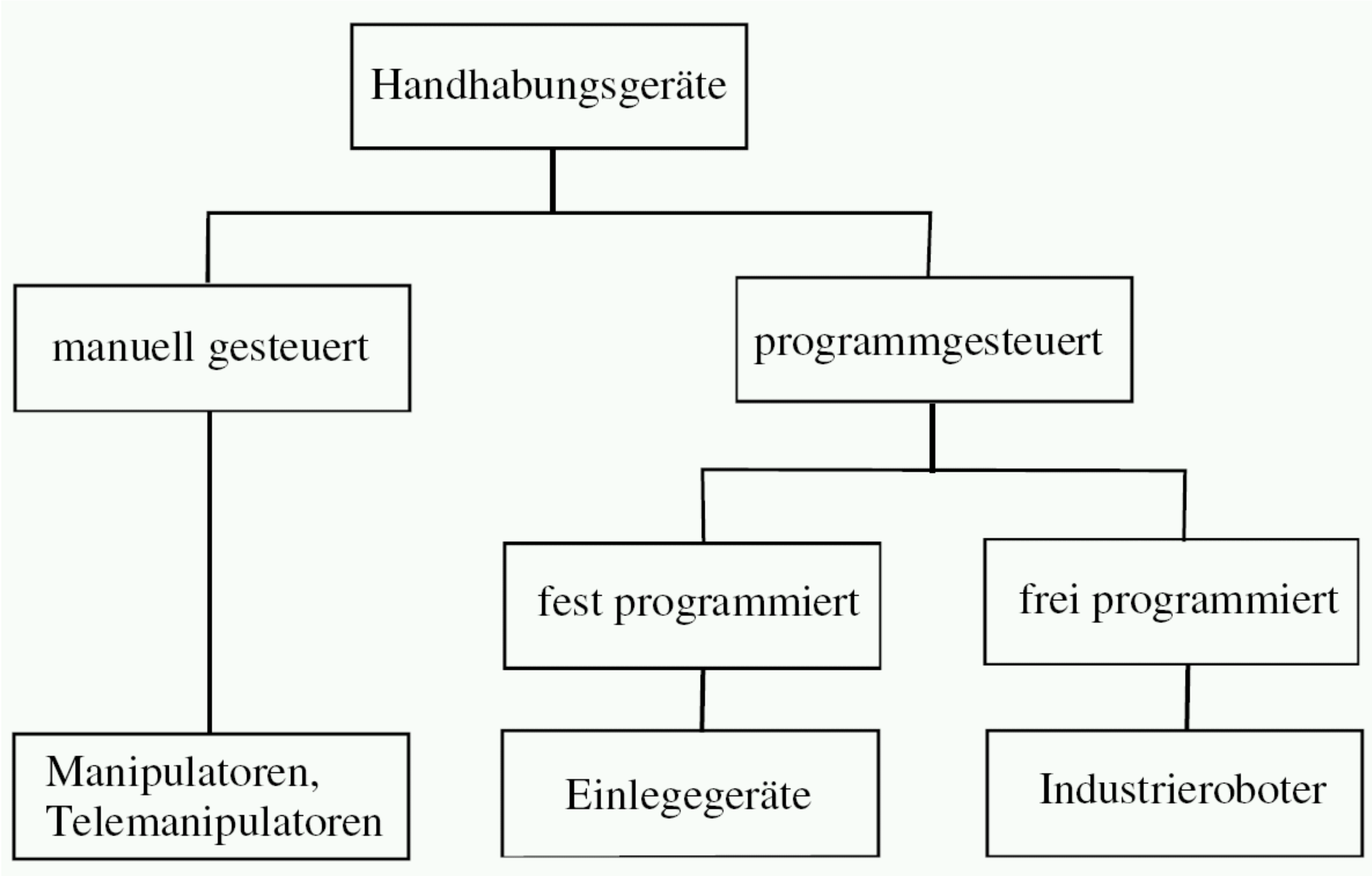
Inhalt

Inhalt

Klassifizierung von Handhabungsgeräten



Industrieroboter

VDI 2860: *Industrieroboter sind universell einsetzbare Bewegungsautomaten mit mehreren Achsen, deren Bewegungen hinsichtlich Bewegungsfolge und Wegen bzw. Winkeln frei programmierbar (d.h. ohne mechanischen Eingriff vorzugeben bzw. änderbar) und gegebenenfalls sensorgeführt sind. Sie sind mit Greifern, Werkzeugen oder anderen Fertigungsmitteln ausrüstbar und können Handhabe- oder andere Fertigungsaufgaben ausführen.*

Der stationäre Roboter ist mit seinem Chassis fest mit dem Boden verbunden. Die einzelnen Glieder stützen sich fortlaufend, mit dem Chassis beginnend, aufeinander ab. Sie bilden eine offene kinematische Kette, deren letztes Glied das Werkzeug bildet.

Bei Robotern kommen Drehgelenke und Schubgelenke vor. Die Lage eines Drehgelenkes wird durch den Drehwinkel, die Lage eines Schubgelenkes durch die Ausfahrweite beschrieben.

Koordinatensysteme

Rechtsorientiertes Kartesisches Koordinatensystem:
Die drei Achsen stehen paarweise senkrecht aufeinander. Dreht man die x-Achse auf dem kürzesten Weg zur y-Achse, würde man eine Schraube mit Rechtsgewinde in positiver z-Richtung bewegen (Korkenzieherregel).

Das Basiskoordinatensystem ist ein kartesisches Koordinatensystem, welches im ortsfesten Chassis des Roboters festgelegt wird. Alle Stellungen und Bewegungen des Roboters werden, wenn nicht anders angegeben, im Basiskoordinatensystem beschrieben.

Das Werkzeugkoordinatensystem ist fest mit dem Werkzeug verbunden. Der Ursprung des Werkzeugkoordinatensystems wird als Werkzeugspitze bezeichnet, die Koordinatenrichtungen beschreiben die Werkzeugorientierung.

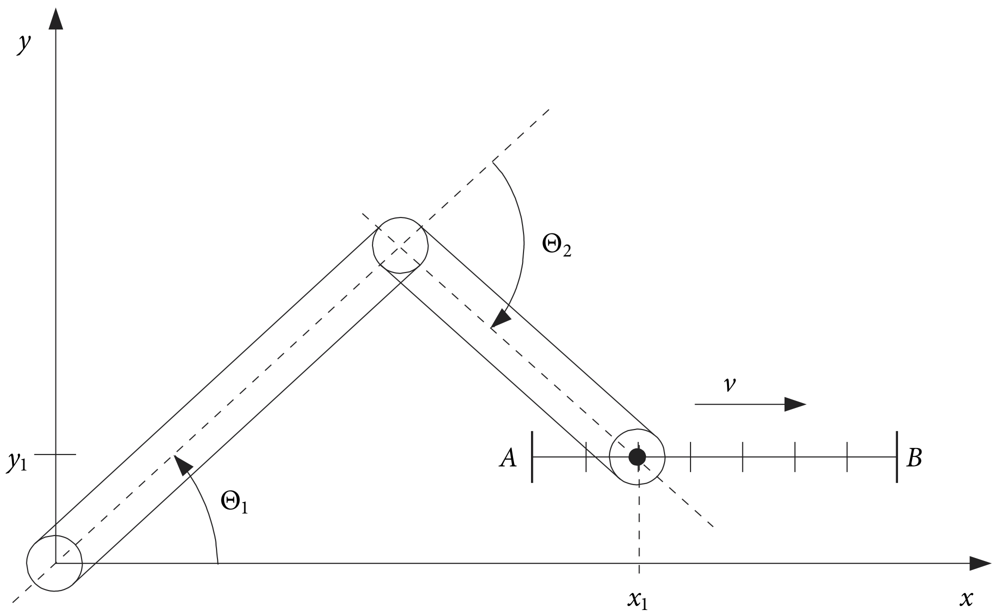
Freiheitsgrade

Ein Roboter kann mit mehreren räumlich angeordneten Achsen sowohl die Lage als auch die Orientierung des Werkzeuges oder des gegriffenen Gegenstandes verändern. Die sich ergebenden Bewegungsmöglichkeiten werden durch die Anzahl der mechanischen Freiheitsgrade beschrieben, die der Roboter besitzt. Die mechanischen Freiheitsgrade (Achsen, Gelenke) des Roboters werden auch Freiheitsgrade des Konfigurationsraums genannt.

Ein freier starrer Körper besitzt drei translatorische Freiheitsgrade und drei rotatorische Freiheitsgrade im Arbeitsraum (auch Operationsraum). Bezogen auf einen stationären Roboter heißt das: Damit das Werkzeug in jeder Position jede beliebige Orientierung annehmen kann, muss der Roboter mindestens 6 Freiheitsgrade im Konfigurationsraum besitzen. Durch sinnvolle mechanische Konstruktion besitzt ein Roboter mit 6 Achsen im Konfigurationsraum auch 6 Freiheitsgrade im Arbeitsraum.

Animationen: Freiheitsgrade, Hauptachsen, Handachsen

Beispiel Ebener Mechanismus



- Vorwärtstransformation:
  Bestimmung der Variablen des Arbeitsraums aus den Variablen des Konfigurationsraums. Hier: Bestimmung von x_1, y_1 aus Θ_1, Θ_2

- Rücktransformation: inverses kinematisches Problem
  Bestimmung der Variablen des Konfigurationsraums aus den Variablen des Arbeitsraums. Hier: Bestimmung von Θ_1, Θ_2 aus x_1, y_1

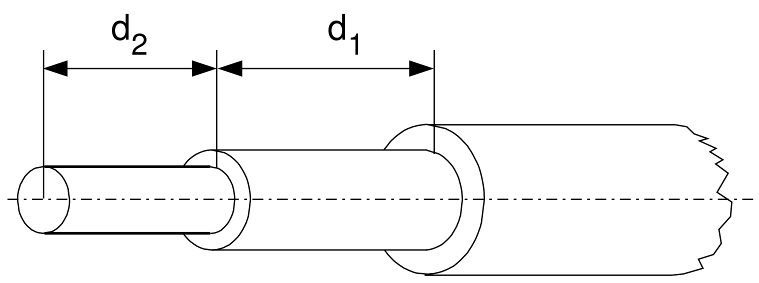
Lösungsraum der Rücktransformation

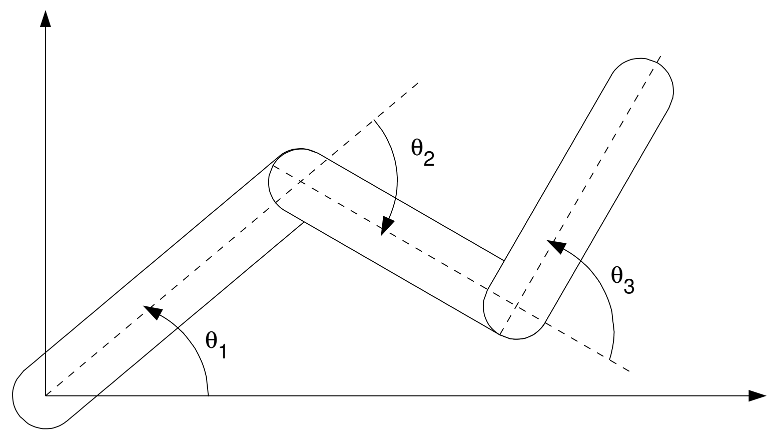
- Keine Lösung: Der anzufahrende Punkt liegt außerhalb der Reichweite des Roboters.
- Eine Lösung: Der anzufahrende Punkt ist nur in der Streckstellung des Roboters zu erreichen.
- Endlich viele Lösungen, (beim ebenen Mechanismus genau 2): Der anzufahrende Punkt ist mit mehreren Stellungen des Roboters zu erreichen.
- Unendlich viele Lösungen – Singularität: Der anzufahrende Punkt ist mit unendlich vielen Stellungen des Roboters zu erreichen. Beim Ebenen Mechanismus wäre dies der Fall, wenn beide Armteile gleich lang wären und der anzufahrende Punkt im Gelenk 1 liegt ($x = 0$, $y = 0$).

