

Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych  
Politechnika Warszawska

Projektowanie układów sterowania  
(projekt grupowy)

Sprawozdanie z projektu i ćwiczenia laboratoryjnego  
nr 1, zadanie nr 3

Wojciech Rokicki, Radosław Pietkun, Jakub Gruszecki

Warszawa, 2020

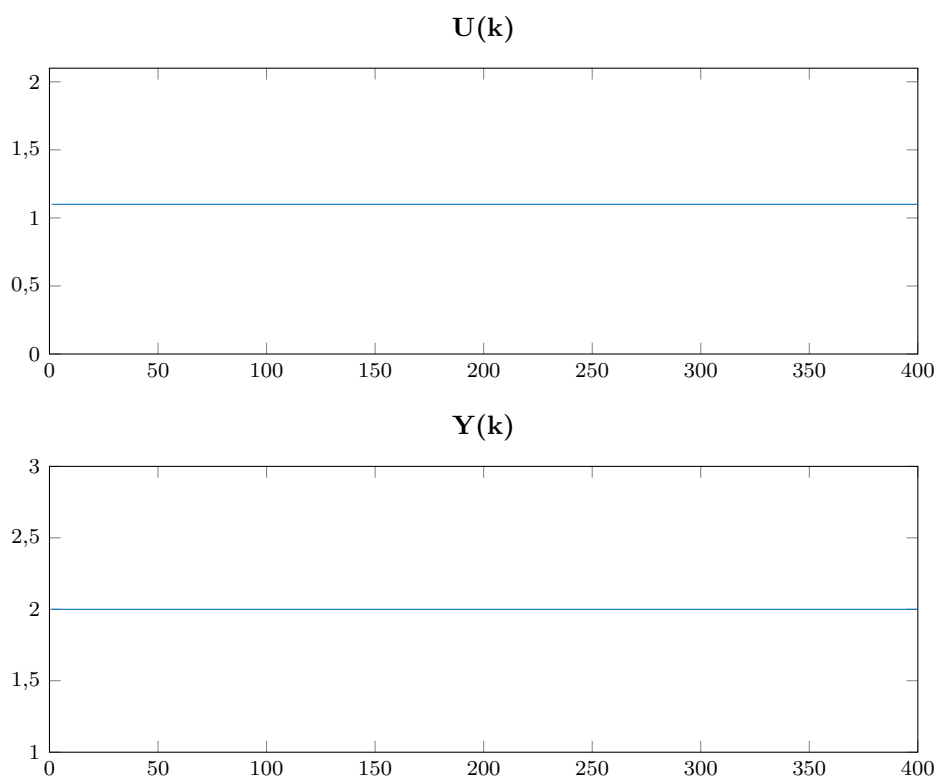
# Spis treści

<b>1. Poprawność wartości sygnałów w punkcie pracy . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1. Poprawność sygnałów . . . . .	2
1.2. Wnioski . . . . .	2
1.3. Implementacja . . . . .	2
<b>2. Odpowiedzi skokowe i charakterystyka statyczna . . . . .</b>	<b>3</b>
2.1. Wyznaczenie dpowiedzi skokowych . . . . .	3
2.2. Charakterystyka statyczna . . . . .	3
2.3. Wnioski . . . . .	3
2.4. Implementacja . . . . .	4
<b>3. Odpowiedź skokowa dla algorytmu DMC . . . . .</b>	<b>5</b>
3.1. Odpowiedź skokowa . . . . .	5
3.2. Implementacja . . . . .	6
<b>4. Regulacja procesu . . . . .</b>	<b>7</b>
4.1. Regulator PID . . . . .	7
4.2. Regulator DMC . . . . .	7
4.3. Implementacja . . . . .	8
<b>5. Dobór nastaw regulatorów . . . . .</b>	<b>9</b>
5.1. Dobór nastaw cyfrowego regulatora PID . . . . .	9
5.2. Dobór nastaw predykcyjnego regulatora DMC . . . . .	11
5.3. Implementacja . . . . .	12
<b>6. Optymalizacja wskaźnika jakości . . . . .</b>	<b>13</b>
6.1. Algorytm optymalizacji . . . . .	13
6.2. Dobór parametrów optymalizacji . . . . .	13
6.3. Optymalne nastawy regulatora PID . . . . .	13
6.4. Optymalne nastawy regulatora DMC . . . . .	15
6.5. Wnioski końcowe . . . . .	15
6.6. Implementacja . . . . .	17

# 1. Poprawność wartości sygnałów w punkcie pracy

## 1.1. Poprawność sygnałów

W celu sprawdzenia poprawności sygnałów  $U_{pp}$  oraz  $Y_{pp}$  obiekt został pobudzony sygnałem o wartości  $U_{pp}$ . Wartości sygnałów w punkcie pracy są poprawne, jeśli sygnał wyjściowy przyjmie wartość  $Y_{pp}$ .



Rys. 1.1. Przebiegi sygnałów w punkcie pracy

## 1.2. Wnioski

Na podstawie rysunku widać, że dla stałej wartości sygnału sterującego  $U_{pp}$  wyjście obiektu przyjmuje stałą wartość, równą  $Y_{pp}$ . Jest to dowód na to, że wartości sygnałów wejściowego i wyjściowego w punkcie pracy są poprawne.

