Geschichte, Tratsch

(i) Newton und Leibniz differntiale verwenden infinitesimale Größen

(ii) 19. Jh. Bolzano verbannt infinitesimale Größen aus Beweisen mit Epsilontik, Limes begriff

(iii) 1960er formale Konstruktion von $^*\mathbb{R}$ durch Abraham Robinson

Vorstellung als Funktion der Zeit Idee, das die infinitesimalen Größen variabel sind und mit der Zeit ab und zunehmen. Daher Darstellung als Funktion der Zeit (könnte man auch kontinuierlich machen aber diskret einfacher)

1 Konstruktion von $^*\mathbb{R}$

Definition 1.1 R ist der Ring der Folgen $a = (a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen

(i) Addition, Subtraktion und Multiplikation komponentenweise, für $a, b \in R$

$$(a^{(1)} \pm b^{(1)}, a^{(2)} \pm b^{(2)}, ...) \text{ und } (a^{(1)} * b^{(1)}, a^{(2)} * b^{(2)}, ...)$$

(ii) Die Reellen Zahlen werden kanonisch in R eingebettet, für $r \in \mathbb{R}$

$$r \mapsto (r, r, r, ...)$$

Nun wollen wir aus dem Ring R den Körper *R konstruieren, dafür fehlt uns die Division.

Definition 1.2 Ideal
Es sei R ein Ring.
Ein *Ideal* in R ist eine Teilmenge $I \subseteq R$, die bezüglich der Addition eine Untergruppe ist und folgende Eigenschaft hat:

$$\forall x \in I, r \in R : xr \in I$$

Beispiel Kern eines Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ ist ein Ideal.

$$\ker\varphi = \{r \in R | \varphi(r) = 0\} \subset R$$

denn ist $\varphi(r) = 0$ und $r' \in R$ dann ist auch

$$\varphi(r'r) = \varphi(r')\varphi(r) = 0, \text{ also } r'r \in \ker\varphi$$

Definition 1.3 Sei D das Ideal in R, für das gilt:

$$a \in D \iff a^{(n)} = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

Motivation Wir wählen D so weil wir uns wünschen das zwei Folgen gleich sind wenn sie ab einer gewissen Stelle nicht mehr voneinander unterscheiden, d.h. ihre differenz liegt in D.

Definition 1.4 Äquivalenzrelation auf R

$$a \equiv b \bmod D \iff a - b \in D$$

(i) reflexiv: $0 \in D$ da D additive Untergruppe von R:

$$0 = a - a \in D$$

(ii) symmetrisch: Wenn $a - b \in D$ dann:

$$0 = (a - b) + (b - a) \in D \Rightarrow b - a \in D$$

(iii) transitiv: Wenn $a - b, b - c \in M$ dann:

$$(a - b) + (b - c) = a - c \in D$$

Definition Faktorring Ist $(R, +, *)$ ein Ring und I ein (beidseitiges) Ideal von R, dann bildet die Menge $R/I = \{a + I | a \in R\}$ der Äquivalenzklassen modulo I mit den Verknüpfungen einen Ring:

(i) $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$

(ii) $(a + I) * (b + I) = a * b + I$

Diesen Ring nennt man Faktorring R modulo I (oder Restklassenring oder Quotientenring)

Bemerkung Der Faktorring R modulo D lässt uns jetzt zwei Folgen als gleich ansehen wenn fast alle ihrer Folgenglieder gleich sind. Allerding ist R/D kein Körper dafür brauchen wir ein maximales Ideal.

Definition 1.5 maximales Ideal
Ein Ideal $I \subset R$ heißt maximales Ideal, wenn zwischen I und R kein weiteres Ideal liegt:

$$I \subset J \subsetneq R \Rightarrow I = J$$

Satz 1.6 Jedes echte Ideal A in einem Ring R mit Einselement ist in einem maximalen Ideal enthalten. (Zornsches Lemma).

Wir beweisen die Aussage mit dem **Zornschen Lemma**: Eine Halbordnung in der jede Kette eine obere Schranke hat, besitzt ein maximales Element.

Kette: Sei (a, r) eine Halbordnung sind zwei Elemente einer Teilmenge b von a mit r vergleichbar so heißt b eine Kette in (a, r).