Redundante Kinematiken

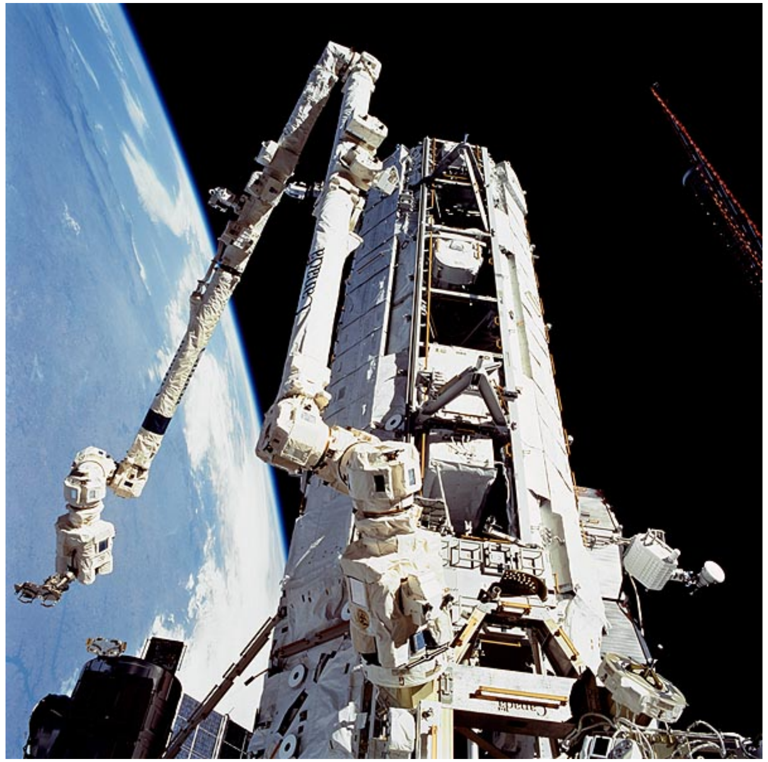
Für Roboter mit mehr als 6 Achsen ist die Rücktransformation überbestimmt. Eine kinematische Kette mit mehr als 6 Achsen heißt deshalb redundant.

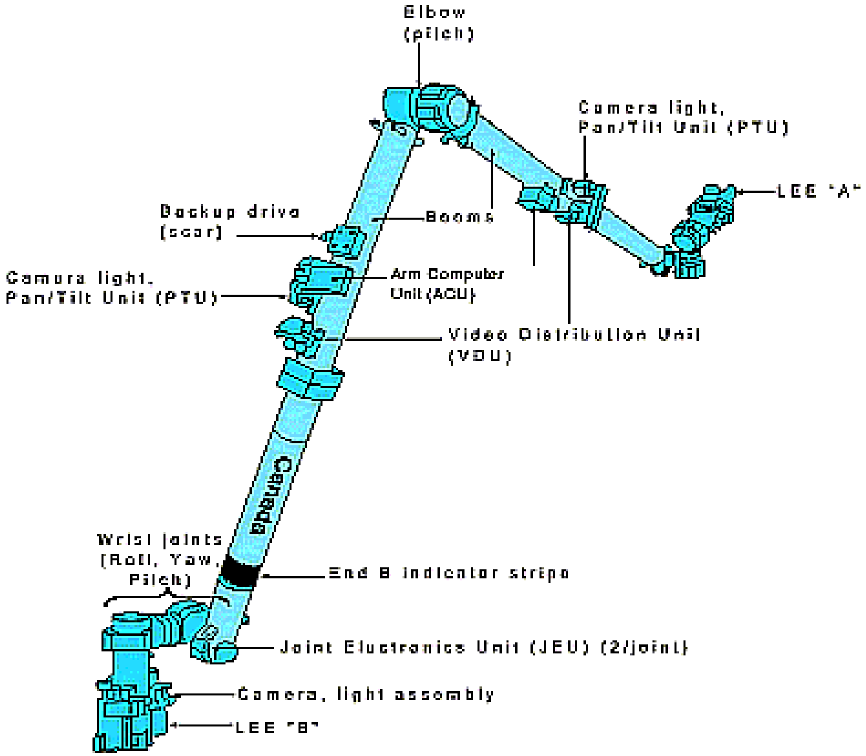
Redundanz kann auch bei weniger als 6 Achsen auftreten. Liegen zwei translatorische Achsen koaxial oder drei rotatorische Achsen parallel, so entsteht Redundanz.





Canadarm2 als Beispiel für eine redundante Kinematik





Kuka Leichtbauroboter (LBR) mit 7 Drehachsen

Achskoordinatensysteme nach Denavit-Hartenberg

- Es wird jedem Teilkörper eines Roboters ein körperfestes Koordinatensystem zugeordnet und die homogenen Transformationen zwischen aufeinanderfolgenden Koordinatensystemen bestimmt.

- Das Ziel ist, die Position und die Orientierung des Werkzeuges in Abhängigkeit von der Stellung der einzelnen Achsen in Basiskoordinaten zu beschreiben.

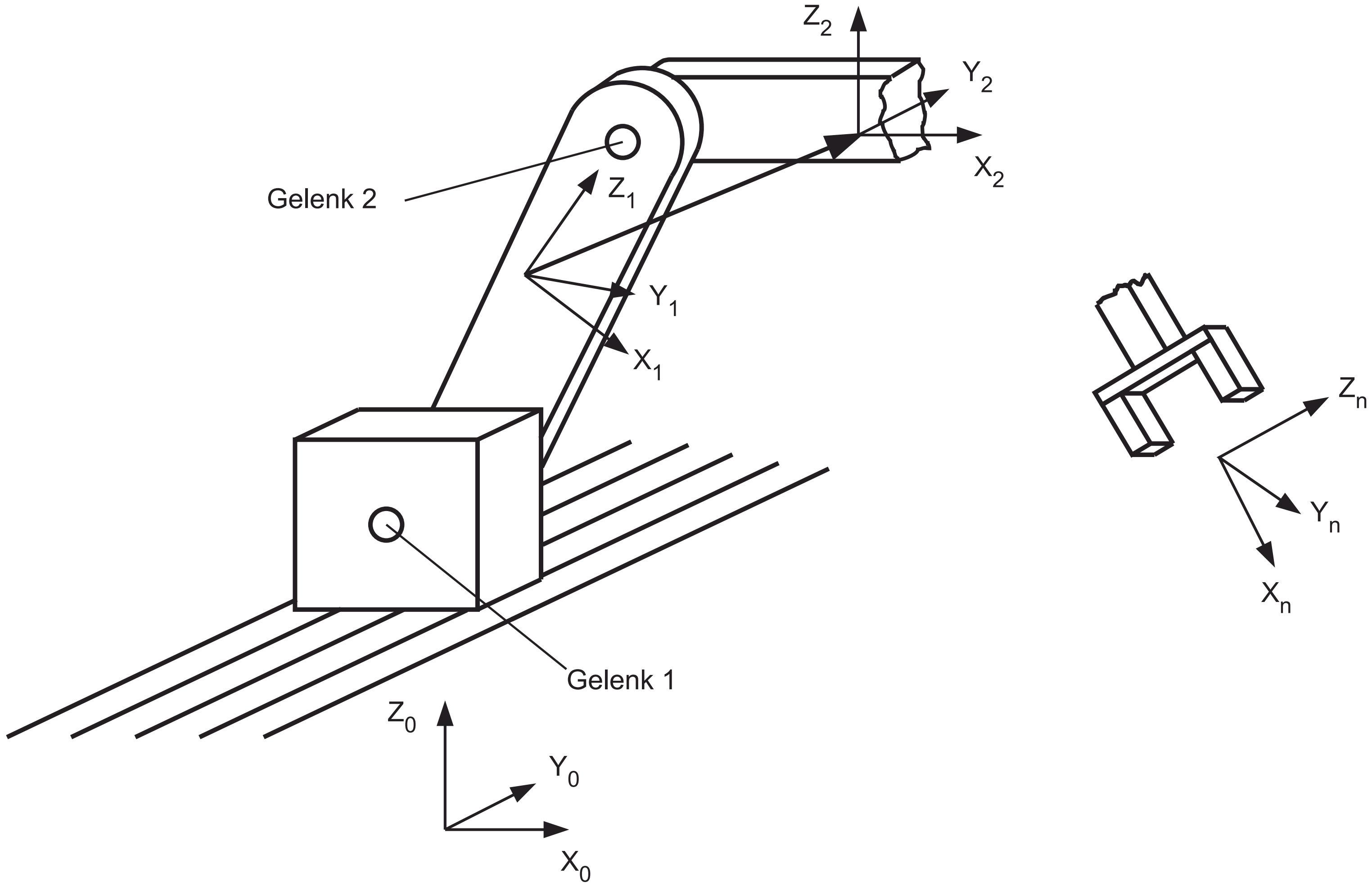
- Es wird eine Beschreibung für eine offene kinematische Kette eingeführt, die es erlaubt, die Kinematik eines Roboters mit n Freiheitsgraden im Konfigurationsraum durch $4 \times n$ Parameter eindeutig zu beschreiben.

- Die Gelenke werden von 1 bis n durchnummeriert, die Teilkörper von 0 (unbewegliche Roboterbasis) bis n und die Koordinatensysteme von K_0 bis K_n.

1

[1] Denavit, Jacques; Hartenberg, Richard Scheunemann (1955). „A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices“. Trans ASME J. Appl. Mech. 23 (2): 215–221. doi:10.1115/1.4011045

Offene kinematische Kette



Jedem Teilkörper (Armteil) i ist ein mit ihm fest verbundenes Koordinatensystem K_i zugeordnet, das seine Lage und Orientierung in Bezug auf seine Nachbar-Koordinatensysteme bei Gelenkbewegungen verändert. Das Koordinatensystem K_i wird im Koordinatensystem K_{i-1} durch eine homogene Transformation ${}^{i-1}\boldsymbol{T}_i$ beschrieben.

Die homogene Transformation ${}^{i-1}\boldsymbol{T}_i$, die das Koordinatensystem K_i in das Koordinatensystem K_{i-1} abbildet, wird aus den folgenden vier Einzeltransformationen aufgebaut:

1. Rotation um $\boldsymbol{z}_{i-1}$ um den Winkel θ_i
2. Translation entlang $\boldsymbol{z}_{i-1}$ um die Strecke d_i
3. Translation entlang $\boldsymbol{x}_{i-1}$ um die Strecke a_i
4. Rotation um $\boldsymbol{x}_i$ um den Winkel α_i

$$
{}^{i-1}\boldsymbol{T}_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{i-1}\boldsymbol{T}_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\,\cos\alpha_i & \sin\theta_i\,\sin\alpha_i & a_i\,\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\,\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\,\sin\alpha_i & a_i\,\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

- Im Gegensatz zu einer allgemeinen homogenen Transformationsmatrix, die durch 6 Parameter (3 Translationen und 3 Rotationen) beschrieben werden kann, sind hier nur 4 Parameter notwendig ($\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i$).

- Um diese vereinfachte Beschreibung zu ermöglichen, ist beim Festlegen der Koordinatensysteme das Verfahren von Denavit und Hartenberg anzuwenden.

- Die meisten Industrieroboter sind so konstruiert, dass die konstanten Parameter α_i ganze Vielfache von 90° annehmen. Physikalisch bedeutet dies, dass aufeinanderfolgende Achsen entweder senkrecht aufeinander stehen oder zueinander parallel sind.

- Die Transformationen ${}^{i-1}\boldsymbol{T}_i$ nehmen dann eine besonders einfache Gestalt an. Dadurch werden die Umrechnungen von kartesischen Koordinaten in Achsstellungen und umgekehrt wesentlich erleichtert.

Festlegen des Basiskoordinatensystems K_0:

1. Das Basiskoordinatensystem K_0 ist fest mit dem ruhenden Armteil 0 (Roboterbasis) verbunden.

2. Der Ursprung von K_0 liegt auf der ersten Gelenkachse.

3. Die z_0-Achse zeigt entlang der ersten Gelenkachse. Die x_0-und y_0-Achse sind als rechtsorientiertes Koordinatensystem frei wählbar.

Festlegen der Koordinatensysteme K_i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$):

1. z-Achse:

   - Die z_i-Achse wird in die Dreh- bzw. Schubachse des Gelenks G_{i+1} gelegt.
     (Von den beiden möglichen Richtungen ist eine auszuwählen.)

2. Ursprung von K_i:

   - Der Ursprung von K_i liegt auf der Gelenkachse $i+1$.
   - Schneiden sich die Gelenkachsen i und $i+1$, so liegt der Ursprung von K_i im Schnittpunkt dieser Achsen.
   - Verlaufen die Gelenkachsen i und $i+1$ parallel, wird zuerst der Ursprung von K_{i+1} festgelegt. Danach wird der Ursprung von K_i so auf die Achse $i+1$ gelegt, dass der Abstand zwischen dem Ursprung K_i und dem Ursprung K_{i+1} minimal wird.
   - Sind die die Gelenkachsen i und $i+1$ nicht parallel und schneiden sie sich nicht, liegt der Ursprung von K_i im Schnittpunkt der Normalen der beiden Gelenkachsen mit der Gelenkachse $i+1$.