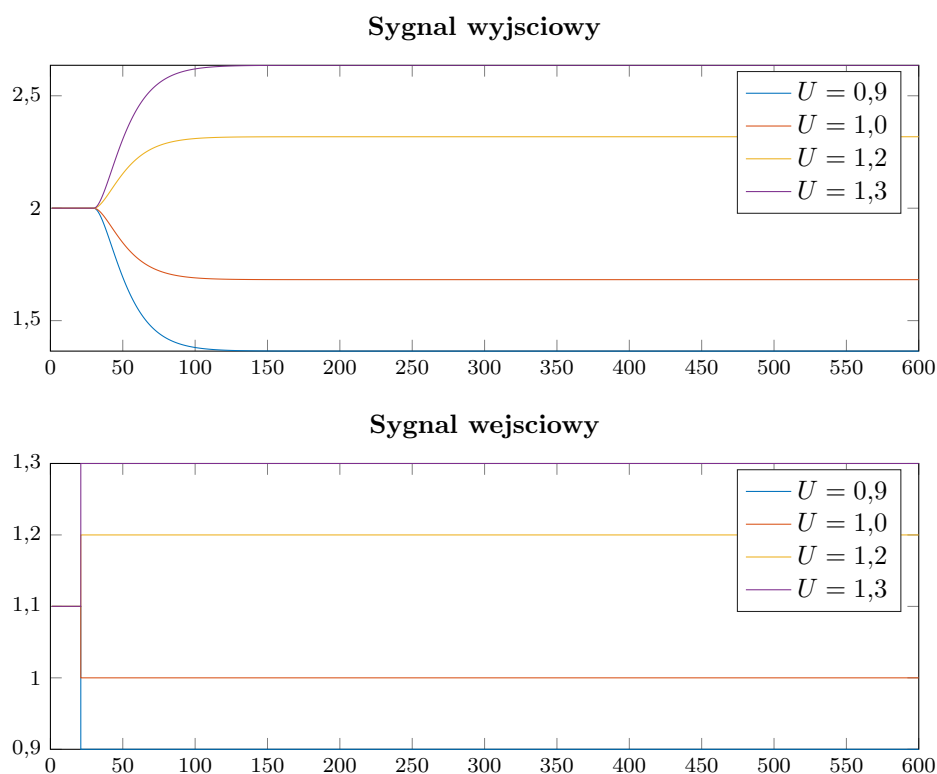
## 1.3. Implementacja

Do przeprowadzenia eksperymentu wykorzystany został skrypt `zad1.m`.

## 2. Odpowiedzi skokowe i charakterystyka statyczna

### 2.1. Wyznaczenie odpowiedzi skokowych

W celu wyznaczenia odpowiedzi skokowych obiekt pobudzony został, w punkcie pracy, czterema skokami sygnału sterującego w chwili  $k = 21$ . Sygnał sterujący zmieniał się o  $dU = 0,1$  od  $U_{\min} = 0,9$  do  $U_{\max} = 1,3$ .



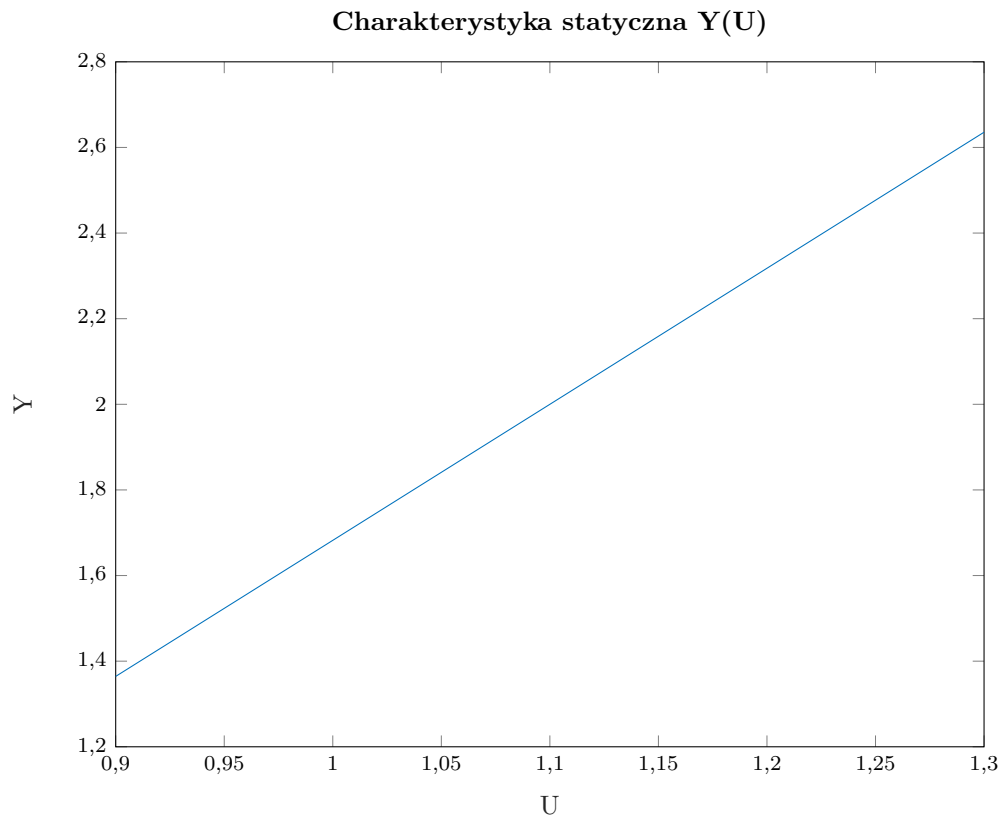
Rys. 2.1. Odpowiedzi skokowe

### 2.2. Charakterystyka statyczna

W celu wyznaczenia charakterystyki statycznej procesu zebrano odpowiedź układu dla pobudzeń różnymi wartościami sygnału sterującego.

### 2.3. Wnioski

Na podstawie charakterystyki statycznej można powiedzieć, że obiekt jest w przybliżeniu liniowy. Można zatem wyznaczyć wzmocnienie statyczne procesu na podstawie wzoru:



Rys. 2.2. Charakterystyka statyczna

$$K_{\text{stat}} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \quad (2.1)$$

Dla danego procesu wzmocnienie statyczne wynosi  $K = 3,178$ .

## 2.4. Implementacja

Implementacja funkcji wykorzystanych do wykonania zadania zawarte są w skrypcie `podpunkt_2_v1.m`.

