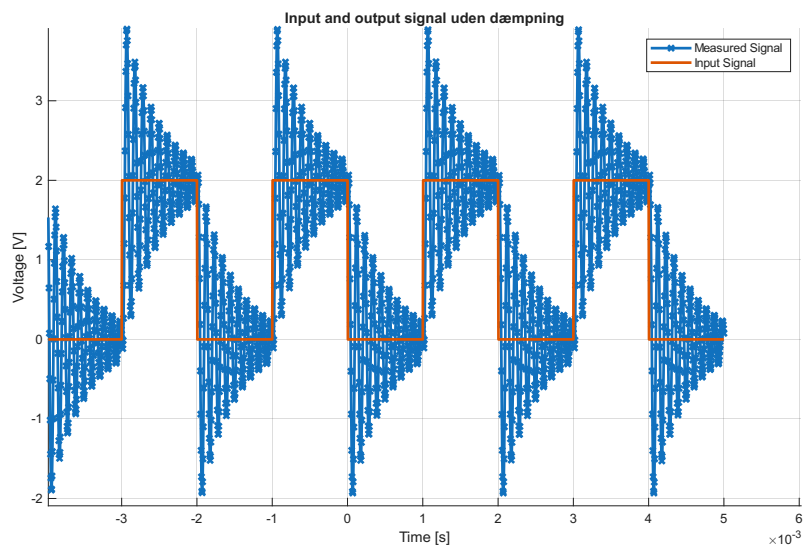


Oscillerende svingninger

Første Semester Projekt



Figur 1: Plot af målt data fra en fri underdæmpet svingning og input signal fra det elektriske forsøg med tæt på ingen modstand. Viser at det elektriske forsøg har en indre modstand, hvilket gør at svingningen langsomt dør ud.

Written by

Mia-Maja Blom	–	miblo25@student.sdu.dk
Christian Pedersen	–	chped125@student.sdu.dk
Victoria Guldberg	–	viped25@student.sdu.dk
Lauge Mathiesen	–	lamat05@student.sdu.dk

Undervejs i Projektforløbet har Lauge fået merit. Derfor har han deltaget i forsøgsdelen af projektet, men ikke i rapportskrivnings-processen.

Indhold

0.1	Synopsis	2
0.2	Indledning	2
0.3	Teori	3
0.3.1	2. ordens differentialligninger	3
0.3.2	Homogen differentialligning	3
0.3.3	Inhomogen differentialligning	8
0.3.4	Differentialligning til det elektriske forsøg	11
0.3.5	Differentialligning til det mekaniske forsøg	12
0.3.6	Svingning systemer	14
0.4	Elektrisk forsøg	15
0.4.1	Opsætning	15
0.4.2	Fremgangsmåde	16
0.5	Mekanisk forsøg	22
0.5.1	Opsætning	22
0.5.2	Eksperimentelle Svingninger	23
0.6	Resultater	28
0.6.1	Fejlkilder	28
0.6.2	Sammenligning af resultater	28
0.7	Perspektivering	29
0.8	Konklusion	29

0.1 Synopsis

Dette projekt undersøger, hvordan svingninger i et elektrisk RCL-kredsløb og et mekanisk torsionspendul kan beskrives med de samme matematiske principper, herunder anden ordens differential ligninger. Formålet er at undersøge og illustrere sammenhængen mellem elektriske og mekaniske svingninger igennem 'eksperimental modellering of analyse'. Dette gøres ved at vise, hvordan to forskellige systemer, et RCL-kredsløb og et torsionspendul kan beskrives af samme matematik. Projektet analyserer frie og drevne svingninger under underdæmpede, overdæmpede og kritisk dæmpede forhold.

Fremgangsmåden har bestået af at opstille teoretiske modeller, udføre eksperimenter, analysere resultaterne for at validere sammenhængen mellem teori og praksis, for til sidst at undersøge sammenhængen mellem de to systemer.

Resultaterne bekræfter at de to systemer følger de samme matematiske love, hvilket viser, hvordan teorien om dæmpede svingninger kan bruges til at forudsige og analysere denne slags systemers respons. Projektet perspektiverer resultaterne til praktiske anvendelser inden for både elektronisk og mekanisk ingeniør videnskab. Til sidst konkluderes der at den matematiske model, som kan bruges universelt til at beskrive og forstå tekniske systemer.

0.2 Indledning

Svingninger udgør en fundamental type dynamik, som forekommer i fysiske systemer, uanset hvor forskellige disse er. Systemerne kan beskrives matematisk ved hjælp af andenordens differentialligninger.

Projektet undersøger svingninger i hhv. en elektrisk og mekanisk opstilling for at vise, hvordan to forskellige systemer følger de samme matematiske principper.

Den elektriske opstilling tager udgangspunkt i en Digilent og tre komponenter - resistor, inductor og capacitor, hvor vi matcher komponentværdierne til underdæmpet, overdæmpet og kritisk dæmpet, for både drevne og frie svingninger.

Den mekaniske opstilling tager udgangspunkt i et torsionspendul med en mekanisk svingarm. Her vil vi justere værdier, som giver os de førnævnte svingninger.

0.3 Teori

0.3.1 2. ordens differentiaalligninger

Svingninger som dem i elektrisk kredsløb og et torsionspendul kan beskrives ved en anden ordens differentiaalligning på formen: [1]

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = f(t) \quad (1)$$

Hvor $y(t)$ er systemets ukendte funktion imens $f(t)$ er en kendt funktion, samt er a , b og c reelle koefficienter.

0.3.2 Homogen differentiaalligning

Hvis $f(x) = 0$ vil ligningen være homogen, som skrives således

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0$$

Hvor a , b og c er reelle konstanter og $a \neq 0$. Med udgangspunkt i homogene ligninger kan ligningen også skrives på den algebraiske form / hjælpeligningen:

$$ar^2 + br + c = 0$$

Hvor r er den ubekendte variabel. Ligningens rødder er givet ved den kvadratiske løsningsformel:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Hvor D er diskriminanten, som er givet ved

$$D = b^2 - 4ac$$

Diskriminanten afgør både formen og antallet af rødder. Dette påvirker, hvilken af de tre mulige udfald, der skal bruges til at løse en 2. ordens differentiaalligning:

Udfald I:

Hvis $D > 0$ har hjælpeligningen to forskellige reelle rødder, r_1 og r_2 , som er givet ved

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, r_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

Ved dette tilfælde er løsningsstrukturen lig med

$$y_h(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Udfald II

Hvis $D = 0$ har hjælpelinjen en dobbeltrod, altså $r_1 = r_2$, som er givet ved

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$$

Ved dette tilfælde er løsningsstrukturen lig med

$$y_h(t) = Ae^{rt} + Bxe^{rt}$$

Udfald III

Hvis $D < 0$ så har hjælpe ligningen to komplekse konjugerede rødder, der består af en reel del og en imaginære del:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow k \pm i\omega_m \Rightarrow \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad (2)$$

Hvor $|k| = \beta$ bliver løsningens dæmpningsfaktor. Minustegnet sættes udenfor variabelen, så det er tydeligt at denne faktor er negativ, da potensen skal være aftagende. ω_m er den målte vinkelfrekvens - faseændringen systemet oplever i øjeblikket; altså, hvor dæmpning medregnes, men der ses bort fra den ydre drivkraft. Så bliver løsningen:

$$y_h(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_m t) + Be^{-\beta t} \sin(\omega_m t)$$

Udfald 3 er den eneste der giver en ligning med trigonometriske funktioner og dermed den eneste løsning, der giver de svingninger vi skal bruge i projektet. Ligningen kan simplificeres ved at definere en konstant C , som vil svare til hypotenusen på en trekant bestående af konstanterne A og B . Denne kan ganges på udenfor parenteser og divideres indenfor parenteser.

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (3)$$

$$y_h(t) = Ce^{-\beta t} \left[\frac{A}{C} \cos(\omega_m t) + \frac{B}{C} \sin(\omega_m t) \right] \quad (4)$$

Nu svarer A, B, C til forholdne i en trekant, hvilket kan definere en ny konstant φ som er faseforskydningen, der forskyder kurven.

$$\frac{A}{C} = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}} = \sin(\varphi)$$

$$\frac{B}{C} = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}} = \cos(\varphi)$$

Dette kan nu indsættes i ligning 4.

$$y_h(t) = Ce^{-\beta t}[\sin(\varphi) \cos(\omega_m t) + \cos(\varphi) \sin(\omega_m t)] \quad (5)$$

Med en trigonometrisk identitet - en af additionsformlerne - kan det nye udtryk omskrives til en enkelt sinus funktion. Dette gør det tydeligt at C er amplituden af svingningen, som vi nu kalder y_0 . [9]

$$\sin(\omega_m t + \varphi) = \sin(\omega_m t) \cos(\varphi) + \cos(\omega_m t) \sin(\varphi) \quad (6)$$

$$y_h(t) = y_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_m t + \varphi) \quad (7)$$

Her bliver C og φ til fitte-parametre, fordi på trods af at det siger noget om systemet, så er det begyndelseskriterierne, som blot forskyder kurven en smule, imens selve svingningens karakteristika forbliver det samme.