Beweis. Betrachte die Menge X aller Ideale B von R mit $A \subseteq B \neq R$. Sie ist wegen $A \in X$ nicht leer und bzgl. der Inklusion $\subseteq$ geordnet.

Es sei K eine Kette in X also:

$$B, B' \in K \Rightarrow B \subseteq B' \text{ oder } B' \subseteq B$$

Beh: $C := \bigcup_{B\in K} B$ ist ein Ideal von R.

Beweis C ist additive Untergruppe:
Es seien $a, a' \in C$ etwa $a \in B \in K$ und $a' \in B' \in K$, wegen $B \subseteq B'$ oder $B' \subseteq B$ folgt $a - a' \in B' \subseteq C$ oder $a - a' \in B \subseteq C$ (Untergruppenkrit. !!!)

Idealeigenschaft $ra, ar \in B \subseteq C$ also ist C ein Ideal.

Es gilt $A \subseteq C$, es gilt $1 \notin B$ für jedes $B \in K$, da sonst B bereits der ganze Ring wäre, also muss $1 \notin C$ gelten. Also $C \neq R$. Somit liegt C in K, ist eine obere Schranke in K. Folglich besitz $(X, \subseteq)$ mit dem Zornschen Lemma ein maximales Ideal M von R mit $A \subseteq M$. □

Satz 1.7 *I maximal $\iff$ R/I ist ein Körper*

Beweis. $\Rightarrow$:
Sei $M \subset R$ maximal und $a + M \neq 0_{R/M} = M$, also $a \notin M$.
$R = M + (a)$ ($M \subset M \cup \{a\} \neq R$ Widerspruch zu Maximalität von M)

$$R = M + (a) = \{m + ba |\ m \in M, b \in R\}$$
$$\iff \exists b \in R \text{ und } m \in M \text{ mit } ab + m = 1$$
$$\iff \exists b \in R \text{ mit } (a + M)(b + M) = 1 + M = 1_{R/M}$$

Somit ist R/M ein Körper da jedes Element ein Inverses besitzt:

$$(a + M)^{-1} = b + M$$

$\Leftarrow$:
Ist R/M ein Körper und $a \notin M$ dann git es ein $b \in R$ mit

$$(a + M)(b + M) = 1_{R/M}$$
$$\iff M + (a) = R$$

Ist also $M \subsetneqq I$ dann gilt $I = R$. □

Definition 1.8 Nichtstandard Zahlenbereich $^*\mathbb{R} = R/M$

Bemerkung Da jede konstante Folge $\neq 0$ in R invertierbar ist, wird der Unterkörper $\mathbb{R}$ von R bei der Restklassenbildung nicht beeinträchtigt, das heißt wir finden $\mathbb{R}$ als isomorphes Bild in R/M wieder.

Satz 1.9 *Jede Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ lässt sich zu einer Funktion $f : {}^*\mathbb{R}^m \to {}^*\mathbb{R}$ fortsetzen, sodass sie Eigenschaften die im Rahmen der Logik 1. Stufe ausdrückbar sind behält.*

Beispiele Stetigkeit bleibt erhalten

Beweis. Definiere zu $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine komponentenweise Fortsetzung $\overline{f}$ durch

$$\overline{f}(a_1, ..., a_m) = (f(a_1^{(1)}, ..., a_m^1), f(a_1^{(2)}, ..., a_m^2), ...)$$

wobei a_i für $1 \leqslant i \leqslant m$ Folgen aus R sind.
Dann setzen wir

$$^*f(a_1, ..., a_m) \equiv \overline{f}(a_1, ..., a_m) \bmod M$$

hier sind die Folgen $a_1, ..., a_m$ Vertreter von gewissen Restklassen in R/M Jetzt müssen wir die Wohldefiniertheit zeigen, also das diese Definition nicht von der Wahl der Vertreter in R/M abhängt. Seien

$$a_1 \equiv b_1, ..., a_m \equiv b_m \bmod M$$

dann ist zu zeigen, dass

$$\overline{f}(a_1, ..., a_m) \equiv \overline{f}(b_1, ..., b_m) \bmod M$$

Zunächst betrachten wir das ganze nur für das Ideal D, und wollen dann den Beweis für beliebige Ideale führen, dafür werden wir die Definition des Ultrafilters nutzen.