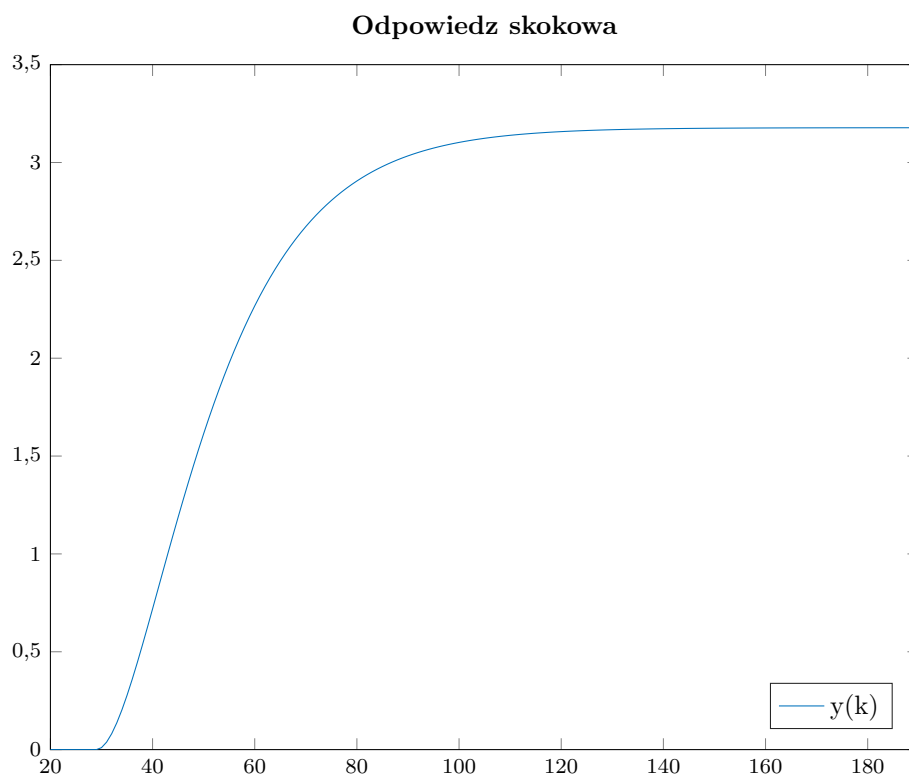
### 3. Odpowiedź skokowa dla algorytmu DMC

#### 3.1. Odpowiedź skokowa

Do wyznaczania odpowiedzi skokowej dla algorytmu DMC wybrana została odpowiedź dla zmiany sygnału sterującego o 0,1 z punktu pracy  $U_{pp}=1,1$ . Otrzymana odpowiedź skokowa poddana została normalizacji, czyli przesunięciu o wartość sygnału wyjściowego w punkcie pracy, a następnie podzielona przez długość skoku. Następnie, w celu wyznaczenia współczynników odpowiedzi skokowej dla algorytmu DMC zastosowany został wzór:

$$S_i = \frac{S_i^0(k) - Y_{pp}}{\Delta U}, \text{ dla } i = 1, \dots \quad (3.1)$$

gdzie  $S_i^0$  to seria pomiarów pozyskanych w celu wyznaczenia odpowiedzi skokowej, zaś wielkość  $\Delta U$  jest to przyrost wartości sygnału sterującego. Poniżej przedstawiono gotową odpowiedź skokową dla algorytmu DMC.



Rys. 3.1. Odpowiedź skokowa dla algorytmu DMC

---

### 3.2. Implementacja

Implementacja funkcji wykorzystanych do wykonania zadania zawarte są w skrypcie `podpunkt_3_v1.m`.

## 4. Regulacja procesu

### 4.1. Regulator PID

Regulator PID składa się trzech członów: proporcjonalnego, całkującego oraz różniczkującego. Działa on w pętli sprzężenia zwrotnego, mając na celu zredukowanie uchybu (różnicy między wartością zadaną a zmierzoną wartością sygnału wyjściowego procesu) poprzez odpowiednią zmianę sygnału sterującego. Dyskretny regulator PID ma postać:

$$u(k) = r_2 e(k-2) + r_1 e(k-1) + r_0 e(k) + u(k-1) \quad (4.1)$$

gdzie:

$$r_2 = K \frac{T_d}{T_p} \quad (4.2)$$

$$r_1 = K \left( \frac{T_p}{2T_i} - \frac{2T_d}{T_p} - 1 \right) \quad (4.3)$$

$$r_0 = K \left( 1 + \frac{T_p}{2T_i} + \frac{T_d}{T_p} \right) \quad (4.4)$$

gdzie  $K$  - wzmacnienie członu proporcjonalnego,  $T_i$  - czas zdwojenia członu całkującego,  $T_d$  - czas wyprzedzenia członu różniczkującego,  $T_p$  - okres próbkowania

### 4.2. Regulator DMC

Regulator DMC jest to regulator predykcyjny - działa on z wyprzedzeniem, zanim nastąpią zmiany wartości sygnału wyjściowego. Wektor przyrostów sterowań dany jest wzorem:

$$\Delta U(k) = \mathbf{K} [Y^{\text{zad}}(k) - Y^0(k)] \quad (4.5)$$

$$= \mathbf{K} [Y^{\text{zad}}(k) + Y(k) + \mathbf{M}^P \Delta U^P(k)] \quad (4.6)$$

gdzie:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \lambda I)^{-1} \mathbf{M}^T \quad (4.7)$$

$$\Delta U^P(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \vdots \\ \Delta u(k-(D-1)) \end{bmatrix}_{(D-1) \times 1} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_N & s_{N-1} & \dots & s_{N-N_u+1} \end{bmatrix}_{N \times N_u} \quad (4.9)$$



$$\mathbf{M}^P = \begin{bmatrix} s_2 - s_1 & s_3 - s_2 & \dots & s_D - s_{D-1} \\ s_3 - s_1 & s_4 - s_2 & \dots & s_{D+1} - s_{D-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N+1} - s_1 & s_{N+2} - s_2 & \dots & s_{N+D-1} - s_{D-1} \end{bmatrix}_{N \times (D-1)} \quad (4.10)$$

gdzie  $N$  - horyzont predykcji,  $N_u$  - horyzont sterowania,  $D$  - horyzont dynamiki,  $\lambda$  - kara za zmianę sterowania

W tym przypadku należy wyznaczyć tylko pierwszy element macierzy  $\Delta U(k)$  czyli  $\Delta u(k|k)$ . Aktualne sterowanie uzyskuje się poprzez zsumowanie  $\Delta u(k|k)$  z poprzednim sterowaniem.

$$\Delta u(k|k) = k_e e(k) - \sum_{j=1}^{D-1} \mathbf{k}_j^u \Delta u(k-j) \quad (4.11)$$

$$k_e = \sum_{i=1}^N k_{1,i} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{k}_j^u = \overline{\mathbf{K}}_1 \mathbf{M}_j^P, \quad j = 1, \dots, D-1 \quad (4.13)$$

### 4.3. Implementacja

Implementacja funkcji wykorzystanych do wykonania zadania zawarte są w skrypcie `podpunkt_4_v1.m`.

