Nichtstandard Analysis 1

Klaus Philipp Theyssen

21.1.2020

1 Konstruktion von $^*\mathbb{R}$

1.1 Definition R ist der Ring der Folgen $a = (a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen

(i) Addition, Subtraktion und Multiplikation Komponentenweise, für $a, b \in R$

$$(a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, ...) \text{ und } (a_1 * b_1, a_2 * b_2, ...)$$

Wir wollen aus R den Körper *R konstruieren, dafür fehlt uns die Division.

1.3 Definition Sei D ein Ideal in R, für das gilt:

$$a \in D \iff a^{(n)} = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

1.5 Satz Jedes echte Ideal in einem Ring mit Einselement ist in einem maximalen Ideal enthalten. (Zornsches Lemma).

1.6 Definition Äquivalenzrelation auf R

$$a \equiv b \bmod M \iff a - b \in M$$

1.7 Satz I maximal $\iff R/I$ ist ein Körper

1.8 Definition $^*\mathbb{R} = R/M$

1.9 Satz Jede Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ lässt sich zu einer Funktion $^*f : ^*\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fortsetzen, sodass sie Eigenschaften im Rahmen der Logik 1. Stufe behält.

1.10 Definition

$$U = U_M = \{Z(a) : a \in M\} \text{ mit } Z(a) = \{n \in \mathbb{N} : a^{(n)} = 0\}$$

U ist ein *Filter auf* $\mathbb{N}$. Ist M maximales Ideal so ist U_M ein *Ultrafilter*, es gelten:

(i) $\emptyset \notin U$

(ii) $\mathbb{N} \in U$

(iii) $Z_1, Z_2 \in U \Rightarrow Z_1 \cap Z_2 \in U$

(iv) $Z \in U,\ Z \subset A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$

(v) $A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$ oder $\mathbb{N} \setminus A \in U$

(vi) $A \subset \mathbb{N},\ |\mathbb{N} \setminus A| < \infty \Rightarrow A \in U$

(vii) $a \equiv b \bmod M \iff \{n : a^{(n)} = b^{(n)}\} \in U_M$

2 Eigenschaften von *R

2.1 Satz Die Anordnung $\leqslant$ der reellen Zahlen lässt sich zu einer Anordnung von $^*\mathbb{R}$ fortsetzen.

2.2 Satz $^*\mathbb{R}$ besitzt ein Element das größer als alle reellen Zahlen ist.

$$\forall r \in \mathbb{R} : r \leqslant \omega \bmod M,\, \omega = (1, 2, 3, ..., n, n+1, ...)$$

2.3 Definition $\mathfrak{D} = \{a \in {}^*\mathbb{R} : |a| \leqslant r,\ \text{für ein } r \in \mathbb{R}\}$
Ist echter konvexer Teilring von $^*\mathbb{R}$, die Elemente von $\mathfrak{D}$ nennt man *endliche* Größen.
Konvexität meint hier:

$$0 \leqslant b \leqslant a \in \mathfrak{D} \Rightarrow b \in \mathfrak{D}$$

2.4 Definition $\mathfrak{M} = \{a \in {}^*\mathbb{R} : |a| \leqslant \epsilon,\ \text{für alle } \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$

$\mathfrak{M}$ ist konvexes Ideal in $\mathfrak{D}$, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind

(i) $a, b \in \mathfrak{M} \Rightarrow a + b \in \mathfrak{M}$

(ii) $a \in \mathfrak{M}, b \in \mathfrak{D} \Rightarrow a * b \in \mathfrak{M}$

(iii) $0 \leqslant b \leqslant a \in \mathfrak{M} \Rightarrow b \in \mathfrak{M}$

Die Elemente von $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir als *unendliche kleine* oder *infinitesimale* Größen. Alle anderen Elemente von $^*\mathbb{R}$, die nicht in $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{D}$ sind bezeichnen wir als *unendliche* oder *infinite* Größen.

2.5 Definition $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ heißen *benachbart* wenn gilt:

$$a \approx b \iff a - b \in \mathfrak{M}$$

Das heißt a und b unterscheiden sich nur um eine infinitesimale Größe, $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf $^*\mathbb{R}$

2.6 Satz *Jede endliche Größe $a \in {}^*\mathbb{R}$ ist zu genau einer reellen Zahl r benachbart. r wird dann als der Standardteil* $\mathrm{st}(a)$ *von a bezeichnet.*

2.7 Definition Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist im Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig wenn für alle $\epsilon \in \mathbb{R}^+,$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, sodass für alle $h \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|h| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \leqslant \epsilon$$

2.8 Satz *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist im Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig falls für alle $h \approx 0$ gilt:*

$$^*f(x+h) \approx f(x)$$