Fall D ist das Ideal:
$a \equiv b \bmod D$ bedeutet $a^{(n)} = b^{(n)}$ für fast alle n (für alle bis auf endlich viele) dann gilt aber auch ffa $n \in \mathbb{N}$:

$$a_1^{(n)} = b_1^{(n)} \text{ und ... und } a_m^{(n)} = b_m^{(n)}$$

also gilt für ffa n

$$f(a_1^{(n)}, ..., a_m^{(n)}) = f(b_1^{(n)}, ..., b_m^{(n)})$$

woraus folgt, dass $\overline{f}(a_1, ..., a_m) \equiv \overline{f}(b_1, ..., b_m) \bmod D$

□

Definition 1.10 Für den Beweis von 1.9 mit beliebigem Ideal:

$$U = U_M = \{Z(a) : a \in M\} \text{ mit } Z(a) = \{n \in \mathbb{N} : a^{(n)} = 0\}$$

Anmerkung: $U \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$

U ist ein *Filter auf* $\mathbb{N}$, es gelten die folgenden Eigenschaften:

(i) $\emptyset \notin U$

(ii) $\mathbb{N} \in U$

(iii) $Z_1, Z_2 \in U \Rightarrow Z_1 \cap Z_2 \in U$

(iv) $Z \in U,\ Z \subset A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$

Beweis.

(i) : Nullfolge ist in M da M Ideal von R somit ist $\mathbb{N} \in U$

(ii) : siehe (i)

(iii) : Seien a und b zwei Folgen in R/M und $c = a^2 + b^2$ dann ist $Z(c) = Z(a) \cap Z(b)$

(iv) : Sei $a \in M$ eine Folge mit $Z(a) = Z$ und $r \in R, r \neq 0$ mit $A = Z(r)$. Da a Teilmenge von r ist hat sie an keiner Stelle eine 0 an der r nicht auch eine 0 hat mit der Ideal Eigenschaft folgt sofort $ar \in M \Rightarrow Z(ar) = A \in U$

□

Hilfssatz 1.11

$$a \equiv b \bmod M \iff \{n : a^{(n)} = b^{(n)}\} \in U_M$$

Beweis. Generell gilt

$$a \in M \iff Z(a) \in U$$

Wir müssen $\Leftarrow$ zeigen, ($\Rightarrow$ ergibt sich wegen der Definition von U). Sei $Z(a) \in U$ wir müssen zeigen, dass $a \in M$ ist. Da $Z(a) \in U$ ist muss es ein $b \in M$ geben mit $Z(a) = Z(b)$ also haben a und b die gleichen 0-Stellen. Wir definieren die Folge $c = (c^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$

$$c^{(n)} = \begin{cases} a^{(n)}/b^{(n)} \text{ für } n \notin Z(b) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $a = bc \in M$
Es gilt $Z(a-b) = \{n : a^{(n)} = b^{(n)}\}$ somit ergibt sich für $a, b \in R$ die Eigenschaft

$$a \equiv b \bmod M \iff \{n : a^{(n)} = b^{(n)}\} \in U_M$$

□

Unabhängigkeitsbeweis für beliebige Ideale Es gilt $a_i \equiv b_i \bmod M$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und damit auch $\{n : a_i^{(n)} = b_i^{(n)}\} \in U$ für $1 \leqslant i \leqslant m$. Damit gilt auch mit (iii)

$$\bigcap_{i=1}^{m} \{n : a_i^{(n)} = b_i^{(n)}\} = \{n : a_1^{(n)} = b_1^{(n)}, ..., a_m^{(n)} = b_m^{(n)}\} \in U$$

Außerdem gilt, weil eine Funktion (rechtseindeutig):

$$\{n : a_1^{(n)} = b_1^{(n)}, ..., a_m^{(n)} = b_m^{(n)}\} \subset \{n : f(a_1^{(n)}, ..., a_m^{(n)}) = f(b_1^{(n)}, ..., b_m^{(n)})\}$$

mit (iv) folgt daraus

$$\{n : f(a_1^{(n)}, ..., a_m^{(n)}) = f(b_1^{(n)}, ..., b_m^{(n)})\} \in U$$

Mit unserer Folgerung $a \equiv b \bmod M \iff \{n : a^{(n)} = b^{(n)}\} \in U_M$ sind

$$^*f(a_1, ..., a_m) \equiv {}^*f(b_1, ..., b_m) \bmod M$$

Ist M maximales Ideal so ist U_M ein $Ultrafilter$, es gelten zusätzlich:

