Geschichte: Das Rechnen mit unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen wie den Leibnizschen Differentialen dy und dx in früheren Jahrhunderten der Mathematik und Physik selbstverständlich, aber auch umstritten. Konsitenzfragen wie heute kamen erst später, damals reichte den Mathematikern mit solchen Größen zu rechnen und richtige Ergebnisse zu erhalten.
Durch die Epsilontik, den Aufbau der Analysis auf dem Limesbegriff, von Weierstraß wurden diese Größen aus exakten Beweisen verbannt.
Abraham Robinson (1961) gibt diesen Größen eine formal korrekte Basis durch Konstruktion von $^*\mathbb{R}$.

Vorstellung als Funktion der Zeit Idee, das die infinitesimalen Größen variabel sind und mit der Zeit ab und zunehmen. Daher Darstellung als Funktion der Zeit (könnte man auch kontinuierlich machen aber diskret einfacher)

1 Konstruktion von $^*\mathbb{R}$

1.1 Definition R ist der Ring der Folgen $a = (a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen

(i) Addition, Subtraktion und Multiplikation Komponentenweise, für $a, b \in R$

$$(a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, ...) \text{ und } (a_1 * b_1, a_2 * b_2, ...)$$

(ii) Die Reellen Zahlen werden kanonisch in R eingebettet, für $r \in \mathbb{R}$

$$r \mapsto (r, r, r, ...)$$

Nun wollen wir aus R den Körper *R konstruieren, dafür fehlt uns die Division.

TODO: Warum funktioniert Division nicht ?

1.2 Definition Ideal
Es sei R ein Ring.
Ein *Ideal* in R ist eine Teilmenge $I \subseteq R$, die bezüglich der Addition eine Untergruppe ist und folgende Eigenschaft hat:

$$\forall x \in I, r \in R : xr \in I$$

TODO WARUM Beispielsweise ist der Kern eines Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ ein Ideal.

1.3 Definition Sei D ein Ideal in R, für das gilt:

$$a \in D \iff a^{(n)} = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

1.4 Definition maximales Ideal
Ein Ideal $I \subset R$ heißt maximales Ideal, wenn zwischen I und R kein weiteres Ideal liegt:

$$I \subset J \subsetneq R \Rightarrow I = J$$

1.5 Satz Jedes echte Ideal A in einem Ring R mit Einselement ist in einem maximalen Ideal enthalten. (Zornsches Lemma).

Wir beweisen die Aussage mit dem **Zornschen Lemma**: Eine Halbordnung in der jede Kette eine obere Schranke hat, besitzt ein maximales Element.

Kette: Sei (a, r) eine Halbordnung sind zwei Elemente einer Teilmenge b von a mit r vergleichbar so heißt b eine Kette in (a, r).

Beweis. Die Menge X aller Ideale B von R mit $A \subseteq B \neq R$ ist wegen $A \in X$ nicht leer und bzgl. der Inklusion $\subseteq$ geordnet. Es sei K eine Kette in X also:

$$B, B' \in K \Rightarrow B \subseteq B' \text{ oder } B' \subseteq B$$

Beh: $C := \bigcup_{B \in K} B$ ist ein Ideal von R.
Es seien $a, a' \in C$ etwa $a \in B \in K$ und $a' \in B' \in K$, wegen $B \subseteq B'$ oder $B' \subseteq B$ folgt $a - a' \in B' \subseteq C$ oder $a - a' \in B \subseteq C$ (Untergruppenkrit. !!!) und $ra, ar \in B \subseteq C$ also ist C ein Ideal.