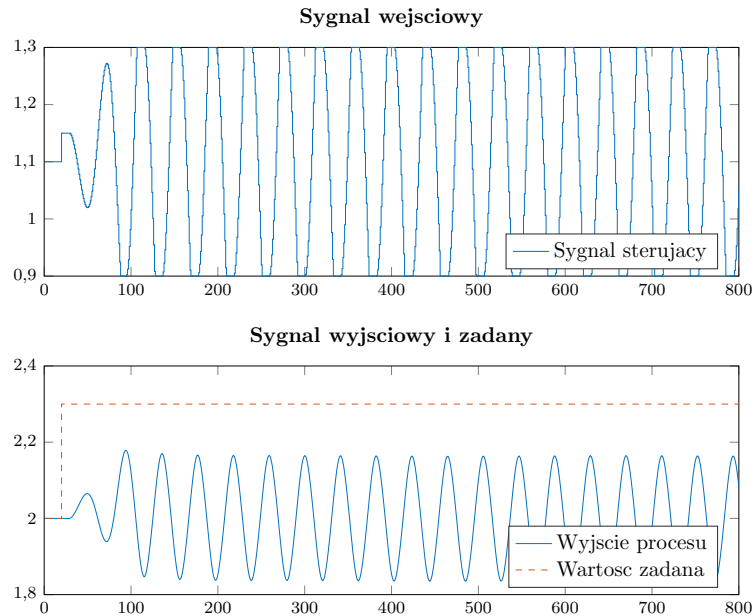
## 5. Dobór nastaw regulatorów

### 5.1. Dobór nastaw cyfrowego regulatora PID

Nastawy regulatora PID dobrane zostały metodą inżynierską. Po przeprowadzeniu strojenia metodą inżynierską nastawy regulatora zostały dodatkowo poprawione tak, aby zminimalizować wskaźnik jakości. Wskaźnik jakości regulacji, wyznaczany za pomocą metody najmniejszych kwadratów, dany jest wzorem:

$$E = \sum_{k=1}^{k_{\text{konc}}} (y^{\text{zad}}(k) - y(k))^2 \quad (5.1)$$

Na początku, przy włączonym członie proporcjonalnym P oraz wyłączonymi członami całkującym i różniczkującym układ doprowadzony został na granicę stabilności poprzez takie dobranie wzmocnienia  $K$ , że układ wpadł w niegasnące oscylacje.



Rys. 5.1. Regulator PID,  $K = 2,0$

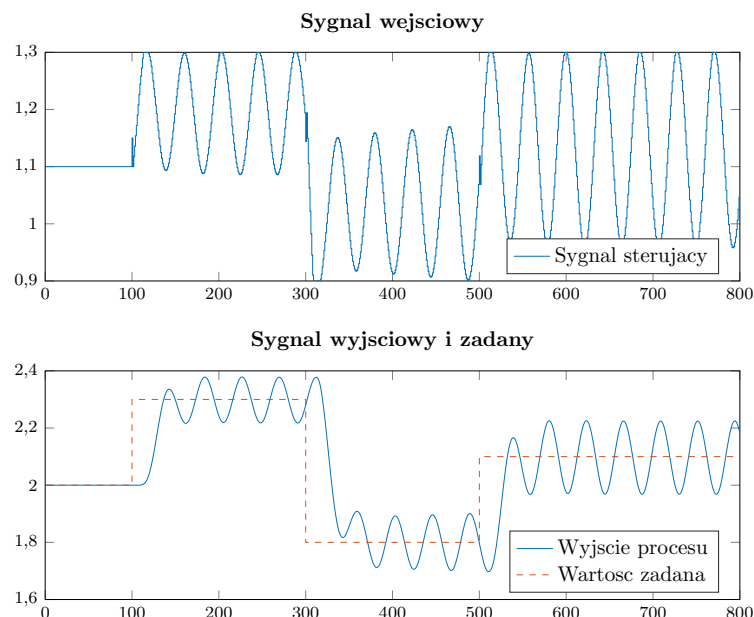
Na podstawie oscylacji określone zostało wzmocnienie krytyczne  $K_{\text{kryt}} = 2,0$  oraz okres oscylacji  $T_{\text{osc}} = 20$ . Na podstawie tych parametrów wyznaczone zostały nastawy regulatora PID zgodnie ze wzorami:

$$K_p = 0,5K_{\text{kryt}} \quad (5.2)$$

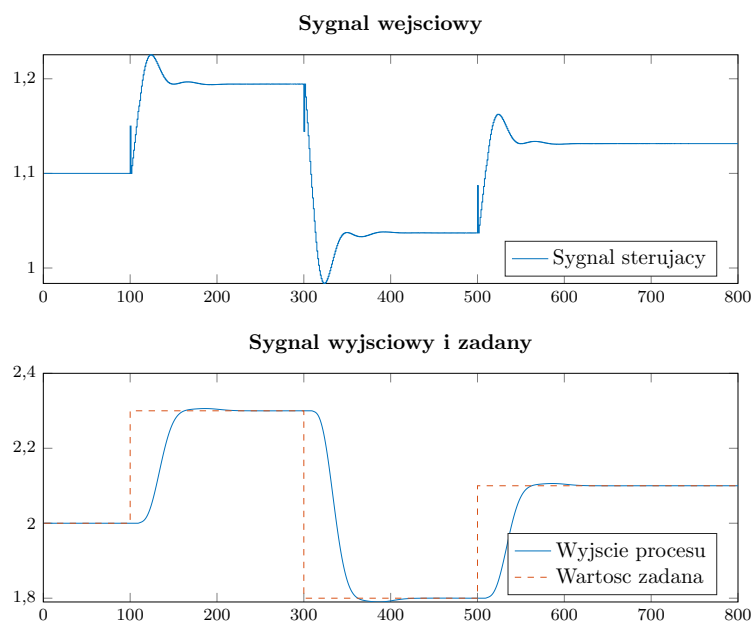
$$T_i = 0,6T_{\text{osc}} \quad (5.3)$$

$$T_d = \frac{T_{\text{osc}}}{8} \quad (5.4)$$

Otrzymano następujące nastawy:  $K = 1,2$ ,  $T_i = 10$ ,  $T_d = 2,5$ . Wartość wskaźnika jakości wynosiła  $E = 16,14$ .

Rys. 5.2. Regulator PID,  $K = 1.2$ ,  $T_i = 10$ ,  $T_d = 2.5$ 

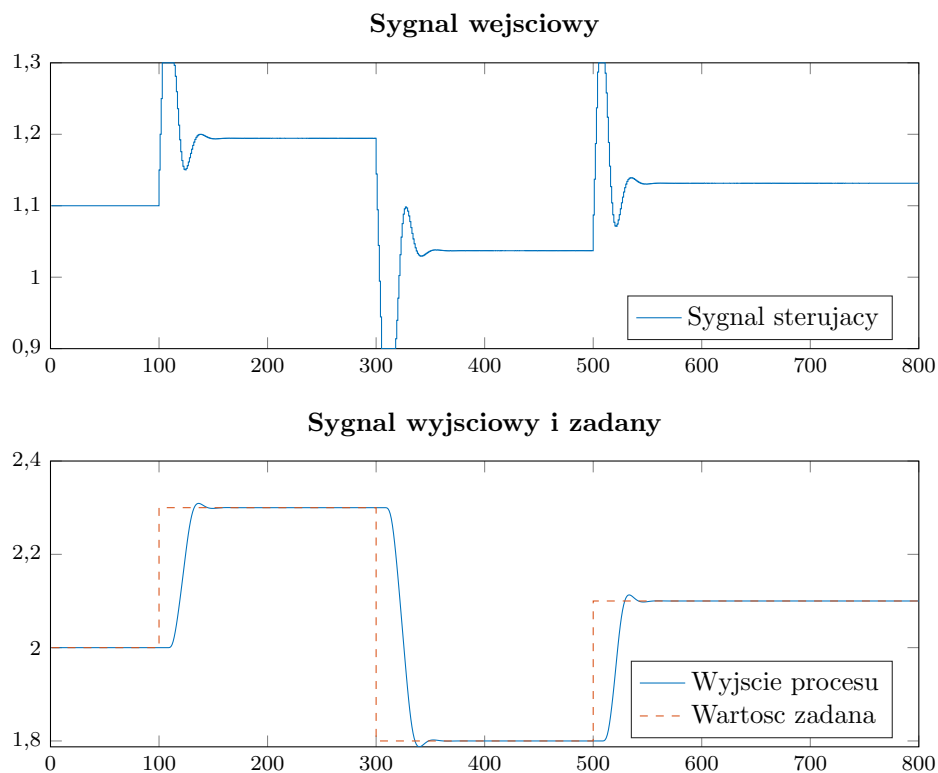
Na podstawie przebiegów widać jednak, że jakość regulacji nie jest zadowalająca - sygnał wyjściowy stale oscyluje wokół wartości zadanej. Z tego powodu eksperymentalnie dobrane zostały nowe nastawy, poprzez zmienianie kolejnych współczynników regulatora. Celem była minimalizacja wskaźnika jakości, danego jako suma błędów kwadratowych. Oprócz wskaźnika jakości pod uwagę wzięte zostały również przebiegi. Na ich podstawie dobrane zostały nowe nastawy:  $K = 0.6$ ,  $T_i = 11$ ,  $T_d = 3.5$ .

Rys. 5.3. Regulator PID,  $K = 0.6$ ,  $T_i = 11$ ,  $T_d = 3.5$ 

Jakość regulacji jest zdecydowanie lepsza, nie występują oscylacje czy przeregulowania. Wartość wskaźnika jakości wynosiła  $E = 12.8$ .

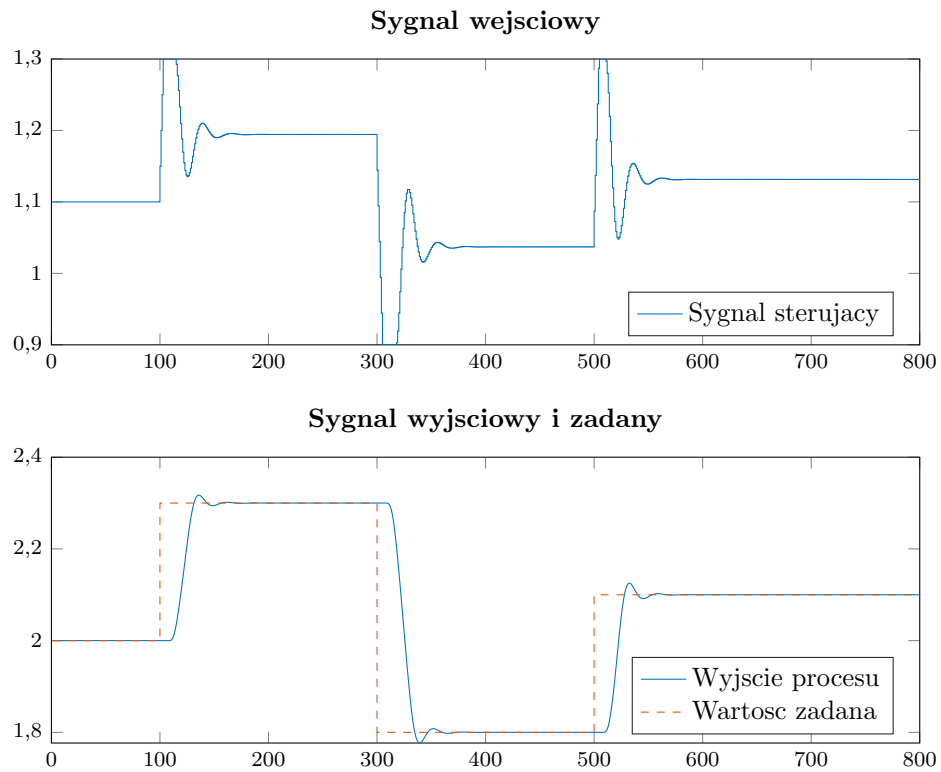
## 5.2. Dobór nastaw predykcyjnego regulatora DMC