3. x-Achse:

- Die x_i-Achse entspricht der Normalen zwischen der z_{i-1}-und der z_i-Achse und zeigt von der z_{i-1}-Achse weg.
- Schneiden sich die z_{i-1}-Achse und die z_i-Achse, so verläuft die x_i-Achse parallel zur Richtung des Kreuzprodukts $\boldsymbol{z_{i-1}} \times \boldsymbol{z_i}$. (Von den beiden möglichen Richtungen ist eine auszuwählen.)

4. y-Achse:

- Die y_i-Achse ergänzt das Koordinatensystem im rechtsdrehenden Sinne.

Festlegen des Koordinatensystems K_n

- Bei der Festlegung von K_n hat man wenig Restriktionen, da es kein Gelenk $n+1$ und auch kein übergeordnetes Koordinatensystem K_{n+1} gibt.
- K_n **muss** sich mit den 4 Denavit-Hartenberg-Parametern in K_{n-1} überführen lassen und kann ansonsten frei gewählt werden.
- Der Ursprung von K_n sollte nach Möglichkeit in den TCP gelegt werden. (Kann-Kriterium)

Kurzfassung DH-Koordinaten

1. Die Gelenke werden von 1 bis n durchnummeriert.
   Gelenk i verbindet Armteil $i-1$ mit Armteil i.

2. Es werden die Koordinatensysteme K_0 bis K_n beginnend mit K_0 platziert.
   Das Koordinatensystem i ist fest mit Armteil i verbunden.

3. Die z_{i-1}-Achse wird in das Gelenk i gelegt. Drehgelenke drehen um die z_{i-1}-Achse, Schubgelenke schieben entlang der z_{i-1}-Achse.

4. Die x_i-Achse wird so gelegt, dass diese die z_{i-1}-Achse schneidet und senkrecht auf ihr steht:

   - Wenn die z_{i-1}-Achse parallel zur z_i-Achse steht, zeigt die x_i-Achse weg von der z_{i-1}-Achse. Der Koordinatenursprung von K_i kann frei platziert werden.
   - Wenn sich die z_{i-1}-Achse und die z_i-Achse schneiden, steht die x_i-Achse senkrecht auf der Fläche, die von der z_{i-1}-Achse und der z_i-Achse gebildet werden. Der Koordinatenursprung von K_i liegt im Schnittpunkt von z_{i-1} mit z_i.
   - Im Allgemeinen liegt die x_i-Achse auf der Normalen von z_{i-1} und z_i und zeigt weg von z_{i-1}.

- Die x_0-Achse und der Ursprung von K_0 sind frei platzierbar.

5. Die y_i-Achse ergänzt das rechtsdrehende Koordinatensystem.

Video der WHS mit der Beschreibung des DH-Verfahrens:

https://www.youtube.com/watch?v=qZB3_gKBwf8

Bestimmung der DH-Parameter

Die DH-Parameter $\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i$ werden durch vier nacheinander folgende Transformation bestimmt, die K_{i-1} in K_i überführen:

1. Drehen von K_{i-1} um die z_{i-1}-Achse um den Winkel θ_i bis x_{i-1} und x_i parallel sind.
2. Verschieben von K_{i-1} entlang der z_{i-1}-Achse um die Strecke d_i bis zum Schnittpunkt mit der x_i-Achse.
3. Verschieben von K_{i-1} entlang der x_{i-1}-Achse um die Strecke a_i bis die Koordinatenursprünge von K_{i-1} und K_i deckungsgleich sind.
4. Drehen von K_{i-1} um die x_{i-1}-Achse um den Winkel α_i bis K_{i-1} und K_i deckungsgleich sind.

Vorwärtstransformation

Die Vorwärtstransformation bestimmt die Weltkoordinaten (Position und Winkel des Werkzeugkoordinatensystems im Basiskoordinatensystem) als Funktion der Gelenkkoordinaten.

Die Weltkoordinaten können durch den Positionsvektor $\boldsymbol{p} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$ zusammen mit Euler- oder Roll-Nick-Gier-Winkel α, β, γ dargestellt werden. Die Weltkoordinaten werden dann zusammengefasst $\boldsymbol{x} = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^{\mathrm{T}}$ dargestellt.

Die Stellung aller Gelenke werden zusammen in den Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{q} = [q_1, q_2, \ldots, q_n]^{\mathrm{T}}$ dargestellt. Die verallgemeinerte Gelenkkoordinate des i-ten Gelenks wird mit q_i bezeichnet. Bei einem Drehgelenk ist $q_i = \theta_i$ bei einem Schubgelenk $q_i = d_i$.

Die Vorwärtstransformation berechnet die Weltkoordinaten als Funktion der Gelenkkoordinaten:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$$

Für einen Roboter mit 6 Achsen gilt:

q_i, (θ_i oder d_i)	Gelenkvariablen (aktuelle Armstellung)
$a_i,\ \alpha_i,\ d_i$ oder θ_i	übrige Denavit-Hartenberg-Parameter (konstant)
${}^6\boldsymbol{T}_E$	Werkzeugkoordinatensystem, dargestellt im Koordinatensystem der 6. Achse

Das Werkzeugkoordinatensystem kann im letzten DH-Gelenkkoordinatensystem eines Roboters durch eine konstante homogene Transformation ${}^6\boldsymbol{T}_E$ beschrieben werden.

Durch die Transformation des Werkzeugkoordinatensystems über die gesamte kinematische Kette hinweg erhält man die Darstellung des Werkzeugkoordinatensystems in Basiskoordinaten.

Die homogene Transformation ${}^{0}\boldsymbol{T}_E$, die das Werkzeugkoordinatensystem in Basiskoordinaten beschreibt, ist gegeben durch:

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_E = {}^{0}\boldsymbol{T}_1 \, {}^{1}\boldsymbol{T}_2 \, {}^{2}\boldsymbol{T}_3 \, {}^{3}\boldsymbol{T}_4 \, {}^{4}\boldsymbol{T}_5 \, {}^{5}\boldsymbol{T}_6 \, {}^{6}\boldsymbol{T}_E $$

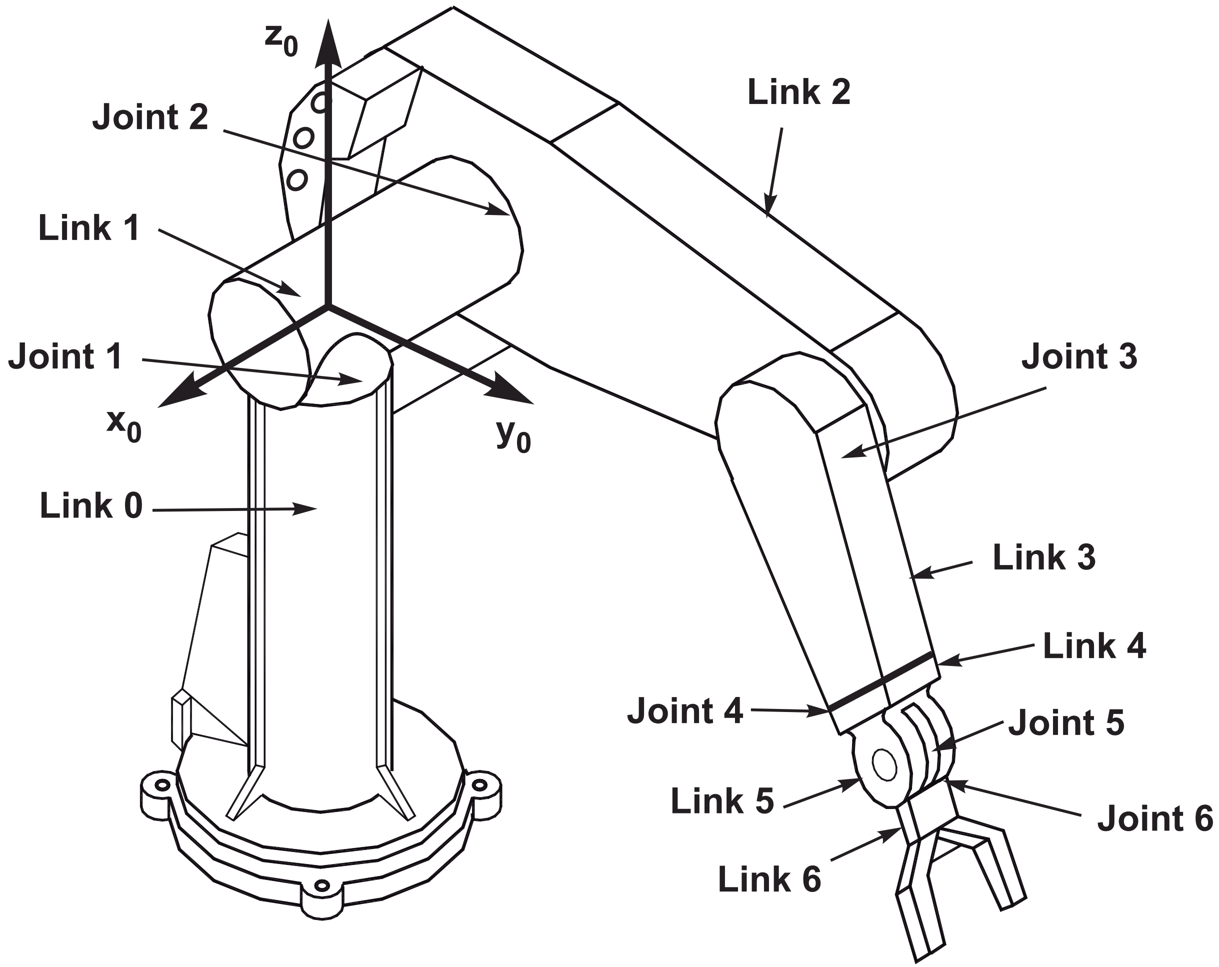
Mit Hilfe der Gleichung werden die Position und die Orientierung des Werkzeuges in einer bestimmten Armstellung in kartesische Basiskoordinaten transformiert, nachdem zuvor aus den numerisch vorliegenden Denavit-Hartenberg-Parametern die Achstransformationen ${}^{i-1}\boldsymbol{T}_i$ bestimmt wurden.

Aus der homogenen Transformationsmatrix ${}^{0}\boldsymbol{T}_E$ können direkt die Weltkoordinaten $\boldsymbol{x}$ bestimmt werden.

