通訊原理與實驗 **LAB 02 :** 離散傅立葉轉換

1. 實驗目的：MATLAB 的離散傅立葉轉換(Discrete Fourier Transform，DFT)。

2. 實驗內容：

   區間$[\frac{-T}{2},\frac{T}{2}]$ 的 T週期函數$g(t)$ 的指數傅立葉級數定義為

$$g(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k\ e^{2\pi ikt/T}$$

其中複數傅立葉係數為

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)e^{-\frac{2\pi ikt}{T}}dt,\qquad k\in\mathbb{Z}$$

當 $T\ \rightarrow\infty$， 傅立葉級數可推廣為傅立葉轉換 (Fourier transform)。若 $g(t)$不是連續函數而是一有限數列，傅立葉級數可延伸為離散傅立葉轉換 (discrete Fourier transform，簡稱 DFT)。

令$f_k=k/T$ ，且$\Delta f=f_{k+1}-f_k=1/T$ ，則$g(t)$ 的傅立葉級數為

$$g(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k\ e^{2\pi it}$$

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)e^{-2\pi if_kt}dt,\qquad k\in\mathbb{Z}$$

將c_k 代回傅立葉級數$g(t)$ ，可得

$$g(t)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t)e^{-2\pi it}dt\right]e^{2\pi it}$$

當 T 逐漸增大時， $\Delta f=1/T$ 變成一微小量 df ，使得 f_k 逼近連續量 f ，總和因此趨於積分，上式成為

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi ift}dt\right]e^{2\pi ift}df$$

其中，函數 $G(f)$為

$$G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi ift}dt$$

稱作 $g(t)$ 的傳立葉轉換，其中變數f代表頻率。

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{2\pi ift}df$$

稱為 $G(f)$ 的逆(反)傳立葉轉換。

所以，當 $T\ \rightarrow\infty$ ，傳立葉係數變成傳立葉轉換

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t)e^{-2\pi if_kt}dt \qquad ➔$$

$$G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi ift}dt$$

傳立葉級數變成 逆(反)傳立葉轉換

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k \ e^{2\pi i f_k t} \quad \rightarrow$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{2\pi i f t} df$$

在數值計算上，因為電腦僅能處理有限維向量，連續型態的傅立葉轉換必須換裝成離散傅立葉轉換。指數傅立葉級數可推導出離散傅立葉轉換。首先，離散傅立葉轉換的輸入不再是連續函數$g(t)$，在週期$[0,T]$ 內 n 個等間距函數值$x_j \equiv g(t_j)$ ，其中 $t_j = jT/n$ ，$j = 0,1,\ldots,n-1$。離散傅立葉轉換的輸出是複數傅立葉係數構成的相同長度數列 $c_k,\ k = 0,1,\ldots n-1$ ，而非無窮數列。

在離散情況下，以$t_j = j/n$ 取代 t，將連續函數的傅立葉係數積分改成計算和，可得對應的離散公式 ： 對於 $k = 0,1,\ldots n-1$ ，

$$y_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \ e^{-2\pi i k j/n}$$

此即離散傅立葉轉換。為了與傅立葉係數 c_k 區分，以 y_k 代表離散傅立葉轉換結果。逆(反)離散傅立葉轉換： 對於 $j = 0,1,\ldots n-1$ ，

$$x_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \ e^{2\pi i k j/n}$$

離散傅立葉轉換可表示成矩陣形式 $\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{x}$，如下：

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$$

其中，$w = e^{-2\pi i/n} = \cos(2\pi/n) - i\sin(2\pi/n)$。

若採用一般矩陣乘法運算，離散傅立葉轉換的計算複雜度為$O(n^2)$ 。公元 1965 年，美國學者 James Cooley 與 John Tukey 提出複雜度為$O(n\log_2 n)$ 的演

算法，稱為快速傅立葉轉換 (fast Fourier transform，簡稱 FFT)，後來發現高斯 (Carl Friedrich Gauss) 早在 1805 年就已經提出同樣的演算法 。 若 $n = 2^r$ ，快速傅立葉轉換分解成 $r = log_2 n$ 層,每層最多使用 n 個乘法 (如圖 2-0 所示，$n = 2^3$，圖中未標記乘數的直線表示「乘以 1」，因此無須計算)，所以總乘法運算量為 $nlog_2 n$ 。