For at den originale andenordens ligning (ligning 1) skal reflektere disse variabler, så kan man omskrive differentiaalligningen ved at dividere med koefficienten a . Så bliver andet led til 2β og tredje led til ω_0^2 , hvilket er den naturlige vinkelfrekvens, som er faseændringen systemet vil opleve uden nogen dæmpning eller drivkraft - dette vil vise sig at være tæt relateret til den målte vinkelfrekvens.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (8)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{a} \frac{dy}{dt} + \frac{c}{a} y = \frac{0}{a}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\beta \frac{dy}{dt} - \omega_0^2 y = 0$$

Dette ændre så variablerne i ligning 1, hvis rødder vi fandt udfald 3 ved ligning 2, hvilket omskriver k til følgende:

$$k = \frac{-2\beta}{2} = \frac{-b}{2a} = -\beta \quad (9)$$

Og den målte vinkelfrekvens kan nu skrives i sammenhæng til den naturlige vinkelfrekvens og dæmpningsfaktoren:

$$\omega_m = \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - 4\beta^2}}{2}$$

$$\omega_m^2 = \left(\frac{\sqrt{4\omega_0^2 - 4\beta^2}}{2} \right)^2 = \frac{4\omega_0^2 - 4\beta^2}{4} = \omega_0^2 - \beta^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \quad (10)$$

Den målte vinkelfrekvens kan ydermere uddybes som 2π større end egenfrekvensen f_0 , hvilket er systemets antal af svingninger, der sker pr sekund. Dette beskrives ud fra systemets periode, altså tiden det tager systemet at lave én svingning (for skyde med 2π).

$$f_0 = \frac{1}{T} \quad (11)$$

$$\omega_m = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0 \quad (12)$$

Dæmpningsforholdet

Dæmpningsforholdet kommer af de 3 løsningsudfald på en anden ordens homogen differentialligning.

Hvis man tager udgangspunkt i udfald 2 ($D = 0$), som matematisk resulterer i den hurtigste faldne funktion, giver det en kritisk dæmpet svingning, som betyder at systemet vender tilbage til ligevægt hurtigst muligt, uden at svinge.

$$0 = D$$

$$0 = b^2 - 4ac$$

$$\begin{aligned}
 0 &= b - 2\sqrt{ac} \\
 0 &= \frac{b}{2\sqrt{ac}} - 1 \\
 1 &= \frac{b}{2\sqrt{ac}} = \zeta = \frac{b}{b_c} = \frac{\beta}{\omega_0}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Dette definere nu ζ , som er dæmpningsforholdet. Når $\zeta = 1$ så er systemet kritisk dæmpet. Det er forholdet mellem den faktiske dæmpning b og den kritiske dæmpning b_c : [2]

Ud fra dette udgangspunkt kan man også beskrive den kritiske dæmpning i størrelsesforhold til den faktiske dæmpning b samt i dæmpningsfaktoren β og den naturlige vinkelfrekvens ω_0

$$\begin{aligned}
 b &= 2\sqrt{ac} \\
 b^2 &= ac \\
 \frac{b^2}{a^2} &= \frac{4c}{a} \\
 \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{c}{a} \\
 \beta^2 &= \omega_0^2
 \end{aligned}$$

Det samme kan udledes for over- og underdæmpet ligninger.

Kriterie				Betydning
$\zeta > 1$	$D > 0$	$b > 2\sqrt{ac}$	$\beta^2 > \omega_0^2$	Overdæmpet; systemet vender <u>langsomt</u> tilbage til ligevægt uden at svinge
$\zeta = 1$	$D = 0$	$b = 2\sqrt{ac}$	$\beta^2 = \omega_0^2$	Kritisk dæmpet; systemet vender tilbage til ligevægt <u>hurtigst</u> muligt uden at svinge.
$1 > \zeta > 0$	$0 > D$	$2\sqrt{ac} > b$	$\omega_0^2 > \beta^2$	Underdæmpet; systemet <u>svinger</u> med aftagende amplitude
$\zeta = 0$		$0 = b = \beta$		Ingen dæmpning

Figur 2: Under-, over- og kritisk dæmpede svingningers kriterier og definitioner. ζ er dæmpningsforholdet, D er determinanten til anden ordens differentilligningen, a, b, c er dens koefficienter, imens β er dens dæmpningsfaktor og ω_0 er dens naturlige frekvens.

0.3.3 Inhomogen differentialligning

En ikke homogen ligning $f(t) \neq 0$ løses ved summen af den homogene løsning $y_h(t)$ og den partikulære løsning $y_p(t)$, hvilket giver den generelle løsning $y(t)$. Den generelle løsning svarer så til det led i formlen, som beskriver systemets naturlige svingning (altså en fri svingning), i form af den homogene løsning. Og så et led der beskriver den ydre påvirkning vi påføre systemet, som så skaber den drevne del af svingningen - dette er den partikulære løsning til differentialligningen.

Det første man gør, når man har en inhomogen ligning er altså at sætte $f(t) = 0$, og så løse ligningen som var det en homogen ligning.

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

For at finde den partikulære løsning bruger man 'gættemetoden'. Her gætter man på en løsningsform til den partikulære løsning ud fra $f(t)$. Vi ved i projektet at den ydre påvirkning, vi giver, er en cosinus eller sinus funktion. Disse vil resultere i det samme gæt. A er vores ydre påvirknings amplitude, B og C er koefficienter og ω_y er vinkelfrekvensen af den ydre påvirkning, imens t er tid.

$$f(x) = A \cos(\omega_y t) \Rightarrow y_p(t) = B \cos(\omega_y t) + C \sin(\omega_y t)$$

Ved at differencere $y_p(t)$, kan den nu sættes ind i den originale differentialligning (ligning 1), som vi kan dividere med koefficienten a , som gør det muligt at beskrive ligningen med dæmpningsforholdet og den naturlige vinkelfrekvens. Dette tjekker om gættet er rigtigt, og hvis det er, så bestemme dens partikulære løsnings variabler.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_p(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dy_p(t)}{dt} + \omega_0^2 y_p(t) &= \frac{f(x)}{a} = \frac{A}{a} \cos(\omega_y t) = \tau_{y0} \cos(\omega_y t) \\ \frac{d^2 y_p(t)}{dt^2} &= -\omega_y B \sin(\omega_y t) + \omega_y C \cos(\omega_y t) \\ \frac{dy_p(t)}{dt} &= -\omega_y^2 B \cos(\omega_y t) - \omega_y^2 C \sin(\omega_y t) \\ [-\omega_y^2 B \cos(\omega_y t) - \omega_y^2 C \sin(\omega_y t)] + 2\beta [-\omega_y B \sin(\omega_y t) + \omega_y C \cos(\omega_y t)] \\ &+ \omega_0^2 y [B \cos(\omega_y t) + C \sin(\omega_y t)] = \tau_{y0} \cos(\omega_y t) \end{aligned}$$

Cosinus og sinus er lineært uafhængige hvilket vil sige vi kan skille ligningen i 2. Alle cosinus led til venstre skal give cosinus leddet på højre side og tilsvarende for sinus. Men eftersom der ingen sinus led er til højre, så må koefficienten foran sinusfunktionen derfor give 0. Vi start med at isolere B i sinus ligningen.

$$\begin{aligned}
(-\omega_y^2 C - 2\beta\omega_y B + \omega_0^2 C) \sin(\omega_y t) &= 0 \sin(\omega_y t) \\
-2\beta\omega_y B + (-\omega_y^2 + \omega_0^2) C &= 0 \\
(-\omega_y^2 + \omega_0^2) C &= 2\beta\omega_y B \\
\frac{(-\omega_y^2 + \omega_0^2) C}{2\beta\omega_y} &= B
\end{aligned}$$

