Nichtstandard Analysis 1

Klaus Philipp Theyssen

21.1.2020

Geschichte: Das Rechnen mit unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen wie den Leibnizschen Differentialen dy und dx in früheren Jahrhunderten der Mathematik und Physik selbstverständlich, aber auch umstritten. Konsitenzfragen wie heute kamen erst später, damals reichte den Mathematikern mit solchen Größen zu rechnen und richtige Ergebnisse zu erhalten.
Durch die Epsilontik, den Aufbau der Analysis auf dem Limesbegriff, von Weierstraß wurden diese Größen aus exakten Beweisen verbannt.
Abraham Robinson (1961) gibt diesen Größen eine formal korrekte Basis durch Konstruktion von $^*\mathbb{R}$.

TODO: Limes Def

Vergleich von Limes des Differenzenquotienten und Differentialquotient df/dx: df/dx existiert in $^*\mathbb{R}$ immer er muss aber nicht für jedes dx endlich sein und falls er endlich ist für jedes dx muss sein Standardteil nicht unabhängig sein von der Wahl von dx, falls dies jedoch der Fall ist existiert der Limes des Differenzenquotienten und ist gleich dem Standardteil von df/dx

Vorstellung als Funktion der Zeit Idee, das die infinitesimalen Größen variabel sind und mit der Zeit ab und zunehmen. Daher Darstellung als Funktion der Zeit (könnte man auch kontinuierlich machen aber diskret einfacher)

1 Konstruktion von $^*\mathbb{R}$

1.1 Definition R ist der Ring der Folgen $a = (a^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen

(i) Addition, Subtraktion und Multiplikation Komponentenweise, für $a, b \in R$

$$(a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, ...) \text{ und } (a_1 * b_1, a_2 * b_2, ...)$$

(ii) Die Reellen Zahlen werden kanonisch in R eingebettet, für $r \in \mathbb{R}$

$$r \mapsto (r, r, r, ...)$$

Nun wollen wir aus R den Körper *R konstruieren, dafür fehlt uns die Division.

1.2 Definition Ideal
Es sei R ein Ring.
Ein *Ideal* in R ist eine Teilmenge $I \subseteq R$, die bezüglich der Addition eine Untergruppe ist und folgende Eigenschaft hat:

$$\forall x \in I, r \in R : xr \in I$$

Beispielsweise ist der Kern eines Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ ein Ideal.

1.3 Definition Sei D ein Ideal in R, für das gilt:

$$a \in D \iff a^{(n)} = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

1.4 Definition maximales Ideal
Ein Ideal $I \subset R$ heißt maximales Ideal, wenn zwischen I und R kein weiteres Ideal liegt:

$$I \subset J \subsetneqq R \Rightarrow I = J$$

1.5 Satz Jedes echte Ideal A in einem Ring R mit Einselement ist in einem maximalen Ideal enthalten. (Zornsches Lemma).

Wir beweisen die Aussage mit dem **Zornschen Lemma**: Eine Halbordnung in der jede Kette eine obere Schranke hat, besitzt ein maximales Element.

Kette: Sei (a, r) eine Halbordnung sind zwei Elemente einer Teilmenge b von a mit r vergleichbar so heißt b eine Kette in (a, r).

Beweis. Die Menge X aller Ideale B von R mit $A \subseteq B \neq R$ ist wegen $A \in X$ nicht leer und bzgl. der Inklusion $\subseteq$ geordnet. Es sei K eine Kette in X also:

$$B, B' \in K \Rightarrow B \subseteq B' \text{ oder } B' \subseteq B$$

Beh: $C := \bigcup_{B \in K} B$ ist ein Ideal von R.
Es seien $a, a' \in C$ etwa $a \in B \in K$ und $a' \in B' \in K$, wegen $B \subseteq B'$ oder $B' \subseteq B$ folgt $a - a' \in B' \subseteq C$ oder $a - a' \in B \subseteq C$ (Untergruppenkrit. !!!) und $ra, ar \in B \subseteq C$ also ist C ein Ideal.