(v) $A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$ oder $\mathbb{N} \setminus A \in U$

(vi) $A \subset \mathbb{N},\ |\mathbb{N} \setminus A| < \infty \Rightarrow A \in U$

Beweis.

(v) Wähle Folge a aus Nullen und Einsen, so dass $Z(a) = A$.
Angenommen $A \notin U$ also $a \notin M$, da M maximal ist existiert $b \in M$ und $c \in R$ mit $1 = b + ac$. Daher $Z(b) = Z(1 - ac) \subset \mathbb{N} \setminus A$.
Wegen $b \in M$ ist $Z(b) \in U$ mit (iv) erhält man $\mathbb{N} \setminus A \in U$.

(vi) Wenn $\mathbb{N} \setminus A < \infty$ dann ist A unendlich und somit ist die Folge $a \in R$ aus Nullen und Einsen mit $Z(a) = A$ im Ideal D.

□

2 Eigenschaften von *R

Satz 2.2 Die Anordnung $\leqslant$ der reellen Zahlen lässt sich zu einer Anordnung von $^*\mathbb{R}$ fortsetzen

Beweis. Sei M ein maximales Ideal über D, damit ist sichergestellt, dass $^*\mathbb{R} = R/M$ ein Körper ist. Für $a, b \in R$ setzen wir

$$a \leqslant b \text{ mod } M :\Longleftrightarrow \{n : a^{(n)} \leqslant b^{(n)}\} \in U_M$$

Das bedeutet die Beziehung $a \leqslant b$ mod M soll gelten, falls die entsprechende Eigenschaft für sehr viele Komponenten gilt. Es bleibt wieder zu zeigen, dass die Definition unabhängig von den Vertretern ist.
Sei also $a \equiv a_1$ und $b \equiv b_1$ mod M dann gilt

$$\{n : a^{(n)} \leqslant b^{(n)}\} \cap \{n : a^{(n)} = a_1^{(n)}\} \cap \{n : b^{(n)} = b_1^{(n)}\} \subset \{n : a_1^{(n)} \leqslant b_1^{(n)}\}$$

Mit Voraussetzung und mit (iii) ist die linke Seite in U und dann mit (iv) auch die rechte.

Mit den Eigenschaften (v) und (iv) *(brauchen wir um von $<$ zu $\leqslant$ zu kommen)* von U folgt für beliebige $a, b \in R$:

$$\{n : a^{(n)} \leqslant b^{(n)}\} \in U \text{ oder } \{n : b^{(n)} \leqslant a^{(n)}\} \in U$$

□

WEGLASSEN Eigenschaften Anordnung Beweise mithilfe der Filter-Eigenschaften von U_M

(i) $a \leqslant a$
Beweis: hier ist $a^{(n)} = a^{(n)}$ und damit folgt die schwächere Aussage

(ii) $a \leqslant b, b \leqslant a \Rightarrow a = b$
Beweis: $\forall n$ gilt $a^{(n)} \leqslant b^{(n)}$ und $b^{(n)} \leqslant a^{(n)}$ also muss $\forall n$ gelten $a^{(n)} = b^{(n)}$ und damit $a = b$

(iii) $a \leqslant b, b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$

(iv) $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$

(v) $0 \leqslant a, 0 \leqslant b \Rightarrow 0 \leqslant ab$

Satz 2.2 $^*\mathbb{R}$ besitzt ein Element ω, das größer als alle reellen Zahlen ist.

$$\omega = (1, 2, 3, ..., n, n+1, ...)$$

$$\forall r \in \mathbb{R} : r \leqslant \omega \bmod M$$

Beweis. Wegen (vi) gilt $\{n : r^{(n)} \leqslant \omega^{(n)}\} = \{n : r \leqslant n\} \in U_M$.
$\{n : r \leqslant n\}$ hat unendlich viele Elemente, wenn $r = 0$ ist, dann $\{n : r \leqslant n\} = \mathbb{N}$, damit ist $|\mathbb{N} \setminus A| < \infty$ da r konstant und somit nur endlich viele Folgenglieder größer als ω □