Så gør vi det samme med cosinus-ledet og så indsætter vi den udledte ligning for B , og isolerer C ,

$$(-\omega_y^2 B + 2\beta\omega_y C + \omega_0^2 B) \cos(\omega_y t) = \tau_{y0} \cos(\omega_y t)$$

$$(-\omega_y^2 + \omega_0^2) B + 2\beta\omega_y C = \tau_{y0}$$

$$(-\omega_y^2 + \omega_0^2) \frac{(-\omega_y^2 + \omega_0^2) C}{2\beta\omega_y} + 2\beta\omega_y C = \tau_{y0}$$

$$C \left[\frac{(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^2}{2\beta\omega_y} + 2\beta\omega_y \right] = \tau_{y0}$$

$$C \left[\frac{(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^2}{2\beta\omega_y} + \frac{2\beta\omega_y \cdot 2\beta\omega_y}{2\beta\omega_y} \right] = \tau_{y0}$$

$$C \frac{(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega_y)^2}{2\beta\omega_y} = \tau_{y0}$$

$$C = \frac{\tau_{y0} \cdot 2\beta\omega_y}{(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega_y)^2}$$

Eftersom ligningerne gik op, så virkede den gættede form, som en partikulær løsning, og efter at have fundet B og C , kan de nu indsættes i løsningen.

$$y_p(t) = \frac{(-\omega_y^2 + \omega_0^2)C}{2\beta\omega_y} \cos(\omega_y t) + \frac{\tau_{y0} 2\beta\omega_y}{(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega_y)^2} \sin(\omega_y t)$$

Nu kan ligningen simplificeres på samme måde som der blev gjort fra ligning 4 til 5, hvor vi definerede de 2 koefficienter som kateter i en trekant med hypotenusen som en ny variabel. Men denne gang bytter vi dog om på hvilke koefficienter vi kalder den hosliggende- og den modstående katete, herved får vi det samme resultat

som for den homogene løsning (ligning 7), men med cosinus i stedet for sinus. Dette ændrer dog også den trigonometriske identitet vi bruger undervejs, men som nu stadig består af samme princip som ligning 6.

$$\cos(\omega_y t - \phi) = \cos(\omega_y t) \cos(\phi) + \sin(\omega_y t) \sin(\phi)$$

$$y(t) = y_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_m t + \varphi) + y_y \cos(\omega_y t - \phi) \quad (14)$$

Her er ϕ forsinkelsen der beskriver fasen fra den ydre påvirkning, som giver sit input og til systemet faktisk svinger efter det. y_y er amplituden på den ydre påvirkning, hvilket kunne beskrives ud fra de 2 koefficienter B og C som i ligning 3 med Pythagoras læresætning.

$$\begin{aligned} y_y^2 &= \left(\frac{(-\omega_y^2 + \omega_0^2)C}{2\beta\omega_y} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{y0}2\beta\omega_y}{(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega_y)^2} \right)^2 \\ y_y^2 &= \left(\frac{\tau_{y0}(-\omega_y^2 + \omega_0^2)}{(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega_y)^2} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{y0}2\beta\omega_y}{(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega_y)^2} \right)^2 \\ y_y^2 &= \frac{\tau_{y0}^2(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^2}{((-\omega_y^2 + \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega_y)^2)^2} + \frac{\tau_{y0}^2(2\beta\omega_y)^2}{((-\omega_y^2 + \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega_y)^2)^2} \\ y_y^2 &= \frac{\tau_{y0}^2(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^2 + \tau_{y0}^2(2\beta\omega_y)^2}{(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^4 + (2\beta\omega_y)^4} \\ y_y^2 &= \frac{\tau_{y0}^2(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^2 + \tau_{y0}^2(2\beta\omega_y)^2}{(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^4 + (2\beta\omega_y)^4} \\ y_y^2 &= \frac{\tau_{y0}^2(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^2 + \tau_{y0}^2(2\beta\omega_y)^2}{(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^4 + (2\beta\omega_y)^4} \\ y_y^2 &= \frac{\tau_{y0}^2 [(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega_y)^2]}{(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^4 + (2\beta\omega_y)^4} \\ y_y^2 &= \frac{\tau_{y0}^2}{(-\omega_y^2 + \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega_y)^2} \end{aligned} \quad (15)$$

0.3.4 Differentialligning til det elektriske forsøg

For at beskrive ligningen i RLC kredsløbet, tages der udgangspunkt i Kirchhoffs spændingslov,[3]. Hvor resistoren, induktoren og capaciteten laver et loop i deres serieforbindelse, hvor spændingen skal give 0 ved frie svingninger, men være lig med den ydre spænding ved drevne svingninger.

$$v_L + v_R + v_C = v_y$$

Hver variabel kan beskrives som følgende:

1. Strøm i er ladning q over tid.
2. Ladningen opbevaret i capaciteten q_C , kapacitans C , altså den mængde energi der kan opbevares, og spændingen over capaciteten v_C .
3. Ud fra Ohms lov genkender vi spændingsfaldet over resistoren v_R , modstanden i resistoren R , og strømstyrken igennem resistoren i_R .
4. Spændingen over induktoren v_L , induktans L , altså evnen til at lagre energi i et magnetfelt og modvirke strømændring, hastigheden af strøm ændringen forårsaget af spolen i' .

$$i = q'$$

$$q_C = C v_C \implies v_C = \frac{q_C}{C} \tag{16}$$

$$v_R = R i_R = R \frac{dq_R}{dt}$$

$$v_L = L i'_L = L \frac{d^2 q}{dt^2}$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = v_y$$

Nu ligner den elektriske-ligning den originale differentialligning (ligning 1). Forskellen ligger i at $a = L, b = R, c = \frac{1}{C}$. Derfor referer vi blot til løsningerne udledt tidligere for løsninger til det elektriske kredsløb [3]. Den fuldstændige løsning bliver

så:

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_m t + \varphi) + y_y \cos(\omega_y t - \phi) \quad (17)$$

Men det kan være praktisk, når vi måler over kondensatoren, at måle spænding og ikke ladning. Ved at dividere løsningen med kapaciteten C kan kondensatorens ladning omskrives til dens spænding.

$$v(t) = v_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_m t + \varphi) + y_y \cos(\omega_y t - \phi) \quad (18)$$

0.3.5 Differentialligning til det mekaniske forsøg

Torsionspendulet påvirkes af 3 momenter: dæmpningsmomentet som er den indre restriktion i drejhjulet, fjeder-momentet som er den genoprettende kraft, som fjedrene giver systemet, og for drevne svingninger er der et ydre-moment, hvilket i dette system er en motor, der driver systemet ud over det naturlige. De kan beskrives således:

$$\tau_{dmp} + \tau_{fjeder} + \tau_{ydre} = \tau_{res}$$

For at finde fjeder-momentet tager vi udgangspunkt i Hookes lov, da dette beskriver den translatoriske kraft F_{fjeder} , som en fjeder, med fjederkonstanten k , giver med en forskydning x [8]. Rationelt vil fjederen, forbundet med en snor til overfladen på momentarmen, gøre at x svare til buelængden på momentarmen. Derfor kan x omskrives i forhold til radiussen på momentarmen r og dens forskudte vinkel θ .

$$F_{fjeder} = kx$$

$$x = r\theta$$

Da fjederen forskyder drejeskiven med $\frac{\pi}{2}$ kan sinusfunktionen udledes fra drejemoment ligningen, og fjeder-momentet beskrives i forhold til vinkelforskydning θ og stivhedskonstanten κ

$$\tau = rF \sin(\phi) = rF_{\pi/2} \quad (19)$$

$$\tau_{fjeder} = rF_{fjeder} = r(kr\theta) = \kappa\theta$$

Dæmpningsmomentet, kommer af transitional bevægelse ved meget lav hastighed, defineres som at dæmpningen er proportional med hastigheden, hvilket antages at være det samme for rotation [5].

$$\tau_{damp} = b\theta'(t) \quad (20)$$

Den ydre påvirkning er en cosinus funktion, og det resulterende drejemoment defineres af Newtons anden lov.

$$\tau_{ydre} = A \cos(\omega_y t)$$

$$\tau_{res} = I\theta''(t)$$

Ved nu at rykke rundt på leddene, har vi en ligning, på formen som den originale differentiaalligning (ligning 1). Det gør at vi kan finde de aktuelle løsninger ved at bytte rundt på konstanter.

$$b\theta'(t) + \kappa\theta(t) + A \cos(\omega_y t) = I\theta''(t)$$

$$I\theta''(t) + b\theta'(t) + \kappa\theta(t) = A \cos(\omega_y t)$$

Variabler der gentages i begge forsøg

Ligning	Variabel/princip	Elektrisk	Mekanisk
8	Naturlig vinkelfrekvens	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$
9	Dæmpningsfaktor	$\alpha = \frac{R}{2L}$	$\beta = \frac{b}{2I}$
10	Målte vinkelfrekvens	$\omega_m^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$	$\omega_m^2 = \omega_0^2 - \beta^2$
13	Dæmpningsforhold	$\zeta = \frac{R}{2\sqrt{L/C}} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\alpha}{\omega_0}$	$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{I\kappa}} = \frac{\beta}{\omega_0}$
Figur 2	Overdæmpet	$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$	$b > 2\sqrt{I\kappa}$
	Kritisk dæmpet	$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$	$b = 2\sqrt{I\kappa}$
	Underdæmpet	$2\sqrt{\frac{L}{C}} > R$	$2\sqrt{I\kappa} > b$

Figur 3: Ved at udskifte variablerne og konstanterne i de specifikke formler udledt for elektronik og mekanik, med de formler udledt for et generelt andenordens differentialligning, så kan man få elektriske/mekaniske specifikke formler.