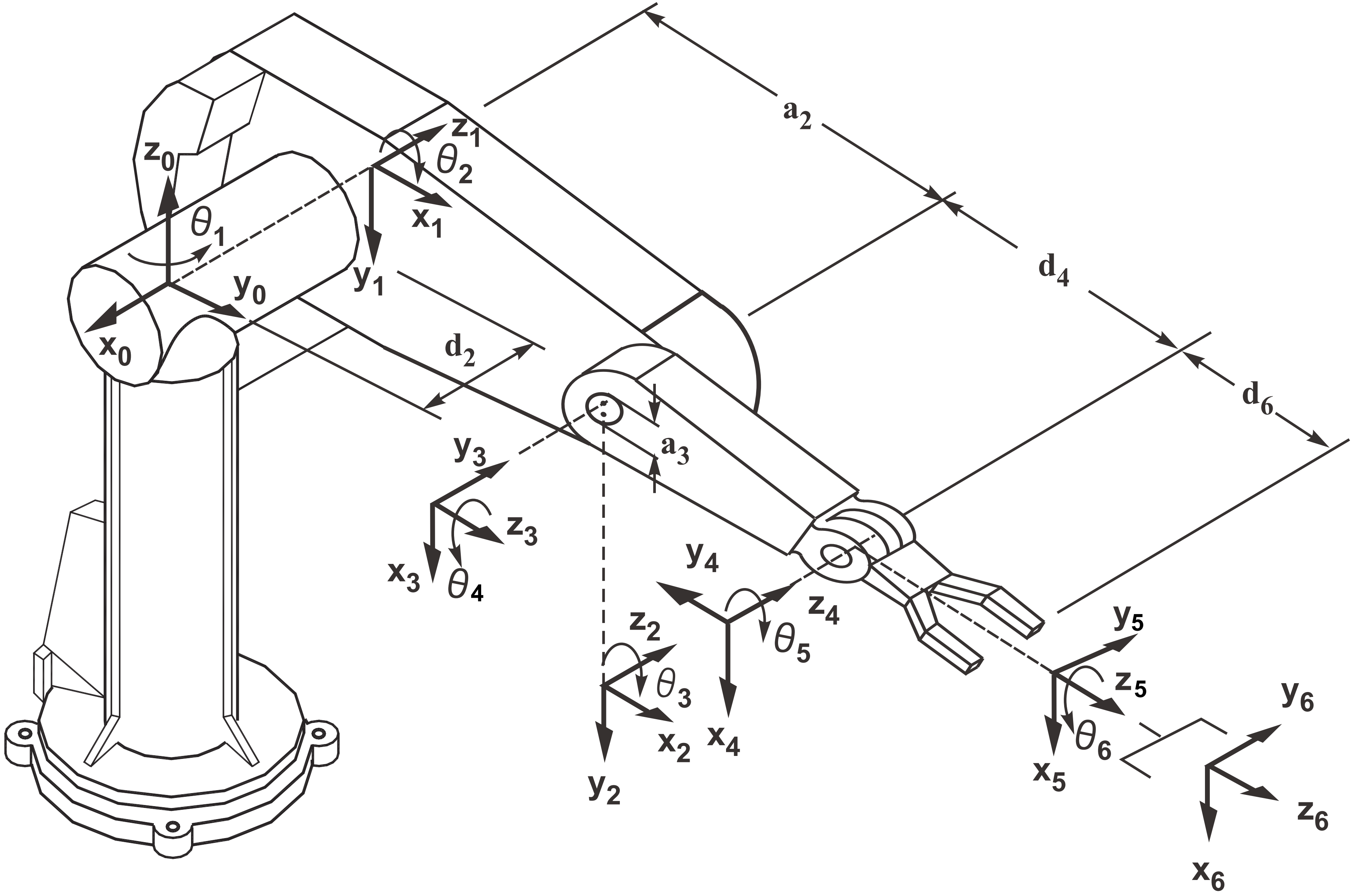
Mit Hilfe der Gleichungen in ${}^{0}\boldsymbol{T}_E$ werden die Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{q}$ in kartesische (Welt-)Koordinaten $\boldsymbol{x}$ transformiert. Diesen Vorgang bezeichnet man als Vorwärtstransformation.

Die Vorwärtstransformation ist für beliebige Achsstellungen, Achsanordnungen und für eine beliebige Anzahl von Achsen eindeutig ausführbar.

Vorwärtstransformation für einen Knickarmroboter (Beispiel PUMA)

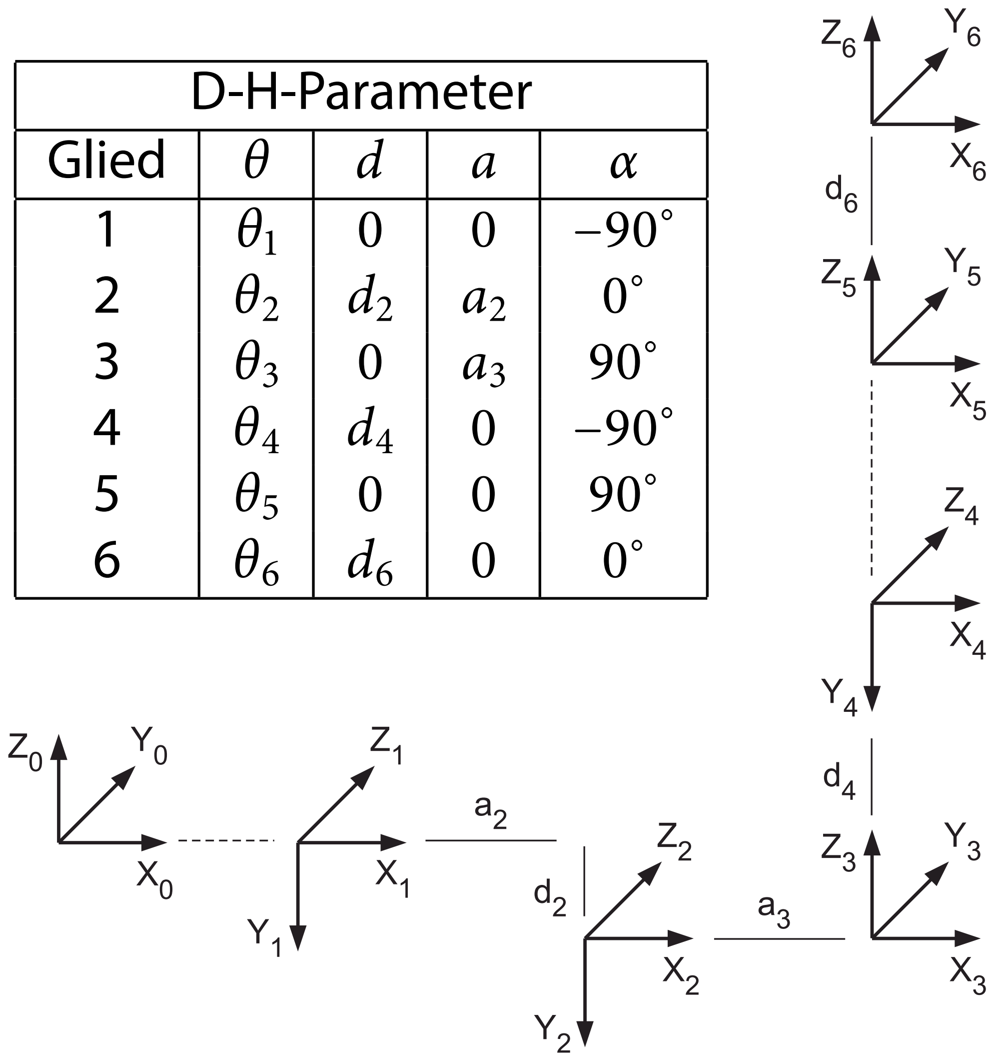


Animationen: Knickarmroboter, Hauptachsen, Handachsen


z_0
θ_1
y_0
x_0
z_1
θ_2
x_1
y_1
a_2
d_4
d_6
d_2
a_3
y_3
z_3
x_3
θ_4
y_4
z_4
θ_5
x_4
z_2
θ_3
x_2
y_2
y_5
z_5
θ_6
x_5
y_6
z_6
x_6

Lage der Koordinatensysteme in der Nullstellung des Roboters

D-H-Parameter				
Glied	θ	d	a	α
1	θ_1	0	0	-90°
2	θ_2	d_2	a_2	0°
3	θ_3	0	a_3	90°
4	θ_4	d_4	0	-90°
5	θ_5	0	0	90°
6	θ_6	d_6	0	0°



Transformationsmatritzen

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{1}\boldsymbol{T}_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & a_2\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & a_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$
{}^{2}\boldsymbol{T}_{3} = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & 0 & \sin\theta_3 & a_3\cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 & 0 & -\cos\theta_3 & a_3\sin\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$ {}^{3}\boldsymbol{T}_4 = \begin{pmatrix} \cos\theta_4 & 0 & -\sin\theta_4 & 0 \\ \sin\theta_4 & 0 & \cos\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{4}\boldsymbol{T}_5 = \begin{pmatrix} \cos\theta_5 & 0 & \sin\theta_5 & 0 \\ \sin\theta_5 & 0 & -\cos\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^{5}\boldsymbol{T}_{6} = \begin{pmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

Durch Multiplikation erhält man für die Komponenten der Matrix

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_6 = {}^{0}\boldsymbol{T}_1\,{}^{1}\boldsymbol{T}_2\,{}^{2}\boldsymbol{T}_3\,{}^{3}\boldsymbol{T}_4\,{}^{4}\boldsymbol{T}_5\,{}^{5}\boldsymbol{T}_6 = \begin{pmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ \begin{aligned} n_x &= c_1\left(c_{23}\left(c_4c_5c_6 - s_4s_6\right) - s_{23}s_5c_6\right) - s_1\left(s_4c_5c_6 + c_4s_6\right) \\ n_y &= s_1\left(c_{23}\left(c_4c_5c_6 - s_4s_6\right) - s_{23}s_5c_6\right) + c_1\left(s_4c_5c_6 + c_4s_6\right) \\ n_z &= -s_{23}\left(c_4c_5c_6 - s_4s_6\right) - c_{23}s_5c_6 \end{aligned} $$

$$
\begin{aligned}
s_x &= c_1\big(-c_{23}\big(c_4c_5s_6 + s_4c_6\big) + s_{23}s_5s_6\big) - s_1\big(-s_4c_5s_6 + c_4c_6\big) \\
s_y &= s_1\big(-c_{23}\big(c_4c_5s_6 + s_4c_6\big) + s_{23}s_5s_6\big) + c_1\big(-s_4c_5s_6 + c_4c_6\big) \\
s_z &= s_{23}\big(c_4c_5s_6 + s_4c_6\big) - c_{23}s_5s_6 \\
a_x &= c_1\big(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5\big) - s_1s_4s_5 \\
a_y &= s_1\big(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5\big) + c_1s_4s_5 \\
a_z &= -s_{23}c_4s_5 + c_{23}c_5 \\
p_x &= c_1\big(d_6\big(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5\big) + s_{23}d_4 + a_3c_{23} + a_2c_2\big) - s_1\big(d_6s_4s_5 + d_2\big) \\
p_y &= s_1\big(d_6\big(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5\big) + s_{23}d_4 + a_3c_{23} + a_2c_2\big) + c_1\big(d_6s_4s_5 + d_2\big) \\
p_z &= d_6\big(c_{23}c_5 - s_{23}c_4s_5\big) + c_{23}d_4 - a_3s_{23} - a_2s_2
\end{aligned}
$$

mit $s_i := \sin\theta_i$, $c_i := \cos\theta_i$, $s_{ij} := \sin(\theta_i + \theta_j)$, $c_{ij} := \cos(\theta_i + \theta_j)$.

Anwendung der Vorwärts- und Rücktransformation

- Die Vorwärtstransformation bestimmt Position und Winkel des TCP im Basiskoordinatensystem (Weltkoordinaten) $\boldsymbol{x} = [x, y, z, \alpha, \beta, \gamma]^{\mathrm{T}}$ als Funktion der Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{q} = [q_1, q_2, \ldots, q_n]^{\mathrm{T}}$:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$$

- Für einfache Aufgaben eines Roboters (z.B. Pick-und-Place) kann der Roboter in Gelenkkoordinaten bewegt werden. Die Greifpunkte werden dann durch TeachIn in Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{q}$ gespeichert. Das Roboterprogramm nutzt die gespeicherten Anfahrpunkte und verfährt die Achsen zu den Punkten Point-to-Point. Mit der Vorwärtstransformation $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$ können die Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{q}$ als Weltkoordinaten $\boldsymbol{x}$ angezeigt werden.

- Werden bestimmte Bahnformen des TCP vorgegeben (z.B. Laserschweißen), ist eine Rücktransformation nötig. Hierzu benötigt man die Berechnung der Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{q}$ aus einer vorgegebenen Bahn des TCP in Weltkoordinaten $\boldsymbol{x}$.

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x})$$

- Eine Rücktransformation kann keine, eine, mehrere und sogar unendlich viele Lösungen besitzen.

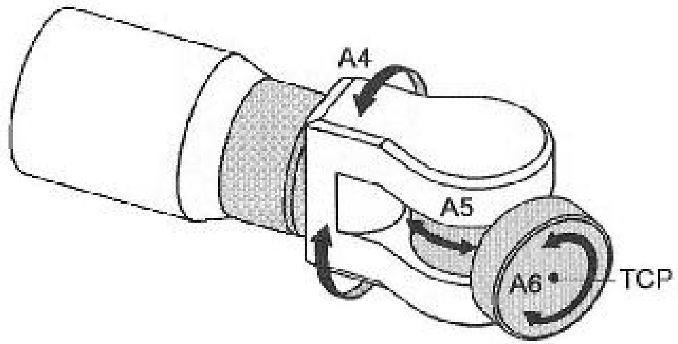
- Nicht für alle Kinematiken kann die Rücktransformation $\boldsymbol{f}^{-1}$ analytisch bestimmt werden und es sind dann numerische Verfahren notwendig.

