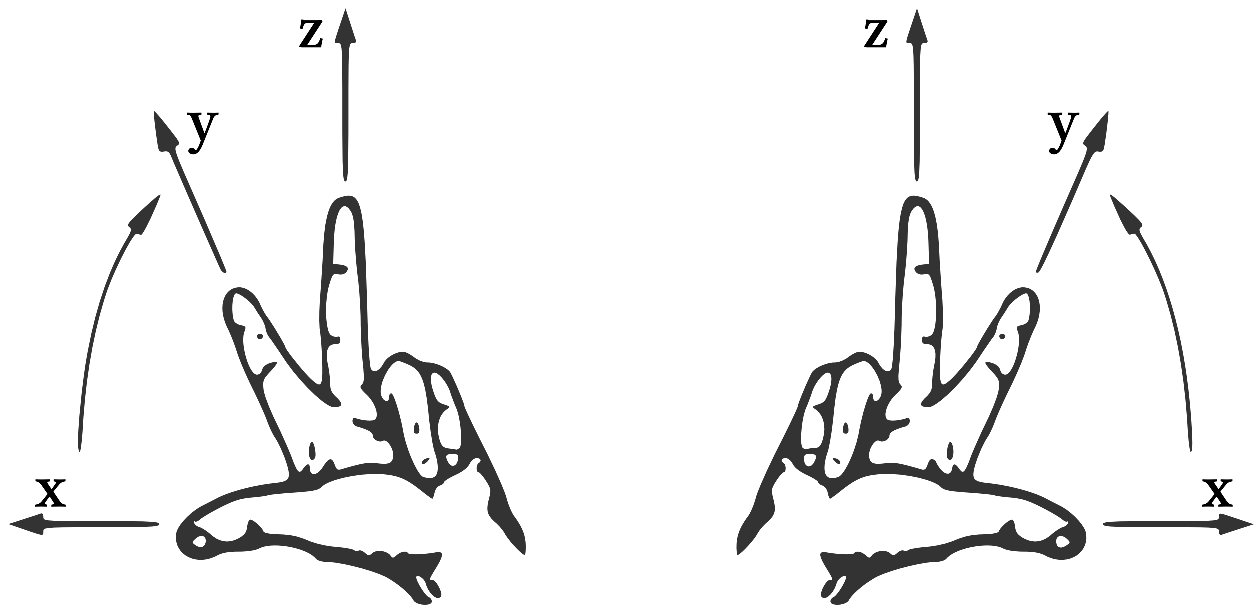
Inhalt

Inhalt

Rechts- und Linksorientierte Kartesische Koordinatensysteme

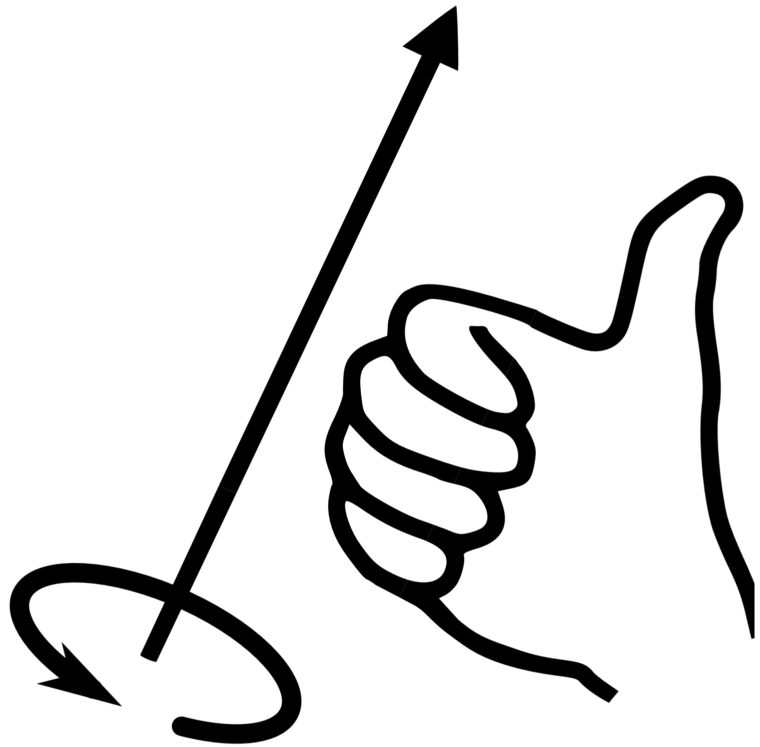


Linkshändiges Koordinatensystem Mathematisch negativer Drehsinn =Geodätisch positiver Drehsinn	Rechtshändiges Koordinatensystem Mathematisch positiver Drehsinn =Geodätisch negativer Drehsinn

In der Robotik werden stets Rechtsorientierte Kartesische Koordinatensysteme verwendet (Rechte Hand). Es gilt: $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ (Kreuzprodukt)

Mathematisch positiver Drehsinn, Rechte-Faust-Regel

Wird eine Koordinatenachse mit der rechten Hand so umfasst, dass der abgespreizte Daumen in Richtung der Koordinatenachse zeigt, zeigen die Finger in Richtung der mathematisch positiven Drehrichtung.



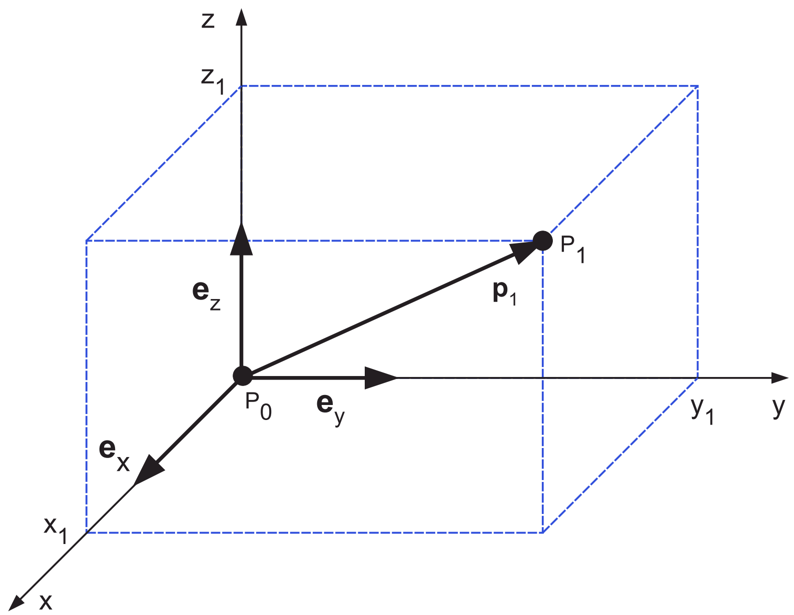
Freiheitsgrade eines Körpers

Ein stationärer Roboter kann mit mehreren räumlich angeordneten Achsen sowohl die Lage als auch die Orientierung des Werkzeuges oder des gegriffenen Gegenstandes verändern. Die sich ergebenden Bewegungsmöglichkeiten werden durch die Anzahl der mechanischen Freiheitsgrade beschrieben, die der Roboter besitzt. Die mechanischen Freiheitsgrade (Gelenke) des Roboters werden auch Freiheitsgrade des Konfigurationsraums genannt.