Es gilt $A \subseteq C$, es gilt $1 \notin B$ für jedes $B \in K$, da sonst B bereits der ganze Ring wäre, also muss $1 \notin C$ gelten. Also $C \neq R$. Somit liegt C in K, ist eine obere Schranke in K. Folglich ist $(X, \subseteq)$ induktiv geordnet und besitzt mit dem Zornschen Lemma ein maximales Ideal M von R mit $A \subseteq M$. □

1.6 Definition Äquivalenzrelation auf R

$$a \equiv b \bmod M \iff a - b \in M$$

(i) reflexiv: $0 \in M$ da M additive Untergruppe von R:

$$0 = a - a \in M$$

(ii) symmetrisch: Wenn $a - b \in M$ dann:

$$0 = (a - b) + (b - a) \in M \Rightarrow b - a \in M$$

(iii) transitiv: Wenn $a - b, b - c \in M$ dann:

$$(a - b) + (b - c) = a - c \in M$$

Definition Faktorring TODO

1.7 Satz I maximal $\iff$ R/I ist ein Körper

Beweis. $\Rightarrow$:
Sei $M \subset R$ maximal und $a + M \neq 0_{R/M} = M$, also $a \notin M$.
$R = M + (a)$ ($M \subset M \cup \{a\} \neq R$ Widerspruch zu Maximalität von M)

$$M + (a) = \{m + ba| \ w \in M, b \in R\}$$
$$\iff \exists b \in R \text{ und } m \in M \text{ mit } ab + w = 1$$
$$\iff \exists b \in R \text{ mit } (a + M)(b + M) = 1 + M = 1_{R/M}$$

Somit ist R/M ein Körper da jedes Element ein Inverses besitzt:

$$(a + M)^{-1} = b + M$$

$\Leftarrow$:
Ist R/M ein Körper und $a \notin M$ dann git es ein $b \in R$ mit

$$(a + M)(b + M) = 1_{R/M}$$
$$\iff M + (a) = R$$

Ist also $M \subsetneqq I$ dann gilt $I = R$. □

1.8 Definition $^*\mathbb{R} = R/M$

Bemerkung Da jede konstante Folge $\neq 0$ in R invertierbar ist, wird der Unterkörper $\mathbb{R}$ von R bei der Restklassenbildung nicht beeinträchtigt, das heißt wir finden $\mathbb{R}$ als isomorphes Bild in R/M wieder.

1.9 Satz Jede Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ lässt sich zu einer Funktion $f :^*\mathbb{R}^m \to {}^*\mathbb{R}$ fortsetzen, sodass sie Eigenschaften im Rahmen der Logik 1. Stufe behält.

Beweis. Definiere zu $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine komponentenweise Fortsetzung $\overline{f}$ durch

$$\overline{f}(a_1, ..., a_m) = (f(a_1^{(1)}, ..., a_m^1), f(a_1^{(2)}, ..., a_m^2), ...)$$

wobei a_i für $1 \leqslant i \leqslant m$ Folgen aus R sind.
Dann setzen wir

$$^*f(a_1, ..., a_m) \equiv \overline{f}(a_1, ..., a_m) \bmod M$$

hier sind die Folgen $a_1, ..., a_m$ Vertreter von gewissen Restklassen in R/M Jetzt müssen wir die Wohldefiniertheit zeigen, also das diese Definition nicht von der Wahl der Vertreter in R/M abhängt. Seien

$$a_1 \equiv b_1, ..., a_m \equiv b_m \bmod M$$

dann ist zu zeigen, dass

$$\overline{f}(a_1, ..., a_m) \equiv \overline{f}(b_1, ..., b_m) \bmod M$$

Zunächst betrachten wir das ganze nur für das Ideal D, und wollen dann den Beweis für beliebige Ideale führen, dafür werden wir die Definition des Ultrafilters nutzen.