Rücktransformation mittels geometrischem Ansatz

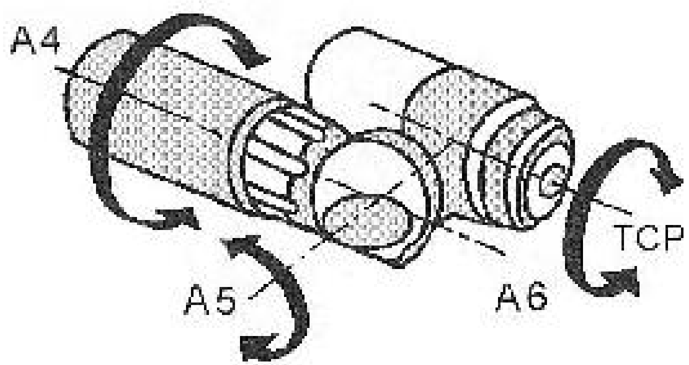
- Grundidee: Zerlegung der Rücktransformation in zwei voneinander unabhängige Teilprobleme
- Zuerst werden die ersten drei Gelenkwinkel bestimmmt
- Danach werden die Gelenkwinkel der Roboterhand bestimmt
- Voraussetzung: Der Roboter verfügt über eine Zentralhand
- Bei einer Zentralhand schneiden sich die Achsen der drei Gelenke in einem Punkt

Vergleich Zentralhand mit Winkelhand

- Die meisten handelsüblichen Knickarmroboter verfügen über eine Zentralhand.
- Bei der Zentralhand schneiden sich alle Achsen der Gelenke in einem Punkt, bei der Winkelhand ist dies nicht der Fall.
- Die Rücktransformation wird dadurch stark vereinfacht, die Konstruktion wird durch den geringeren Bauraum jedoch komplexer.

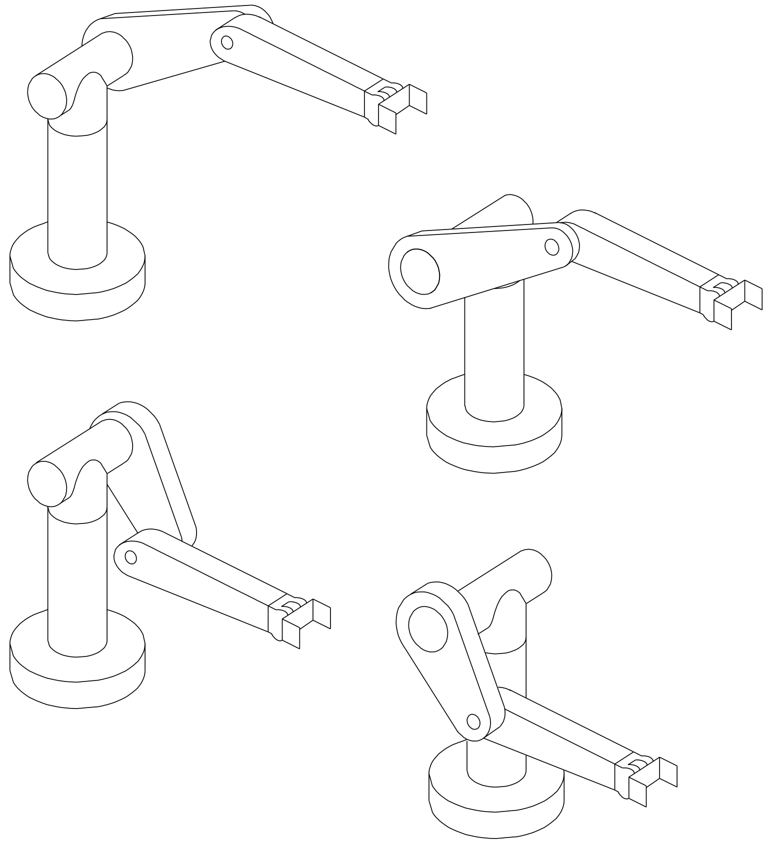


Zentralhand



Winkelhand

Roboter in verschiedenen Gelenkkonfigurationen



Das Bild zeigt den Roboter in vier verschiedenen Gelenkstellungen, bei denen immer dieselbe Position erreicht wird. Diese vier verschiedenen Stellungen werden allein dadurch erzielt, dass sich die ersten drei Gelenkvariablen θ_1, θ_2, θ_3 geändert haben.

Konfigurationen eines Knickarmroboters

- Im Allgemeinen ist die Rücktransformation mehrdeutig lösbar. In einer singulären Stellungen des Roboters gibt es unendlich viele Lösungen.
- Für den sechsachsigen Knickarmroboter gibt es bei der Rücktransformation 4 mögliche Lösungen für die ersten 3 Gelenkvariablen $\theta_1 \ldots \theta_3$ und für jede dieser 4 Lösungen jeweils 2 Lösungen für die letzten 3 Gelenkvariablen $\theta_4 \ldots \theta_6$, zusammen folglich 8 verschiedene Lösungen, falls es sich nicht um eine singuläre Stellung des Roboters handelt.
- Diese verschiedenen Lösungen werden auch Konfigurationen genannt.
- Die Lösungsmöglichkeiten sind teilweise durch die vorhandenen Achsbewegungsgrenzen eingeschränkt. Die Überprüfung kann aber erst dann stattfinden, nachdem man alle Lösungsmöglichkeiten ermittelt hat.

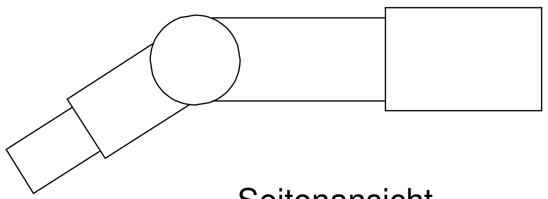
Singularitäten eines Knickarmroboters

- Bei manchen Roboterkinematiken gibt es Raumpunkte, die zu sogenannten Singularitäten oder singulären Stellungen des Roboters führen.

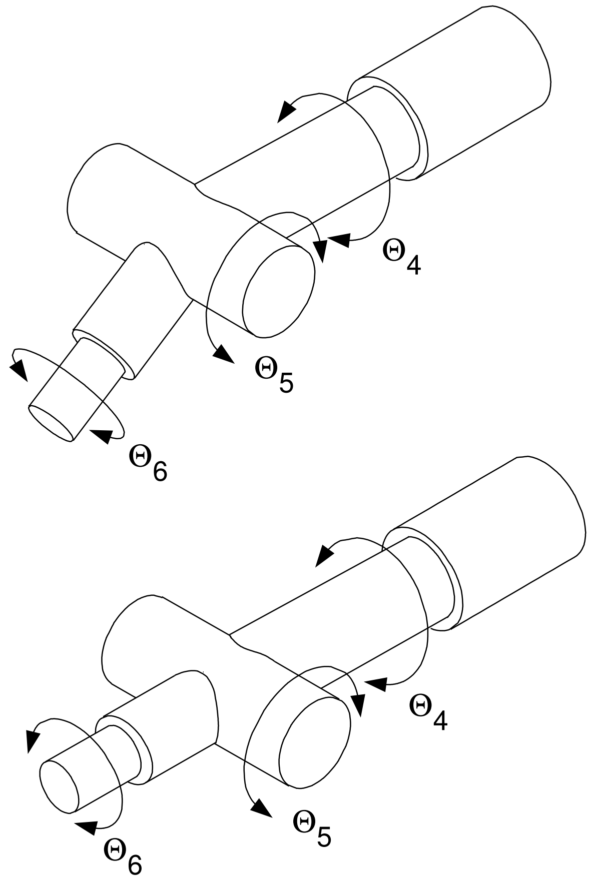
- Eine typische singuläre Roboterstellung des Knickarmroboters ist die Überkopfstellung des Werkzeuges. Hier fluchten Achse 1 (z_0) und Achse 6 (z_5) und es gibt unendlich viele Lösungen der Rücktransformation.

- Eine andere singuläre Stellung ist die Steckstellung der Zentralhand, hier fluchten die Achsen 4 (z_3) und 6 (z_5). Sie können gegeneinander verdreht werden, ohne die Orientierung am TCP zu verändern. Auch hier gibt es unendlich viele Lösungen der Rücktransformation.

Singularität der Zentralhand



Seitenansicht

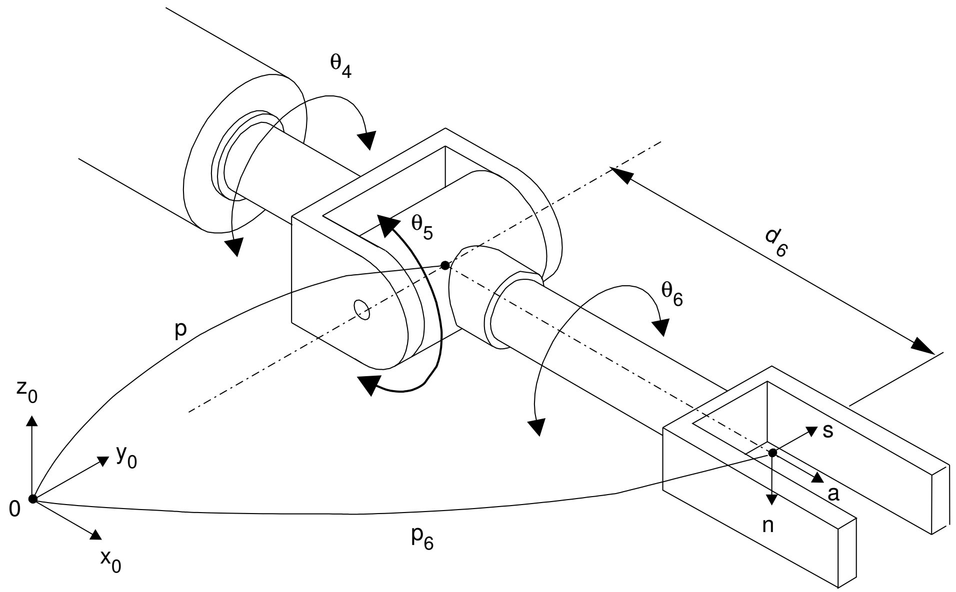


Bestimmung der ersten drei Gelenkwinkel

Betrachtet man die gegebene Beschreibung des TCP des Roboters in homogenen Koordinaten

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_6 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_6 & \boldsymbol{y}_6 & \boldsymbol{z}_6 & \boldsymbol{p}_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{s} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{p}_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

und die Darstellung der einzelnen Vektoren in der Roboterhand



erkennt man, dass sich hieraus der Positionsvektor $\boldsymbol{p}_4$ von ${}^0\boldsymbol{T}_4$ über die Beziehung

$$\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{p}_6 - d_6 \boldsymbol{a}$$

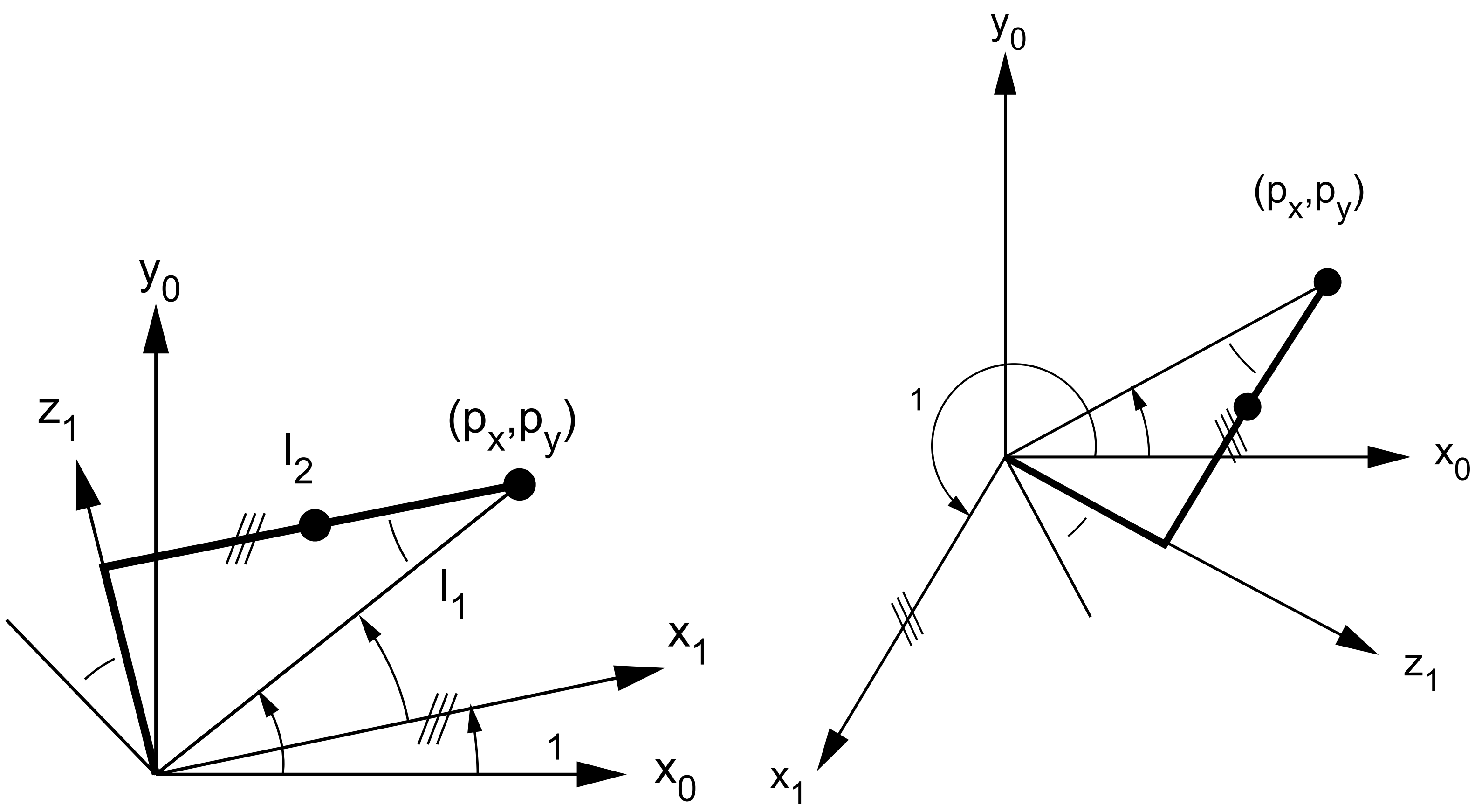
bestimmen lässt. Andererseits ergibt die Berechnung von ${}^0\boldsymbol{T}_4$ für den darin enthaltenen Positionsvektor