Na początkowe nastawy regulatora DMC przyjęto obliczony w punkcie 3 horyzont dynamiki  $N = N_u = D = 170$ , zaś współczynnik kary  $\lambda = 1$ . Następnie zmniejszane były horyzonty  $N$  i  $N_u$  oraz zwiększany współczynnik  $\lambda$ . Wskaźnik jakości regulacji, podobnie jak w przypadku regulatora PID, dany jest jako suma błędów kwadratowych.



Rys. 5.4. Regulator DMC,  $N = N_u = D = 170$ ,  $\lambda = 1$

Wartość wskaźnika jakości wynosiła  $E = 8,612$ . Na podstawie przebiegów można już stwierdzić, że jakość regulacji jest o wiele lepsza niż w przypadku nastrojonego regulatora PID. W celu zmniejszenia wartości wskaźnika jakości zmniejszane były horyzonty  $N$  i  $N_u$  oraz zwiększona kara  $\lambda$ . Ostatecznie dobrane nastawy:  $N = 18$ ,  $N_u = 2$ ,  $D = 170$ ,  $\lambda = 1$ .

Rys. 5.5. Regulator DMC,  $N = 18$ ,  $N_u = 2$ ,  $D = 170$ ,  $\lambda = 1$ 

Wartość wskaźnika jakości wynosiła  $E = 8.609$ . Jak widać, jakość regulacji zmieniła się bardzo niewiele.

### 5.3. Implementacja

Implementacja funkcji wykorzystanych do wykonania zadania zawarte są w skrypcie `podpunkt_5_v1.m`.

## 6. Optymalizacja wskaźnika jakości

### 6.1. Algorytm optymalizacji

Zadanie optymalizacji wskaźnika jakości  $E$  dla regulatora PID ma postać:

$$\begin{aligned} \min_{K, T_i, T_d} E &= \sum_{k=1}^{k_{\text{konc}}} (y^{\text{zad}}(k) - y(k))^2 \\ K &\geq 0 \\ T_i &> 0 \\ T_d &\geq 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Natomiast dla regulatora DMC zadanie optymalizacji ma postać:

$$\begin{aligned} \min_{N, N_u, \lambda} E &= \sum_{k=1}^{k_{\text{konc}}} (y^{\text{zad}}(k) - y(k))^2 \\ 1 &\leq N \leq D \\ 1 &\leq N_u \leq D \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Do rozwiązania zadania minimalizacji funkcji wykorzystano procedurę *fmincon*.

### 6.2. Dobór parametrów optymalizacji

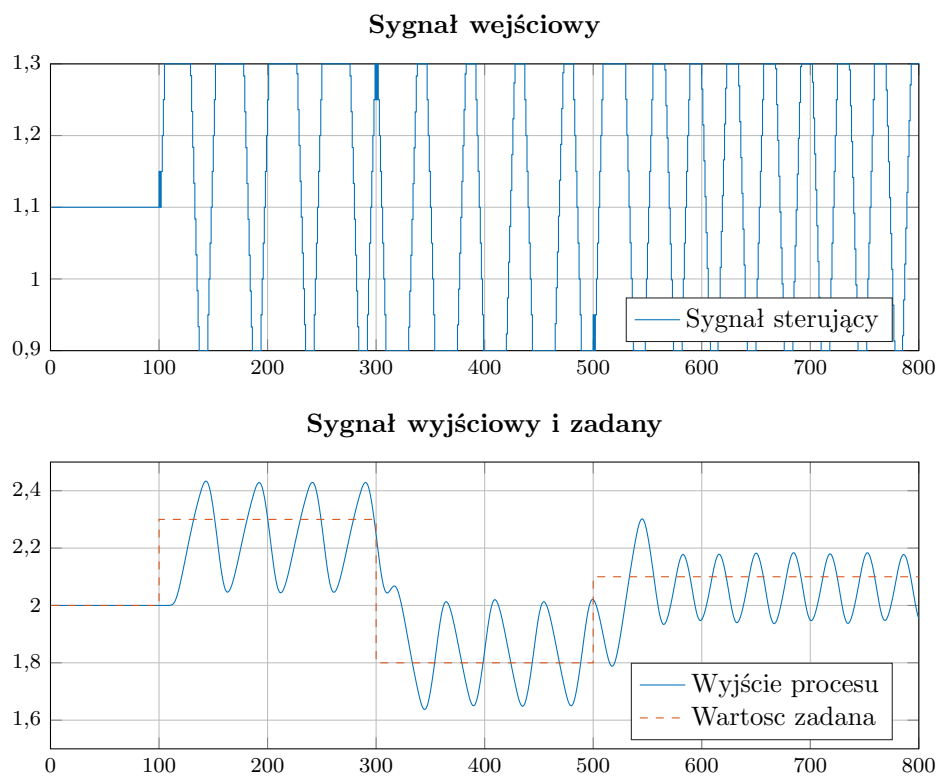
Wykorzystanie procedury *fmincon* wymagało zdefiniowania wartości początkowych szukanych parametrów. Zaobserwowano, że wybór punktu początkowego istotnie wpływał na ostateczne rozwiązanie znajdowane przez algorytm. Znajdowane wartości rozwiązania optymalnego znacząco różniły się między sobą i dawały różne wartości wskaźnika jakości. Dlatego testy dla obu rodzajów regulatorów przeprowadzono kilka razy, za każdym razem dla innego punktu początkowego.

