

5/10/2023. Раскраски.

1. На каждой клетке доски размером 9×9 сидит жук. По свистку каждый из жуков переползает в одну из соседних по диагонали клеток. При этом, в некоторых клетках может оказаться больше одного жука, а некоторые клетки окажутся незанятыми. Докажите, что при этом незанятых клеток будет не меньше 9.
3. В левый нижний угол шахматной доски 8×8 поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может прыгать на свободное поле через рядом стоящую фишку, то есть симметрично отражаться относительно её центра (прыгать можно по вертикали, горизонтали и диагонали). Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки вновь в форме квадрата 3×3 , но в другом углу: а) левом верхнем, б) правом верхнем?
4. Из листа клетчатой бумаги размером 29×29 клеточек вырезали 99 квадратиков 2×2 (режут по линиям). Доказать, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик.
5. В квадрате 7×7 клеток размещено 16 плиток размером 1×3 и одна плитка 1×1 . Докажите, что плитка 1×1 либо лежит в центре, либо примыкает к границам квадрата.
6. Дно прямоугольной коробки выложено плитками размером 2×2 и 1×4 . Плитки высыпали из коробки и потеряли одну плитку 2×2 . Вместо нее достали плитку 1×4 . Докажите, что выложить дно коробки плитками теперь не удастся.
7. Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.
8. Можно ли из 13 кирпичей $1 \times 1 \times 2$ сложить куб $3 \times 3 \times 3$ с дыркой $1 \times 1 \times 1$ в центре?
9. В центре куба $3 \times 3 \times 3$ сидит жук. Доказать, что он, переползая через ребра, не сможет обойти все кубики $1 \times 1 \times 1$ по одному разу.
10. В пифагоровой таблице умножения выделили прямоугольную рамку толщиной в одну клетку, причём каждая сторона рамки состоит из нечётного числа клеток. Клетки рамки поочередно раскрасили в два цвета – чёрный и белый. Докажите, что сумма чисел в чёрных клетках равна сумме чисел в белых клетках. Пифагорова таблица умножения – это клетчатая таблица, в которой на пересечении m -й строки и n -го столбца стоит число mn (для любых натуральных m и n).
11. "Крокодил" называется фигура, ход которой заключается в прыжке на клетку, в которую можно попасть сдвигом на одну клетку по вертикали или горизонтали, а затем на N клеток в перпендикулярном направлении (при $N = 2$ "крокодил" – это шахматный конь). При каких N "крокодил" может пройти с каждой клетки бесконечной шахматной доски на любую другую?