$$\boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(a_2c_2 + a_3c_{23} + d_4s_{23}) - d_2s_1 \\ s_1(a_2c_2 + a_3c_{23} + d_4s_{23}) + d_2c_1 \\ d_4c_{23} - a_3s_{23} - a_2s_2 \end{pmatrix}$$

Die Bestimmung der ersten drei Gelenkvariablen ist somit auf das Lösen des Gleichungssystems separierbar.

Bestimmung des Winkels θ_1

Betrachtet man den Positionsvektor $\boldsymbol{p}_4$ in der $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0$-Ebene,



erhält man für die eingetragenen Längen und Winkel die Beziehungen

$$l_1 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \qquad l_2 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{p_x}{l_1} \qquad \sin\alpha = \frac{p_y}{l_1}$$

$$\cos\beta = \frac{l_2}{l_1} \qquad \sin\beta = \frac{d_2}{l_1}$$

unabhängig von der gewählten Konfiguration.
Der gesuchte Gelenkwinkel θ_1 setzt sich aus den beiden Winkeln α und β zusammen:

Fall Linker Arm: $\theta_1 = \beta - \alpha$

$$\sin\theta_1 = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha = \frac{p_x d_2 - p_y l_2}{l_1^2}$$

$$\cos\theta_1 = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \frac{p_x l_2 + p_y d_2}{l_1^2}$$

Fall Rechter Arm: $\theta_1 = \pi + \beta + \alpha$

$$\sin\theta_1 = -\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha = \frac{-p_y l_2 - p_x d_2}{l_1^2}$$

$$\cos\theta_1 = -\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \frac{-p_x l_2 + p_y d_2}{l_1^2}$$

Die beiden Lösungsfälle lassen sich mit Hilfe eines ersten Konfigurationsindikators K_1 zusammenfassen:

$$\sin\theta_1 = \frac{-K_1 p_y\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_x d_2}{p_x^2 + p_y^2}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{-K_1 p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} + p_y d_2}{p_x^2 + p_y^2}$$

wobei K_1 über

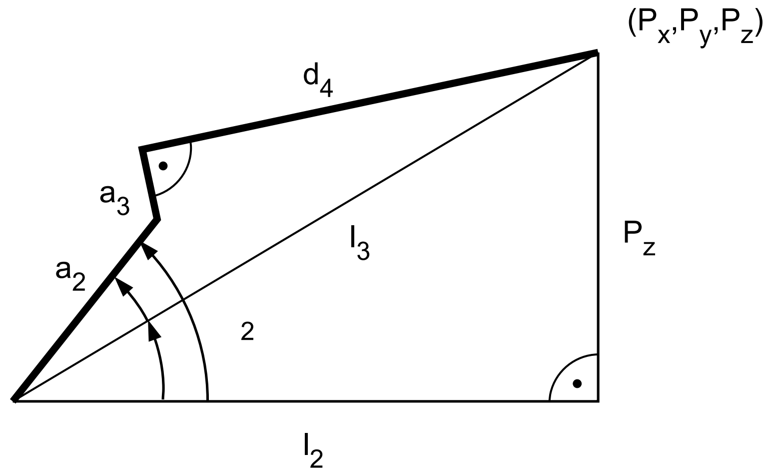
$$K_1 = \begin{cases} +1 & \text{Rechter Arm} \\ -1 & \text{Linker Arm} \end{cases}$$

festgelegt wird. Die Lösung für θ_1 ist dann

$$\theta_1 = \operatorname{atan2}(\sin\theta_1, \cos\theta_1)$$

Bestimmung des Winkels θ_2

Betrachtet man den Positionsvektor $\boldsymbol{p}_4$ nun in der $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1$-Ebene, so erhält man die geometrischen Zusammenhänge.



Für die eingetragene Länge l_3 (für die Länge l_2 gilt aus der Bestimmung von θ_1 weiterhin $l_2 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}$) und für die Winkel α und β lassen sich die folgenden Beziehungen herleiten:

$$l_3 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}$$

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{l_2}{l_3} = \frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \\
\sin\alpha &= \frac{p_z}{L_3} = \frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}} \\
\cos\beta &= \frac{a_2^2 + L_3^2 - (d_4^2 + a_3^2)}{2a_2L_3} \\
\sin\beta &= \sqrt{1 - \cos^2\beta}
\end{aligned}
$$

Der gesuchte Gelenkwinkel θ_2 setzt sich aus den beiden Winkeln α und β zusammen:

Fall Linker, Oberer Arm: $\theta_2 = -\alpha - \beta$

$$
\begin{aligned}
\sin\theta_2 &= -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
\cos\theta_2 &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

Fall Linker, Unterer Arm: $\theta_2 = -\alpha + \beta$

$$\begin{aligned}
\sin\theta_2 &= -\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\cos\theta_2 &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Fall Rechter, Oberer Arm: $\theta_2 = \alpha + \beta$

$$\begin{aligned}
\sin\theta_2 &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\cos\theta_2 &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Fall Rechter, Unterer Arm: $\theta_2 = \alpha - \beta$

$$\begin{aligned}
\sin\theta_2 &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
\cos\theta_2 &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Durch die Einführung des zweiten Konfigurationsindikators K_2 mit

$$K_2 = \begin{cases} +1 & \text{Oberer Arm} \\ -1 & \text{Unterer Arm} \end{cases}$$

lassen sich dann zusammen mit K_1 diese obigen vier Fälle zusammenfassen:

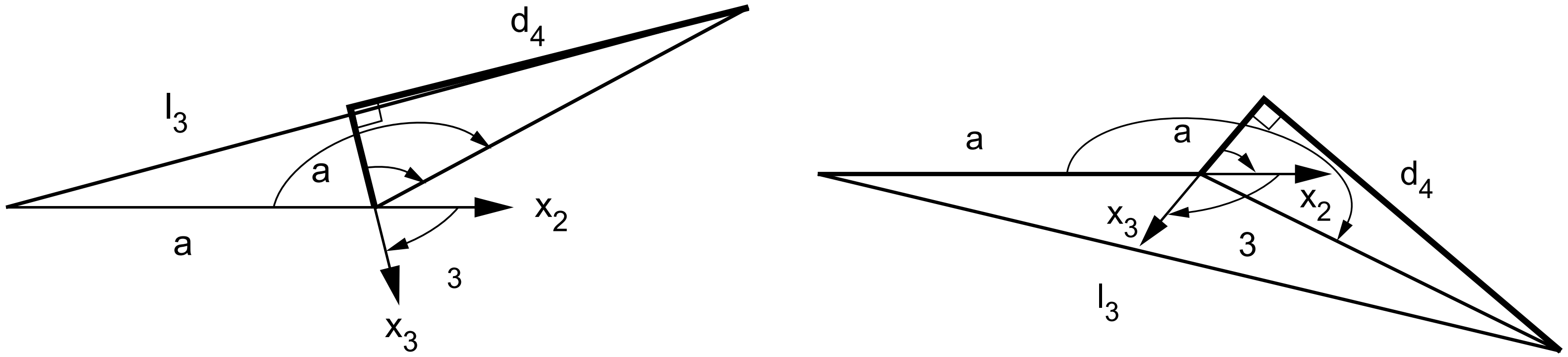
$$\begin{aligned} \sin\theta_2 &= K_1 \sin\alpha\cos\beta + K_2\cos\alpha\sin\beta \\ \cos\theta_2 &= \cos\alpha\cos\beta - K_2\sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

und somit schließlich

$$\theta_2 = \operatorname{atan2}(\sin\theta_2, \cos\theta_2)$$

Bestimmung des Winkels θ_3

Den Betrachtungen zu den Winkeln θ_1 und θ_2 entsprechend wird zur Bestimmung von θ_3 der Positionsvektor $\boldsymbol{p}_4$ jetzt in der $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2$-Ebene betrachtet und man erhält die geometrischen Zusammenhänge



Aus den Abbildungen erkennbar, gelten unabhängig von der Konfiguration die folgenden Gleichungen für die Winkel α und β

$$\cos\alpha = \frac{a_2^2 + d_4^2 + a_3^2 - l_3^2}{2a_2\sqrt{d_4^2 + a_3^2}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\cos\beta = \frac{|a_3|}{\sqrt{d_4^2 + a_3^2}}$$

$$\sin\beta = \frac{d_4}{\sqrt{d_4^2 + a_3^2}}$$

Der gesuchte Gelenkwinkel θ_3 setzt sich aus den beiden Winkeln α und β zusammen:

Fälle Rechter, Oberer Arm und Linker, Unterer Arm: $\theta_3 = \alpha - \beta$

Fälle Rechter, Unterer Arm und Linker, Oberer Arm: $\theta_3 = -\alpha - \beta$

Mit Hilfe der beiden eingeführten Konfigurationsindices ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \sin\theta_3 &= K_1 K_2 \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \cos\theta_3 &= \cos\alpha\cos\beta + K_1 K_2 \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

und somit

$$\theta_3 = \operatorname{atan2}(\sin\theta_3, \cos\theta_3)$$

Bestimmung der letzten drei Gelenkwinkel

Nachdem die ersten drei Gelenkwinkel bestimmt worden sind, ist die Transformationsmatrix ${}^0\boldsymbol{T}_3$ vollständig bekannt:

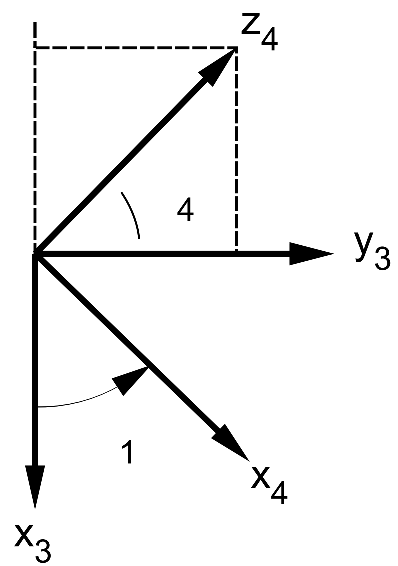
$$
\begin{aligned}
{}^0\boldsymbol{T}_3 &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{y}_3 & \boldsymbol{z}_3 & \boldsymbol{p}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1c_{23} & -s_1 & c_1s_{23} & a_2c_1c_2 + a_3c_1c_{23} - d_2s_1 \\ s_1c_{23} & c_1 & s_1s_{23} & a_2s_1c_2 + a_3s_1c_{23} + d_2c_1 \\ -s_{23} & 0 & c_{23} & -a_2s_2 - a_3s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Bestimmung des Winkels θ_4

Betrachtet man die beiden Koordinatensysteme 3 und 4 in Abhängigkeit des Winkels θ_4 zueinander, so gilt:

$$\sin\theta_4 = -\boldsymbol{z}_4 \cdot \boldsymbol{x}_3 \qquad \cos\theta_4 = \boldsymbol{z}_4 \cdot \boldsymbol{y}_3$$

Hierin lässt sich der Koordinationvektor $\boldsymbol{z}_4$ über das normierte Kreuzprodukt



$$\boldsymbol{z}_4 = \pm \frac{\boldsymbol{z}_3 \times \boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{z}_3 \times \boldsymbol{a}|}$$

berechnen. Das Kreuzprodukt ist bis auf das noch frei wählbare Vorzeichen bestimmt. In dem frei wählbaren Vorzeichen drückt sich aus, dass zwei verschiedene Lösungen für den Winkel existieren. Falls das Kreuzprodukt zu Null wird, also die beiden Vektoren $\boldsymbol{z}_3$ und $\boldsymbol{a}$ parallel liegen, so legt in diesem Falle eine degenerierte Achsstellung vor, denn die Rotationen um die Achse 4 und um die Achse 6 liegen parallel.

