通訊原理與實驗 LAB 03：摺積

1. 實驗目的：MATLAB 程序實現摺積原理與其傅立葉轉換之使用。

2. 實驗內容：依據維基百科，函數 *f*(*t*)及 *g*(*t*)為實數軸上兩可積分函數，其摺積定義為

$$f(t) * g(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\ d\tau$$

離散摺積定義為

$$f(n) * g(n) \triangleq \sum_{-\infty}^{\infty} f(m)g(n-m)$$

x[n]=[2,2,2], h[n] =[0,0,1,1,1,1,1,0,0,0]為例，其摺積過程如下圖 3-1-1 ~ 3-1-14:

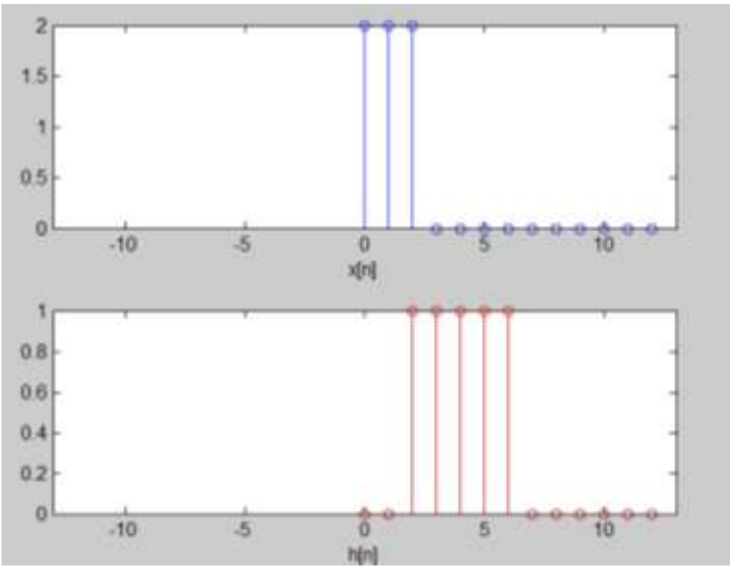


圖 3-1-1

