}}_{\to 0} + \dots + \underbrace{\frac{b_j}{b_n} \cdot \frac{1}{x^n}}_{\to 0}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} = A$$

Se $m > n$, $A = +\infty$

Se $m = n$, $A = \frac{a_m}{b_m}$ Portanto, ✓(a) Verdadeiro

Se $m < n$, $A = 0$

X b) I - Se $\beta = \gamma \Rightarrow \lim_{x \to 0-} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to 0+} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{p(x)}{q(x)}$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_m x^m + \dots + a_i x^i}{b_n x^n + \dots + b_j x^j} = \frac{(a_m x^{m-i} + a_{m-1} x^{m-1-i} + \dots + a_i x^0)\, x^i}{(b_n x^{n-j} + b_{n-1} x^{n-1-j} + \dots + a_j x^0)\, x^j} =$$

$$= \frac{(a_m x^{m-i} + a_{m-1} x^{m-1-j} + \dots + a_i)}{(b_n x^{n-j} + b_{n-1} x^{n-1-j} + \dots + b_j)} x^{i-j}$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{a_i}{b_j} x^{i-j} = \begin{cases} \frac{a_i}{b_i} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i > j \\ +\infty & \text{se } i < j \text{ e } \frac{a_i}{a_j} > 0 \\ -\infty & \text{se } i < j \text{ e } \frac{a_i}{a_j} < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{a_i}{b_j} x^{i-j} = \begin{cases} \frac{a_i}{b_i} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i > j \\ \left.\begin{array}{l} -\infty \text{ se } i < j \text{ e } i-j \text{ ímpar} \\ +\infty \text{ se } i < j \text{ e } i-j \text{ par} \end{array}\right\} & \frac{a_i}{a_j} > 0 \\ \frac{a_i}{a_j} < 0: \left\{\begin{array}{l} +\infty \text{ se } i < j \text{ e } i-j \text{ par} \\ -\infty \text{ se } i < j \text{ e } i-j \text{ ímpar} \end{array}\right. & \end{cases}$$

(2)

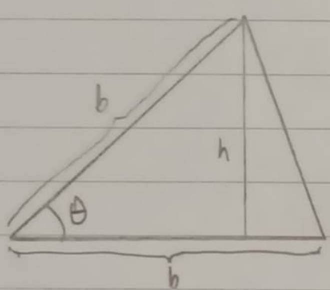
Portanto, X(b) Falso

✓c) Pela resolução da letra (a), ✓(c) Verdadeira

Xd) f pode ser $+\infty$ ou $-\infty$ dependendo se $i-j$ é par ou ímpar e se $\frac{a_1}{a_j}$ é maior ou menor que zero. Portanto (d) é falsa.

2) Como é dado $b>0$, temos que b é fixo e o outro possível lado a é variável

Sendo que o triângulo é dado por:



$$\frac{h}{b} = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow h = b\operatorname{sen}\theta \Rightarrow A(\theta) = \frac{b \cdot b\operatorname{sen}\theta}{2} = \frac{b^2}{2}\operatorname{sen}\theta$$

A maior área, por θ é: $A'(\theta) = 0$

$$\Rightarrow A'(\theta) = \frac{b^2}{2}\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

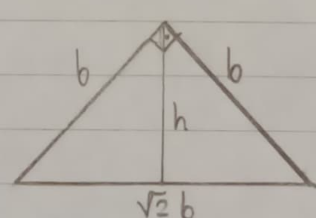
Assim, o triângulo é um triângulo retângulo de cateto igual a b

Portanto:

X(a) Falso

✓(b) Verdadeiro

✓(c)



$$h^2 + \left(\frac{\sqrt{2}b}{2}\right)^2 = b^2$$

$$\Rightarrow h^2 + \frac{1}{2}b^2 = b^2 \Rightarrow h^2 = \frac{1}{2}b^2$$

$$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}b}{2} = \frac{2b}{2\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

✓(c) Verdadeiro

(d) Falso

3) Verificar depois.

4) I - Como f é contínua em intervalo fechado, então ela é uniformemente contínua e sua série de Fourier converge.

Assim, seus coeficientes de Fourier são dados por:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad l = \pi$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx, \quad l = \pi$$

⇒ índices transladados por $Dom(f) = [0, 2\pi]$ e sen, cos serem periódicas

Com a série de Fourier definida, temos que:

$$\langle f(x), f(x)\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b^2) \quad e:$$

X (a) Falso ✓ (b) Verdadeiro, pois c é bem definido

✓ (c) Verdadeiro, pois $c = \langle f(x), f(x)\rangle$

X (d) Falso, pois (c) é verdadeiro

5) (a) e (d) são falsas pois existe $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, que, independentemente do conceito de raio de convergência, cuja série de Mclaurin não converge para f em nenhum ponto diferente de $x = 0$.

Ex: Se $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ e^{-1/x^2}, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$, então $f \in C^\infty$ não tem uma série de Taylor (Mclaurin) convergente (em $x = 0$).