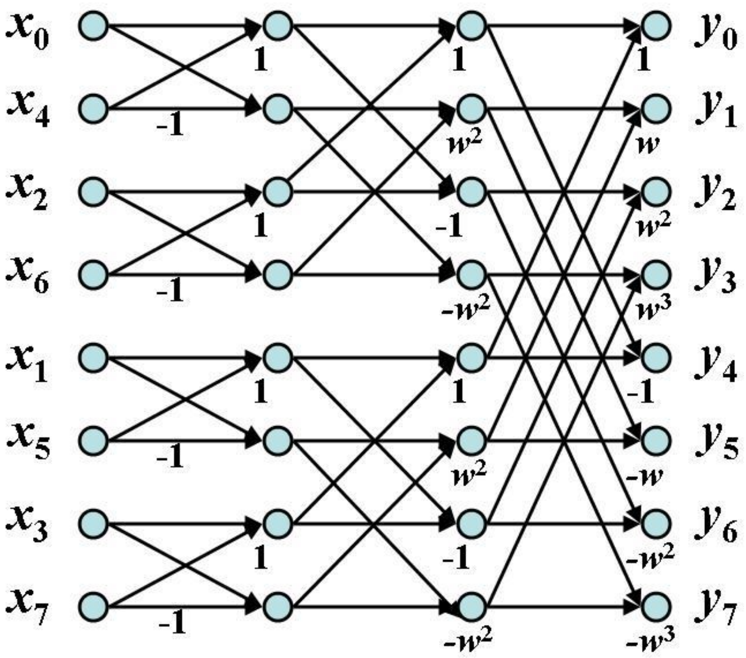

圖 2-0 FFT

本實驗善用軟體matlab之函數、指令與結構如 fft(), ifft( ), angle(), abs(), fftshift() 等，實現快速傅立葉轉換及逆(反)快速傅立葉轉換等運算。

fft01.m

```
% lab02-1
% 此範例展示簡單正弦波的傅立葉轉換，以雙邊頻譜來顯示
% 此弦波的頻率恰巧是 freqStep 的整數倍，所以雙邊頻譜應該只有兩個非零點
% 若弦波的頻率不是 freqStep 的整數倍，所以雙邊頻譜會「散開」(Smearing)

N = 256;             % 點數
fs = 8000;           % 取樣頻率
freqStep = fs/N;         % 頻域的頻率的解析度
f = 10*freqStep;         % 正弦波的頻率，恰是 freqStep 的整數倍
time = (0:N-1)/fs;       % 時域的時間刻度
y = cos(2*pi*f*time);        % Signal to analyze
Y = fft(y);          % Spectrum
Y = fftshift(Y);         % 將頻率軸的零點置中

% Plot time data
subplot(3,1,1);
plot(time, y, '.-');
title('Sinusoidal signals');
xlabel('Time (seconds)'); ylabel('Amplitude');
axis tight

% Plot spectral magnitude
freq = freqStep*(-N/2:N/2-1);    % 頻域的頻率刻度
subplot(3,1,2);
%plot(freq, abs(Y), '.-b'); grid on
stem(freq, abs(Y)); grid on
xlabel('Frequency)');
ylabel('Magnitude (Linear)');

% Plot phase
subplot(3,1,3);
plot(freq, angle(Y), '.-b'); grid on
xlabel('Frequency)');
ylabel('Phase (Radian)');
```