Mit $B = |\boldsymbol{z}_3 \times \boldsymbol{a}|$ und einem dritten Konfigurationsindikators K_3, der entweder +1 oder -1 zu setzen ist, erhält man

$$\begin{aligned} B \sin \theta_4 &= -K_3 \left(\boldsymbol{z}_3 \times \boldsymbol{a} \right) \cdot \boldsymbol{x}_3 \\ &= K_3 \left(c_1 a_y - s_1 a_x \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B\cos\theta_4 &= K_3\left(\boldsymbol{z}_3 \times \boldsymbol{a}\right)\cdot \boldsymbol{y}_3 \\
&= K_3\left(c_1 c_{23} a_x + s_1 c_{23} a_y - s_{23} a_z\right)
\end{aligned}
$$

Bei $B = 0$ liegt der degenerierte Fall vor und die Lösung von θ_4 ist unbestimmt. Lediglich die Summe $\theta_4 + \theta_6$ ist bestimmbar.

Ansonsten erhält man den Winkel über

$$
\theta_4 = \operatorname{atan2}(B\sin\theta_4, B\cos\theta_4)
$$

Bestimmung des Winkels θ_5

Betrachtet man die beiden Koordinatensysteme 4 und 5 in Abhängigkeit des Winkels θ_5 zueinander, so gilt:

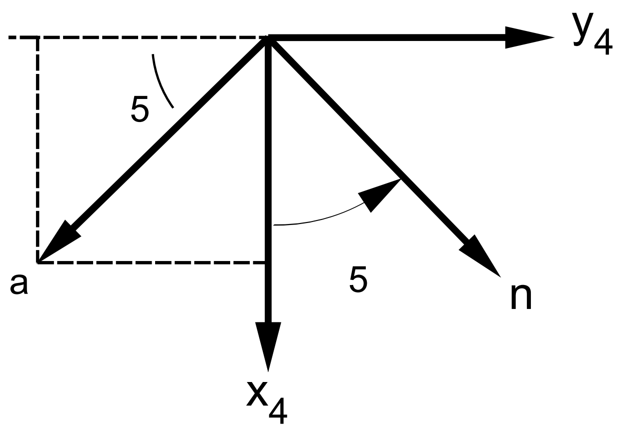
$$\sin\theta_5 = \boldsymbol{z}_5 \cdot \boldsymbol{x}_4 \qquad \cos\theta_5 = -\boldsymbol{z}_5 \cdot \boldsymbol{y}_4$$

und wegen $\boldsymbol{z}_5 = \boldsymbol{a}$

$$\begin{aligned}\sin\theta_5 &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}_4 \\ &= (c_1 c_{23} c_4 - s_1 s_4) a_x + (s_1 c_{23} c_4 + c_1 s_4) a_y - c_4 s_{23} a_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\theta_5 &= -\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y}_4 \\ &= c_1 s_{23} a_x + s_1 s_{23} a_y + c_{23} a_z\end{aligned}$$

$$\theta_5 \;=\; \mathrm{atan2}(\sin\theta_5, \cos\theta_5)$$



Im degenerierten Falle $B = 0$ ist der Winkel θ_5 gleich Null, denn hier steht der Vektor $\boldsymbol{a}$ senkrecht auf $\boldsymbol{x}_4$.

Bestimmung des Winkels θ_6

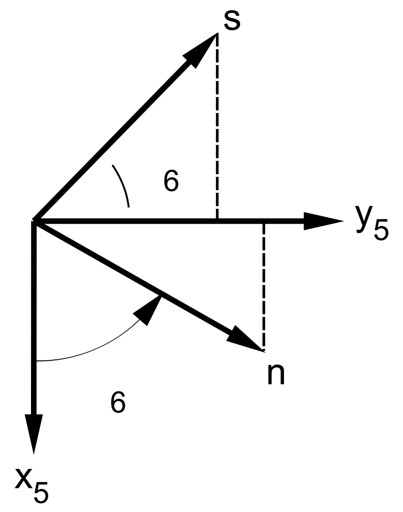
Betrachtet man die beiden Koordinatensysteme 5 und 6 in Abhängigkeit des Winkels θ_6 zueinander, so gilt:

$$\begin{aligned}\sin\theta_6 &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{y}_5\\ &= \left(-s_1c_4 - c_1c_{23}s_4\right)n_x + \left(c_1c_4 - s_1c_{23}s_4\right)n_y + s_4s_{23}n_z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\theta_6 &= -\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{y}_5\\ &= \left(-s_1c_4 - c_1c_{23}s_4\right)s_x + \left(c_1c_4 - s_1c_{23}s_4\right)s_y + s_4s_{23}s_z\end{aligned}$$

so erhält man, falls nicht der degenerierte Fall vorliegt, die Beziehung für θ_6

$$\theta_6 = \operatorname{atan2}(\sin\theta_6, \cos\theta_6)$$



Video der WHS mit der Herleitung der geometrischen Rücktransformation für einen Kuka Knickarmroboter:

https://www.youtube.com/watch?v=3s2x4QsD3uM

Rücktransformation mittels numerischem Ansatz

- Falls eine Rücktransformation mittels analytischem Ansatz nicht möglich ist, z. B. weil der Roboter einen Winkelhand besitzt, findet der numerische Ansatz Anwendung.

- Die numerische Berechnung basiert auf der Jacobi-Matrix. Die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}$ beschreibt den Zusammenhang zwischen Gelenkgeschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{q}}$ und der Geschwindigkeit des TCP in Weltkoordinaten $\dot{\boldsymbol{x}}$:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$$

- Jede Spalte der Jacobi-Matrix beschreibt die Geschwindigkeiten in Weltkoordinaten in Abhängigkeit der Geschwindigkeit einer Gelenkachse. $\boldsymbol{J}$ hat somit eine Dimension von $6 \times n$, wobei n für die Anzahl der Gelenke steht.

- Näherungsweise gilt die Gleichung $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$ auch für kleine Änderungen $\Delta\boldsymbol{q}$ und $\Delta\boldsymbol{x}$:

  $$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \cdot \Delta\boldsymbol{q}$$

  Um auf die Rücktransformation zu lösen, wird diese Gleichung nun umgestellt:

  $$\Delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q}) \cdot \Delta\boldsymbol{x}$$

  dazu muss die Matrix $\boldsymbol{J}$ invertierbar sein.

- Ausgehend von einem Startpunkt der Gelenkwinkel $\boldsymbol{q}_k$ kann die Lösung für $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x})$ iterativ bestimmt werden:

  $$\boldsymbol{q}_{k+1} = \boldsymbol{q}_k + \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q}_k) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}_k)$$

- Sobald eine hinreichend genaue Lösung für $\boldsymbol{x}$ gefunden ist, wird die Iteration abgebrochen.

  $$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k| < \epsilon$$

- Die Inverse der Jacobi-Matrix kann nur gebildet werden, wenn diese quadratisch ist ($n = 6$). Falls dies nicht der Fall ist, kann stattdessen die sogenannten Moore-Penrose-Inverse oder auch Pseudoinverse $\boldsymbol{J}^{+}$ verwendet werden. Mit ihr lässt sich ebenfalls das Problem der inversen Kinematik numerisch lösen.

$$\boldsymbol{J}^{+} = \begin{cases} \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1}, & \text{falls } n > 6 \\ (\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{J})^{-1} \cdot \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}, & \text{falls } n < 6 \end{cases}$$

- Die analytische Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}_{\mathrm{a}}$ (*Analytical Jacobian*) wird durch Ableitung der Gleichungen der Vorwärtstransformation $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$ ermittelt. Hierbei wird jede Funktion der Position und Orientierung in Abhängigkeit der Gelenkvariablen $q_1,\ldots,q_n$ abgeleitet. Durch die Darstellung der Weltkoordinaten in Euler- oder Roll-Nick-Gier-Winkel ist diese Form der Herleitung nicht trivial.

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial q_1} & \frac{\partial f_6}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

Berechnung der geometrischen Jacobi-Matrix mithilfe der DH-Matritzen

- Die ersten drei Zeilen der analytischen Jacobi-Matrix können durch partielle Ableitung des Positionsvektors relativ einfach bestimmt werden. Die letzten drei Zeilen erfordern eine komplexere Berechnungen, da die Orientierung (z.B. in Roll-Nick-Gier-Winkel) vor der partiellen Ableitung zuerst aus der Rotationsmatrix symbolisch berechnet werden muss.

- Eine geometrische Möglichkeit die Jacobi-Matrix (*Geometric Jacobian*) zu ermitteln, besteht in der Verwendung der Denavit-Hartenberg-Koordinatensysteme. Die Ableitung der Orientierung des Roboters wird dabei als vektorielle Winkelgeschwindigkeit (Vektor mit Winkelgeschwindigkeit) angenommen:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{q}) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$$

mit $\dot{\boldsymbol{x}} = [v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z]^{\mathrm{T}}$ und $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n]^{\mathrm{T}}$

- Jede Spalte der geometrischen Jacobi-Matrix hängt direkt von der Lage des jeweiligen Gelenks in Bezug zum Basiskoordinatensystem ab.

- Die Lage des i-ten Gelenks in Bezug zum Basiskoordinatensystem K_0 wird durch die Lage der z_{i-1}-Achse (von K_{i-1}) festgelegt. Diese kann aus der Transformationsmatrix ${}^0\boldsymbol{T}_{i-1}$ direkt abgelesen werden:

$$ {}^0\boldsymbol{T}_{i-1} = {}^0\boldsymbol{T}_1 \cdot {}^1\boldsymbol{T}_2 \cdot \ \ldots \ \cdot {}^{i-2}\boldsymbol{T}_{i-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{i-1} & \boldsymbol{y}_{i-1} & \boldsymbol{z}_{i-1} & \boldsymbol{p}_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

- Für eine Schubachse kann die i-te Spalte der geometrischen Jacobi-Matrix direkt aus $\boldsymbol{z}_{i-1}$ bestimmt werden:

$$ \boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{v}} \\ \boldsymbol{J}_{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_{i-1} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} $$

Eine Schubachse ändert die Orientierung des TCP nicht, deshalb sind die letzten drei Zeilen des Vektors gleich 0 ($\boldsymbol{J}_\omega = \boldsymbol{0}$). Die Änderung der Position $\boldsymbol{J}_\mathrm{v}$ durch die Schubachse i ergibt sich direkt aus der Lage der z_{i-1}-Achse im Basiskoordinatensystem K_0.