Definition 2.3 $\mathfrak{D} = \{a \in {}^*\mathbb{R} : |a| \leqslant r,\ \text{für ein } r \in \mathbb{R}\}$
Ist echter konvexer Teilring von $^*\mathbb{R}$, die Elemente von $\mathfrak{D}$ nennt man *endliche* Größen.
Konvexität bedeutet hier:

$$0 \leqslant b \leqslant a \in \mathfrak{D} \Rightarrow b \in \mathfrak{D}$$

Beweis. Für die Definition haben wir die Fortsetzung $^*|\ |$ des Absolutbetrages der reellen Zahlen verwendet.

$$^*|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } 0 \leqslant a \\ -a, & \text{falls } a \leqslant 0 \end{cases}$$

Das die Definition von $^*|\ |$ Sinn macht sieht man so ein: Gilt für eine Folge $0 \leqslant a$ dann heißt das $\{n : 0 \leqslant a^{(n)}\} \in U$ dann ist aber auch die Obermenge $\{n : |a^{(n)}| = a^{(n)}\}$ Element von U. Mit Hilfssatz 1.11 folgt $|a| \equiv a \bmod M$.
($a \leqslant 0$ lässt sich analog schließen)

Die Gleichung und die Ungleichung müsste man modulo M verstehen, wollen wir aber im folgenden weglassen und M fest gewählt haben.

□

Definition 2.4 $\mathfrak{M} = \{a \in {}^*\mathbb{R} : |a| \leqslant \epsilon,\ \text{für alle } \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$

$\mathfrak{M}$ ist konvexes Ideal in $\mathfrak{D}$, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind

(i) $a, b \in \mathfrak{M} \Rightarrow a + b \in \mathfrak{M}$

(ii) $a \in \mathfrak{M}, b \in \mathfrak{D} \Rightarrow a * b \in \mathfrak{M}$

(iii) $0 \leqslant b \leqslant a \in \mathfrak{M} \Rightarrow b \in \mathfrak{M}$

Beweis. $\mathfrak{M}$ besteht nicht nur aus der Null, denn wegen $n \leqslant \omega$ folgt $0 \leqslant 1/\omega \leqslant 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ also ist $1/\omega \in \mathfrak{M}$.

$\square$

Die Elemente von $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir als $unendliche\ kleine$ oder $infinitesimale$ Größen. Alle anderen Elemente von $^*\mathbb{R}$, die nicht in $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{D}$ sind bezeichnen wir als $unendliche$ oder $infinite$ Größen.

Definition 2.5 $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ heißen *benachbart* wenn gilt:

$$a \approx b \iff a - b \in \mathfrak{M}$$

Das heißt a und b unterscheiden sich nur um eine infinitesimale Größe, $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf $^*\mathbb{R}$

Satz 2.6 *Jede endliche Größe $a \in {}^*\mathbb{R}$ ist zu genau einer reellen Zahl r benachbart. r wird dann als der Standardteil $\mathrm{st}(a)$ von a bezeichnet.*

Beweis. Existenz
Wir betrachten die Mengen $X_a = \{r \in \mathbb{R} : r \leqslant a\}$ und $Y_a = \{s \in \mathbb{R} : a \leqslant s\}$ damit definieren X_a und Y_a einen Schnitt in $\mathbb{R}$. Wegen der Schnittvollständigkeit *(meint jeder schnitt wird durch reelle Zahl repräsentiert, es gibt keine Lücken in der Zahlenstrahl)* von $\mathbb{R}$ gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $r \leqslant t \leqslant s$ für $r \in X_a, s \in Y_a$. Damit erhält man $|t - a| \leqslant \epsilon$ für alle $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Also $a \approx t \in \mathbb{R}$

Eindeutigkeit
Angenommen es sei $t_1 \approx a \approx t_2$ für $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ dann folgt $t_1 \approx t_2$ das heißt $|t_1 - t_2| < \epsilon$ für alle $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Das ist nur für $t_1 - t_2 = 0$ möglich. $\square$

