

# Nichtstandard Analysis 1

Klaus Philipp Theyssen

21.1.2020

## 1 Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$

**1.1 Definition**  $R$  ist der Ring der Folgen  $a = (a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen

(i) Addition, Subtraktion und Multiplikation Komponentenweise, für  $a, b \in R$

$$(a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \dots) \text{ und } (a_1 * b_1, a_2 * b_2, \dots)$$

(ii) Die Reellen Zahlen werden kanonisch in  $R$  eingebettet, für  $r \in \mathbb{R}$

$$r \mapsto (r, r, r, \dots)$$

Nun wollen wir aus  $R$  den Körper  ${}^*\mathbb{R}$  konstruieren, dafür fehlt uns die Division.

**1.2 Definition** Ideal

**1.3 Definition** Sei  $D$  ein Ideal in  $R$ , für das gilt:

$$a \in D \iff a^{(n)} = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

**1.4 Definition** maximales Ideal

**1.5 Satz** Existenz eines maximalen Ideals  $M$  in  $R$ , das  $D$  umfasst (Zornsches Lemma)

**1.6 Definition** Äquivalenzrelation auf  $R$

$$a \equiv b \text{ mod } M \iff a - b \in M$$

**1.7 Satz**  $I$  maximal  $\iff R/I$  ist ein Körper

**1.8 Definition**  ${}^*\mathbb{R} = R/M$

**1.9 Satz** Jede Funktion  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  lässt sich zu einer Funktion  ${}^*f : {}^*\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  fortsetzen, sodass sie Eigenschaften im Rahmen der Logik 1. Stufe behält.

### 1.10 Definition

$$U = U_M = \{Z(a) : a \in M\} \text{ mit } Z(a) = \{n \in \mathbb{N} : a^{(n)} = 0\}$$

Man bezeichnet  $U_M$  als Ultrafilter, es gelten die folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\emptyset \notin U$
- (ii)  $\mathbb{N} \in U$
- (iii)  $Z_1, Z_2 \in U \Rightarrow Z_1 \cap Z_2 \in U$
- (iv)  $Z \in U, Z \subset A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$
- (v)  $A \subset \mathbb{N} \Rightarrow A \in U$  oder  $\mathbb{N} \setminus A \in U$
- (vi)  $A \subset \mathbb{N}, |\mathbb{N} \setminus A| < \infty \Rightarrow A \in U$
- (vii)  $a \equiv b \pmod{M} \iff \{n : a^{(n)} = b^{(n)}\} \in U_M$

## 2 Eigenschaften von ${}^*\mathbb{R}$

**2.1 Satz** Die Anordnung  $\leq$  der reellen Zahlen lässt sich zu einer Anordnung von  ${}^*\mathbb{R}$  fortsetzen

**2.2 Satz**  ${}^*\mathbb{R}$  besitzt ein Element das größer als alle reellen Zahlen ist.

$$\forall r \in \mathbb{R} : r \leq \omega \pmod{M}, \omega = (1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots)$$

**2.3 Definition**  $\mathfrak{D} = \{a \in {}^*\mathbb{R} : |a| \leq r, \text{ für ein } r \in \mathbb{R}\}$

Ist echter konvexer Teilring von  ${}^*\mathbb{R}$ , die Elemente von  $\mathfrak{D}$  nennt man *endliche* Größen.

Konvexität meint hier:

$$0 \leq b \leq a \in \mathfrak{D} \Rightarrow b \in \mathfrak{D}$$

**2.4 Definition**  $\mathfrak{M} = \{a \in {}^*\mathbb{R} : |a| \leq \epsilon, \text{ für alle } \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$

$\mathfrak{M}$  ist konvexes Ideal in  $\mathfrak{D}$ , sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind

- (i)  $a, b \in \mathfrak{M} \Rightarrow a + b \in \mathfrak{M}$
- (ii)  $a \in \mathfrak{M}, b \in \mathfrak{D} \Rightarrow a * b \in \mathfrak{M}$
- (iii)  $0 \leq b \leq a \in \mathfrak{M} \Rightarrow b \in \mathfrak{M}$

Die Elemente von  $\mathfrak{M}$  bezeichnen wir als *unendliche kleine* oder *infinitesimale* Größen. Alle anderen Elemente von  ${}^*\mathbb{R}$ , die nicht in  $\mathfrak{M}$  oder  $\mathfrak{D}$  sind bezeichnen wir als *unendliche* oder *infinite* Größen.

**2.5 Definition**  $a, b \in {}^*\mathbb{R}$  heißen *benachbart* wenn gilt:

$$a \approx b \iff a - b \in \mathfrak{M}$$

Das heißt a und b unterscheiden sich nur um eine infinitesimale Größe,  $\approx$  ist eine Äquivalenzrelation auf  ${}^*\mathbb{R}$

**2.6 Satz** Jede endliche GröÙe  $a \in {}^*\mathbb{R}$  ist zu genau einer reellen Zahl  $r$  benachbart.  $r$  wird dann als der Standardteil  $\text{st}(a)$  von  $a$  bezeichnet.

**2.7 Definition** Stetigkeit einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $x \in \mathbb{R}$   
seien  $\epsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$  und  $h \in \mathbb{R}$  dann muss gelten:

$$\forall \epsilon \exists \delta \text{ sodass für alle } h \text{ gilt: } |h| \leq \delta \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \leq \epsilon$$

**2.8 Satz** Stetigkeit Nichtstandard