Ein freier starrer Körper besitzt drei translatorische Freiheitsgrade und drei rotatorische Freiheitsgrade im Arbeitsraum (auch Operationsraum). Bezogen auf einen stationären Roboter heißt das: Damit das Werkzeug in jeder Position jede beliebige Orientierung annehmen kann, muss der Roboter mindestens 6 Freiheitsgrade im Konfigurationsraum besitzen. Durch sinnvolle mechanische Konstruktion besitzt ein Roboter mit 6 Achsen im Konfigurationsraum auch 6 Freiheitsgrade im Arbeitsraum.

Animationen: Freiheitsgrade, Hauptachsen, Handachsen

Positionsvektoren (Ortsvektoren)



$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = p_x \boldsymbol{e}_x + p_y \boldsymbol{e}_y + p_z \boldsymbol{e}_z$$

Der Positionsvektor $\boldsymbol{p}$ legt die Position eines Punktes P bezüglich eines Koordinatensystems fest.

Die Position des Punktes P_0 des Quaders (Ursprung des Koordinatensystems) wird durch

$$\boldsymbol{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

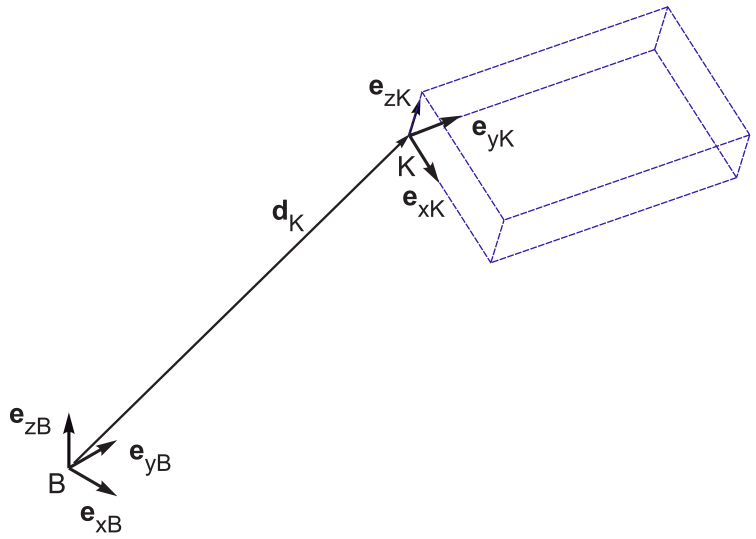
beschrieben, die Position der gegenüberliegenden Ecke P_1 ist gegeben durch:

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Notation für mehrere Koordinatensysteme

$$ {}^{K}\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = p_x\,{}^{K}\boldsymbol{e}_x + p_y\,{}^{K}\boldsymbol{e}_y + p_z\,{}^{K}\boldsymbol{e}_z $$

Der Punkt ${}^{K}\boldsymbol{p}$ wird in Bezug zum Koordinatensystem K festgelegt.



Der Ursprung des Koordinatensystems K in B wird durch den Vektor ${}^{B}\boldsymbol{d}_K$ festgelegt.

Rotationsmatritzen (Orientierungsmatrizen)

Zur Darstellung der Orientierung beschreibt man die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_{xK}$, $\boldsymbol{e}_{yK}$ und $\boldsymbol{e}_{zK}$ des körperfesten Koordinatensystems K in Koordinaten des Systems B

$$^{B}\boldsymbol{e}_{xK} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = u_x\,^{B}\boldsymbol{e}_{xB} + u_y\,^{B}\boldsymbol{e}_{yB} + u_z\,^{B}\boldsymbol{e}_{zB}$$

$$^{B}\boldsymbol{e}_{yK} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x\,^{B}\boldsymbol{e}_{xB} + v_y\,^{B}\boldsymbol{e}_{yB} + v_z\,^{B}\boldsymbol{e}_{zB}$$

$$^{B}\boldsymbol{e}_{zK} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = w_x\,^{B}\boldsymbol{e}_{xB} + w_y\,^{B}\boldsymbol{e}_{yB} + w_z\,^{B}\boldsymbol{e}_{zB}$$

und fasst diese zu einer Matrix ${}^{B}\boldsymbol{R}_K$ zusammen:

$$ {}^{B}\boldsymbol{R}_K = \begin{pmatrix} {}^{B}\boldsymbol{e}_{xK} & {}^{B}\boldsymbol{e}_{yK} & {}^{B}\boldsymbol{e}_{zK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix} $$

Die Matrix $\boldsymbol{R}$ heißt Rotationsmatrix oder Orientierungsmatrix. In ihrer kompletten Notation ${}^{B}\boldsymbol{R}_K$ beschreibt $\boldsymbol{R}$ hier also die Orientierung des Koordinatensystems K in Bezug auf das System B.

Eigenschaften von Rotationsmatritzen

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix}$$

Es gilt:

1.) Die Spaltenvektoren sind normiert:

$$|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{w}| = 1$$

2.) Die Spaltenvektoren sind zueinander orthogonal:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{w} \qquad & \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= 0 \\ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{u} \qquad & \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} &= 0 \\ \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{v} \qquad & \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} &= 0 \end{aligned}$$

Wegen der Eigenschaften 1.) und 2.) heißt $\boldsymbol{R}$ auch orthonormal.

3.) Für die Inverse $\boldsymbol{R}^{-1}$ von $\boldsymbol{R}$ gilt als direkte Folge der Orthonormalität:
$\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^T$

Insbesondere gilt in vollständiger Schreibweise:
${}^A\boldsymbol{R}_B^{-1} = {}^A\boldsymbol{R}_B^T = {}^B\boldsymbol{R}_A$

4.) Der Wert der Determinanten der Rotationsmatrix ist $+1$ für ein Rechtskoordinatensystem:
$\det \boldsymbol{R} = 1$

5.) Das Produkt $\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_2$ zweier orthonormaler Matrizen $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ ist wieder orthonormal.

6.) Das Produkt zweier Rotationsmatrizen ist nicht kommutativ,
$\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_2 \neq \boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{R}_1$, außer wenn $\boldsymbol{R}_1$ oder $\boldsymbol{R}_2$ die Einheitsmatrix ist.