Fall D ist das Ideal:
$a \equiv b \bmod D$ bedeutet $a^{(n)} = b^{(n)}$ für fast alle n (für alle bis auf endlich viele) dann gilt aber auch ffa $n \in \mathbb{N}$:

$$a_1^{(n)} = b_1^{(n)} \text{ und ... und } a_m^{(n)} = b_m^{(n)}$$

also gilt für ffa n

$$f(a_1^{(n)}, ..., a_m^{(n)}) = f(b_1^{(n)}, ..., b_m^{(n)})$$

woraus folgt, dass $\overline{f}(a_1, ..., a_m) \equiv \overline{f}(b_1, ..., b_m) \bmod D$

□

1.10 Definition Für den Beweis von 1.9 mit beliebigem Ideal:

$$U = U_M = \{Z(a) : a \in M\} \text{ mit } Z(a) = \{n \in \mathbb{N} : a^{(n)} = 0\}$$

U Ist ein Filter auf $\mathbb{N}$. Ist M maximales Ideal so ist U_M ein Ultrafilter, es gelten die folgenden Eigenschaften:

Hier M beliebiges Ideal und U Filter

(i) $\emptyset \notin U$

(ii) $\mathbb{N} \in U$

(iii) $Z_1, Z_2 \in U \Rightarrow Z_1 \cap Z_2 \in U$

(iv) $Z \in U,\ Z \subset A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$

Ab hier M maximales Ideal und U_M Ultrafilter

(v) $A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$ oder $\mathbb{N} \setminus A \in U$

(vi) $A \subset \mathbb{N},\ |\mathbb{N} \setminus A| < \infty \Rightarrow A \in U$

Hier M wieder beliebiges Ideal und U Filter

(vii) $a \equiv b \bmod M \iff \{n : a^{(n)} = b^{(n)}\} \in U_M$

Beweis.

Hier M beliebiges Ideal und U Filter

(i) : Nullfolge ist in M da M Ideal von R somit ist $\mathbb{N} \in U$

(ii) : siehe (i)

(iii) : Seien a und b zwei Folgen in R/M und $c = a^2 + b^2$ dann ist $Z(c) = Z(a) \cap Z(b)$

(iv) : Sei $a \in M$ eine Folge mit $Z(a) = Z$ und $r \in R, r \neq 0$ mit $A = Z(r)$. Da a Teilmenge von r ist hat sie an keiner Stelle eine 0 an der r nicht auch eine 0 hat mit der Ideal Eigenschaft folgt sofort $ar \in M \Rightarrow Z(ar) = A \in U$

Ab hier M maximales Ideal und U_M Ultrafilter

(v) : Wähle Folge a aus Nullen und Einsen, so dass $Z(a) = A$.
Angenommen $A \notin U$ also $a \notin M$, da M maximal ist existiert $b \in M$ und $c \in R$ mit $1 = b + ac$. Daher $Z(b) = Z(1 - ac) \subset \mathbb{N} \setminus A$ Wegen $b \in M$ ist $Z(b) \in U$ mit (iv) erhält man $\mathbb{N} \setminus A \in U$.

(vi) : TODO

(vii) : Generell gilt

$$a \in M \iff Z(a) \in U$$

Wir müssen $\Leftarrow$ zeigen, ($\Rightarrow$ ergibt sich wegen der Definition von U). Sei $Z(a) \in U$ wir müssen zeigen, dass $a \in M$ ist. Da $Z(a) \in U$ ist muss es ein $b \in M$ geben mit $Z(a) = Z(b)$ also haben a und b die gleichen 0-Stellen. Wir definieren die Folge $c = (c^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$

$$c^{(n)} = \begin{cases} a^{(n)}/b^{(n)} \text{ für } n \notin Z(b) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $a = bc \in M$
Es gilt $Z(a - b) = \{n : a^{(n)} = b^{(n)}\}$ somit ergibt sich für $a, b \in R$ die Eigenschaft

$$a \equiv b \bmod M \iff \{n : a^{(n)} = b^{(n)}\} \in U_M$$

□

Unabhängigkeitsbeweis für beliebige Ideale Es gilt $a_i \equiv b_i \bmod M$ für $1 \leqslant i \leqslant m$ und damit auch $\{n : a_i^{(n)} = b_i^{(n)}\} \in U$ für $1 \leqslant i \leqslant m$. Damit gilt auch

$$\bigcap_{i=1}^{m} \{n : a_i^{(n)} = b_i^{(n)}\} = \{n : a_1^{(n)} = b_1^{(n)}, ..., a_m^{(n)} = b_m^{(n)}\} \in U$$