✓ (b) Estamos assumindo a existência da série e sob as condições apresentadas, a série converge, pois $\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n \cdot x^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot x < \frac{1}{R} \cdot R = 1$, convergindo a série (Verdadeiro). Assumindo a existência da série, assume-se que $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

④

X (c) Neste caso, a função $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \end{cases}$ cumpre a condição dada e a série de McLaurin não converge.

(c) é falsa.

6) ✓(a) Verdadeiro, pelo Teorema do Valor médio das integrais.
X (b) Falso, não temos essas garantias.
✓(c) Verdadeiro, pelo Teorema do Valor médio das integrais
✓(d) O valor de $\alpha(x)$ não afeta o valor médio da integral

---

Parte III

1 - Seja $\int_0^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx$

Seja $\int_0^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx + \int_0^{a} f(u+2\pi)\,du \text{ , com } u = x - 2\pi$$

Mas $f(u+2\pi) = f(u) \Rightarrow \int_0^{a} f(u+2\pi)\,du = \int_0^{a} f(u)\,du = \int_0^{a} f(x)\,dx$

$$\therefore \cancel{\int_0^{a} f(x)\,dx} + \int_a^{a+2a} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx + \cancel{\int_0^{a} f(x)\,dx}$$

(=)

$$\Rightarrow \int_a^{a+2a} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx \quad \square$$

b) Pela definição de Derivada:

$$f'(x+2\pi) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+2\pi+\Delta x) - f(x+2\pi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+2\pi+\Delta x) - f(x+2\pi)}{\Delta x}$$

Mas $f(x+2\pi) = f(x)$ e $f(x+\Delta x+2\pi) = f(x+\Delta x)$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x+2\pi) - f(x+2\pi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\therefore f'(x+2\pi) = f'(x)$$

c) Dados que os Coeficientes de Fourier de $g(x) = f'(x)$ são:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos(nx)\,dx \quad e \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,\text{sen}(nx)\,dx$$

E não dependentes do valor da variável x em $g(x)$, podemos pegar $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\,\text{sen}(nx)\right)$ e derivar termo a termo, pois tal série converge (lembre-se que $f \in C^1$)

$$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\,\text{sen}(nx)\right)\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \frac{d}{dx}\cos(nx) + b_n \frac{d}{dx}\,\text{sen}(nx)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot n\left(-\text{sen}(nx)\right) + b_n \cdot n\cos(nx)\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[-na_n\,\text{sen}(nx) + nb_n\,\text{sen}(nx)\right]$$

2) a) Para $n=1$, $f^{(n)} = f^{(1)} = f'$

E $f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - \cancel{f(0)}^{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-1/\Delta x^2}}{\Delta x} =$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x \, e^{1/\Delta x}} = 0$

Para $n>1$, vamos considerar a seguinte sequencia de derivadas:

$f'(x) = 2/(x^3 e^{1/x^2})$

$f''(x) = (1-6x^2)/(x^6 \cdot e^{1/x^2})$

$f'''(x) = 4(6 \cdot x^4 - 9x^2 + 2)/(x^9 \cdot e^{1/x^2})$

Não importa o valor de (n), um termo e^{1/x^2} sempre estará no denominador, forcando $f^{(n)} \to 0$, se $x \to 0$ e $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n)}(\Delta x)}{\Delta x} = 0$, $\forall n > 1$

Assim, se assumimos $f^{(n)}(0) = 0$, temos:

$f^{(n+1)}(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n)}(\Delta x) - \cancel{f^{(n)}(0)}^{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n)}(\Delta x)}{\Delta x} = 0.$

$\therefore$ Se $f^{(n)}(0) = 0 \Rightarrow f^{(n+1)}(0) = 0$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. $\square$

(*) Obs.: Demonstração para $\Delta x \to 0+$, pois para $\Delta x \to 0-$, $f^{(n)}(0) = 0$ pela DEFINIÇÃO da função.

b) Se $f(x) = g(1-x^2) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x^2 \geq 1 \\ e^{-1/(1-x^2)^2} & \text{se } x^2 < 1 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x| \geq 1 & \text{pois } |x| \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \\ e^{-1/(1-x^2)^2} > 0, \text{ se } |x| < 1 & \text{pois } |x| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1. \end{cases}$ $\square$

c) Como $f(x)$ possui infinitas derivadas, $\forall x \in \mathbb{R}$ (Ver letra (a) - o único ponto potencialmente não derivável é $x=0$, e demonstramos que f é derivável infinitamente em $x=0$) e $g(x)$ é uma função composta $g = f \circ k$, $k = 1 - x^2$, também infinitamente derivável, então g é infinitamente derivável.

Como $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{a\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ e a é uma constante e $w(x) = \frac{x}{\varepsilon}$ é infinitamente derivável, então $\varphi_\varepsilon(x)$ é infinitamente derivável, fixado ε e

$\varphi_\varepsilon \in C^\infty$.