7.) Die Multiplikation von Rotationsmatrizen ist assoziativ,
$\boldsymbol{R}_1 \cdot (\boldsymbol{R}_2 \cdot \boldsymbol{R}_3) = (\boldsymbol{R}_1 \cdot \boldsymbol{R}_2) \cdot \boldsymbol{R}_3$

Basisrotationen

In der Ausgangssituation ist das Körperkoordinatensystem K und das Basiskoordinatensystem B deckungsgleich. Die Orientierung des Körpers wird durch die Einheitsmatrix beschrieben:

$$\boldsymbol{R} = {}^{B}\boldsymbol{R}_{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dreht man den Körper um den Winkel α um die x-Achse von B, so erhält man:

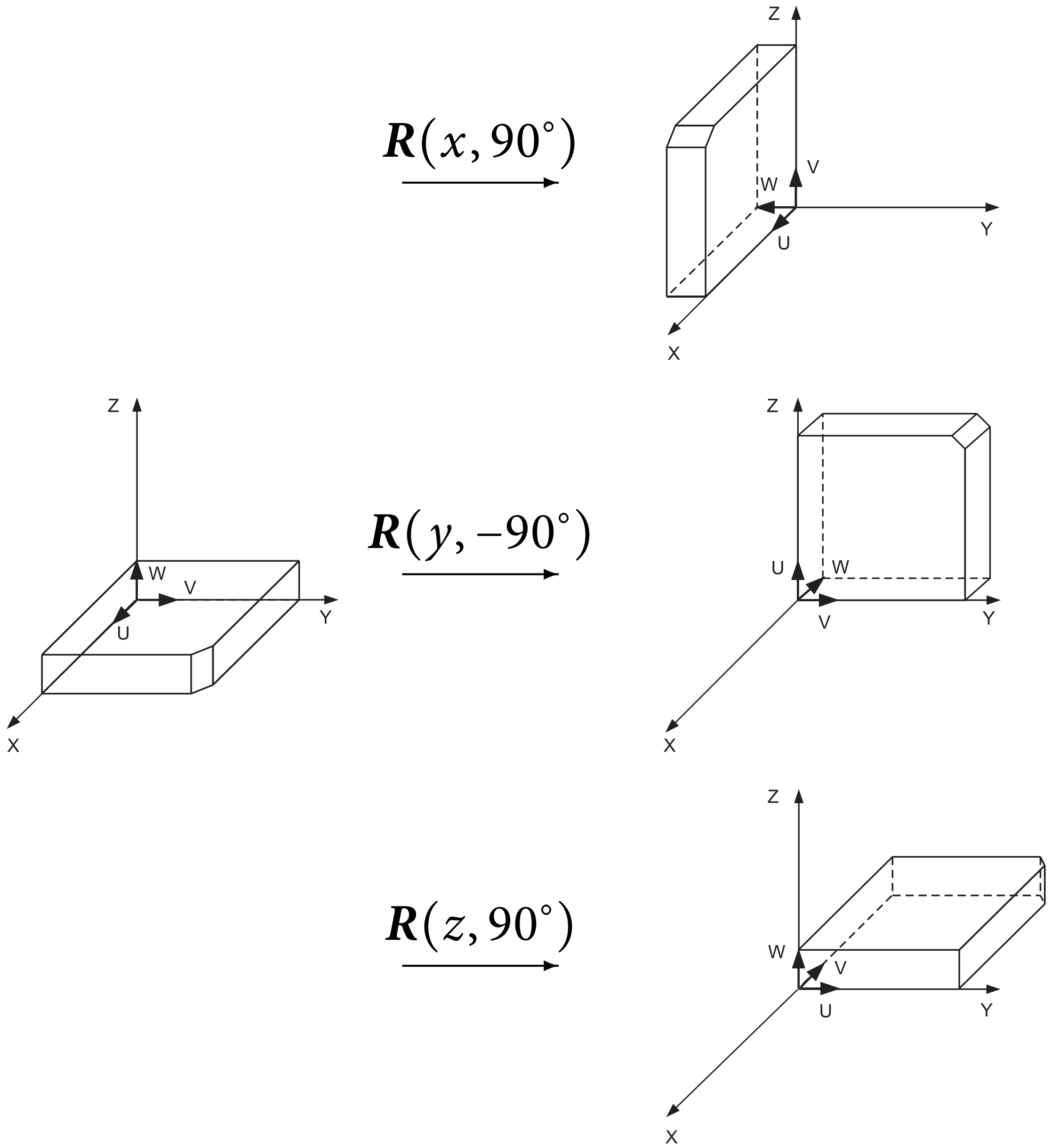
$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(x, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Dreht man den Körper um den Winkel ϕ um die y-Achse von B, so erhält man:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(y, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Dreht man den Körper um den Winkel θ um die z-Achse von B, so erhält man:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(z, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


R(x, 90°)
R(y, −90°)
R(z, 90°)
Z
Y
X
U
V
W

Hintereinanderschaltung von Rotationen

- Basis-Rotationsmatrizen werden miteinander multipliziert, um eine Hintereinanderschaltung von Rotationen zu beschreiben.

- Die Reihenfolge der Rotation ist wesentlich.

- Dreht man einen Körper, zuerst um den Winkel α um die x-Achse und anschließend um den Winkel θ um die z-Achse, so wird die Orientierung, durch die nachstehende Rotationsmatrix beschrieben:

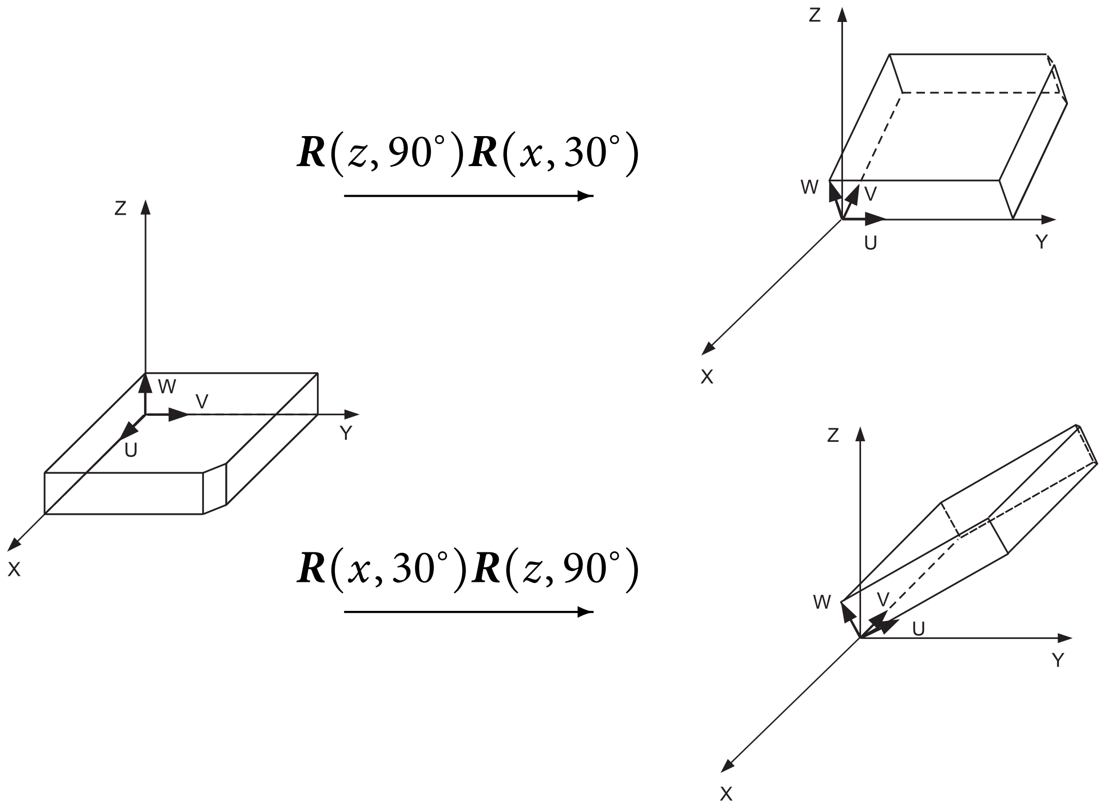
$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(z,\theta)\boldsymbol{R}(x,\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

- Die umgekehrten Reihenfolge (zuerst θ um z-, dann α um x-Achse) ergibt:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(x,\alpha)\boldsymbol{R}(z,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Hintereinanderschaltung von Basisrotationen um die Achsen des Basiskoordinatensystems (x-, y-, z-Achse) kann beschrieben werden durch eine Hintereinanderschaltung von Links-Multiplikationen beginnend mit der Einheitsmatrix als Startmatrix. Das Körperkoordinatensystem ist dabei zunächst deckungsgleich mit dem Basiskoordinatensystem.

Hintereinanderschaltung von Basisrotationen für $\alpha = 30^\circ,\ \theta = 90^\circ$



Rotation um das Körperkoordinatensystem (mitgedrehte Achsen)

- Statt für die Basisrotationen die Achsen des Basiskoordinatensystems zu nutzen, können alternativ auch die Achsen des Körperkoordinatensystems (u-, v-, w-Achse) herangezogen werden.

- Für die Rotationsfolge $\boldsymbol{R}_x^K$, $\boldsymbol{R}_y^K$, $\boldsymbol{R}_z^K$ um das Körperkoordinatensystem gilt, dass der Körper zuerst um die u-, danach um die v- und zum Schluss um die w-Achse des Körperkoordinatensystems gedreht wird: $\boldsymbol{R}_x^K = \boldsymbol{R}_u$, $\boldsymbol{R}_y^K = \boldsymbol{R}_v$, $\boldsymbol{R}_z^K = \boldsymbol{R}_w$

- Die Gesamtrotation lässt sich mit ${}^B\boldsymbol{R}_K = \boldsymbol{R}_z^K \cdot \boldsymbol{R}_y^K \cdot \boldsymbol{R}_x^K = \boldsymbol{R}_w \cdot \boldsymbol{R}_v \cdot \boldsymbol{R}_u$ beschreiben. Die erste Rotation $\boldsymbol{R}_x^K = \boldsymbol{R}_x$ entspricht der Rotation im Basiskoordinatensystem, da zuerst Basis- und Körperkoordinatensystem deckungsgleich sind.

- Die nachfolgenden Rotationen werden durch Rotationen im Basiskoordinatensytem dargestellt.

- Bei der Rotation um die v-Achse wird zuerst die Rotation um die x-Achse durch Multiplikation mit R_x^{-1} aufgehoben, danach wird die Rotation um die y-Achse im Basiskoordinatensystem durchgeführt und danach wird wiederum die Rotation um die x-Achse wiederhergestellt, es ergibt sich somit: $\boldsymbol{R}_y^K = \boldsymbol{R}_v = \boldsymbol{R}_x \cdot \boldsymbol{R}_y \cdot \boldsymbol{R}_x^{-1}$

- Für die gesamte Rotation erhält man ${}^B\boldsymbol{R}_K = \boldsymbol{R}_z^K \cdot \boldsymbol{R}_y^K \cdot \boldsymbol{R}_x^K = \boldsymbol{R}_z^K \cdot \boldsymbol{R}_x \cdot \boldsymbol{R}_y \cdot \boldsymbol{R}_x^{-1} \cdot \boldsymbol{R}_x = \boldsymbol{R}_z^K \cdot \boldsymbol{R}_x \cdot \boldsymbol{R}_y$

- Bei der letzten Rotation $\boldsymbol{R}_z^K = \boldsymbol{R}_w$ müssen beide vorhergehenden Rotationen berücksichtigt werden: $\boldsymbol{R}_z^K = \boldsymbol{R}_w = \boldsymbol{R}_x \cdot \boldsymbol{R}_y \cdot \boldsymbol{R}_z \cdot \boldsymbol{R}_y^{-1} \cdot \boldsymbol{R}_x^{-1}$

- Die gesamte Gleichung ergibt sich damit ${}^B\boldsymbol{R}_K = \boldsymbol{R}_x \cdot \boldsymbol{R}_y \cdot \boldsymbol{R}_z \cdot \boldsymbol{R}_y^{-1} \cdot \boldsymbol{R}_x^{-1} \cdot \boldsymbol{R}_x \cdot \boldsymbol{R}_y = \boldsymbol{R}_x \cdot \boldsymbol{R}_y \cdot \boldsymbol{R}_z$

- Allgemein gilt, dass Basisrotationen um die jeweils neuen Lagen der Achsen des Körperkoordinatensystems durch Rechts-Multiplikationen mit der aktuellen Orientierung erreicht werden, wobei dieselben Matrizen, wie bei den Rotation im Basiskoordinatensystem, verwendet werden.

- Es sind drei voneinander unabhängige Drehungen um Koordinatenachsen notwendig, um jede Orientierung eines Körpers zu beschreiben.

Eulersche Winkel

Die Eulerschen Winkel gehören zur Gruppe der Orientierungsdarstellungen durch drei Drehwinkel.