Type	Fri svingning Ligning 7	Drevet svingning Ligning 14
Elektrisk	$v(t) = v_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_m t + \varphi)$	$v(t) = v_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_m t + \varphi) + q_y \cos(\omega_y t - \phi)$
Mekanisk	$\theta(t) = \theta_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_m t + \varphi)$	$\theta(t) = \theta_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_m t + \varphi) + \theta_y \cos(\omega_y t - \phi)$

Figur 4: Ved at udskifte variablerne og konstanterne i de specifikke formler udledt for elektronik og mekanik, med de formler udledt for et generelt andenordens differentialligning, så kan man få elektriske/mekaniske specifikke løsninger til fri- og drevet svingning.

0.3.6 Svingning systemer

Svingninger udgør en fundamental type dynamik, som forekommer i både elektriske og mekaniske systemer, på trods af deres forskellige fysiske egenskaber. Disse systemer er dem, vi har beskrevet matematisk med andenordens differentieringer.

Frie og drevne svingninger

Svingninger kan overordnet deles op i to typer:

Frie svingninger opstår når systemet bringes ud af ligevægt og herefter overlades til sig selv. Ideelt betyder dette at systemet så svinger med dens naturlige vinkelfrekvens fra ligning 8, men dette er ikke helt tilfældet da systemet har en lav indre modstand. Derfor svinger systemet, i praksis, med en anden vinkelfrekvens, som vi kalder den målte vinkelfrekvens ω_m , hvilket i ligning 10 $\omega_m^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ knyttes til den naturlige vinkelfrekvens og den lille dæmpningsfaktor fra ligning 9. I et helt ideelt system er dæmpningsfaktoren 0 og den naturlige vinkelfrekvens er derfor lig med den målte vinkelfrekvens, hvilket gør at systemet aldrig dør ud. I virkeligheden dør svingningen langsomt. Frie svingninger beskrives af homogene andenordens differentialligninger

Drevne svingninger opstår når systemet påvirkes af en periodisk ydre påvirkning. Dette kan beskrives med inhomogene andenordens differentialligninger. Det er altså leddet $f(t)$, beskrevet af den ydre påvirkning, som gør forskellen mellem en fri og drevet svingning. Systemet vil i starten svinge med dens naturlige svingning, beskrevet i dens homogene ligning, men denne svingning vil dø ud. Den eksterne påvirkning vil modsat blive ved og derfor vil den også fortsætte efter den naturlige del af svingningen er døet ud. Det vil sige at systemets svingning starter med at være en kombination af begge svingninger, men til sidst vil det kun være den drevne del, der påvirker svingningen. Hvis den drevne påvirkning nærmer sig systemets naturlige frekvens, vil der opstå resonans, som fører til store amplitude-udslag. Men som dæmpningen øges, så bliver resonansfrekvensen lavere, hvilket kan ses i ligning 10, gengivet i afsnittet over, hvor når β vokser, så mindskes den målte vinkelfrekvens, hvilket med ligning 12 er proportional med egenfrekvensen gennem 2π [4].

0.4 Elektrisk forsøg

0.4.1 Opsætning

Det elektriske forsøg består af et RCL kredsløb i serieforbindelse koblet til en Digilent Analog Discovery 2, som kan give strøm til kredsløbet og måle data derfra. Med AC-strøm fyldes kapacitoren med ladninger q , hvilket øger dens spænding indtil den er fuld, hvor den øgede spænding gør at strømmen gerne vil søge mod lavere potentiale, og derfor aflader kapacitoren - dette sker i retning af induktoren, der netop er nået i ligevægt ($i = 0$), og derfor kan tage imod strøm i igennem den.

Capacitorens afladning vil have strømmen til at accelerere, men induktion er imod hastighedsændring i strøm, og den laver derfor induktans, som opbevarer strømmens energi i sit magnetfelt, så strømmen ikke accelerere lige så hurtigt. Når capacitoren er i ligevægt $v = 0$, kommer der ikke længere strøm imod den fulde induktor, hvilket nu vil sænke den nye strøm som er maksimal, og derfor kollapse magnetfeltet og aflader induktoren for, forgæves, at forhindre at strømmen mindskes. Capacitoren uden spænding bliver nu genopladet. Denne vekslen imellem komponenternes strøm og spænding er systemets svingning, som med indre modstand og eventuel resistor aftager over tid.

Med udgangspunkt i figur 2, der er en tabel over kriterier for dæmpningsforhold, så er komponenterne valgt til de 3 overordnede scenarier.

Komponent	Underdæmpet	~Kritisk dæmpet	Overdæmpet
Capacitor [C]	6,9 nF		
Indoktor [L]	47 mH		
Resistor [R]	1 k Ω	5,1 k Ω	5,6 k Ω

Figur 5: De valgte værdier til hhv. underdæmpet, overdæmpet og tilnærmelsesvis kritisk dæmpet svingninger i det elektriske forsøg.

0.4.2 Fremgangsmåde

Vi startede med at tjekke at vi kunne modtage data fra opstillingen. Derefter begyndte vi beregningerne for komponentværdierne, som ville give os under, over og kritisk dæmpet svingninger. Disse værdier er beskrevet i ovenstående afsnit.

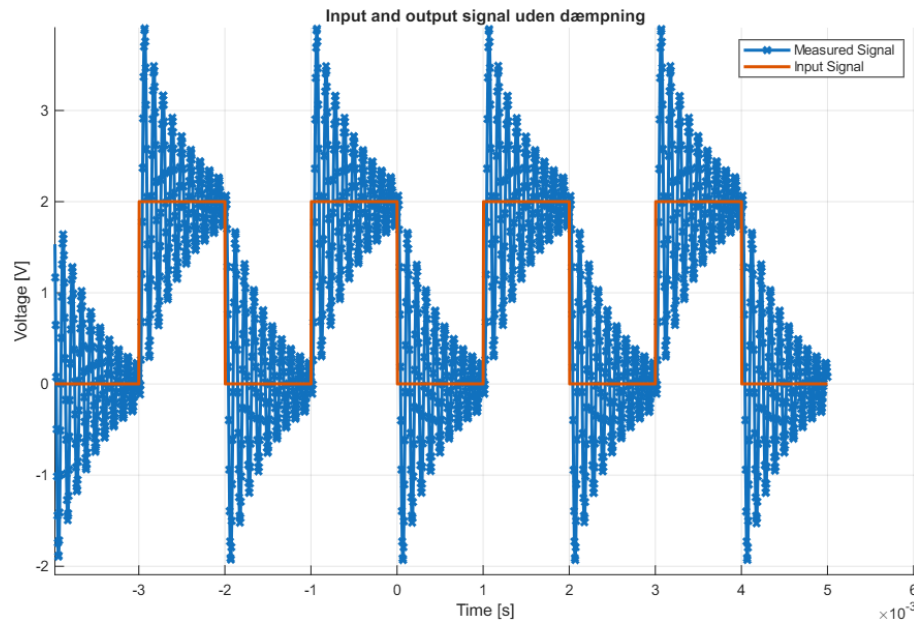


Figur 6: Opstilling af det elektriske forsøg med capacitor, inductor og resistor.

Vi tog udgangspunkt i vejledningen til Matlab scriptet for at skrive vores eget. Udover materialet i vejledningen har vi lavet nogle tilføjelser, som fx fitting til cosinus funktion, automatisk 'save' af grafer og automatisk beregning af ω_0 og f_0 . Et par uger inde i projektperioden fandt vi ud af at den midterste del af opstillingen - Digilent Discover BNC - ikke burde inkluderes i forsøget.