Es gilt $A \subseteq C$, es gilt $1 \notin B$ für jedes $B \in K$, da sonst B bereits der ganze Ring wäre, also muss $1 \notin C$ gelten. Also $C \neq R$. Somit liegt C in K, ist eine obere Schranke in K. Folglich ist $(X, \subseteq)$ induktiv geordnet und besitzt mit dem Zornschen Lemma ein maximales Ideal M von R mit $A \subseteq M$. □

1.6 Definition Äquivalenzrelation auf R

$$a \equiv b \bmod M \iff a - b \in M$$

(i) reflexiv: $0 \in M$ da M additive Untergruppe von R:

$$0 = a - a \in M$$

(ii) symmetrisch: Wenn $a - b \in M$ dann:

$$0 = (a - b) + (b - a) \in M \Rightarrow b - a \in M$$

(iii) transitiv: Wenn $a - b, b - c \in M$ dann:

$$(a - b) + (b - c) = a - c \in M$$

Definition Faktorring TODO

1.7 Satz I maximal $\iff$ R/I ist ein Körper

Beweis. $\Rightarrow$:
Sei $M \subset R$ maximal und $a + M \neq 0_{R/M} = M$, also $a \notin M$.
$R = M + (a)$ ($M \subset M \cup \{a\} \neq R$ Widerspruch zu Maximalität von M)

$$M + (a) = \{m + ba |\ w \in M, b \in R\}$$

$$\iff \exists b \in R \text{ und } m \in M \text{ mit } ab + w = 1$$

$$\iff \exists b \in R \text{ mit } (a + M)(b + M) = 1 + M = 1_{R/M}$$

Somit ist R/M ein Körper da jedes Element ein Inverses besitzt:

$$(a+M)^{-1} = b+M$$

$\Leftarrow$:
Ist R/M ein Körper und $a \notin M$ dann git es ein $b \in R$ mit

$$(a+M)(b+M) = 1_{R/M}$$

$$\iff M + (a) = R$$

Ist also $M \subsetneqq I$ dann gilt $I = R$. $\square$

1.8 Definition $^*\mathbb{R} = R/M$

Bemerkung Da jede konstante Folge $\neq 0$ in R invertierbar ist, wird der Unterkörper $\mathbb{R}$ von R bei der Restklassenbildung nicht beeinträchtigt, das heißt wir finden $\mathbb{R}$ als isomorphes Bild in R/M wieder.

1.9 Satz Jede Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ lässt sich zu einer Funktion $f : ^*\mathbb{R}^m \to {}^*\mathbb{R}$ fortsetzen, sodass sie Eigenschaften im Rahmen der Logik 1. Stufe behält.

Beweis. Definiere zu $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine komponentenweise Fortsetzung $\overline{f}$ durch

$$\overline{f}(a_1, ..., a_m) = (f(a_1^{(1)}, ..., a_m^1), f(a_1^{(2)}, ..., a_m^2), ...)$$

wobei a_i für $1 \leqslant i \leqslant m$ Folgen aus R sind.
Dann setzen wir

$$^*f(a_1, ..., a_m) \equiv \overline{f}(a_1, ..., a_m) \bmod M$$

hier sind die Folgen $a_1, ..., a_m$ Vertreter von gewissen Restklassen in R/M Jetzt müssen wir die Wohldefiniertheit zeigen, also das diese Definition nicht von der Wahl der Vertreter in R/M abhängt. Seien

$$a_1 \equiv b_1, ..., a_m \equiv b_m \bmod M$$

dann ist zu zeigen, dass

$$\overline{f}(a_1, ..., a_m) \equiv \overline{f}(b_1, ..., b_m) \bmod M$$

Zunächst betrachten wir das ganze nur für das Ideal D, und wollen dann den Beweis für beliebige Ideale führen, dafür werden wir die Definition des Ultrafilters nutzen.