Definition der Eulerschen Winkel (ZYZ):

$$\boldsymbol{R}_{\text{Euler}} := \boldsymbol{R}_{\text{Euler}}(\alpha, \beta, \gamma) := \boldsymbol{R}(z, \alpha)\boldsymbol{R}(y, \beta)\boldsymbol{R}(z, \gamma)$$

Ausmultipliziert erhält man

$$\boldsymbol{R}_{\text{Euler}} = \begin{pmatrix} \mathrm{c}\,\alpha\ \mathrm{c}\,\beta\ \mathrm{c}\,\gamma - \mathrm{s}\,\alpha\ \mathrm{s}\,\gamma & -\mathrm{c}\,\alpha\ \mathrm{c}\,\beta\ \mathrm{s}\,\gamma - \mathrm{s}\,\alpha\ \mathrm{c}\,\gamma & \mathrm{c}\,\alpha\ \mathrm{s}\,\beta \\ \mathrm{s}\,\alpha\ \mathrm{c}\,\beta\ \mathrm{c}\,\gamma + \mathrm{c}\,\alpha\ \mathrm{s}\,\gamma & -\mathrm{s}\,\alpha\ \mathrm{c}\,\beta\ \mathrm{s}\,\gamma + \mathrm{c}\,\alpha\ \mathrm{c}\,\gamma & \mathrm{s}\,\alpha\ \mathrm{s}\,\beta \\ -\mathrm{s}\,\beta\ \mathrm{c}\,\gamma & \mathrm{s}\,\beta\ \mathrm{s}\,\gamma & \mathrm{c}\,\beta \end{pmatrix}$$

mit den Abkürzungen: $\mathrm{c}\,\alpha := \cos(\alpha)$, $\mathrm{s}\,\alpha := \sin(\alpha)$ (für β und γ entsprechend)

- Die Orientierung entsteht durch Drehung des Ausgangskoordinatensystems um die z-Achse um den Winkel γ, anschließender Drehung um die y-Achse um den Winkel β und abschließender Drehung um die z-Achse um den Winkel α (Drehung um die Achsen des Basiskoordinatensystems).

- Alternativ bedeutet dies eine Drehung um die w-Achse um den Winkel α mit anschließender Drehung um die neue v-Achse um den Winkel β und abschließender Drehung um die so entstandene w-Achse um den Winkel γ (Drehung um die Achsen des Körperkoordinatensystems).

- Neben den hier dargestellten Eulerschen Winkeln ZYZ sind noch elf weitere Definitionen der Eulerschen Winkel möglich (XYX, XZX, YXY, YZY, ZXZ oder auch Drehung um drei Achsen XYZ, XZY, YZX, YXZ, ZXY, ZYX).

Die Berechnung der Eulerschen Winkel (ZYZ) aus der Rotationsmatrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{Euler}}$ liefert die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \operatorname{atan2}\left(R_{\mathrm{Euler},23}, R_{\mathrm{Euler},13}\right) \\
\beta &= \operatorname{atan2}\left(R_{\mathrm{Euler},23} \cdot \sin\alpha + R_{\mathrm{Euler},13} \cdot \cos\alpha, R_{\mathrm{Euler},33}\right) \\
\gamma &= \operatorname{atan2}\left(-R_{\mathrm{Euler},11} \cdot \sin\alpha + R_{\mathrm{Euler},21} \cdot \cos\alpha, -R_{\mathrm{Euler},12} \cdot \sin\alpha + R_{\mathrm{Euler},22} \cdot \cos\alpha\right)
\end{aligned}$$

$R_{\mathrm{Euler},ij}$ ist hierbei das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Matrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{Euler}}$.

Da $\sin\beta$ nur dem Betrag nach aus der Rotationsmatrix bestimmt werden kann und die Elemente der letzten Zeile von $\boldsymbol{R}_{\mathrm{Euler}}$ $\sin\beta$ als Faktor enthalten, existieren jeweils zwei Lösungen pro Winkel für das Intervall $[-\pi, \pi]$. Hier liegt eine Doppeldeutigkeit vor.

Die beiden Lösungen hängen nach der folgenden Gesetzmäßigkeit voneinander ab:

$$\boldsymbol{R}_{\text{Euler}}(\alpha, \beta, \gamma) = \boldsymbol{R}_{\text{Euler}}(\alpha - \pi, -\beta, \gamma - \pi)$$

Sonderfall $\sin\beta = 0$: Es wird lediglich zweimal hintereinander um die z-Achse gedreht:

$$\boldsymbol{R}_{\text{Euler}}(\alpha, 0, \gamma) = \begin{pmatrix} \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{c}\gamma - \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{s}\gamma & -\mathrm{c}\alpha\,\mathrm{s}\gamma - \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{c}\gamma & 0 \\ \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{c}\gamma - \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{s}\gamma & -\mathrm{s}\alpha\,\mathrm{s}\gamma + \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{c}\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \gamma) & -\sin(\alpha + \gamma) & 0 \\ \sin(\alpha + \gamma) & \cos(\alpha + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Orientierungen, die durch $\sin\beta = 0$ beschrieben werden, bezeichnet man als singulär.

Roll-Nick-Gier-Winkel (*Roll Pitch Yaw*)

Hierbei wird die Orientierung ebenfalls durch drei aufeinanderfolgende Drehungen herbeigeführt. Bei der Drehung um das Ausgangskoordinatensystem wird zuerst um den Winkel γ um die x-Achse (Rollen, roll), anschließend um den Winkel β um die y-Achse (Nicken, pitch) und abschließend um den Winkel α um die z-Achse (Gieren, yaw) gedreht (Drehung um die Achsen des Basiskoordinatensystems).

Alternativ bedeutet dies bei Drehung um das Körperkoordinarensystem eine Drehung um die w-Achse um den Winkel α mit anschließender Drehung um die neue v-Achse um den Winkel β und abschließender Drehung um die so entstandene u-Achse um den Winkel γ.

Rotationsmatrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{RPY}}$:

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{RPY}} := \boldsymbol{R}_{\mathrm{RPY}}(\alpha, \beta, \gamma) := \boldsymbol{R}(z, \alpha)\boldsymbol{R}(y, \beta)\boldsymbol{R}(x, \gamma)$$

Ausmultipliziert erhält man:

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{RPY}} = \begin{pmatrix} \mathrm{c}\,\alpha\;\mathrm{c}\,\beta & \mathrm{c}\,\alpha\;\mathrm{s}\,\beta\;\mathrm{s}\,\gamma - \mathrm{s}\,\alpha\;\mathrm{c}\,\gamma & \mathrm{c}\,\alpha\;\mathrm{s}\,\beta\;\mathrm{c}\,\gamma + \mathrm{s}\,\alpha\;\mathrm{s}\,\gamma \\ \mathrm{s}\,\alpha\;\mathrm{c}\,\beta & \mathrm{s}\,\alpha\;\mathrm{s}\,\beta\;\mathrm{s}\,\gamma + \mathrm{c}\,\alpha\;\mathrm{c}\,\gamma & \mathrm{s}\,\alpha\;\mathrm{s}\,\beta\;\mathrm{c}\,\gamma - \mathrm{c}\,\alpha\;\mathrm{s}\,\gamma \\ -\mathrm{s}\,\beta & \mathrm{c}\,\beta\;\mathrm{s}\,\gamma & \mathrm{c}\,\beta\;\mathrm{c}\,\gamma \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der Roll-Nick-Gier-Winkel aus der Rotationsmatrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{RPY}}$ liefert die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{atan2}\left(R_{\mathrm{RPY},21}, R_{\mathrm{RPY},11}\right) \\ \beta &= \operatorname{atan2}\left(-R_{\mathrm{RPY},31}, R_{\mathrm{RPY},21} \cdot \sin\alpha + R_{\mathrm{RPY},11} \cdot \cos\alpha\right) \\ \gamma &= \operatorname{atan2}\left(R_{\mathrm{RPY},13} \cdot \sin\alpha - R_{\mathrm{RPY},23} \cdot \cos\alpha, -R_{\mathrm{RPY},12} \cdot \sin\alpha + R_{\mathrm{RPY},22} \cdot \cos\alpha\right) \end{aligned}$$

$R_{\mathrm{RPY},ij}$ ist hierbei das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Matrix $\boldsymbol{R}_{\mathrm{RPY}}$.

Diese Orientierungsdarstellung ist ebenfalls doppeldeutig und hat singuläre Stellen bei $\beta = \pm\pi/2$.

Orientierungsdarstellung mit Drehvektor/Drehwinkel

Mit den Eulerschen Winkeln und mit den Roll-Nick-Gier-Winkeln ist, von Sonderfällen abgesehen, keine homogene Orientierungsführung möglich.

Statt eine gewünschte Endorientierung durch drei aufeinanderfolgende Drehungen um Koordinatenachsen einzunehmen, ist es ebenso möglich, diese durch eine einzige Drehung um eine im Allgemeinen im Raum schief stehende Drehachse zu erreichen.

Die Drehachse erhält man aus dem Eigenvektor $\boldsymbol{\omega}_1$ zum Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ der Rotationsmatrix $\boldsymbol{R}$. Eine Rotationsmatrix hat stets einen Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und in der Regel zwei komplexwertige Eigenwerte $\lambda_{2,3}$. Zur Bestimmung von $\boldsymbol{\omega}_1$ ist die Gleichung

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_1$$

zu lösen. Zur Beschreibung der Drehachse wird der Eigenvektor in normierter Darstellung verwendet:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}_1|}\boldsymbol{\omega}_1$$

Der zugehörige Drehwinkel ϕ wird aus den konjugiert komplexen Eigenwerten $\lambda_{2,3} = \cos\phi \pm \mathrm{j}\sin\phi$ bestimmt.

$$\phi = \arctan\left(\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\right)$$

Bei vorgegebenem Drehvektor $\boldsymbol{\omega}$ und Drehwinkel ϕ lässt sich die zugehörige Rotationsmatrix mit $s := \sin\phi$, $c := \cos\phi$ und $u := (1 - \cos\phi)$ wie folgt berechnen:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\omega},\phi) = \begin{pmatrix} \omega_x^2 u + c & \omega_y\omega_x u - \omega_z s & \omega_z\omega_x u + \omega_y s \\ \omega_x\omega_y u + \omega_z s & \omega_y^2 u + c & \omega_z\omega_y u - \omega_x s \\ \omega_x\omega_z u - \omega_y s & \omega_y\omega_z u + \omega_x s & \omega_z^2 u + c \end{pmatrix}$$

Orientierungsdarstellung mit Quaternionen

Quaternionen sind eine Erweiterung der reellen Zahlen und wurden 1843 von Sir William Rowan Hamilton entwickelt. Quaternionen bieten die Möglichkeit, Rotationen darzustellen. Ein Quaternion $\mathring{\boldsymbol{q}}$ besteht aus vier Parametern:

$$\mathring{\boldsymbol{q}} = (s, \boldsymbol{v}) = (s, v_x \mathrm{i}, v_y \mathrm{j}, v_z \mathrm{k}),$$

wobei $s \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ und i, j und k komplexe Zahlen mit folgenden Eigenschaften sind:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1, \quad \mathrm{ij} = +\mathrm{k}, \quad \mathrm{jk} = +\mathrm{i}, \quad \mathrm{ki} = +\mathrm{j}, \quad \mathrm{ji} = -\mathrm{k}, \quad \mathrm{kj} = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{ik} = -\mathrm{j}$$

Häufig wird für Quaternionen auch folgende Schreibweise verwendet:

$$\mathring{\boldsymbol{q}} = s < v_x, v_y, v_z >$$

Rechenregeln für Quaternionen

Addition:

$$\mathring{\boldsymbol{q}}_1 + \mathring{\boldsymbol{q}}_2 = (s_1 + s_2, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = (s_1 + s_2, (v_{x1} + v_{x2})\mathrm{i}, (v_{y1} + v_{y2})\mathrm{j}, (v_{z1} + v_{z2})\mathrm{k})$$

Multiplikation:

$$\begin{aligned}\mathring{\boldsymbol{q}}_1 \mathring{\boldsymbol{q}}_2 &= (s_1 s_2 - \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2, s_1 \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 s_2 + \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) \\ &= (s_1 s_2 - v_{x1} v_{x2} - v_{y1} v_{y2} - v_{z1} v_{z2}, (s_1 v_{x2} + v_{x1} s_2 + v_{y1} v_{z2} - v_{z1} v_{y2})\mathrm{i}, \\ &\quad (s_1 v_{y2} - v_{x1} v_{z2} + v_{y1} s_2 + v_{z1} v_{x2})\mathrm{j}, (s_1 v_{z2} + v_{x1} v_{y2} - v_{y1} v_{x2} + v_{z1} s_2)\mathrm{k})\end{aligned}$$

Um Rotationen darzustellen, werden Einheitsquaternionen benötigt, welche folgende Eigenschaft besitzen:

$$|\mathring{\boldsymbol{q}}| = \sqrt{s^2 + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 1$$

Einheitsquaternionen können als Rotation interpretiert werden, welche um den Einheitsvektor $\boldsymbol{\omega}$ um den Winkel ϕ durchgeführt wird. Der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ und der Skalar ϕ können aus folgendem Zusammenhang berechnet werden:

$$s = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \Rightarrow \phi = 2\arccos(s), \quad \boldsymbol{v} = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\boldsymbol{\omega} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{v}}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

Rotationsmatrizen und Quaternionen können ineinander überführt werden:

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2v_y^2 - 2v_z^2 & 2v_x v_y - 2sv_z & 2v_x v_z + 2sv_y \\ 2v_x v_y + 2sv_z & 1 - 2v_x^2 - 2v_z^2 & 2v_y v_z - 2sv_x \\ 2v_x v_z - 2sv_w v_y & 2v_y v_z + 2sv_x & 1 - 2v_x^2 - 2v_y^2 \end{pmatrix}$$

$$s = \frac{\sqrt{n_x + o_y + a_z + 1}}{2}, \quad v_x = \frac{o_z - a_y}{4s}, \quad v_y = \frac{a_x - n_z}{4s}, \quad v_z = \frac{n_y - o_x}{4s} \quad \text{für} \quad s \neq 0$$

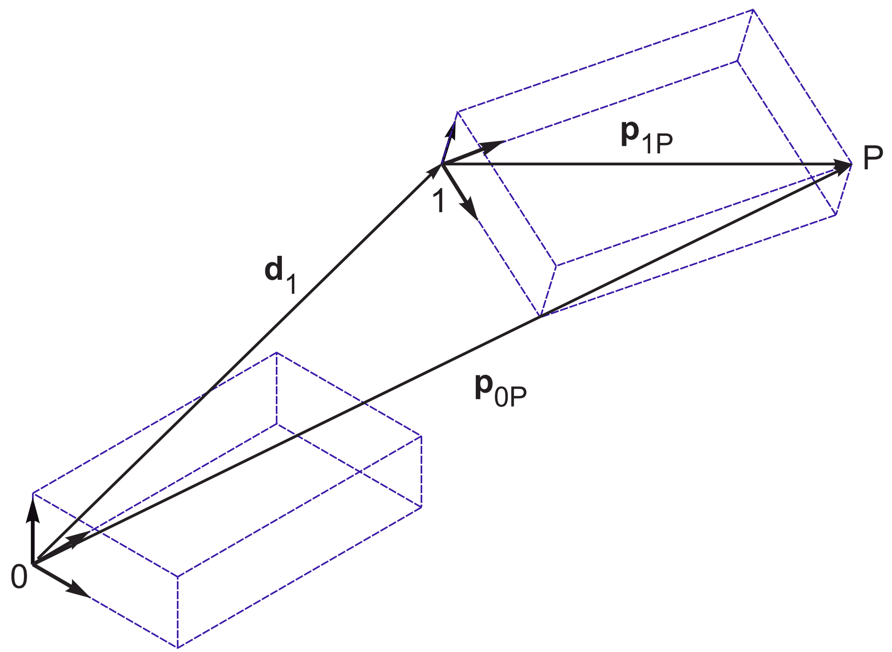
$$\text{sonst} \quad v_x = \frac{1}{2}\sqrt{1 + n_x - o_y - a_z}, \quad v_y = \frac{n_y + o_x}{2\sqrt{1 + n_x - o_y - a_z}} \quad v_z = \frac{a_x + n_z}{2\sqrt{1 + n_x - o_y - a_z}}$$

Homogene Transformationen

Die Lage eines Körpers im Raum wird beschrieben durch:

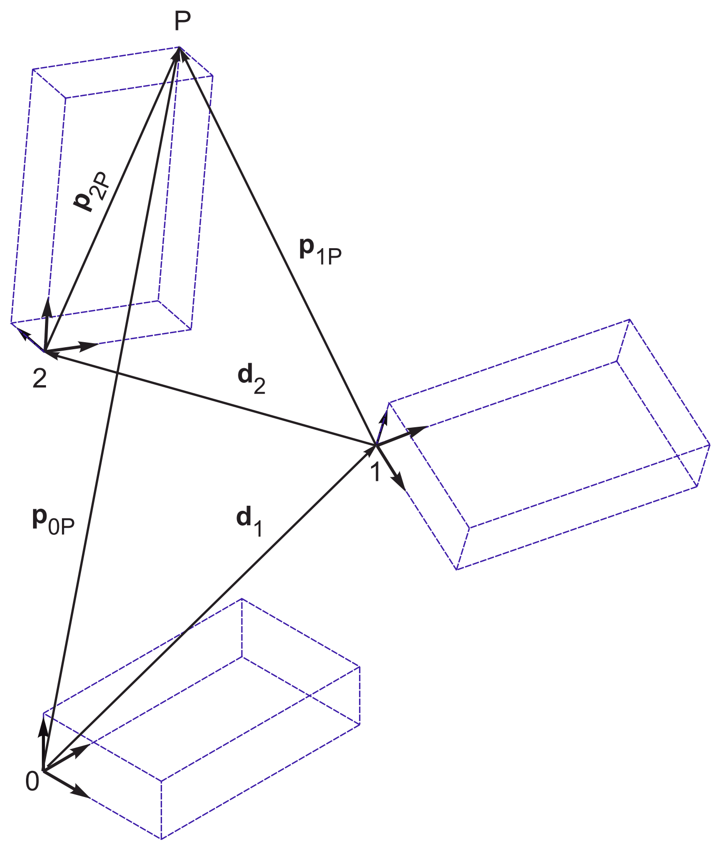
- einen Positionsvektor $\boldsymbol{d}$, der die translatorische Verschiebung bezüglich eines Koordinatensystems angibt und
- einer Rotationsmatrix $\boldsymbol{R}$, die die Verdrehung bezüglich des Koordinatensystems angibt.

Lage eines Quaders im Raum



Für die Position der Ecke P bezogen auf das System 0 gilt dann:

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{p}_{0P} &= {}^0\boldsymbol{d}_1 + {}^0\boldsymbol{p}_{1P} \\ &= {}^0\boldsymbol{d}_1 + {}^0\boldsymbol{R}_1{}^1\boldsymbol{p}_{1P} \end{aligned}$$



Hintereinanderschaltung zweier derartiger Operationen

$$
\begin{aligned}
{}^0\boldsymbol{p}_{0P} &= {}^0\boldsymbol{d}_1 + {}^0\boldsymbol{d}_2 + {}^0\boldsymbol{p}_{2P} \\
&= {}^0\boldsymbol{d}_1 + {}^0\boldsymbol{R}_1{}^1\boldsymbol{d}_2 + {}^0\boldsymbol{R}_1{}^1\boldsymbol{R}_2{}^2\boldsymbol{p}_{2P}
\end{aligned}
$$