Dermed skulle vi recalibrere vores matlab script, som vi havde tilpasset den støj, som midter stykket gav os.

Vi startede med at lave en fri svingning uden dæmpning. Herudfra viste vi at svingningen reagerede på firkant-inputsignalet og at RCL-kredsløb har en indre modstand.



Figur 7: Forløbet for en fri svingning uden dæmpning. Den orange kurve viser en fir-kantbølge fra inputsignalet og den blå viser output signalet fra RCL-kredsløbet uden dæmpning. Svingningen dæmpes udelukkende af den indre modstand i kredsløbet.

Efter denne måling gik vi igang med at lave de underdæmpede, overdæmpede og kritisk dæmpede svingninger.

Underdæmpet: For at kunne lave den underdæmpede svingning, så satte vi vores $1k\Omega$ resistor til vores kredsløb. Ved at gøre dette fik vi en lang bølge, med minimal dæmpning.

Derudover med ligning 9 igennem 3 kan vi nu beregne dæmpningskonstanten.

$$\alpha_{under} = \frac{R}{2L} = \frac{1k\Omega}{2 \cdot 47mH} = \frac{1000\Omega}{2 \cdot 47 \cdot 10^{-6}H} = 1063,8s^{-1}$$

Kritisk dæmpet: For at kunne lave den kritisk dæmpede svingning, så satte vi vores $5,1k\Omega$ resistor til vores kredsløb. Ved at gøre dette fik vi en kort bølge, med meget dæmpning.

Igen kan vi nu beregne dæmpningsfaktoren, .

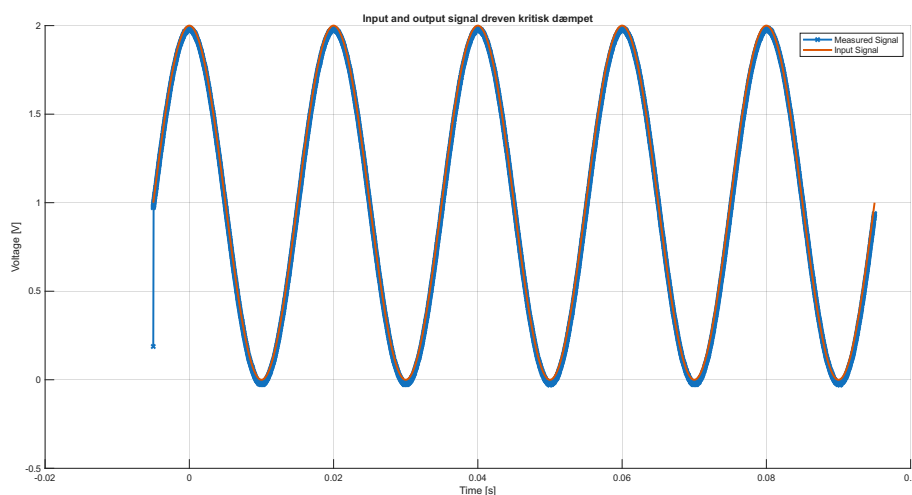
$$\alpha_{kritisk} = \frac{R}{2L} = \frac{5,1k\Omega}{2 \cdot 47mH} = \frac{5100\Omega}{2 \cdot 47 \cdot 10^{-6}H} = 54255,3s^{-1}$$

Overdæmpet: For at kunne lave den overdæmpede svingning, så satte vi vores $5.6k\Omega$ resistor til vores kredsløb. Ved at gøre dette fik vi ingen (måske én) svingning, hvilket fortæller os at kredsløbet oplever så meget modstand, at sinusbølgen dør ud,

inden den når én periode. Igen kan vi nu beregne dæmpningsfaktoren, .

$$\alpha_{over} = \frac{R}{2L} = \frac{5,6k\Omega}{2 \cdot 47mH} = \frac{5600\Omega}{2 \cdot 47 \cdot 10^{-6}H} = 59574,5s^{-1}$$

Herefter gik vi efter at få lavet de drevne svingninger. Derfor valgte vi at vores script skulle fitte til ligningen for en generel bølge. Herunder ses grafen for kritisk dæmpet svingning. Da de to andre grafer ligner denne, tillader vi os kun at inkludere denne ene.

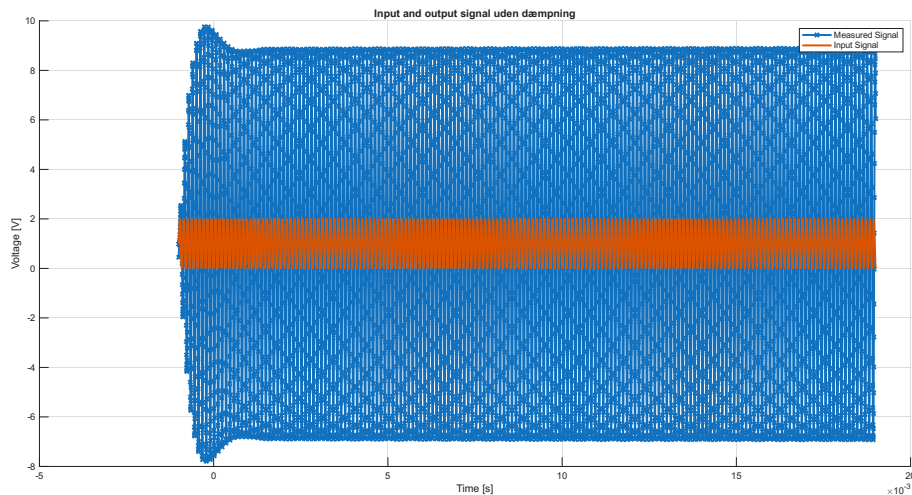


Figur 8: Tidsforløbet for et drevet svingningskredsløb med kritisk dæmpning. Den orange kurve viser inputsignalet imens den blå kurve viser outputsignalet. Som det kan ses på grafen følger en kritisk dæmpning outputsignalet inputsignalet tæt uden oscillationer.

Efter at have lavet disse forsøg ville vi gerne vise forsøgets resonansfrekvens, altså den frekvens, hvor svingningerne har den største amplitude. Dette giver i praksis bedre energiudveksling mellem induktor og capacitor, fordi der ikke sker unødvendig energitab under udvekslingen. Vi beregnede egenfrekvensen ud fra 12.

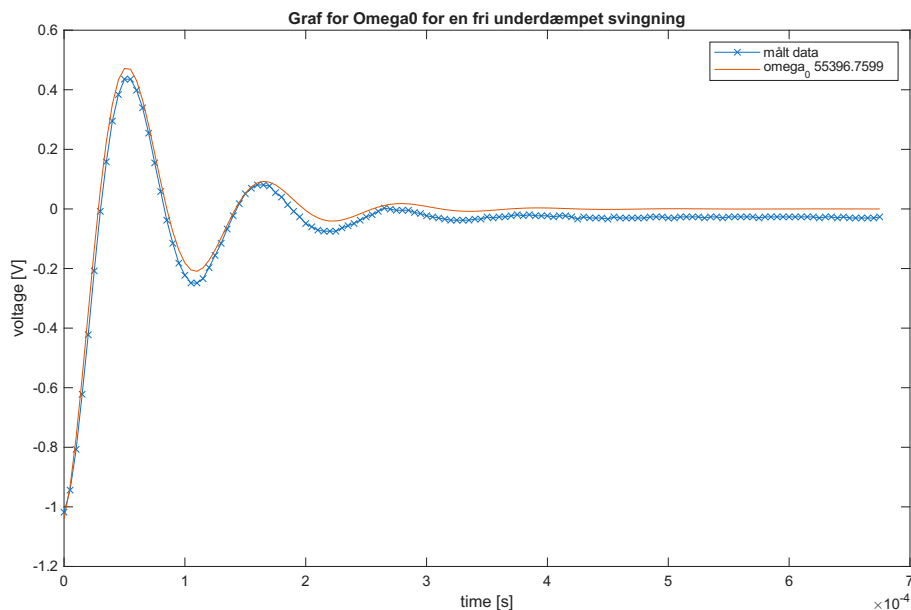
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \Rightarrow \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Denne frekvens fodrede vi til vores matlab script og fik en graf med udsving 3 gange større end inputsignalet.



Figur 9: Dreven svingning ingen dæmpning. Den orange kurve viser inputsignalet, imens den blå kurve viser output signalet fra RCL kredsløbet, som ligger længere fra inputsignalet end normalt.