Anmerkung $st : \mathfrak{D} \to \mathbb{R}$ ist ein ordnungserhaltender Ringhomomorphismus mit Kern $\mathfrak{M}$ und $\mathrm{st}|\mathbb{R} = \mathrm{id}$. Daraus folgt das wir mit den endlichen Größen in $^*\mathbb{R}$ alle Körperoperationen dürchführen können wenn wir $\approx$ statt $=$ schreiben und nur durch $a \in \mathfrak{D}$ dividieren wenn gilt $a \not\approx 0$.

Definition 2.7 Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x \in \mathbb{R}$ seien $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$ und $h \in \mathbb{R}$ dann muss gelten:

$$\forall \epsilon\ \exists \delta \textit{sodass für alle } h \textit{ gilt: } |h| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \leqslant \epsilon$$

Alternative Definiton:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : (|x - x_0|) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

Beweis. Intuition: Zu jeder Änderung ϵ des Funktionswertes, die man fest wählt, kann man eine maximale Änderung δ im Argument finden sodass die Vorgabe durch ϵ eingehalten wird.

Skizze $\square$

Satz 2.8 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist im Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig* $\iff$ *für alle $h \approx 0$ gilt:*

$$^*f(x+h) \approx f(x)$$

Bemerkung Im folgenden Beweis ist es wichtig sich klar zu machen ob man Folgen also Elemente in $^*\mathbb{R}$ oder reelle Zahlen miteinander betrachtet bzw. vergleichen.

Beweis. Beweis $\Rightarrow$:
Mit Satz 1.9 lässt sich f zu Funktion $^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ fortsetzen sodass für $a = (a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$^*f(a) \equiv (f(a^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}} \bmod M$$

Wir haben angenommen, dass f stetig ist, sei $h \in {}^*\mathbb{R}$ mit $|h| \leqslant \delta$ *(delta ist eine konstante Folge).*

Mit der Anordnung in $^*\mathbb{R}$ gilt $\{n : |h^{(n)}| \leqslant \delta\} \in U$.

Wegen der Stetigkeit von f gilt $\{n : |h^{(n)}| \leqslant \delta\} \subset \{n : |f(x+h^{(n)}) - f(x)) \leqslant \epsilon\}$ und wegen Filter-Eigenschaft (iv) ist auch die letztere Menge in U, das heißt es gilt $|^*f(x+h) - {}^*f(x)| \leqslant \epsilon$. Ist $h \in \mathfrak{M}$ (also $h \approx 0$) so ist $|h| \leqslant \delta$ für alle $\delta \in \mathbb{R}^+$ richtig.

Damit auch die Folgerung das $|^*f(x+h) - {}^*f(x)| \leqslant \epsilon$ für alle $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gilt. Somit unterscheiden sich $^*f(x+h)$ und $^*f(x)$ nur um eine infinitesimale Größe, was heißt:

$$^*f(x+h) \approx *f(x)$$

Beweis $\Leftarrow$: durch Kontraposition
Wir nehmen also an f ist in x nicht stetig.

$$\exists\epsilon\forall\delta\exists h : |h| \leqslant \delta \wedge |f(x+h) - f(x)| > \epsilon$$

Dann gibt es ein $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, sodass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $h^{(n)} \in \mathbb{R}$ existiert mit $|h^{(n)}| \leqslant \frac{1}{n}$ und $|f(x+h^{(n)}) - f(x)| \geq \epsilon$.

Setzen wir nun $h = (h^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ so gilt $|h| \leqslant 1/\omega$ wegen $1/\omega \in \mathfrak{M}$ gilt auch $h \in \mathfrak{M}$, d.h. $h \approx 0$.

Wir haben $h^{(n)}$ so gewählt das gilt $\mathbb{N} = \{n : |f(x+h^{(n)}) - f(x)| \geq \epsilon\} \in U$, das heißt *(wegen Anordnung von* $^*\mathbb{R}$) $|^*f(x+h) - f(x)| \geq \epsilon$ das ist ein Widerspruch zur Vorraussetzung $^*f(x+h) \approx f(x)$ für $h \approx 0$.

□