注意

圖 2-1 fft01.m 程式

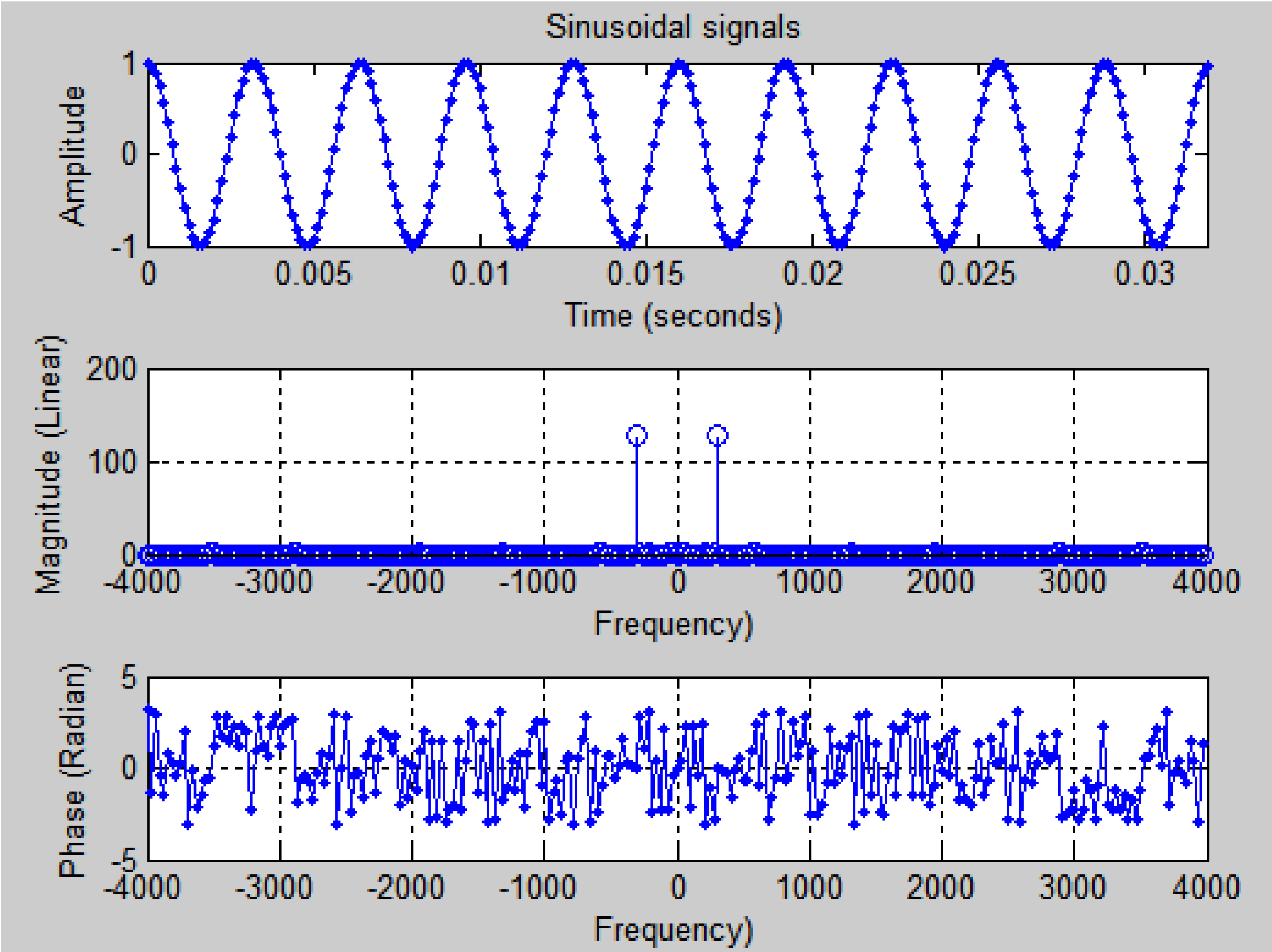

圖 2-2 弦波的頻率，恰好**頻率解析度**(亦為**頻率間隔**，如程式中變數 freqstep 的整數倍

本程式展示正弦波之傅立葉轉換雙邊頻譜，若弦波的頻率，恰好**頻率解析度**的整數倍，則頻譜只有兩個柱狀(如圖 2-2)；但是若不為整數倍，則頻譜則向兩邊散開(如圖 2-4)。

```matlab
% 此範例展示一個簡單正弦波的傅立葉轉換，以雙邊頻譜來顯示
% 此正弦波的頻率不是 freqStep 的整數倍，所以雙邊頻譜會「散開」(Smearing)

N = 256;            % 點數
fs = 8000;          % 取樣頻率
freqStep = fs/N;        % 頻域的頻率的解析度
f = 10.5*freqStep;      % 正弦波的頻率，不是 freqStep 的整數倍
time = (0:N-1)/fs;      % 時域的時間刻度
y = cos(2*pi*f*time);       % Signal to analyze
Y = fft(y);         % Spectrum
Y = fftshift(Y);

% Plot time data
subplot(3,1,1);
plot(time, y, '.-');
title('Sinusoidal signals');
xlabel('Time (seconds)'); ylabel('Amplitude');
axis tight

% Plot spectral magnitude
subplot(3,1,2);
freq = freqStep*(-N/2:N/2-1);   % 頻域的頻率刻度
%plot(freq, abs(Y), '.-b'); grid on
stem(freq, abs(Y)); grid on
xlabel('Frequency)');
ylabel('Magnitude (Linear)');

% Plot phase
subplot(3,1,3);
plot(freq, angle(Y), '.-b'); grid on
xlabel('Frequency)');
ylabel('Phase (Radian)');
```