Undervejs i forløbet har vi snakket omkring påvirkningen af den indre modstand i RCL-kredsløbet. Derfor var næste skridt i vores forsøg at vi gerne ville bestemme netop dette. Derfor lavede vi en regression med tid ud af x-aksen og spænding op af y-aksen. Vi fittede grafen til som ligning 14 og figur 3 og plottede de målte data fra kredsløbet.



Figur 10: Regression af en fri underdæmpet svingning med tid [s] ud af x akse og volt [V] op af y akse. Den orange kurve viser fittet til vinkelhastigheden ω_0 og den blå kurve viser de målte data fra RCL-kredsløb.

Herefter var vi interesseret i at beregne ω_0 , altså den naturlige vinkelfrekvens. Dette gjorde vi vha.

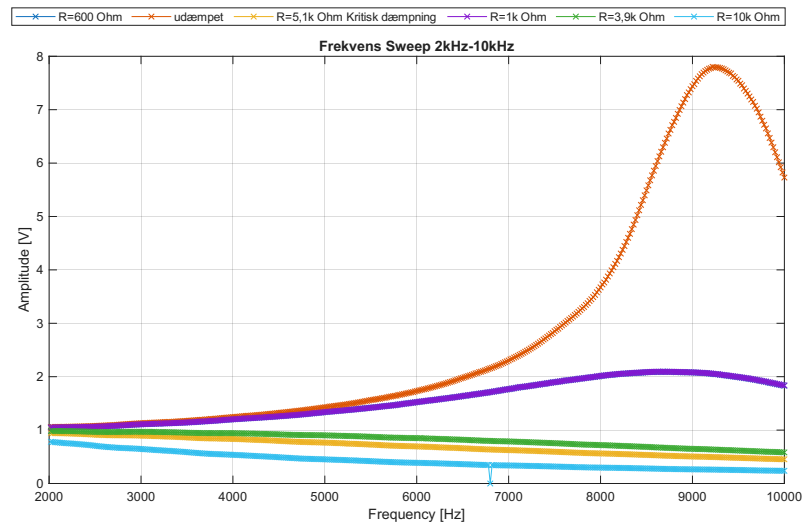
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Hvilket gav os en værdi på $5,5937 \cdot 10^4 = 55937 s^{-1}$, som er meget tæt på den ω_0 , som matlab har plottet efter, nemlig $55396,8 s^{-1}$.

For hver modstandsværdi blev dæmpningsforholdet ζ , og dæmpningskonstanten α beregnet: Disse resultater stemmer overens med teorien for et RCL-kredsløb.

Svingningstype	Resistor R	Dæmpningskonstant α	Dæmpningsforhold ζ
Underdæmpet	1 k Ω	10638	$\zeta < 1$
Kritisk dæmpet	5.1 k Ω	54255	$\zeta = 1$
Overdæmpet	5.6 k Ω	59574	$\zeta > 1$

Frekvens-sweep Som det sidste ville vi gerne undersøge, hvordan vores RCL-kredsløbs amplitude lå over forskellige frekvenser. Derfor lavede vi et sweep med frekvens ud af x-aksen og max. amplitude op af y-aksen.

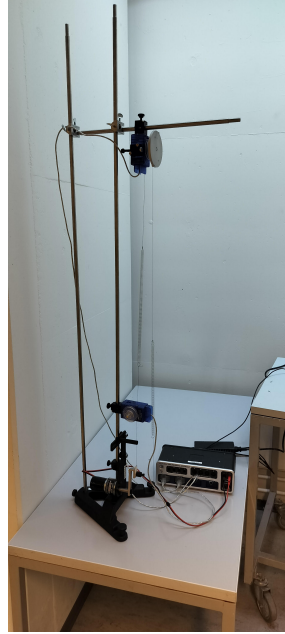


Figur 11: Frekvens-sweep med frekvens ud af x-aksen og spændingen/amplitude op af y-aksen. Grafen viser amplitude for svingninger, med forskellige resistore, med frekvens fra 2000 Hz til 10000 Hz. Funktionerne beskriver ændring i strøm over tid.

0.5 Mekanisk forsøg

0.5.1 Opsætning

Vores torsionspendul er bygget op med en drejeskive, med et inertimoment I og et indre dæmpningsmoment $\tau_{\text{dæmp}}$, som kan øges ved at justere afstanden til en magnet, der sidder bag drejeskiven. Bagved drejeskiven er der en lille aksel, som en snor er viklet omkring - bevægelsen af denne aksel giver rotation af drejeskiven og sender denne information til en rotationssensor, som kobles til programmet Pasco Capstone. I hver ende af snoren er der en fjeder med et drejningsmoment τ_{fjeder} , som kan oscillere drejeskiven. Den ene fjeder er bundet fast til et stationært objekt og den anden er viklet om en svingarm, som er koblet til en motor - denne aksels bevægelse sender information omkring motorens bevægelse til rotationssensoren.



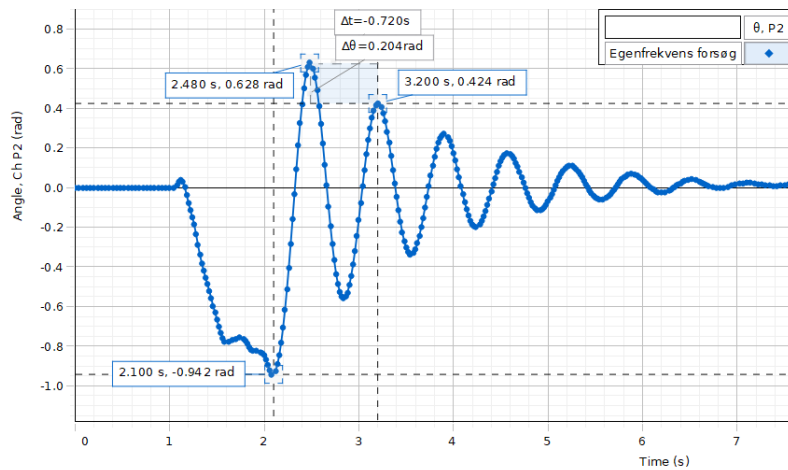
Figur 12: Opstilling af det Mekaniske forsøg

0.5.2 Eksperimentelle Svingninger

Fri Svingning

Ved en **fri svingning** forskydes drejeskiven manuelt, hvilket strækker den ene fjeder og sammenpresser den anden. Når drejeskiven slippes, vil begge fjedre henholdsvis hive og skubbe drejeskiven for at fjedrene kan komme tilbage til hvileposition, hvilket først sker efter en kort oscilleringsperiode.

Første forsøg skulle måle perioden, altså afstanden mellem toppe i svingningen. Dette gjorde at vi kunne beregne dens egenfrekvens og målte vinkelfrekvens med hjælp af ligning 11 og 12.



[Perioden af fri svingning ud fra vinkel som funktion af tid]

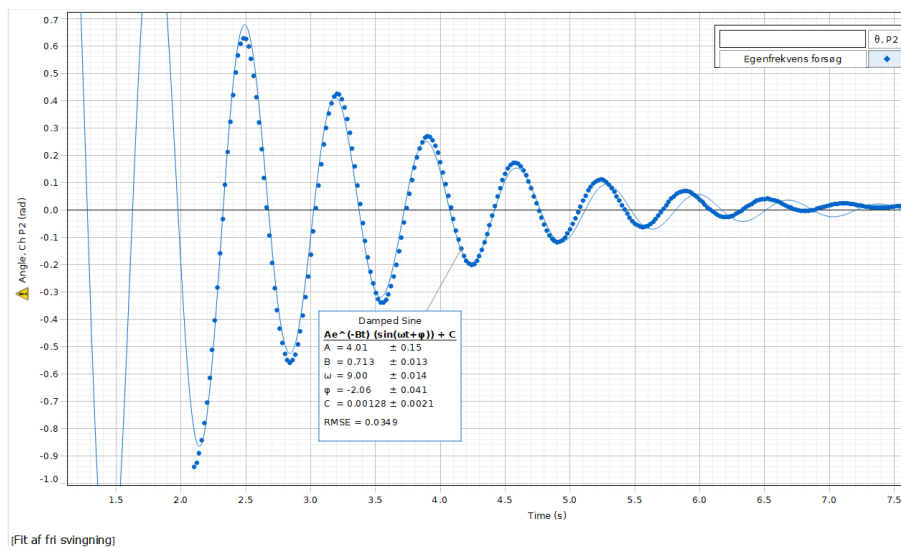
Figur 13: Drejhjulet forskudt med 0,942rad sat gang i en fri svingning som her illustreres ved at følge drejhulets vinkel over tid. Grafen har tid ud af x-aksen og vinkel op af y-aksen. Mellem 2 peaks beregnes perioden for svingningen som 0,720s.