Fall D ist das Ideal:
$a \equiv b \bmod D$ bedeutet $a^{(n)} = b^{(n)}$ für fast alle n (für alle bis auf endlich viele) dann gilt aber auch ffa $n \in \mathbb{N}$:

$$a_1^{(n)} = b_1^{(n)} \text{ und ... und } a_m^{(n)} = b_m^{(n)}$$

also gilt für ffa n

$$f(a_1^{(n)}, ..., a_m^{(n)}) = f(b_1^{(n)}, ..., b_m^{(n)})$$

woraus folgt, dass $\overline{f}(a_1, ..., a_m) \equiv \overline{f}(b_1, ..., b_m) \bmod D$

$\square$

1.10 Definition Für den Beweis von 1.9 mit beliebigem Ideal:

$$U = U_M = \{Z(a) : a \in M\} \text{ mit } Z(a) = \{n \in \mathbb{N} : a^{(n)} = 0\}$$

U Ist ein Filter auf $\mathbb{N}$. Ist M maximales Ideal so ist U_M ein Ultrafilter, es gelten die folgenden Eigenschaften:

Hier M beliebiges Ideal und U Filter

(i) $\emptyset \notin U$

(ii) $\mathbb{N} \in U$

(iii) $Z_1, Z_2 \in U \Rightarrow Z_1 \cap Z_2 \in U$

(iv) $Z \in U,\ Z \subset A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$

Ab hier M maximales Ideal und U_M Ultrafilter

(v) $A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$ oder $\mathbb{N} \setminus A \in U$

(vi) $A \subset \mathbb{N},\ |\mathbb{N} \setminus A| < \infty \Rightarrow A \in U$

Hier M wieder beliebiges Ideal und U Filter

(vii) $a \equiv b \bmod M \iff \{n : a^{(n)} = b^{(n)}\} \in U_M$

Beweis.

Hier M beliebiges Ideal und U Filter

(i) : Nullfolge ist in M da M Ideal von R somit ist $\mathbb{N} \in U$

(ii) : siehe (i)

(iii) : Seien a und b zwei Folgen in R/M und $c = a^2 + b^2$ dann ist $Z(c) = Z(a) \cap Z(b)$

(iv) : Sei $a \in M$ eine Folge mit $Z(a) = Z$ und $r \in R, r \neq 0$ mit $A = Z(r)$. Da a Teilmenge von r ist hat sie an keiner Stelle eine 0 an der r nicht auch eine 0 hat mit der Ideal Eigenschaft folgt sofort $ar \in M \Rightarrow Z(ar) = A \in U$

Ab hier M maximales Ideal und U_M Ultrafilter

(v) : Wähle Folge a aus Nullen und Einsen, so dass $Z(a) = A$.
Angenommen $A \notin U$ also $a \notin M$, da M maximal ist existiert $b \in M$ und $c \in R$ mit $1 = b + ac$. Daher $Z(b) = Z(1 - ac) \subset \mathbb{N} \setminus A$ Wegen $b \in M$ ist $Z(b) \in U$ mit (iv) erhält man $\mathbb{N} \setminus A \in U$.

(vi) : TODO

(vii) : Generell gilt

$$a \in M \iff Z(a) \in U$$

Wir müssen $\Leftarrow$ zeigen, ($\Rightarrow$ ergibt sich wegen der Definition von U). Sei $Z(a) \in U$ wir müssen zeigen, dass $a \in M$ ist. Da $Z(a) \in U$ ist muss es ein $b \in M$ geben mit $Z(a) = Z(b)$ also haben a und b die gleichen 0-Stellen. Wir definieren die Folge $c = (c^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$

$$c^{(n)} = \begin{cases} a^{(n)}/b^{(n)} \text{ für } n \notin Z(b) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $a = bc \in M$
Es gilt $Z(a - b) = \{n : a^{(n)} = b^{(n)}\}$ somit ergibt sich für $a, b \in R$ die Eigenschaft

$$a \equiv b \bmod M \iff \{n : a^{(n)} = b^{(n)}\} \in U_M$$

□

Unabhängigkeitsbeweis für beliebige Ideale Es gilt $a_i \equiv b_i \bmod M$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und damit auch $\{n : a_i^{(n)} = b_i^{(n)}\} \in U$ für $1 \leqslant i \leqslant m$. Damit gilt auch

$$\bigcap_{i=1}^{m} \{n : a_i^{(n)} = b_i^{(n)}\} = \{n : a_1^{(n)} = b_1^{(n)}, ..., a_m^{(n)} = b_m^{(n)}\} \in U$$

