

Nichtstandard Analysis 1

Klaus Philipp Theyssen

21.1.2020

1 Motivation

Geschichte: BEISPIELE an passenden Stellen !!!!

Das Rechnen mit unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen wie den Leibnizschen Differentialen dy und dx in früheren Jahrhunderten der Mathematik und Physik selbstverständlich, aber auch umstritten (Buch von Bischof, Video von Weiz).

Durch die Epsilontik, den Aufbau der Analysis auf dem Limesbegriff, von Weierstraß wurden diese Größen aus exakten Beweisen verbannt.

Abraham Robinson (1961) gibt diesen Größen eine formal korrekte Basis durch Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$.

TODO: Limes nochmal klar machen Grundlagen der Analysis sollten sitzen

Differentialquotient: Definition des Differentialquotienten in ${}^*\mathbb{R}$, und diese Größen als Funktionen der Zeit zu sehen, da sie variable Größe haben und somit auf die Folgen reeller Zahlen zu kommen.

2 Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$

1.1 Definition R ist der Ring der Folgen $a = (a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen

(i) Addition, Subtraktion und Multiplikation Komponentenweise, für $a, b \in R$

$$(a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \dots) \text{ und } (a_1 * b_1, a_2 * b_2, \dots)$$

(ii) Die Reellen Zahlen werden kanonisch in R eingebettet, für $r \in \mathbb{R}$

$$r \mapsto (r, r, r, \dots)$$

Nun wollen wir aus R den Körper ${}^*\mathbb{R}$ konstruieren, dafür fehlt uns die Division.

1.2 Definition Ideal

Es sei R ein Ring.

Ein *Ideal* in R ist eine Teilmenge $I \subseteq R$, die bezüglich der Addition eine Untergruppe ist und folgende Eigenschaft hat:

$$\forall x \in I, r \in R : xr \in I \text{ und } rx \in I$$

Beispielsweise ist der Kern eines Ringhomomorphismus $\varphi : R \rightarrow S$ ein Ideal.

1.3 Definition Sei D ein Ideal in R , für das gilt:

$$a \in D \iff a^{(n)} = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

1.4 Definition maximales Ideal

Ein Ideal $I \subset R$ heißt maximales Ideal, wenn zwischen I und R kein weiteres Ideal liegt:

$$I \subset J \subsetneq R \Rightarrow I = J$$

1.5 Satz Jedes echte Ideal A in einem Ring R mit Einselement ist in einem maximalen Ideal enthalten. (Zornsches Lemma).

Wir beweisen die Aussage mit dem **Zornschen Lemma**: Eine Halbordnung in der jede Kette eine obere Schranke hat, besitzt ein maximales Element.

Kette: Sei (a, r) eine Halbordnung sind zwei Elemente einer Teilmenge b von a mit r vergleichbar so heißt b eine Kette in (a, r) .

Beweis. Die Menge X aller Ideale B von R mit $A \subseteq B \neq R$ ist wegen $A \in X$ nicht leer und bzgl. der Inklusion \subseteq geordnet. Es sei K eine Kette in X also:

$$B, B' \in K \Rightarrow B \subseteq B' \text{ oder } B' \subseteq B$$

Beh: $C := \bigcup_{B \in K} B$ ist ein Ideal von R .

Es seien $a, a' \in C$ etwa $a \in B \in K$ und $a' \in B' \in K$, wegen $B \subseteq B'$ oder $B' \subseteq B$ folgt $a - a' \in B' \subseteq C$ oder $a - a' \in B \subseteq C$ (Untergruppenkrit. !!!) und $ra, ar \in B \subseteq C$ also ist C ein Ideal.