Metode	Variabel	Værdi
Coordinates tool	Forskydning $\theta(0)$	0,942 rad
	Periode T	0,720 s
Ligning 11	Egenfrekvens f_0	1,388 Hz
Ligning 12	Målt vinkelfrekvensen ω_m	8,727 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
$\omega_{nf} = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$	Naturlige vinkelfrekvens [$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]	5,434

Figur 14: Fri svingning sættes i gang ved en manuel forskydning $\theta(0)$, hvilket kunne aflæses gav en periode T hvorfra egenfrekvens f_0 og en målt vinkelfrekvens ω_{mf} kunne beregnes.

I Capstone blev der også lavet en regression på svingningen, hvilket gav en funktion på formen fra ligning 14 med figur 3, som ligger tæt op ad de målte værdier. Dette viser at den teoretiske model virker i virkeligheden. Her udregnes dæmpningsfaktoren til 0,713, hvilket viser at systemet ikke er helt ideelt, da det har en lille indre dæmpning. Den målte vinkelfrekvens udregnes til 9,00 og med ligning 8 giver det en naturlig vinkelfrekvens på 9,028

$$4,01e^{-0,713t} \sin(9,00t - 2,06) + 0,00218$$



Figur 15: Fri svingning vist med vinkel θ over tid t , hvor de blå prikker er datapunkter og linjen er fittet. Den fittede funktion er: $4,01e^{-0,713t} \sin(9,00t - 2,06) + 0,00218$.

Andet forsøg skulle give os stivhedskonstanten i fjedrene og sideløbende drejeskivens inertimoment, da dette ville lade os beregne den naturlige vinkelfrekvens med ligning 8. Ved at hænge et lod i toppen af en af fjedrene, vil loddet forskyde drejeskiven med θ [6] og med newtons anden lov, kan vi med ligning 20 udledes stivhedskonstanten. Dette kræver man vejer lodet og måler momentarmens radius.

$$\tau = -\kappa\theta$$

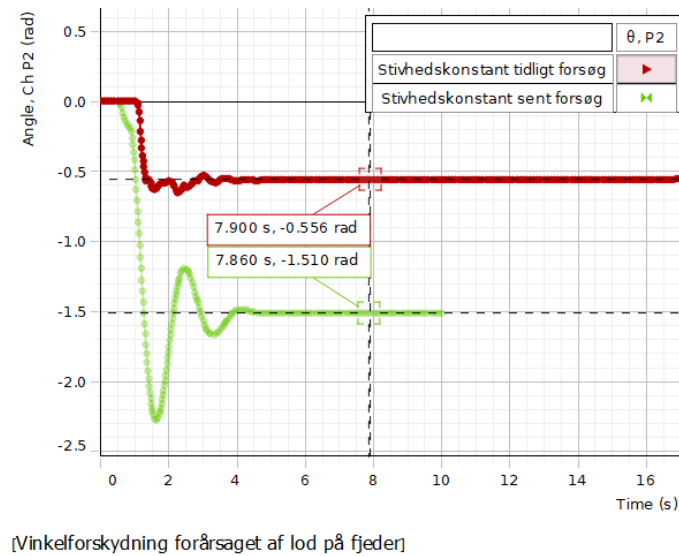
$$F = ma$$

Forsøg	Lod vægt m	Arm radius r	Forskydning θ	Lod tyngdekraft $F_g = mg$	Lod drejemoment $\tau = rF_g$	Stivhedskonstant κ $\kappa = \frac{\tau}{\theta}$	Ændring i κ
Tidlig	0,0148kg	0,0175m	0,556 rad	0,145N	0,00254Nm	$0,00457 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$	62,7%
Sent	0,0150kg		1,510 rad	0,147N	0,00257Nm	$0,00170 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$	

Figur 16: Tabel for tidlig og sent forsøg i projektet viser vægten af et lod m, snoet om en momentarm med radiusen r, forskyder vinkel på drejhjulet, ved loddets tyngdekraft F_g og drejemoment, hvilket viser fjedrens stivhedskonstant κ .

Her stødte vi på problemer, da vi prøvede at sammenligne værdierne fra regressionen i vinkelfrekvens-forsøget, med værdierne udregnet fra fjeder-forsøget. Det tog noget tid at indse, at fjeder-forsøget blev lavet et stykke tid efter vinkelfrekvens-forsøget. En anden gruppe havde lavet forsøg i mellemtiden med bl.a. et lod og

dermed var fjedrene blevet så udstrakt at stivhedskonstanten havde ændrede sig med 62,7%, hvilket udfra ligning 8 vil ændre den naturlige vinkelfrekvens, som per ligning 10 vil ændre den målte vinkelfrekvens, som i ligning 12 er det der diktere ligningens svingning.



Figur 17: Samme måling til at fastsætte stivhedskonstanten, taget i starten af projektet og i slutningen af projektet. Måler vinkelforskydningen 14,8g/15g lod forårsager fastsat på en af fjedrene hvilket ændre sig fra 0,556 rad til 1,510 rad.

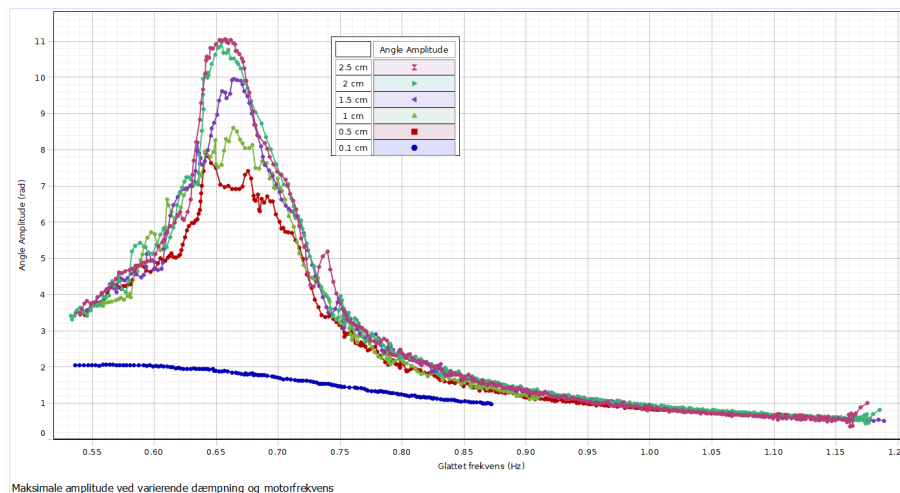
Ved vejning af drejhjulet og måling af dets radius, kan man, med inertimomentet for en cylinder med hul i midten, (vist i tabellen nedenfor) og ligning ?? udregne den naturlige vinkelfrekvens fra fjeder-forsøget - hvilket er bemærkelsesværdigt meget lavere end vinkelfrekvens-forsøget (9,00) begge gange fjeder-forsøget blev lavet. Vinkelfrekvens forsøget blev lavet før begge fjeder-forsøg, hvor fjedren var mindre beskadiget.

Forsøg	Drejeskive radius R_1	Drejeskive radius R_2	Drejeskive vægt M	Inerti I $I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$	Naturlige vinkelfrekvens $\omega_{nf} = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$
Tidlig	0,005m	0,05m	0,124kg	0.000157kgm ²	5,39 $\frac{rad}{s}$
Sent					3,29 $\frac{rad}{s}$

Figur 18: Drejeskivens radius og vægt, hvilket bruges til at beregne drejeskivens inertimoment

Drevet Svingning

Ved en drevet svingning vil motoren skiftevis strække og sammenpresse den ene fjeder, hvilket skaber en harmonisk svingning. En svingning vil sættes i gang med en givet ω_y . Efter noget tid vil ω_y blive formindsket og dermed påvirke svingningen i tilsvarende mindre grad. Efter en del frekvenser, slukkes det. En magnet rykkes tættere på drejeskiven for at øge modstanden i svingningen og så gentages forsøget, kaldet frekvens-sweep.



Figur 19: Funktioner med forskellig dæmpning (afstanden en magnet er fra drejehjulet) er plottet sammen i en graf over deres maksimale amplitude, hvor motorens frekvens varierede i denne drevet svingning. Grafen har glattet frekvens ud af x-aksen og amplitude op af y-aksen.

På grafen ses det at alle dæmpede svingninger, på nær den mest dæmpet, peaker omkring 0,65 Hz. Dette er systemets egenfrekvens, hvor der skabes resonans. Dette ønskede vi at vise ved at sammenligne med resultaterne fra vinkelfrekvens-forsøget, men da stivhedskonstanten ændrede sig mellem disse 2 forsøg, så ses der i stedet 2 forskellige egenfrekvenser.