### 6.3. Optymalne nastawy regulatora PID

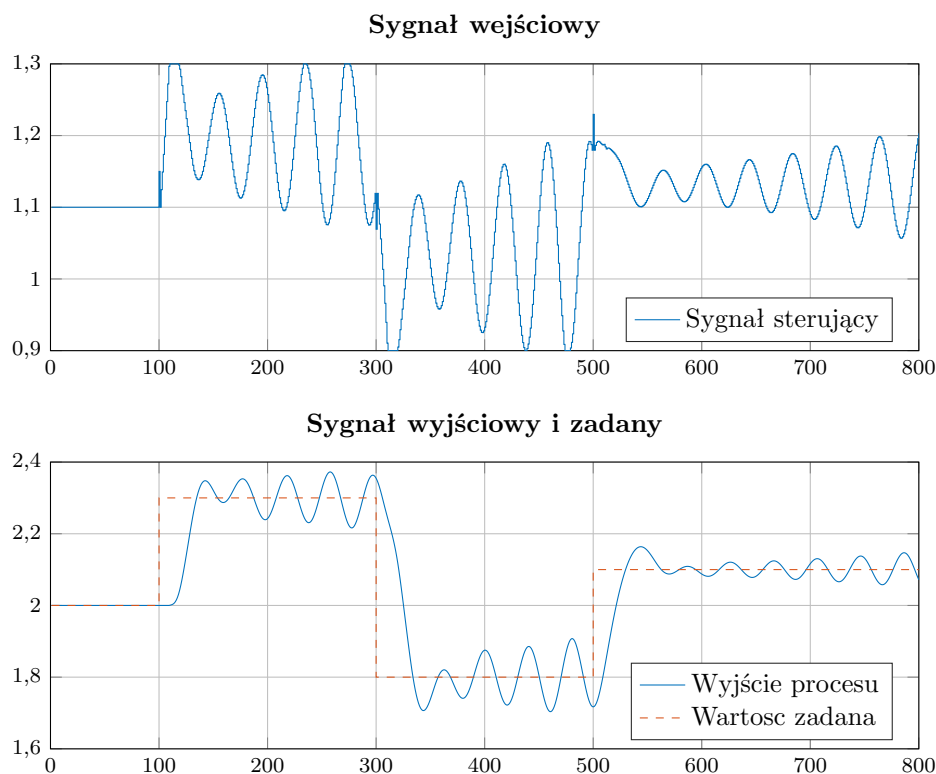
Na początku sprawdzono działanie algorytmu dla jednostkowych początkowych wartości parametrów:  $K = 1$ ,  $T_i = 1$ ,  $T_d = 1$ . Uzyskane wyniki przedstawiono na rys. 6.1. Otrzymany regulator jest niestabilny, sygnał sterujący często osiąga wartości krańcowe.

Następnie postanowiono wybrać warunek początkowy zapewniający łagodniejszą pracę regulatora. W tym celu osłabiono działanie każdego z członów na:  $K = 0,1$ ,  $T_i = 10$ ,  $T_d = 0,1$ . Uzyskane wyniki przedstawiono na rys. 6.2. Otrzymane przebiegi są bardzo łagodne, oscylacje mają charakter gasnący.

Przy kolejnym teście postanowiono wystartować z warunków bliskich całkowitemu wyłączeniu wszystkich członów regulatora:  $K = 0$ ,  $T_i = 100$ ,  $T_d = 0$ . Rezultaty są widoczne na rys. 6.3. Tym razem występują większe oscylacje niż poprzednio, ale wskaźnik jakości ma jeszcze mniejszą wartość.

Rys. 6.1. Optymalny regulator PID:  $K=17,21$ ,  $T_i=2,46$ ,  $T_d=3,65$ ;  $E=14,36$ Rys. 6.2. Optymalny regulator PID:  $K=0,33$ ,  $T_i=9,76$ ,  $T_d=0$ ;  $E=12,13$ 

Testy różnych warunków początkowych wykazały, że mają one znaczący wpływ na otrzymane rozwiązanie. Każdy punkt początkowy doprowadzał algorytm do innego rozwiązania. Okazało

Rys. 6.3. Optymalny regulator PID:  $K=1,13$ ,  $T_i=6,89$ ,  $T_d=4,19$ ;  $E=10,13$ 

się, że najlepsze wyniki uzyskano, gdy punkt początkowy był bliski stanu wyłączenia regulatora, czyli gdy człony proporcjonalny i różniczkujący były całkowicie wyłączone, a człon całkujący był prawie wyłączony.

#### 6.4. Optymalne nastawy regulatora DMC

Na początku sprawdzono działanie algorytmu dla warunku początkowego, w którym horyzonty predykcji oraz sterowania były równe horyzontowi dynamiki procesu:  $N = 170$ ,  $N_u = 170$ ,  $\lambda = 1$ . Wyniki przedstawiono na rys. 6.4. Otrzymany regulator jest stabilny i działa bardzo dobrze.