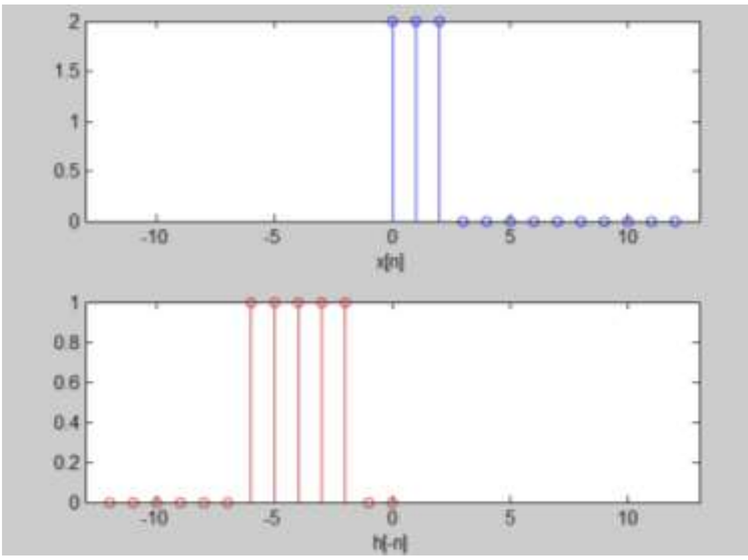


圖 3-1-2

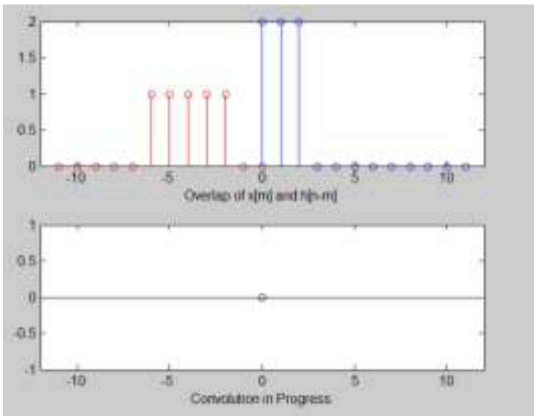


圖 3-1-3

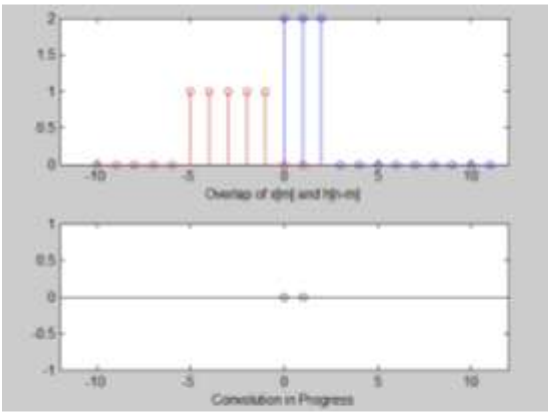


圖 3-1-4

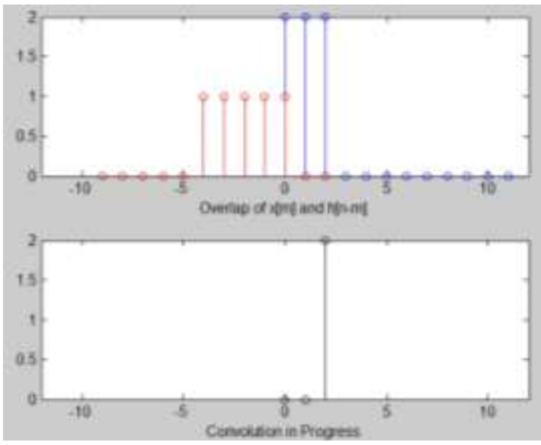


圖 3-1-5

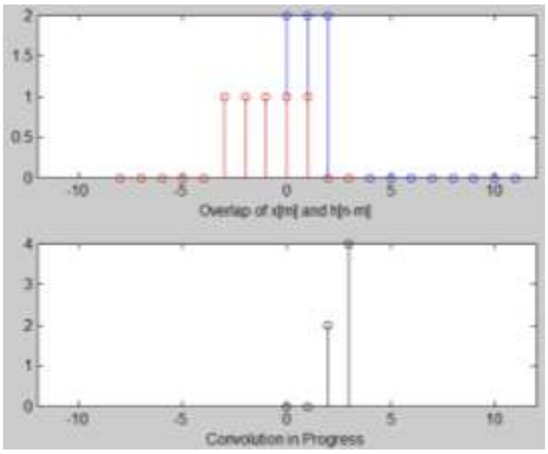


圖 3-1-6

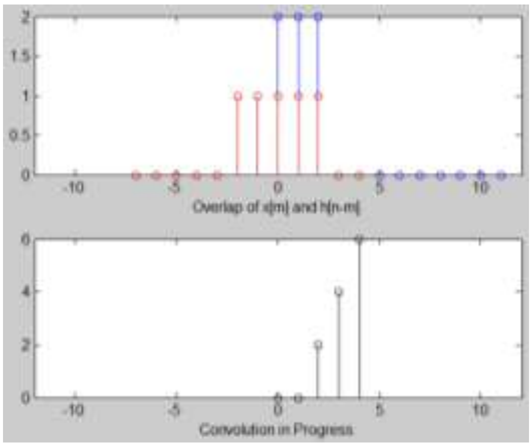


圖 3-1-7

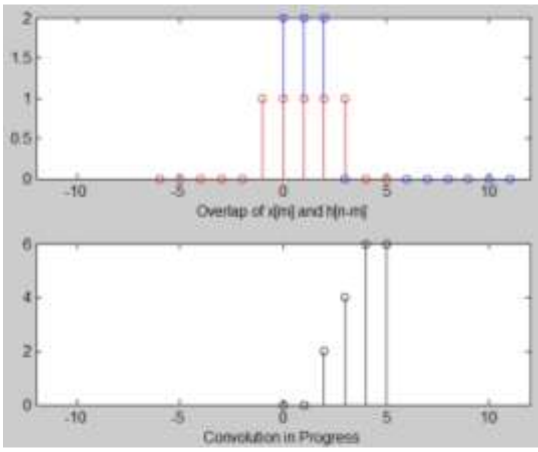
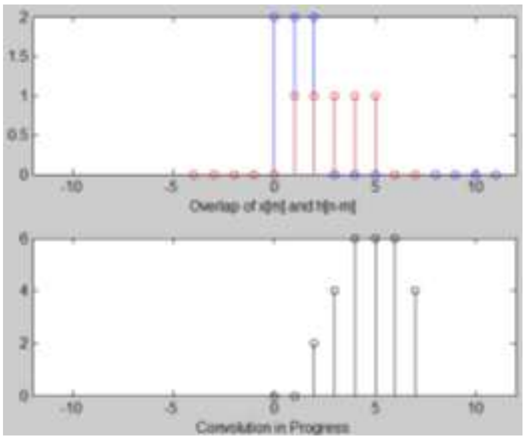