Ved den mest dæmpede svingning er der ingen peak ved egenfrekvensen, fordi dæmpningen nærmer sig kritisk dæmpning og derfor blev svingningerne så små, at systemet nærmest ikke svinger.

Ved høje frekvenser dør svingningen også ud, da signalet oscillerer så hurtigt, at den ikke når at give tilstrækkelig moment til drejeskiven, inden den har skiftet til et signal i modsatte retning.

Yderligere ses det at resonansfrekvensen, som forventet bliver en smule lavere, når systemets dæmpning øges.

0.6 Resultater

Undervejs i perioden har vi mødt diverse mulige fejlkilder og disse vil vi vende i dette afsnit. Derudover vil vi fortæller om vores afsluttende resultater for hhv. det elektriske forsøg og det mekaniske forsøg og derefter også sammenligne de to.

0.6.1 Fejlkilder

I begge forsøg har vi oplevet en god del potentielle fejlkilder.

For det elektriske forsøg oplevede vi først fejlkilder ved at inkludere Digilent Discover BNC i vores første forsøg. Derudover har der været lidt forvirring omkring komponenter, fordi opstillingen er blevet delt mellem to grupper. For at imødekomme dette lavede vi vores eget lille "komponentlager", som bestod af et papir med de forskellige komponenter, som stadig var i brug.

Et større problem har været vores matlab script. Udover at vi har brugt lang tid på, at få det til at fungere efter planen, så oplevede vi også, i forbindelse med vores sweep, at filen blev så stor at den deaktiverede de tilføjede pakker, på flere computere. Dette kunne vi dog løse ved, at downloade pakkerne på ny og nedskalere antallet af frekvenser.

For det mekaniske forsøg oplevede vi først problemer med at få motoren til at køre med den ønskede frekvens og i en periode kunne den pludselig udbryde i voldsom rotation, hvilket kostede en fjeder. Dette fik vi løst ved at ændre på parametrene, som er opgivet i Pasco Manualen [7], til de parametre, som istedet er opgivet i denne manual for 'Driven Damped Harmonic Oscillations' [6]. Det viste sig at der, hvor man kunne opgive frekvens, ikke var den endelige frekvens som motoren roterede med, men frekvensen AC-signalet svingede med oven på DC signalet. Derfor var der stor forvirring over at inputtet 0,001 Hz blev til et output på over 2 Hz. Løsningen var at nedsætte DC offset.

Som nævnt blev fjedrene langsomt udstrakt, hvilket gjorde at vi ikke kunne sammenligne resultater, og da vi ville tilføje nogle resonans-sweep til det drevne forsøg, så alle graferne helt anderledes ud - dermed skulle alt gøres om hvis vi ønskede mere data.

0.6.2 Sammenligning af resultater

I det elektriske kredsløb var den naturlige vinkelfrekvens $55.937rad/s$, imens den i det mekaniske kun var $9,028rad/s$. Dette skyldes at det elektriske kredsløb har

en lille induktans og kapacitans, hvorimod det mekaniske system har et stort inertimoment og lav stivhedskonstant. Dæmpningen i systemerne var også forskellige, herunder i det elektriske $10.628s^{-1}$ og mekanisk $0,713s^{-1}$. Dette er fordi det mekaniske system var mere dæmpet, grundet den justerbare magnetiske modstand og fjedrenes tab. Til sidst var resonansfrekvensen forskellige da det elektriske kredsløb reagerede hurtigere på de ydre påvirkninger end det mekaniske grundet dets større inertie.

0.7 Perspektivering

Igennem projektforløbet af har snakket en del om, hvor vi møder oscillerende svingninger i vores hverdag. Som følge af vores rapport ved vi at Oscillerende svingninger følger formen

$$x(t) = A * \sin(\omega t + \phi)$$

Og dermed er det gældende for et vilkårligt system, hvor en regelmæssig svingning gentages.

Det er blevet klart for os at oscillerende svingninger er diverse genstande, der svinger frem og tilbage, som fx et pendul, men derudover møder vi det også mange steder, hvor vi ikke kan se svingningen. Det er fx indenfor lydbølger, som er trykbølger der bevæger sig igennem luften.

Desuden ser man også denne form for svingninger i medicinens verden. Det kan være strålebehandling, hvor oscillerende svingninger ses som magnetiske og elektriske felter, som udbreder sig vinkelret på hinanden, og medicinsk udstyr, som en pacemaker (en lille maskine, der med elektriske impulser, giver en stabil hjerterytme), der hjælper tusindvis af mennesker i hverdagen.

0.8 Konklusion

Dette projekt har undersøgt sammenhængen mellem svingninger i et mekanisk torsionspendul og et elektrisk RCL-kredsløb for at undersøge om de to forskellige systemer kan beskrives af den samme matematik, herunder andenordens differentiaalligninger. Dette bekræftes igennem en kombination af teoretisk analyse og eksperimentelle undersøgelser. Ud over dette undersøges, hvordan dæmpning af systemerne påvirker deres adfærd under frie og drevne svingninger.

I det elektriske forsøg blev modstand, induktans og kapacitans brugt til at styre

systemets dæmpning, hvor den naturlige vinkelfrekvens blev beregnet til $55.937s^{-1}$, hvilket stemmer overens med målte vinkelfrekvens $55.396,8s^{-1}$.

I det mekaniske forsøg blev inertimomentet, dæmpningskonstanten og fjederstivhed brugt til at opnå tilsvarende dæmpningsforhold. Her blev det bekræftet at magnetisk dæmpning af fjederstivheden påvirker systemet på en måde, som stemmer overens med teorien.

Projektet viser, hvordan andenordens differentialligninger fungerer som et universelt redskab til, at forstå og analysere dynamiske systemer. Samtidig har det fremvist praktiske udfordringer såsom støj i målinger og justering af komponenter, som understreger, hvor vigtigt det er at kombinere eksperimenterne med teorien bag dem. Dette viser, hvordan teori og praksis arbejder sammen på en måde, som viser at matematiske modeller gav et grundlag for at forudsige systemets adfærd, imens eksperimenter validerede den teori.

Endelig har projektet herved opfyldt sit formål, som var at demonstrere, hvordan forskellige systemer kan forstås og analyseres med de samme matematiske principper. Dette giver mulighed for at beskrive diverse systemer, som kan bruges mange steder i vores hverdag.

Litteratur

- [1] Robert A. Addas and Christopher Essex. *Calculus: A Complete Course [Ninth Edition]*. Pearson Canada, 2017.
- [2] El-Pro-Cus. What is damping ratio: Derivation & its cases. <https://www.elprocus.com/damping-ratio-derivation-cases/>, 2025.
- [3] Allan R. Hambley. *Electrical Engineering Principles and Applications [Seventh Edition]*. Pearson, 2019.
- [4] Katie M. Resonance graphs (edexcel a level physics): Revision note. <https://www.savemyexams.com/a-level/physics/edexcel/17/revision-notes/13-oscillations/resonance/13-10-resonance-graphs/>, 2025.
- [5] Jacob Moore. Viscous damped free vibrations. [https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Mechanical_Engineering/Mechanics_Map_\(Moore_et_al.\)/15%3A_Vibrations_with_One_Degree_of_Freedom/15.2%3A_Viscous_Damped_Free_Vibrations](https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Mechanical_Engineering/Mechanics_Map_(Moore_et_al.)/15%3A_Vibrations_with_One_Degree_of_Freedom/15.2%3A_Viscous_Damped_Free_Vibrations), 2025.
- [6] Pasco. Driven damped harmonic oscillations. https://cdn.pasco.com/lab_experiment/1_1277/EX-5522A_Driven_Damped_Oscilations.pdf?brid=nQwwwv5g7qUKWQiTtxsSugw, 2025.
- [7] Pasco. Resonance in the driven, damped mechanical oscillator. blob:<https://www.studocu.com/3e5bf76d-5c44-400f-8d30-94e48153a1be>, 2025.
- [8] Jearl Walker, David Halliday, and Robert Resnick. *Principles of Physics [Tenth Edition]*. John Wiley Sons, 2014.
- [9] Webmatematik.dk. Additionsformlerne, 2025.

Vi har igennem forløbet brugt generativ AI, som inspiration til vores matlab script, samt idegenerering og rettelser af grammatik. Al hjælp fra AI er blevet kigget grun-

digte igennem før brug. Vi har hverken brugt AI til at skrive selve rapporten, ændre på data eller lave grafer fra forsøgene.