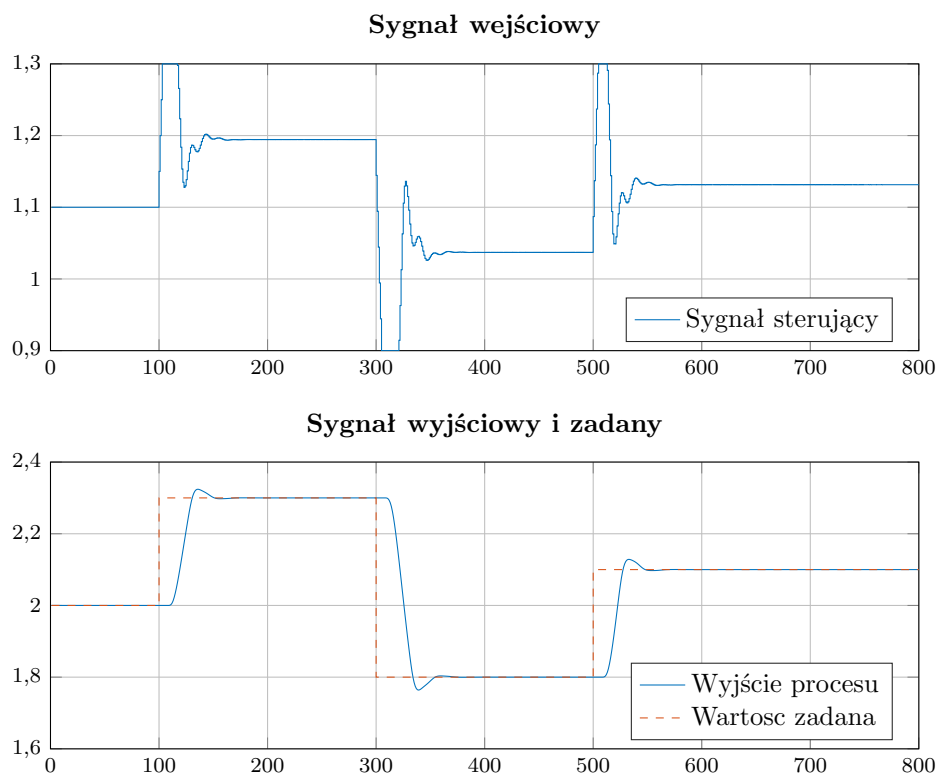
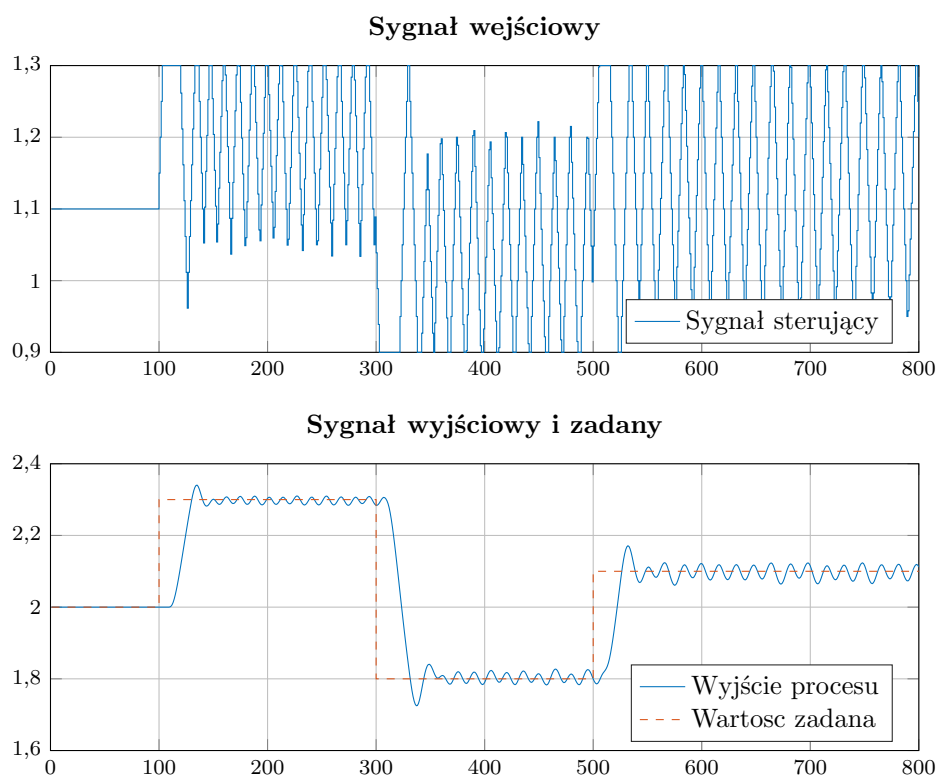
W kolejnym kroku postanowiono zmniejszyć początkowe horyzonty predykcji oraz sterowania:  $N = 10$ ,  $N_u = 1$ ,  $\lambda = 1$ . Rezultaty przedstawiono na rys. 6.5. Sygnał sterujący zmienia się bardzo gwałtownie i występują oscylacje, ale wskaźnik jakości ma mniejszą wartość niż poprzednio.

#### 6.5. Wnioski końcowe

Na podstawie powyższych testów można stwierdzić, że wskaźnik jakości nie jest najlepszym wyznacznikiem poprawności działania regulatora. Nie bierze on pod uwagę m.in. zmian sygnału sterującego, którego zbyt gwałtowny przebieg może być niebezpieczny i negatywnie wpływać na dany układ.

Istnieje wiele rozwiązań optymalnych, które mogą być wartościami minimum funkcji celu. W zależności od wybranego punktu początkowego zastosowany algorytm może znajdować różne rozwiązania.



Rys. 6.4. Optymalny regulator DMC:  $N=85$ ,  $N_u=85$ ,  $\lambda=0,11$ ;  $E=9,06$ Rys. 6.5. Optymalny regulator DMC:  $N=12$ ,  $N_u=17$ ,  $\lambda=0,004$ ;  $E=8,56$ 

Zarówno w przypadku regulatora PID jak i DMC przy wykorzystaniu algorytmu minimali-

zacji wskaźnika jakości udało się uzyskać lepsze rezultaty pod względem wartości otrzymanego błędu niż przy takiej analizie prowadzonej w poprzednim punkcie metodą eksperymentalną.

Prawdopodobnie lepszym rozwiązaniem byłby wskaźnik jakości w postaci błędu średniokwadratowego, ze względu na oscylowanie błędu sygnału wyjściowego w zakresie części dziesiętnych (mały błąd sumaryczny w przypadku stosowanego obecnie błędu kwadratowego).

## 6.6. Implementacja

Implementacja funkcji wykorzystanych do wykonania zadania zawarte są w skrypcie `podpunkt_6_v1.m`.