Außerdem gilt, weil eine Funktion (rechtseindeutig):

$$\{n : a_1^{(n)} = b_1^{(n)}, ..., a_m^{(n)} = b_m^{(n)}\} \subset \{n : f(a_1^{(n)}, ..., a_m^{(n)}) = f(b_1^{(n)}, ..., b_m^{(n)})\}$$

mit (iv) folgt daraus

$$\{n : f(a_1^{(n)}, ..., a_m^{(n)}) = f(b_1^{(n)}, ..., b_m^{(n)})\} \in U$$

Mit (vi) sind

$$^*f(a_1, ..., a_m) \equiv {}^*f(b_1, ..., b_m) \bmod M$$

Fortsetzung zweier Funktionen Es gilt für zwei Funktionen f und g:

$$^*(fg) = {}^*f{}^*g$$

2 Eigenschaften von *R

2.1 Satz Die Anordnung $\leqslant$ der reellen Zahlen lässt sich zu einer Anordnung von $^*\mathbb{R}$ fortsetzen

Beweis. Sei M ein maximales Ideal über D, damit ist sichergestellt, dass $^*\mathbb{R} = R/M$ ein Körper ist. Für $a, b \in R$ setzen wir

$$a \leqslant b \bmod M :\iff \{n : a^{(n)} \leqslant b^{(n)}\} \in U_M$$

Das bedeutet die Beziehung $a \leqslant b \mod M$ soll gelten, falls die entsprechende Eigenschaft für sehr viele Komponenten gilt. Es bleibt wieder zu zeigen, dass die Definition unabhängig von den Vertretern ist.
Sei also $a \equiv a_1$ und $b \equiv b_1 \mod M$ dann gilt

$$\{n : a^{(n)} \leqslant b^{(n)}\} \cap \{n : a^{(n)} = a_1^{(n)}\} \cap \{n : b^{(n)} = b_1^{(n)}\} \subset \{n : a_1^{(n)} \leqslant b_1^{(n)}\}$$

Mit Voraussetzung und mit (iii) ist die linke Seite in U und dann mit (iv) auch die rechte.

Mit den Eigenschaften (v) und (iv) von U folgt für beliebige $a, b \in R$:

$$\{n : a^{(n)} \leqslant b^{(n)}\} \in U \text{ oder } \{n : b^{(n)} \leqslant a^{(n)}\} \in U$$

□

Eigenschaften Anordnung Beweise mithilfe der Filter-Eigenschaften von U_M

(i) $a \leqslant a$
Beweis: hier ist $a^{(n)} = a^{(n)}$ und damit folgt die schwächere Aussage

(ii) $a \leqslant b, b \leqslant a \Rightarrow a = b$
Beweis: $\forall n$ gilt $a^{(n)} \leqslant b^{(n)}$ und $b^{(n)} \leqslant a^{(n)}$ also muss $\forall n$ gelten $a^{(n)} = b^{(n)}$ und damit $a = b$

(iii) $a \leqslant b, b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$
Beweis: folgt durch Betrachtung der einzelnen Elemente der Folgen

(iv) $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$
Beweis: folgt durch Betrachtung der einzelnen Elemente der Folgen

(v) $0 \leqslant a, 0 \leqslant b \Rightarrow 0 \leqslant ab$
Beweis: folgt durch Betrachtung der einzelnen Elemente der Folgen

2.2 Satz $^*\mathbb{R}$ besitzt ein Element das größer als alle reellen Zahlen ist.

$$\forall r \in \mathbb{R} : r \leqslant \omega \mod M, \, \omega = (1, 2, 3, ..., n, n + 1, ...)$$