Außerdem gilt, weil eine Funktion einem Element immer das gleiche Element zuordnet (rechtseindeutig).

$$\{n : a_1^{(n)} = b_1^{(n)}, ..., a_m^{(n)} = b_m^{(n)}\} \subset \{n : f(a^{(n)_1, ..., a_m^n}) = f(b^{(n)_1, ..., b_m^n})\}$$

mit (iv) folgt daraus

$$\{n : f(a^{(n)_1, ..., a_m^n}) = f(b^{(n)_1, ..., b_m^n})\} \in U$$

Mit (vi) sind

$$^*f(a_1, ..., a_m) \equiv {}^*f(b_1, ..., b_m) \bmod M$$

Fortsetzung zweier Funktionen Es gilt für zwei Funktionen f und g:

$$^*(fg) = {}^*f{}^*g$$

2 Eigenschaften von *R

2.1 Satz Die Anordnung $\leqslant$ der reellen Zahlen lässt sich zu einer Anordnung von $^*\mathbb{R}$ fortsetzen

Beweis. TODO: Eigenschaften einzeln Nachweisen □

2.2 Satz $^*\mathbb{R}$ besitzt ein Element das größer als alle reellen Zahlen ist.

$$\forall r \in \mathbb{R} : r \leqslant \omega \bmod M,\ \omega = (1, 2, 3, ..., n, n+1, ...)$$

Beweis. TODO: mithilfe von $^*|\ |$ □

2.3 Definition $\mathfrak{D} = \{a \in {}^*\mathbb{R} : |a| \leqslant r, \text{ für ein } r \in \mathbb{R}\}$
Ist echter konvexer Teilring von $^*\mathbb{R}$, die Elemente von $\mathfrak{D}$ nennt man *endliche* Größen.
Konvexität meint hier:

$$0 \leqslant b \leqslant a \in \mathfrak{D} \Rightarrow b \in \mathfrak{D}$$

Beweis. TODO: Nachrechnen □

2.4 Definition $\mathfrak{M} = \{a \in {}^*\mathbb{R} : |a| \leqslant \epsilon, \text{ für alle } \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$

$\mathfrak{M}$ ist konvexes Ideal in $\mathfrak{D}$, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind

(i) $a, b \in \mathfrak{M} \Rightarrow a + b \in \mathfrak{M}$

(ii) $a \in \mathfrak{M}, b \in \mathfrak{D} \Rightarrow a * b \in \mathfrak{M}$

(iii) $0 \leqslant b \leqslant a \in \mathfrak{M} \Rightarrow b \in \mathfrak{M}$

Beweis. TODO: Nachrechnen □

Die Elemente von $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir als *unendliche kleine* oder $infinitesimale$ Größen. Alle anderen Elemente von $^*\mathbb{R}$, die nicht in $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{D}$ sind bezeichnen wir als *unendliche* oder $infinite$ Größen.

2.5 Definition $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ heißen *benachbart* wenn gilt:

$$a \approx b \iff a - b \in \mathfrak{M}$$

Das heißt a und b unterscheiden sich nur um eine infinitesimale Größe, $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf $^*\mathbb{R}$

Beweis. TODO: Ein Beispiel aus elementary Calculus □

2.6 Satz *Jede endliche Größe $a \in {}^*\mathbb{R}$ ist zu genau einer reellen Zahl r benachbart. r wird dann als der Standardteil* $\mathrm{st}(a)$ *von a bezeichnet.*

Beweis. TODO: Beweis □

2.7 Definition Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x \in \mathbb{R}$ seien $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$ und $h \in \mathbb{R}$ dann muss gelten:

$$\forall \epsilon \; \exists \delta \textit{sodass für alle } h \textit{ gilt: } |h| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \leqslant \epsilon$$

Beweis. TODO: klarmachen, Skizze vorbereiten und andere Definitionen anschauen zum beispiel mit $x - x_0$ □

2.8 Satz *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist im Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig falls für alle $h \approx 0$ gilt:*

$$^*f(x+h) \approx f(x)$$

Beweis. TODO: Beweis □