注意

圖 2-3　fft02.m 程式

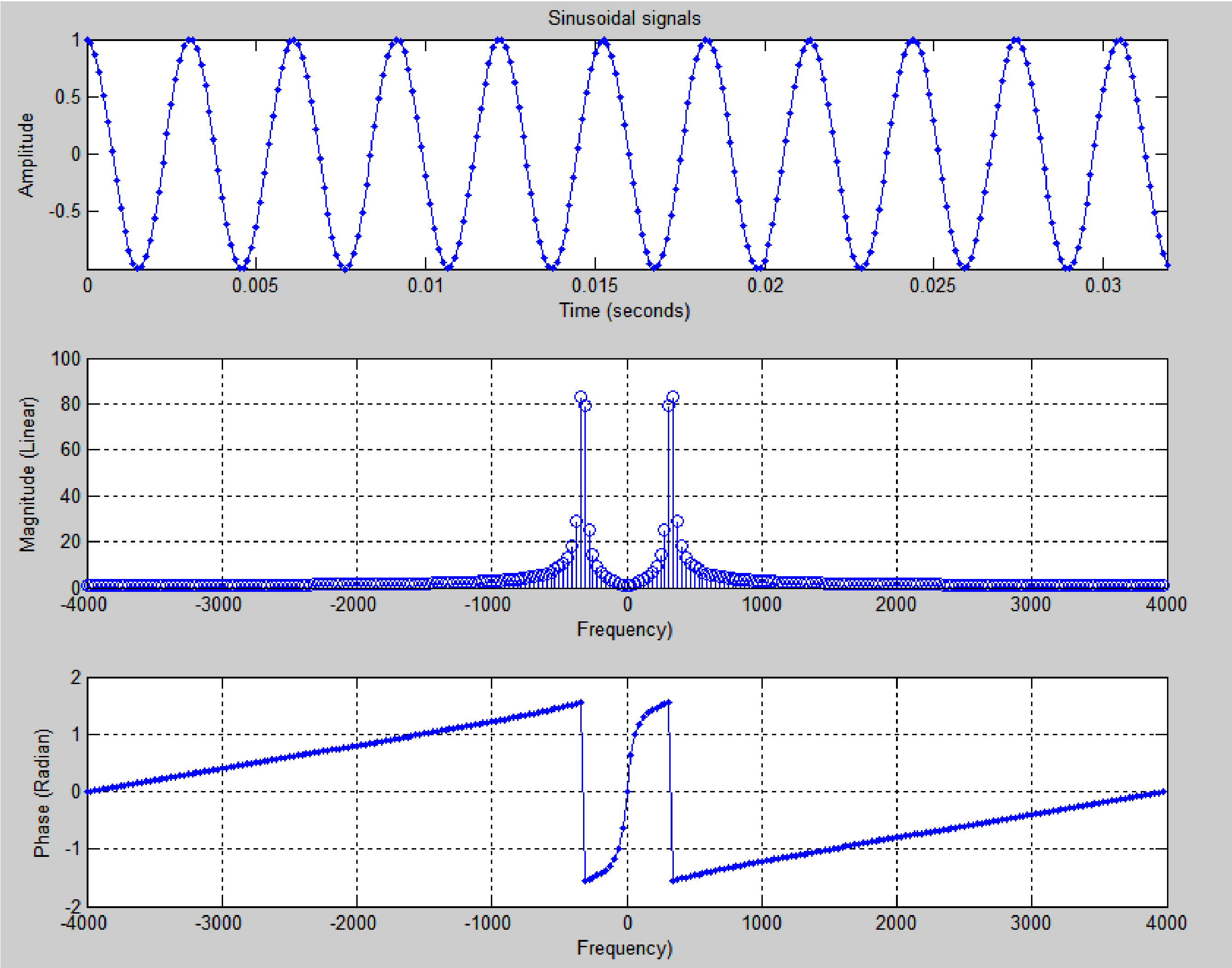

圖 2-4 弦波的頻率，不是**頻率解析度**(亦為**頻率間隔**，如程式中變數 freqstep 的整數倍

指令學習

- abs(x) ➔向量 x 每個元素的長度，如 3+4j , abs(3+4j) = sqrt(3^2+4^2) = 5。
- X = fft(x,128) ➔ 向量 x 的 128 個點快速傅立葉轉換，頻率 0 的數值量在 X(1)，頻率次低的數值量在 X(2), X[128]，且 abs(X(2))=abs(X(128))，依此類推，abs(X)具對稱性，例如: x = [1,2,3,4,5,6,7,8], X= fft(x,8), abs(X) = [36.0, 10.4525, 5.6569, 4.3296, 4.0, 4.3296, 5.6569, 10.4525]，abs(X(2)) = abs(X(8)), …, ，abs(X(4)) = abs(X(6))。
- fftshift(X) ➔將 X(1)移至中央的對稱位移，以上為例 abs(fftshift(X)) = [4.0, 4.3296, 5.6569, 10.4525, 36.0, 10.4525, 5.6569, 4.3296]。
- ifft(X) ➔向量 X 的反快速傅立葉轉換。

- angle(x) ➔ 向量 x 每個元素的角度，如 3+4j , angle(3+4j) = atan(4/3) = 0.9273, atan = inverse tangent (arctangent)。