Beweis. Wegen (vi) gilt $\{n : r^{(n)} \leqslant \omega^{(n)}\} = \{n : r \leqslant n\} \in U_M$.
$\{n : r \leqslant n\}$ hat unendlich viele Elemente, wenn $r = 0$ ist, dann $\{n : r \leqslant n\} = \mathbb{N}$, damit ist $|\mathbb{N} \setminus A| < \infty$ da r konstant und somit nur endlich viele Folgenglieder größer als ω □

2.3 Definition $\mathfrak{D} = \{a \in {}^*\mathbb{R} : |a| \leqslant r, \text{ für ein } r \in \mathbb{R}\}$
Ist echter konvexer Teilring von $^*\mathbb{R}$, die Elemente von $\mathfrak{D}$ nennt man *endliche* Größen.
Konvexität meint hier:

$$0 \leqslant b \leqslant a \in \mathfrak{D} \Rightarrow b \in \mathfrak{D}$$

Beweis. Für die Definition haben wir die Fortsetzung $^*|\ |$ des Absolutbetrages der reellen Zahlen verwendet.

$$^*|a| = \begin{cases} a, \text{ falls } 0 \leqslant a \\ -a, \text{ falls } a \leqslant 0 \end{cases}$$

Das die Definition von $^*|\ |$ Sinn macht sieht man so ein: Gilt für eine Folge $0 \leqslant a$ dann heißt das $\{n : 0 \leqslant a^{(n)}\} \in U$ dann ist aber auch die Obermenge $\{n : |a^{(n)}| = a^{(n)}\}$ Element von U. Mit (vii) folgt $|a| \equiv a \bmod M$.
($a \leqslant 0$ lässt sich analog schließen)

Die Gleichung und die Ungleichung müsste man modulo M verstehen, wollen wir aber im folgenden weglassen und M fest gewählt haben.

□

2.4 Definition $\mathfrak{M} = \{a \in {}^*\mathbb{R} : |a| \leqslant \epsilon, \text{ für alle } \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$

$\mathfrak{M}$ ist konvexes Ideal in $\mathfrak{D}$, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind

(i) $a, b \in \mathfrak{M} \Rightarrow a + b \in \mathfrak{M}$

(ii) $a \in \mathfrak{M}, b \in \mathfrak{D} \Rightarrow a * b \in \mathfrak{M}$

(iii) $0 \leqslant b \leqslant a \in \mathfrak{M} \Rightarrow b \in \mathfrak{M}$

Beweis. $\mathfrak{M}$ besteht nicht nur aus der Null, denn wegen $n \leqslant \omega$ folgt $0 \leqslant 1/\omega \leqslant 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ also ist $1/\omega \in \mathfrak{M}$.

□

Die Elemente von $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir als *unendliche kleine* oder $infinitesimale$ Größen. Alle anderen Elemente von $^*\mathbb{R}$, die nicht in $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{D}$ sind bezeichnen wir als *unendliche* oder $infinite$ Größen.

TODO: Skizze aus elementary calculus

2.5 Definition $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ heißen *benachbart* wenn gilt:

$$a \approx b \iff a - b \in \mathfrak{M}$$

Das heißt a und b unterscheiden sich nur um eine infinitesimale Größe, $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf $^*\mathbb{R}$

Beweis. TODO: Ein Beispiel □

2.6 Satz *Jede endliche Größe $a \in {}^*\mathbb{R}$ ist zu genau einer reellen Zahl r benachbart. r wird dann als der Standardteil $\mathrm{st}(a)$ von a bezeichnet.*

Beweis. Existenz
Wir betrachten die Mengen $X_a = \{r \in \mathbb{R} : r \leqslant a\}$ und $Y_a = \{s \in \mathbb{R} : a \leqslant s\}$ damit definieren X_a und Y_a einen Schnitt in $\mathbb{R}$. Wegen der Schnittvollständigkeit von $\mathbb{R}$ gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $r \leqslant t \leqslant s$ für $r \in X_a, s \in Y_a$. Damit erhält man $|t - a| \leqslant \epsilon$ für alle $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Also $a \approx t \in \mathbb{R}$

