

Nichtstandard Analysis 1

21.1.2020

Klaus Philipp Theyssen

1 Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$

1.1 Definition R ist der Ring der Folgen $a = (a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen

(i) Addition, Subtraktion und Multiplikation komponentenweise, für $a, b \in R$

$$(a^{(1)} \pm b^{(1)}, a^{(2)} \pm b^{(2)}, \dots) \text{ und } (a^{(1)} * b^{(1)}, a^{(2)} * b^{(2)}, \dots)$$

Wir wollen aus R den Körper ${}^*\mathbb{R}$ konstruieren, dafür fehlt uns die Division.

1.3 Definition Sei D das Ideal in R , für das gilt:

$$a \in D \iff a^{(n)} = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

1.5 Satz Jedes echte Ideal in einem Ring mit Einselement ist in einem maximalen Ideal enthalten. (mithilfe des Zornsches Lemma).

1.6 Definition Äquivalenzrelation auf R

$$a \equiv b \text{ mod } M \iff a - b \in M$$

1.7 Satz I maximal $\iff R/I$ ist ein Körper

1.8 Definition Der Non-Standard Zahlenbereich: ${}^*\mathbb{R} = R/M$

1.9 Satz Jede Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich zu einer Funktion ${}^*f : {}^*\mathbb{R}^m \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ fortsetzen, sodass sie Eigenschaften die im Rahmen der Logik 1. Stufe ausdrückbar sind behält.

1.10 Definition

$$U = U_M = \{Z(a) : a \in M\} \text{ mit } Z(a) = \{n \in \mathbb{N} : a^{(n)} = 0\}$$

U ist ein *Filter auf* \mathbb{N} , es gelten die folgenden Eigenschaften:

(i) $\emptyset \notin U$

(ii) $\mathbb{N} \in U$

(iii) $Z_1, Z_2 \in U \Rightarrow Z_1 \cap Z_2 \in U$

(iv) $Z \in U, Z \subset A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$

Ist M maximales Ideal so ist U_M ein *Ultrafilter*, es gelten zusätzlich:

(i) $A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$ oder $\mathbb{N} \setminus A \in U$

(ii) $A \subset \mathbb{N}, |\mathbb{N} \setminus A| < \infty \Rightarrow A \in U$

Folgerung $a \equiv b \pmod{M} \iff \{n : a^{(n)} = b^{(n)}\} \in U_M$

2 Eigenschaften von ${}^*\mathbb{R}$

2.1 Satz Die Anordnung \leq der reellen Zahlen lässt sich zu einer Anordnung von ${}^*\mathbb{R}$ fortsetzen.

2.2 Satz ${}^*\mathbb{R}$ besitzt ein Element ω das größer als alle reellen Zahlen ist.

$$\forall r \in \mathbb{R} : r \leq \omega \pmod{M}, \omega = (1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots)$$

2.3 Definition $\mathfrak{D} = \{a \in {}^*\mathbb{R} : |a| \leq r, \text{ für ein } r \in \mathbb{R}\}$
Ist echter konvexer Teilring von ${}^*\mathbb{R}$, die Elemente von \mathfrak{D} nennt man *endliche Größen*.

Konvexität bedeutet hier:

$$0 \leq b \leq a \in \mathfrak{D} \Rightarrow b \in \mathfrak{D}$$

2.4 Definition $\mathfrak{M} = \{a \in {}^*\mathbb{R} : |a| \leq \epsilon, \text{ für alle } \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$

\mathfrak{M} ist konvexes Ideal in \mathfrak{D} , sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind

- (i) $a, b \in \mathfrak{M} \Rightarrow a + b \in \mathfrak{M}$
- (ii) $a \in \mathfrak{M}, b \in \mathfrak{D} \Rightarrow a * b \in \mathfrak{M}$
- (iii) $0 \leq b \leq a \in \mathfrak{M} \Rightarrow b \in \mathfrak{M}$

Die Elemente von \mathfrak{M} bezeichnen wir als *unendliche kleine* oder *infinitesimale Größen*. Alle anderen Elemente von ${}^*\mathbb{R}$, die nicht in \mathfrak{M} oder \mathfrak{D} sind bezeichnen wir als *unendliche* oder *infinite Größen*.

2.5 Definition $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ heißen *benachbart* wenn gilt:

$$a - b \in \mathfrak{M}, \text{ wir schreiben } a \approx b$$

Das heißt a und b unterscheiden sich nur um eine infinitesimale Größe, \approx ist eine Äquivalenzrelation auf ${}^*\mathbb{R}$

2.6 Satz Jede endliche Größe $a \in {}^*\mathbb{R}$ ist zu genau einer reellen Zahl r benachbart. r wird dann als der Standardteil $\text{st}(a)$ von a bezeichnet.

2.7 Definition Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist im Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig wenn für alle $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, sodass für alle $h \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|h| \leq \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \leq \epsilon$$

2.8 Satz Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist im Punkt $x \in \mathbb{R}$ genau dann stetig, wenn für alle $h \approx 0$ gilt:

$${}^*f(x+h) \approx f(x)$$