Nichtstandard Analysis 1
21.1.2020
Klaus Philipp Theyssen

1 Konstruktion von *ℝ

Definition 1.1 R ist der Ring der Folgen $a = (a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen

(i) Addition, Subtraktion und Multiplikation komponentenweise, für $a, b \in R$

$$(a^{(1)} \pm b^{(1)}, a^{(2)} \pm b^{(2)}, ...) \text{ und } (a^{(1)} * b^{(1)}, a^{(2)} * b^{(2)}, ...)$$

Wir wollen aus R den Körper *ℝ konstruieren, dafür fehlt uns die Division.

Definition 1.3 Sei D das Ideal in R, für das gilt:

$$a \in D \iff a^{(n)} = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

Satz 1.5 Jedes echte Ideal in einem Ring mit Einselement ist in einem maximalen Ideal enthalten. (mithilfe des Zornsches Lemma).

Definition 1.6 Äquivalenzrelation auf R

$$a \equiv b \bmod M \iff a - b \in M$$

Satz 1.7 I maximal $\iff R/I$ ist ein Körper

Definition 1.8 Der Non-Standard Zahlenbereich: $^*\mathbb{R} = R/M$

Satz 1.9 Jede Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ lässt sich zu einer Funktion $^*f : {}^*\mathbb{R}^m \to {}^*\mathbb{R}$ fortsetzen, sodass sie Eigenschaften die im Rahmen der Logik 1. Stufe ausdrückbar sind behält.

Definition 1.10

$$U = U_M = \{Z(a) : a \in M\} \text{ mit } Z(a) = \{n \in \mathbb{N} : a^{(n)} = 0\}$$

U ist ein *Filter auf* ℕ, es gelten die folgenden Eigenschaften:

(i) $\emptyset \notin U$

(ii) $\mathbb{N} \in U$

(iii) $Z_1, Z_2 \in U \Rightarrow Z_1 \cap Z_2 \in U$

(iv) $Z \in U,\ Z \subset A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$

Ist M maximales Ideal so ist U_M ein $Ultrafilter$, es gelten zusätzlich:

(v) $A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$ oder $\mathbb{N} \setminus A \in U$

(vi) $A \subset \mathbb{N},\ |\mathbb{N} \setminus A| < \infty \Rightarrow A \in U$

Hilfssatz 1.11 $a \equiv b \bmod M \iff \{n : a^{(n)} = b^{(n)}\} \in U_M$

2 Eigenschaften von *R

Satz 2.1 Die Anordnung $\leqslant$ der reellen Zahlen lässt sich zu einer Anordnung von $^*\mathbb{R}$ fortsetzen. Für $a, b \in R$ setzen wir

$$a \leqslant b \bmod M :\iff \{n : a^{(n)} \leqslant b^{(n)}\} \in U_M$$

Satz 2.2 $^*\mathbb{R}$ besitzt ein Element ω das größer als alle reellen Zahlen ist.

$$\forall r \in \mathbb{R} : r \leqslant \omega \bmod M, \, \omega = (1, 2, 3, ..., n, n+1, ...)$$

Definition 2.3 $\mathfrak{D} = \{a \in {^*\mathbb{R}} : |a| \leqslant r, \text{ für ein } r \in \mathbb{R}\}$
Ist echter konvexer Teilring von $^*\mathbb{R}$, die Elemente von $\mathfrak{D}$ nennt man *endliche* Größen.
Konvexität bedeutet hier:

$$0 \leqslant b \leqslant a \in \mathfrak{D} \Rightarrow b \in \mathfrak{D}$$

Definition 2.4 $\mathfrak{M} = \{a \in {^*\mathbb{R}} : |a| \leqslant \epsilon, \text{ für alle } \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$

$\mathfrak{M}$ ist konvexes Ideal in $\mathfrak{D}$, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind

(i) $a, b \in \mathfrak{M} \Rightarrow a + b \in \mathfrak{M}$

(ii) $a \in \mathfrak{M}, b \in \mathfrak{D} \Rightarrow a * b \in \mathfrak{M}$

(iii) $0 \leqslant b \leqslant a \in \mathfrak{M} \Rightarrow b \in \mathfrak{M}$

Die Elemente von $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir als *unendliche kleine* oder $infinitesimale$ Größen. Alle anderen Elemente von $^*\mathbb{R}$, die nicht in $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{D}$ sind bezeichnen wir als *unendliche* oder $infinite$ Größen.

Definition 2.5 $a, b \in {^*\mathbb{R}}$ heißen *benachbart* wenn gilt:

$$a - b \in \mathfrak{M}, \text{ wir schreiben } a \approx b$$

Das heißt a und b unterscheiden sich nur um eine infinitesimale Größe, $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf $^*\mathbb{R}$

Satz 2.6 *Jede endliche Größe* $a \in {^*\mathbb{R}}$ *ist zu genau einer reellen Zahl* r *benachbart.* r *wird dann als der Standardteil* $\mathrm{st}(a)$ *von* a *bezeichnet.*

Definition 2.7 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist im Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig wenn für alle $\epsilon \in \mathbb{R}^+,$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, sodass für alle $h \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|h| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \leqslant \epsilon$$

Satz 2.8 *Die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist im Punkt* $x \in \mathbb{R}$ *genau dann stetig, wenn für alle* $h \approx 0$ *gilt:*

$$^*f(x+h) \approx f(x)$$