Entretanto $f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ é estritamente positiva somente se $\left|\frac{x}{\varepsilon}\right| < 1$

$\Rightarrow -1 < \frac{x}{\varepsilon} < 1 \Rightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon \Rightarrow |x| < \varepsilon.$

Agora podemos calcular $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x)\,dx$:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{a\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx}_{\text{Definição de } \varphi_\varepsilon} = \frac{1}{a}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{dx}{\varepsilon}$$

Usando a substituição $u = \frac{x}{\varepsilon} \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{a}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\varepsilon}\,dx = \frac{1}{a}\int_{u(-\varepsilon)}^{u(\varepsilon)} f(u)\,du$

$$\Rightarrow \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = \frac{1}{a}\int_{u(-\varepsilon)}^{u(\varepsilon)} f(u)\,du = \frac{1}{a}\int_{-1}^{1} f(u)\,du$$

Mas $a = \int_{-1}^{1} f(u)\,du \Rightarrow \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = \frac{1}{a}\int_{-1}^{1} f(u)\,du = \frac{1}{a}\cdot a = 1.$ $\square$ //

8

Parte IV

- a) Sabemos que em $|x| \geq \varepsilon$, $\varphi(x) = 0$

Isso implica que em $\varphi_\varepsilon(x-y)$, se $|x-y| \geq \varepsilon \Rightarrow \varphi_\varepsilon(x-y) = 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y \geq \varepsilon \Rightarrow y \leq x-\varepsilon \\ x-y \leq -\varepsilon \Rightarrow y \geq x+\varepsilon \end{array}\right\} \varphi_\varepsilon(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow f_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi(x-y)\,dy = \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} f(y)\overbrace{\varphi(x-y)}^{=0}\,dy + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(y)\varphi(x-y)\,dy + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} f(y)\overbrace{\varphi(x-y)}^{=0}\,dy =$$

$$= \cancelto{0}{\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} 0\,dy} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(y)\varphi(x-y)\,dy + \cancelto{0}{\int_{x+\varepsilon}^{\infty} 0\,dy} = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(y)\varphi(x-y)\,dy \qquad \square$$

b) Vamos lembrar que $|x| \geq \varepsilon$, $\varphi(x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x-y)\underbrace{\varphi_\varepsilon(y)}_{=0}\,dy = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x-y)\underbrace{\varphi_\varepsilon(y)}_{=0}\,dy = 0, \text{ também.}$$

$$\text{Assim, } f_\varepsilon(x) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy = \overbrace{\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy}^{=0} + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy + \underbrace{\int_{+\varepsilon}^{+\infty} f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy}_{=0}$$

$$\Rightarrow f_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy. \qquad (I)$$

Mas precisamos mostrar que: $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\varphi(x-y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y)\,\varphi(y)\,dy.$

Mas $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(y)\,\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy$. Se $u = x-y$ e:

$u'(y) = -1$

$y = x-u$

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(y)\,\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{u(x-\varepsilon)}^{u(x+\varepsilon)} f(x-y)\,\varphi_\varepsilon(u)\,(-1)\cdot\overbrace{(-1)\,dy}^{du}$$

$y = x-\varepsilon$

$u = x-x+\varepsilon$

$$= \int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} f(x-u)\,\varphi_\varepsilon(u)\,(-1)\,du$$

$$= -\int_{\varepsilon}^{-\varepsilon} f(x-u)\,\varphi_\varepsilon(u)\,du = +\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x-u)\,\varphi_\varepsilon(u)\,du$$

Se $u=y$:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x-u)\,\varphi_\varepsilon(u)\,du = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy$$

Mas $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy$, finalizando nossa demonstração,

c) Sabemos que $f_\varepsilon(x) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy$

$$f_0(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon_0,\ \exists\, \delta(\varepsilon)$, tal que se $|f_0(x) - f(x)| < \varepsilon_0 \Rightarrow |\varepsilon - 0| < \delta(\varepsilon_0)$

$f_0(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy$, mas se $\varepsilon \to 0$, $y \to 0$

$$f_0(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy,$$

(10)

Pois para qualquer $|x| > \varepsilon$, a integral acima zera e passa a não fazer mais sentido.

$$\Rightarrow f_0(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x)\, \varphi_\varepsilon(y)\, dy = \lim_{\varepsilon \to 0} f(x) \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(y)\, dy = f(x) \overbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(y)\, dy}^{1}$$

$$= f(x)$$

O que implica que, se pegarmos $\delta(\varepsilon) = \varepsilon \Rightarrow \left| f_0(x) - f(x) \right| = 0 < \varepsilon$

d) X

e) X

f) X

g) X

<u>Resposta das Questões de Múltipla-Escolha</u>

	(a)	(b)	(c)	(d)
1	♥	♡	♥	♡
2	♡	♥	♥	♡
3	♡	♡	♡	♡
4	♡	♥	♥	♡
5	♡	♥	♡	♡
6	♥	♡	♥	♥