- Bei Rotationsgelenken ergibt sich die i-te Spalte der Jacobi-Matrix wie folgt:

$$\boldsymbol{J}_i^\mathrm{R} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_\mathrm{v} \\ \boldsymbol{J}_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_{i-1} \times (\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_{i-1}) \\ \boldsymbol{z}_{i-1} \end{pmatrix}$$

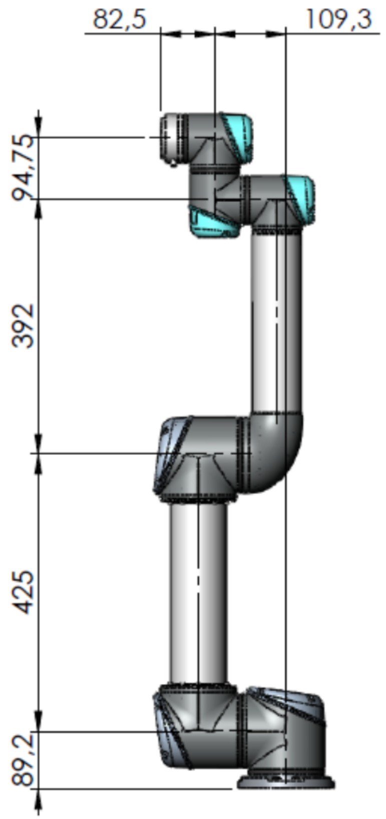
Die Änderung der Orientierung $\boldsymbol{J}_\omega$ durch die Drehachse i ergibt sich direkt aus der Lage der z_{i-1}-Achse im Basiskoordinatensystem K_0. Die Änderung der Position $\boldsymbol{J}_\mathrm{v}$ durch die Drehachse i hängt zudem noch vom „Hebelarm" $\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}_{i-1}$ ab, der vom Ursprung K_{i-1} zum TCP reicht. $\boldsymbol{p}_{i-1}$ kann aus der letzten Spalte von ${}^0\boldsymbol{T}_{i-1}$, $\boldsymbol{p}_n$ aus ${}^0\boldsymbol{T}_n$ ermittelt werden.

Wird die numerische Rücktransformation mittel geometrischer Jacobi-Matrix berechnet, muss die Orientierung in $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k$ als vektorielle Drehung $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^\mathrm{T}$ (Drehvektor/Drehwinkel) aus den beiden Rotationsmatrizen bestimmt werden:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}_k^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{I}_{3\times 3}\right)$$

Beispiel Universal UR5

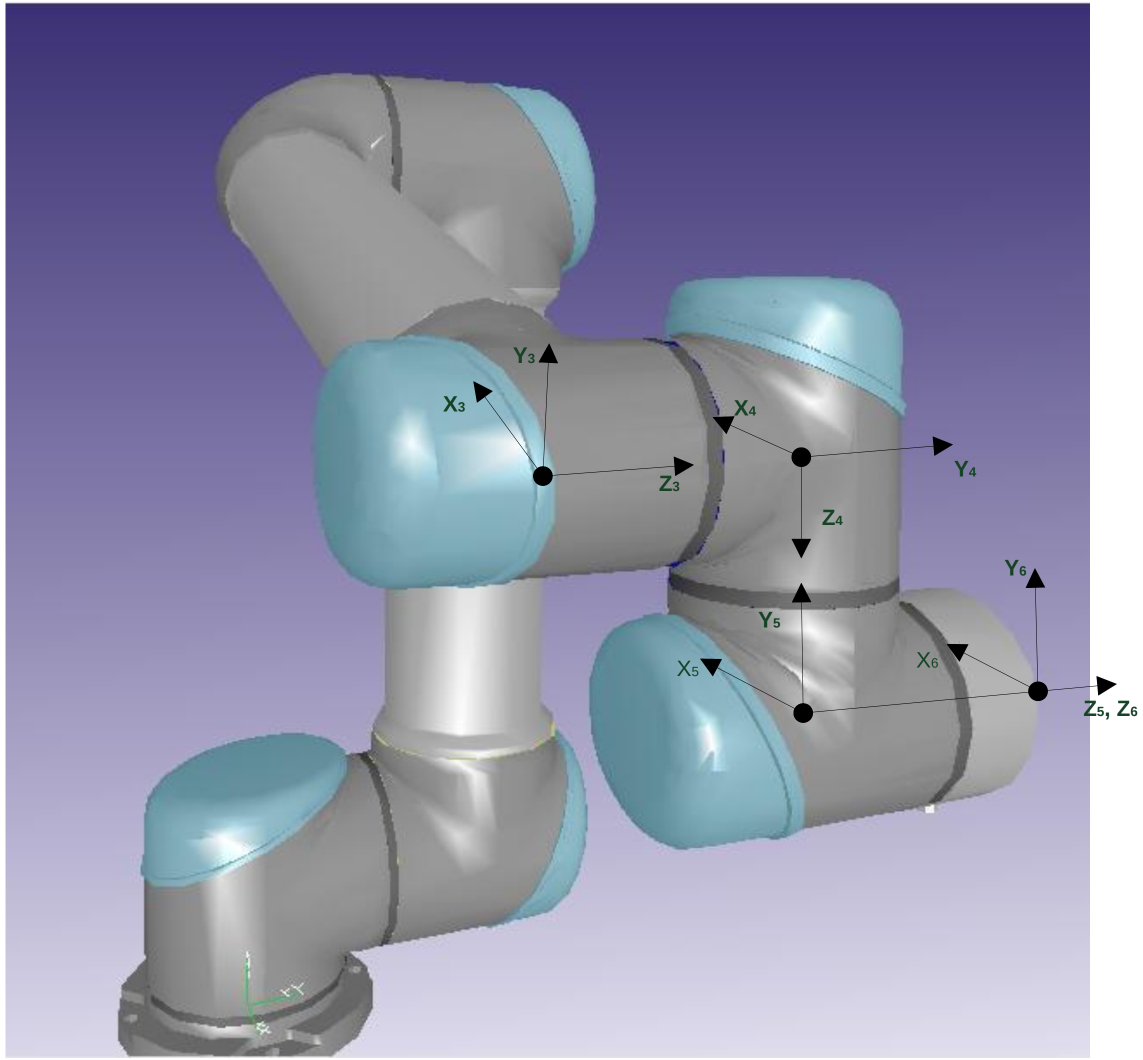
Der Roboter Universal UR5 besitzt 6 Drehachsen einschließlich einer Winkelhand:



Durch die Winkelhand ist keine analytische Lösung der inversen Kinematik möglich.

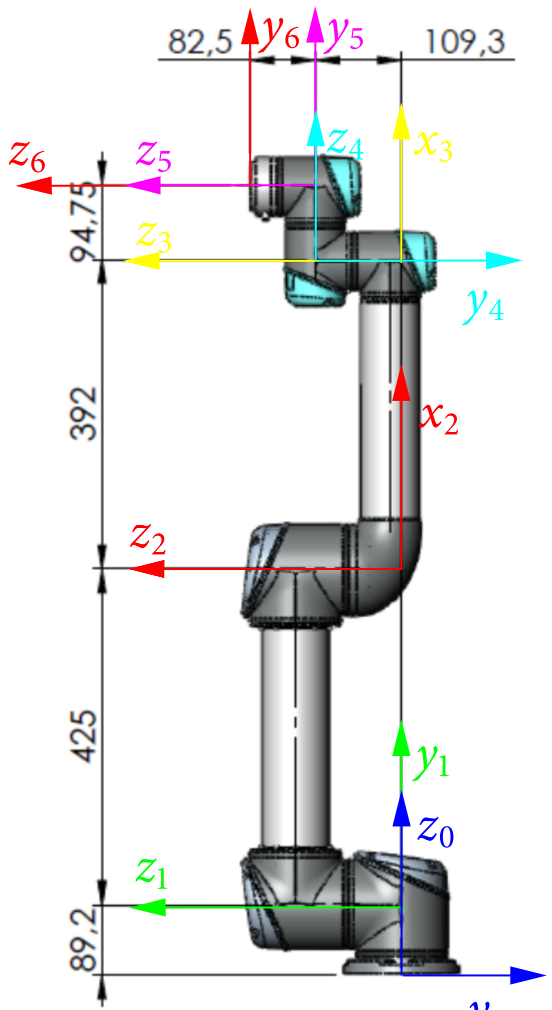
Winkelhand des UR5

In der Abbildung wird die Winkelhand dreidimensional dargestellt. Hierbei handelt es sich um drei translatorische Versetzungen, um zu dem TCP zu gelangen.
Die Ausrichtung der Hand in der Abbildung entspricht der Nulllage (sämtliche θ-Winkel des Handgelenks sind auf 0° gesetzt).



Z5, Z6

DH-Parameter des UR5



i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0,08920	0	+90°
2	θ_2	0	0,425	0
3	θ_3	0	0,392	0
4	θ_4	0,10930	0	−90°
5	θ_5	0,09475	0	+90°
6	θ_6	0,08250	0	0

Robotics Toolbox von Peter Corke

Funktionen zu kinematischen Ketten:

`Link`	Konstruktor für ein Gelenk-Objekt
`SerialLink`	Konstruktor für eine kinematische Kette (Roboter)
`plot`	Methode von `SerialLink` zur Anzeige eines Roboters
`teach`	Methode von `SerialLink` zum Teachen von Punkten eines Roboters
`fkine`	Vorwärtstransformation eines Roboters (`SerialLink`)
`ikine`	numerische Rückwärtstransformation eines Roboters (`SerialLink`)
`ikine6s`	Rückwärtstransformation für einen sechsachsigen Roboter mit Zentralhand
`jacob0`	Berechnung der Jacobi-Matrix (im Basiskoordinatensystem 0)

Zusammenfassung

- Industrieroboter sind stationäre Roboter, die mit ihrem Chassis fest mit dem Boden verbunden sind. Die einzelnen Glieder stützen sich fortlaufend, mit dem Chassis beginnend, aufeinander ab. Sie bilden eine offene kinematische Kette, deren letztes Glied das Werkzeug bildet. Bei stationären Robotern kommen Drehgelenke und Schubgelenke vor. Die Lage eines Drehgelenkes wird durch den Drehwinkel, die Lage eines Schubgelenkes durch die Ausfahrweite beschrieben.

- Die mechanischen Freiheitsgrade (Achsen, Gelenke) des Roboters werden Freiheitsgrade des Konfigurationsraums genannt.

- Ein freier starrer Körper besitzt drei translatorische Freiheitsgrade und drei rotatorische Freiheitsgrade im Arbeitsraum.

- Die Vorwärtstransformation ist die Bestimmung der Variablen des Arbeitsraums aus den Variablen des Konfigurationsraums, die Rücktransformation, auch inverses kinematisches Problem, ist die Bestimmung der Variablen des Konfigurationsraums aus den Variablen des Arbeitsraums.

- Das Denavit-Hartenberg Verfahren dient zur kinematischen Modellierung stationärer Roboter. Es wird jedem Teilkörper eines Roboters ein körperfestes Koordinatensystem zugeordnet und die homogenen Transformationen zwischen aufeinanderfolgenden Koordinatensystemen bestimmt. Das Ziel ist, die Position und die Orientierung des Werkzeuges in Abhängigkeit von der Stellung der einzelnen Achsen in Basiskoordinaten zu beschreiben (S. 255).

- Bei der Rücktransformation mittels geometrischem Ansatz wird die Aufgabe in zwei voneinander unabhängigen Teilproblemen aufgeteilt und gelöst, Voraussetzung dafür ist die Zentralhand (S. 280).

- Die Rücktransformation mittels numerischem Ansatz basiert auf der Jacobi-Matrix. Die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}$ beschreibt den Zusammenhang zwischen Gelenkgeschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{q}}$ und der Geschwindigkeit des TCP in Weltkoordinaten $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$ (S. 308).

Lernziele

- Sie kennen die Klassifizierung von Handhabungsgeräten.
- Sie können die Begriffe Industrieroboter, Basiskoordinatensystem und Werkzeugkoordinatensystem definieren.
- Sie können den Unterschied zwischen Freiheitsgrad im Konfigurationsraum und Freiheitsgrad im Operationstraum erläutern.
- Sie können die Begriffe Vorwärtstransformation und Rückwärtstransformation erläutern.
- Sie kennen Beispiele für redundante Kinematiken.
- Sie kennen den Begriff der offenen und geschlossenen kinematischen Kette.
- Sie kennen die Achskoordinatensysteme nach Denavit und Hartenberg (DH) und können diese für vorgegebene Roboter aufstellen.

- Sie können die homogenen Transformationsmatritzen nach DH aufstellen.
- Sie können mittels DH-Matritzen die Vorwärtstransformation für einen vorgegebenen Roboter aufstellen.
- Sie kennen den geometrischen Ansatz zur Lösung des inversen kinematischen Problems (Rücktransformation).
- Sie kennen den Begriff der Zentralhand und können die Bedeutung der Zentralhand für die Rücktransformation erläutern.
- Sie können die Rücktransformation mittels geometrischem Ansatz für einfache (planare) Roboter aufstellen.
- Sie können das Verfahren zur numerischen Lösung der Rücktransformation mittels Jacobi-Matrix erläutern.
- Sie kennen das Verfahren um die Jacobi-Matrix aus den DH-Matritzen zu erstellen.

- Sie können die Jacobi-Matrix aus den DH-Matritzen für einfache (planare) Roboter aufstellen.