Es gilt $A \subseteq C$, es gilt $1 \notin B$ für jedes $B \in K$, da sonst B bereits der ganze Ring wäre, also muss $1 \notin C$ gelten. Also $C \neq R$. Somit liegt C in K , ist eine obere Schranke in K . Folglich ist (X, \subseteq) induktiv geordnet und besitzt mit dem Zornschen Lemma ein maximales Ideal M von R mit $A \subseteq M$. \square

1.6 Definition Äquivalenzrelation auf R

$$a \equiv b \pmod{M} \iff a - b \in M$$

(i) reflexiv: $0 \in M$ da M additive Untergruppe von R :

$$0 = a - a \in M$$

(ii) symmetrisch: Wenn $a - b \in M$ dann:

$$0 = (a - b) + (b - a) \in M \Rightarrow b - a \in M$$

(iii) transitiv: Wenn $a - b, b - c \in M$ dann:

$$(a - b) + (b - c) = a - c \in M$$

1.7 Satz I maximal $\iff R/I$ ist ein Körper

Beweis. \Rightarrow :

Sei $M \subset R$ maximal und $a + M \neq 0_{R/M} = M$, also $a \notin M$.

$R = M + (a)$ ($M \subset M \cup \{a\} \neq R$ Widerspruch zu Maximalität von M)

$$M + (a) = \{m + ba \mid w \in M, b \in R\}$$

$$\iff \exists b \in R \text{ und } m \in M \text{ mit } ab + w = 1$$

$$\iff \exists b \in R \text{ mit } (a + M)(b + M) = 1 + M = 1_{R/M}$$

Somit ist R/M ein Körper da jedes Element ein Inverses besitzt:

$$(a + M)^{-1} = b + M$$

\Leftarrow :

Ist R/M ein Körper und $a \notin M$ dann gibt es ein $b \in R$ mit

$$(a + M)(b + M) = 1_{R/M}$$

$$\iff M + (a) = R$$

Ist also $M \subsetneq I$ dann gilt $I = R$. □

1.8 Definition ${}^*\mathbb{R} = R/M$

Bemerkung Da jede konstante Folge $\neq 0$ in R invertierbar ist, wird der Unterkörper \mathbb{R} von R bei der Restklassenbildung nicht beeinträchtigt, das heißt wir finden \mathbb{R} als isomorphes Bild in R/M wieder.

1.9 Satz Jede Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich zu einer Funktion ${}^*f : {}^*\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen, sodass sie Eigenschaften im Rahmen der Logik 1. Stufe behält.

Beweis. Definiere zu $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ eine komponentenweise Fortsetzung \bar{f} durch

$$\bar{f}(a_1, \dots, a_m) = (f(a_1^{(1)}, \dots, a_m^{(1)}), f(a_1^{(2)}, \dots, a_m^{(2)}), \dots)$$

wobei a_i für $1 \leq i \leq m$ Folgen aus \mathbb{R} sind.

Dann setzen wir

$${}^*f(a_1, \dots, a_m) \equiv \bar{f}(a_1, \dots, a_m) \mod M$$

hier sind die Folgen a_1, \dots, a_m Vertreter von gewissen Restklassen in R/M . Jetzt müssen wir die Wohldefiniertheit zeigen, also dass diese Definition nicht von der Wahl der Vertreter in R/M abhängt. Seien

$$a_1 \equiv b_1, \dots, a_m \equiv b_m \mod M$$

dann ist zu zeigen, dass

$$\bar{f}(a_1, \dots, a_m) \equiv \bar{f}(b_1, \dots, b_m) \mod M$$

Zunächst betrachten wir das ganze nur für das Ideal D , und wollen dann den Beweis für beliebige Ideale führen dafür werden wir die Definition des Ultrafilters nutzen.

Fall D ist das Ideal:

$a \equiv b \pmod D$ bedeutet $a^{(n)} = b^{(n)}$ für fast alle n (für alle bis auf endlich viele)
dann gilt aber auch für $n \in \mathbb{N}$:

$$a_1^{(n)} = b_1^{(n)} \text{ und } \dots \text{ und } a_m^{(n)} = b_m^{(n)}$$

also gilt für fast alle n

$$f(a_1^{(n)}, \dots, a_m^{(n)}) = f(b_1^{(n)}, \dots, b_m^{(n)})$$

woraus folgt, dass $\bar{f}(a_1, \dots, a_m) \equiv \bar{f}(b_1, \dots, b_m) \pmod D$

□

1.10 Definition Für den Beweis von 1.9 mit beliebigem Ideal:

$$U = U_M = \{Z(a) : a \in M\} \text{ mit } Z(a) = \{n \in \mathbb{N} : a^{(n)} = 0\}$$