圖 3-1-8



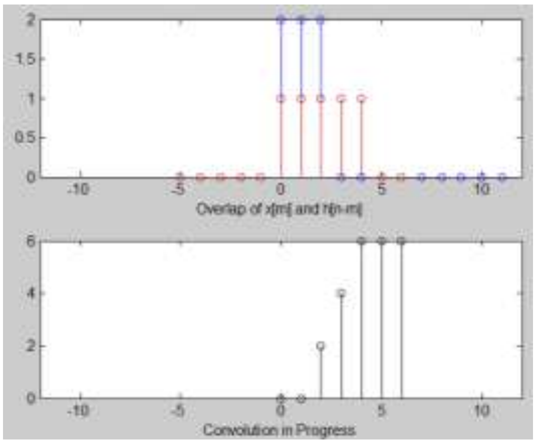
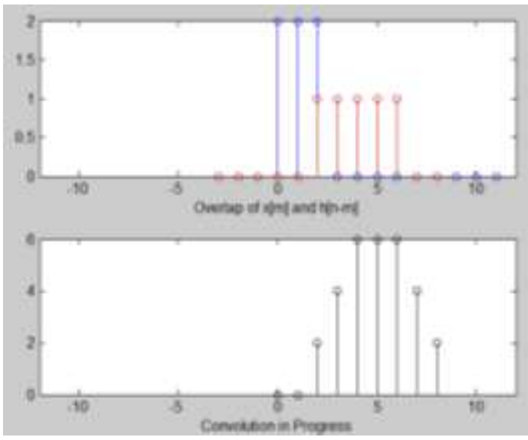


圖 3-1-9 圖 3-1-10



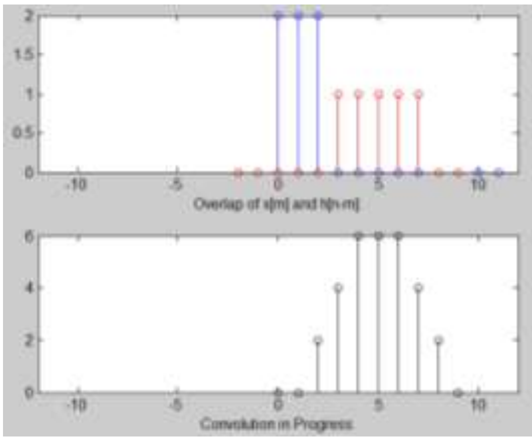
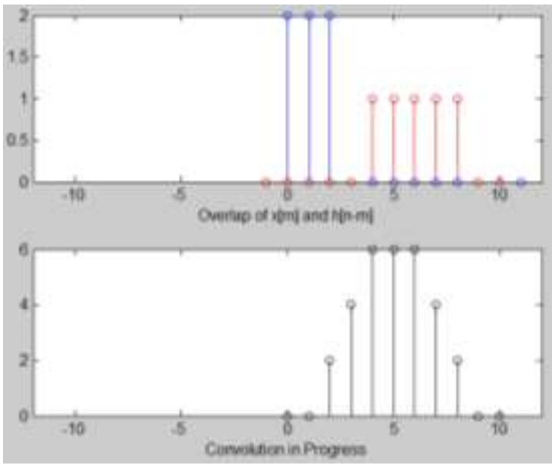


圖 3-1-11 圖 3-1-12



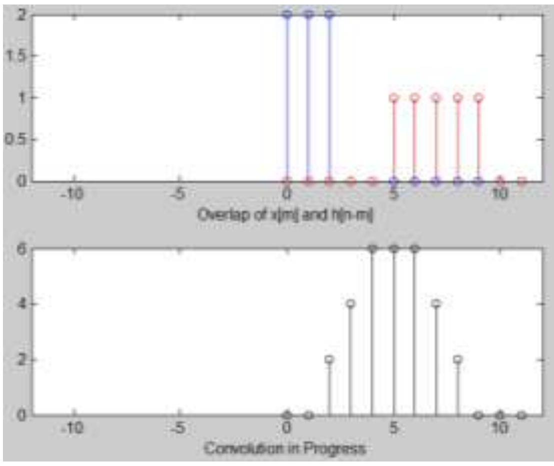


圖 3-1-13 圖 3-1-14

輸出 $y[n] = x[n] * h[n]$ = [0, 0, 2, 4, 6, 6, 6, 4, 2, 0, 0, 0], 程式詳如 conv_1.m 及 graphConvolution.m