- subplot(3,1,1) ➔產生矩陣(3,1)的第 1 張圖，矩陣(3,1)為 3 行 1 列的矩陣。
- stem(x) ➔畫向量 x 的柱狀圖。
- grid on ➔圖面上產生格線。
- x = (0:5)/10 ➔ x = [0, 1/10, 2/10, 3/10, 4/10, 5/10]。
- cos(2*pi*fs*time) ➔產生頻率為 fs 的餘弦波，time 為時間向量。

3. 作業：

(1) 若要單邊顯示圖 2-1，請問程式 fft01.m 應如何修改(請參閱圖 2-1，修改第 12、13、23 行)。請注意單邊顯示頻譜之波形振幅大小是雙邊顯示的**兩倍**，這是課堂上所強調過的事項。

(2) 反思題 ：程式 fft01.m 弦波振幅為 1(請參閱圖 2-1，第 11 行)，其頻譜波形振幅大小應為 **0.5**, 但是頻譜波形振幅大小卻為 **128(**請參閱圖 2-2**)**，請問為何如此以及應如何修正由 **128 修**為 **0.5(**提示 ： 僅需修改第 12 行))。

(3) 若訊號 *x*(*t*)如下，

$$x(t) = \begin{cases} 1-|t|, & -1 \le t \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

請繪出訊號及其快速傅立葉轉換之波形(雙邊顯示)。

(4) 挑戰題 ： 課堂上講過傅立葉轉換具有對偶性。如果 $F\big(x(t)\big) = X(f)$，則 $F\big(X(t)\big) = x(-f)$。請設計一例並以 matlab 程式及圖形呈現傅立葉轉換**對偶性**。