U ist ein Filter auf \mathbb{N} . Ist M maximales Ideal so ist U_M ein Ultrafilter, es gelten die folgenden Eigenschaften:

- (i) $\emptyset \notin U$
- (ii) $\mathbb{N} \in U$
- (iii) $Z_1, Z_2 \in U \Rightarrow Z_1 \cap Z_2 \in U$
- (iv) $Z \in U, Z \subset A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$
- (v) $A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$ oder $\mathbb{N} \setminus A \in U$
- (vi) $A \subset \mathbb{N}, |\mathbb{N} \setminus A| < \infty \Rightarrow A \in U$
- (vii) $a \equiv b \pmod M \iff \{n : a^{(n)} = b^{(n)}\} \in U_M$

Beweis. TODO: Eigenschaften einzeln Nachweisen

□

3 Eigenschaften von ${}^*\mathbb{R}$

2.1 Satz Die Anordnung \leq der reellen Zahlen lässt sich zu einer Anordnung von ${}^*\mathbb{R}$ fortsetzen

Beweis. TODO: Eigenschaften einzeln Nachweisen

□

2.2 Satz ${}^*\mathbb{R}$ besitzt ein Element das größer als alle reellen Zahlen ist.

$$\forall r \in \mathbb{R} : r \leq \omega \pmod M, \omega = (1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots)$$

Beweis. TODO: mithilfe von ${}^*||$

□

2.3 Definition $\mathfrak{D} = \{a \in {}^*\mathbb{R} : |a| \leq r, \text{ für ein } r \in \mathbb{R}\}$

Ist echter konvexer Teilring von ${}^*\mathbb{R}$, die Elemente von \mathfrak{D} nennt man *endliche Größen*.

Konvexität meint hier:

$$0 \leq b \leq a \in \mathfrak{D} \Rightarrow b \in \mathfrak{D}$$

Beweis. TODO: Nachrechnen

□

2.4 Definition $\mathfrak{M} = \{a \in {}^*\mathbb{R} : |a| \leq \epsilon, \text{ für alle } \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$

\mathfrak{M} ist konvexes Ideal in \mathfrak{D} , sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind

- (i) $a, b \in \mathfrak{M} \Rightarrow a + b \in \mathfrak{M}$
- (ii) $a \in \mathfrak{M}, b \in \mathfrak{D} \Rightarrow a * b \in \mathfrak{M}$
- (iii) $0 \leq b \leq a \in \mathfrak{M} \Rightarrow b \in \mathfrak{M}$

Beweis. TODO: Nachrechnen □

Die Elemente von \mathfrak{M} bezeichnen wir als *unendliche kleine* oder *infinitesimale* Größen. Alle anderen Elemente von ${}^*\mathbb{R}$, die nicht in \mathfrak{M} oder \mathfrak{D} sind bezeichnen wir als *unendliche* oder *infinite* Größen.

2.5 Definition $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ heißen *benachbart* wenn gilt:

$$a \approx b \iff a - b \in \mathfrak{M}$$

Das heißt a und b unterscheiden sich nur um eine infinitesimale Größe, \approx ist eine Äquivalenzrelation auf ${}^*\mathbb{R}$

Beweis. TODO: Beispiele aus elementary Calculus □

2.6 Satz Jede endliche Größe $a \in {}^*\mathbb{R}$ ist zu genau einer reellen Zahl r benachbart. r wird dann als der Standardteil $\text{st}(a)$ von a bezeichnet.

Beweis. TODO: Beweis □

2.7 Definition Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x \in \mathbb{R}$ seien $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$ und $h \in \mathbb{R}$ dann muss gelten:

$$\forall \epsilon \exists \delta \text{ sodass für alle } h \text{ gilt: } |h| \leq \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \leq \epsilon$$

Beweis. TODO: klarmachen, Skizze vorbereiten und andere Definitionen anschauen zum Beispiel mit $x - x_0$ □

2.8 Satz Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist im Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig falls für alle $h \approx 0$ gilt:

$${}^*f(x+h) \approx f(x)$$

Beweis. TODO: Beweis □