Eine alternative Berechnung hierfür ist

$$\begin{aligned}
{}^{0}\boldsymbol{p}_{0P} &= {}^{0}\boldsymbol{d}_1 + {}^{0}\boldsymbol{p}_{1P} \\
&= {}^{0}\boldsymbol{d}_1 + {}^{0}\boldsymbol{R}_1 {}^{1}\boldsymbol{p}_{1P} \\
&= {}^{0}\boldsymbol{d}_1 + {}^{0}\boldsymbol{R}_1 ({}^{1}\boldsymbol{d}_2 + {}^{1}\boldsymbol{R}_2 {}^{2}\boldsymbol{p}_{2P}) \\
&= {}^{0}\boldsymbol{d}_1 + {}^{0}\boldsymbol{R}_1 {}^{1}\boldsymbol{d}_2 + {}^{0}\boldsymbol{R}_1 {}^{1}\boldsymbol{R}_2 {}^{2}\boldsymbol{p}_{2P}
\end{aligned}$$

Durch Einführung der homogenen Koordinaten erhält man:

$$\begin{pmatrix} {}^{0}\boldsymbol{p}_{0P} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{0}\boldsymbol{R}_1 & {}^{0}\boldsymbol{d}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{1}\boldsymbol{p}_{1P} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{0}\boldsymbol{r}_{0P} = {}^{0}\boldsymbol{T}_1 \; {}^{1}\boldsymbol{r}_{1P}$$

Die Positionsvektoren $\boldsymbol{r}$ sind hierbei noch um eine vierte Koordinate mit dem Wert 1 erweitert worden. Man spricht an dieser Stelle von der Repräsentation der Position in homogenen

Koordinaten. $\boldsymbol{T}$ ist die (homogene) Transformationsmatrix, die sowohl die Translation wie auch die Drehung eines Koordinatensystems zusammenfasst.

In dieser Darstellung wird aus Gleichung des Beispiels dann:

$$ {}^{0}\boldsymbol{r}_{0P} = {}^{0}\boldsymbol{T}_{1}\,{}^{1}\boldsymbol{T}_{2}\,{}^{2}\boldsymbol{r}_{2P} $$

Die Transformation, die das Koordinatensystem 2 in das Koordinatensystem 0 abbildet, ergibt sich somit einfach aus der Multiplikation der Einzeltransformationen:

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_{2} = {}^{0}\boldsymbol{T}_{1}\,{}^{1}\boldsymbol{T}_{2} $$

Robotics Toolbox von Peter Corke

Die Robotics Toolbox von Peter Corke ist im Web verfügbar:
https://petercorke.com/toolboxes/robotics-toolbox/

Funktionen zu Koordinatentransformationen:

`help robot`	Übersicht über die Toolbox
`rotx, roty, rotz`	Erzeugung von Rotationsmatritzen um x, y, z
`r2eul, eul2r`	Umrechnung einer Rotationsmatrix in Eulerwinkel (ZYZ) und umgekehrt
`r2rpy, rpy2r`	Umrechnung einer Rotationsmatrix in Roll-Nick-Gier-Winkel und umgekehrt, Option `'zyx'` für die in der Vorlesung verwendete Definition
`t2r, r2t`	Umformung homogene Transformationsmatrix in Rotationsmatrix und umgekehrt
`trplot`	Plotten einer homogenen Transformation
`Quaternion`	Erzeugen eines Quaternion (Konstruktor)

Auch für Python verfügbar: https://github.com/petercorke/robotics-toolbox-python

Zusammenfassung

- In der Robotik werden rechtsorientierte kartesische Koordinatensysteme verwendet ($\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$).
- Der mathematisch positive Drehsinn kann mit der Rechten-Faust-Regel ermittelt werden (S. 66).
- Ein freier starrer Körper besitzt drei translatorische Freiheitsgrade und drei rotatorische Freiheitsgrade im Arbeitsraum (Operationsraum) (S. 67).
- Die mechanischen Freiheitsgrade (Gelenke) des Roboters werden auch Freiheitsgrade des Konfigurationsraums genannt (S. 67).
- Ein Positionsvektor (Ortsvektor) $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)^{\mathrm{T}}$ legt die Position eines Punktes P bezüglich eines Koordinatensystems fest (S. 68).
- Die Orientierung des Koordinatensystems K in Bezug auf das System B kann mittels Rotationsmatrix (Orientierungsmatrix) ${}^{B}\boldsymbol{R}_{K}$ beschrieben werden (S. 71).

- Eine Hintereinanderschaltung von Basisrotationen um die Achsen des Basiskoordinatensystems kann durch eine Hintereinanderschaltung von Links-Multiplikationen der Rotationsmatritzen beschrieben werden (S. 75).
- Rotationen um die Achsen des Körperkoordinatensystems werden durch Rechts-Multiplikationen dargestellt.
- Es sind drei voneinander unabhängige Drehungen um Koordinatenachsen notwendig, um jede mögliche Orientierung eines Körpers beschreiben zu können.
- Die Eulerschen Winkel gehören zur Gruppe der Orientierungsdarstellungen durch drei Drehwinkel (S. 83).
- Eine andere übliche Orientierungsdarstellungen durch drei Drehwinkel sind die Roll-Nick-Gier-Winkel (*Roll Pitch Yaw*) (S. 87).
- Die Drehvektor/Drehwinkel-Darstellung eignet sich für die kontinuierliche Orientierungsführung bei der Bahninterpolation (S.89).

- Quaternionen sind eine weitere Möglichkeit Orientierungen darzustellen und werden in ROS dazu eingesetzt (S.91).

- Homogene Transformationsmatritzen fassen Rotation ${}^{0}\boldsymbol{R}_1$ und Translation ${}^{0}\boldsymbol{d}_1$ in einer Matrix zusammen

$$ {}^{0}\boldsymbol{T}_1 = \begin{pmatrix} {}^{0}\boldsymbol{R}_1 & {}^{0}\boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} $$

(S.94).

Lernziele

- Sie können den Unterschied zwischen Freiheitsgrad im Konfigurationsraum und Freiheitsgrad im Arbeitsraum (Operationstraum) erläutern.
- Sie können die Begriffe Vorwärtstransformation und Rückwärtstransformation erläutern.
- Sie kennen Beispiele für redundante Kinematiken.
- Sie kennen die Bedeutung von Ortsvektoren (Positionsvektoren) und Rotationsmatritzen (Orientierungsmatritzen).
- Sie kennen die Eigenschaften von Rotationsmatritzen.
- Sie können Rotationsmatritzen für vorgegebene Rotationen aufstellen.
- Sie können Orientierungen durch Hintereinanderschaltung von Basisrotationen ausdrücken.

- Sie kennen Eulersche-Winkel und Roll-Nick-Gier-Winkel und können daraus Rotationsmatritzen aufstellen.
- Sie können aus Rotationsmatritzen Roll-Nick-Gier-Winkel und Eulersche-Winkel berechnen.
- Sie kennen die Darstellung in homogenen Koordinaten und können mit diesen rechnen.