Eindeutigkeit
Angenommen es sei $t_1 \approx a \approx t_2$ für $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ dann folgt $t_1 \approx t_2$ das heißt $|t_1 - t_2| < \epsilon$ für alle $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Das ist nur für $t_1 - t_2 = 0$ möglich. □

Anmerkung $st : \mathfrak{D} \to \mathbb{R}$ ist ein ordnungserhaltender Ringhomomorphismus mit Kern $\mathfrak{M}$ und $\mathrm{st}|\mathbb{R} = \mathrm{id}$. Daraus folgt das wir mit den endlichen Größen in ${}^*\mathbb{R}$ alle Körperoperationen dürchführen können wenn wir $\approx$ statt $=$ schreiben und nur durch $a \in \mathfrak{D}$ dividieren wenn gilt $a \not\approx 0$.

2.7 Definition Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x \in \mathbb{R}$ seien $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$ und $h \in \mathbb{R}$ dann muss gelten:

$$\forall \epsilon \; \exists \delta \textit{sodass für alle } h \textit{ gilt: } |h| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \leqslant \epsilon$$

Alternative Definiton:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : (|x - x_0|) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

Beweis. TODO: Skizze □

2.8 Satz *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist im Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig* $\iff$
für alle $h \approx 0$ gilt:

$${}^*f(x+h) \approx f(x)$$

Beweis. Beweis $\Rightarrow$:
f lässt sich zu Funktion ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ fortsetzen sodass für $a = (a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ gilt

$${}^*f(a) \equiv (f(a^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}} \bmod M$$

Jetzt betrachten wir $h \in {}^*\mathbb{R}$ mit $|h| \leqslant \delta$. Es gilt $\{n : |h^{(n)}| \leqslant \delta\} \in U$. Wegen der Stetigkeit von f gilt $\{n : |h^{(n)}| \leqslant \delta\} \subset \{n : |f(x + h^{(n)}) - f(x)) \leqslant \epsilon\}$ und wegen Filter-Eigenschaft (iv) ist auch die letztere Menge in U, das heißt es gilt $|{}^*f(x+h) - {}^*f(x)| \leqslant \epsilon$. Ist $h \in \mathfrak{M}$ (also $h \approx 0$) so ist $|h| \leqslant \delta$ für alle $\delta \in \mathbb{R}^+$ richtig.

Damit auch die Folgerung das $|{}^*f(x+h) - {}^*f(x)| \leqslant \epsilon$ für alle $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gilt. Somit unterscheiden sich ${}^*f(x+h)$ und ${}^*f(x)$ nur um eine infinitesimale Größe, was heißt:

$${}^*f(x+h) \approx *f(x)$$

Beweis $\Leftarrow$: durch Kontraposition
Wir nehmen also an f ist in x nicht stetig.

$$\exists \epsilon \forall \delta \exists h : |h| \leqslant \delta \wedge |f(x+h) - f(x)| \geq \epsilon$$

Dann gibt es ein $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, sodass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $h^{(n)} \in \mathbb{R}$ existiert mit $|h^{(n)}| \leqslant \frac{1}{n}$ und $|f(x+h^{(n)}) - f(x)| \geq \epsilon$. Setzen wir nun $h = (h^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ so gilt $|h| \leqslant 1/\omega$ wegen $1/\omega \in \mathfrak{M}$ gilt auch $h \in \mathfrak{M}$, d.h. $h \approx 0$. Wir haben $h^{(n)}$ so gewählt das gilt $\mathbb{N} = \{|f(x+h^{(n)}) - f(x)| \geq \epsilon\} \in U$, das heißt $|f(x+h) - f(x)| \geq \epsilon$ das ist ein Widerspruch zur Vorraussetzung ${}^*f(x+h) \approx f(x)$ für $h \approx 0$.

$\square$