Nichtstandard Analysis 1

Klaus Philipp Theyssen

21.1.2020

1 Motivation

Leibniz und dann Epsilontik von Weierstraß und Bolzano.
Abraham Robinson konstruiert *R (1961) und gibt damit den infitesimalen Größen eine solide formale Basis.
Motivation durch Differentialquotienten.

2 Konstruktion von $^*\mathbb{R}$

1.1 Definition R ist der Ring der Folgen $a = (a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen

(i) Addition, Subtraktion und Multiplikation Komponentenweise, für $a, b \in R$

$$(a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, ...) \text{ und } (a_1 * b_1, a_2 * b_2, ...)$$

(ii) Die Reellen Zahlen werden kanonisch in R eingebettet durch, für $r \in \mathbb{R}$

$$r \mapsto (r, r, r, ...)$$

Nun wollen wir aus R den Körper *R konstruieren.

1.2 Definition Ideal

1.3 Definition Sei D ein Ideal in R, für das gilt:

$$a \in D \iff a^{(n)} = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

1.4 Definition maximales Ideal

1.5 Satz Existenz eines maximalen Ideals M in R, das D umfasst (Zornsches Lemma)

1.6 Definition Äquivalenzrealtion auf R

$$a \equiv b \bmod M \iff a - b \in M$$

1.7 Satz I maximal $\iff$ R/I ist ein Körper

1.8 Definition $^*\mathbb{R} = R/M$

1.9 Satz Jede Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ lässt sich zu einer Funktion $^*f : ^*\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fortsetzen, sodass sie Eigenschaften im Rahmen der Logik 1. Stufe behält.

1.10 Definition

$$U = U_M = \{Z(a) : a \in M\} \text{ mit } Z(a) = \{n \in \mathbb{N} : a^{(n)} = 0\}$$

Man bezeichnet U_M als Ultrafilter, es gelten die folgenden Eigenschaften:

(i) $\emptyset \notin U$

(ii) $\mathbb{N} \in U$

(iii) $Z_1, Z_2 \in U \Rightarrow Z_1 \cap Z_2 \in U$

(iv) $Z \in U,\ Z \subset A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$

(v) $A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$ oder $\mathbb{N} \setminus A \in U$

(vi) $A \subset \mathbb{N},\ |\mathbb{N} \setminus A| < \infty \Rightarrow A \in U$

(vii) $a \equiv b \bmod M \iff \{n : a^{(n)} = b^{(n)}\} \in U_M$

3 Eigenschaften von *R