離散摺積 $y[n] = x[n] * h[n]$，$y[n]$的長度$length(y[n])$為

$$length(y[n]) = length(x[n]) + length(h[n]) - 1 \tag{3.1}$$

其中 $length(x[n])$ 及 $length(h[n])$分別為 $x[n]$, $h[n]$ 的長度，$y[n]$開始與終止位置點分別為

$$start(y[n]) = start(x[n]) + start(h[n]) \tag{3.2}$$

$$end(y[n]) = start(y[n]) + lenght(y[n]) - 1 \tag{3.3}$$

如上例，$length(x[n])$=3 及 $length(h[n])$=10，$start(x[n]) = start(h[n]) = 0$ ， $length(y[n]) = 12,\ start(y[n]) = 0,\ end(y[n]) = 11$ 。

fft 指令做的實際上是 circular convolution, 做 fft 前將輸入訊號後面補 0 至 $length(y[n]) - 1$ 。如下例:

```
a = [1 2 3 4]; <===第一個訊號
b = [5 6 7 8]; <===第二個訊號
c = conv(a,b); <=== convolution
A = fft([a 0 0 0]); <===第一個訊號的傅立葉轉換
B = fft([b 0 0 0]); <===第二個訊號的傅立葉轉換
C = ifft(A .* B)); <===將二個訊號傅立葉轉換後，做反傅立葉轉換 。
```

指令學習

- x = [x, zeros(1, 3)] ➔向量 x 後加上 3 個 0,
- n = -5:1:1 ➔ 向量 n = [-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1]
- conv(x, y) ➔ 向量 x, y 做 convolution
- length(x) ➔ 向量 x 的長度
- stem(a, x) ➔ 畫柱狀圖，橫與縱軸分別由向量 a, x 控制， 且 length(a) = length(x)
- clear ➔ 清除所有變數
- clf ➔ 清除所有圖形
- X . * H ➔運算子 .* 為元素相乘，如 X=[1, 2], H=[3, 4], X .* H = [3, 8]
- xlim(min, max) ➔橫軸(x 軸)顯示範圍由數值 min, max 控制
- pause(1)➔ 暫停 1 秒
- fliplr(x)➔ 向量 x 的元素序列做反向，例如: x=[1,2,3,4], x = fliplr(x), x=[4,3,2,1]

若需進一步了解其使用方式，請於 Command Window 使用 doc 或 help， 如 doc plot, 或 help plot。

程式 ：conv_2.m

注意

```
clear;
n1 = -1:1:1;  % 設定輸入 x[n] 時間軸
x = (1/2).^n1; % 獲取輸入 x[n]  之值
n2=0:1:9;   % 設定輸入 h[n] 時間軸
h = [zeros(1,2), ones(1,5), zeros(1,3)]; % 設定 h =[0,0,1,1,1,1,1,0,0,0]
y = conv(h,x); % 執行摺積 y[n] = x[n]*h[n]

len = length(n1)+length(n2)-1; % 摺積 y[n] 之長度
start = n1(1)+n2(1);  % 計算開始摺積之時間點
stop = n1(1)+n2(1) + len-1;  % 計算結束摺積之時間點
n3 = start:1:stop;

subplot(4,1,1);
stem(n1,x);  % 畫出 x[n] 訊號圖
xlabel('x[n]');
xlim([start-1, stop+1]);

subplot(4,1,2);
stem(n2,h); % 畫出 h[n] 訊號圖
xlim([start-1, stop+1]);
xlabel('h[n]');

subplot(4,1,3);
stem(n3, y);    % 畫出 y[n] 訊號圖
xlim([start-1, stop+1]);
xlabel('y[n] = x[n]*h[n]');

x2 = [x, zeros(1,length(h)-1)]; %附上 length(h)-1 個零點，以下過程才能獲正確結果
h2 = [h, zeros(1,length(x)-1)]; %附上 length(x)-1 個零點，以下過程才能獲正確結果
X2 = fft(x2,128); %以128點做為計算fft之基礎
H2 = fft(h2,128); %以128點做為計算fft之基礎
Y2 = X2 .* H2;  %頻域中相乘 = 時域中摺積
y2 = ifft(Y2,128); %反傅立葉轉換
subplot(4,1,4);
stem(start:128-abs(start)-1, y2);     % 畫出 y1[n] 訊號圖
xlim([start-1, stop+1]);
xlabel('y[n] = ifft( fft(x[n])*fft(h[n]) )');
```

圖 3-2 conv_2.m

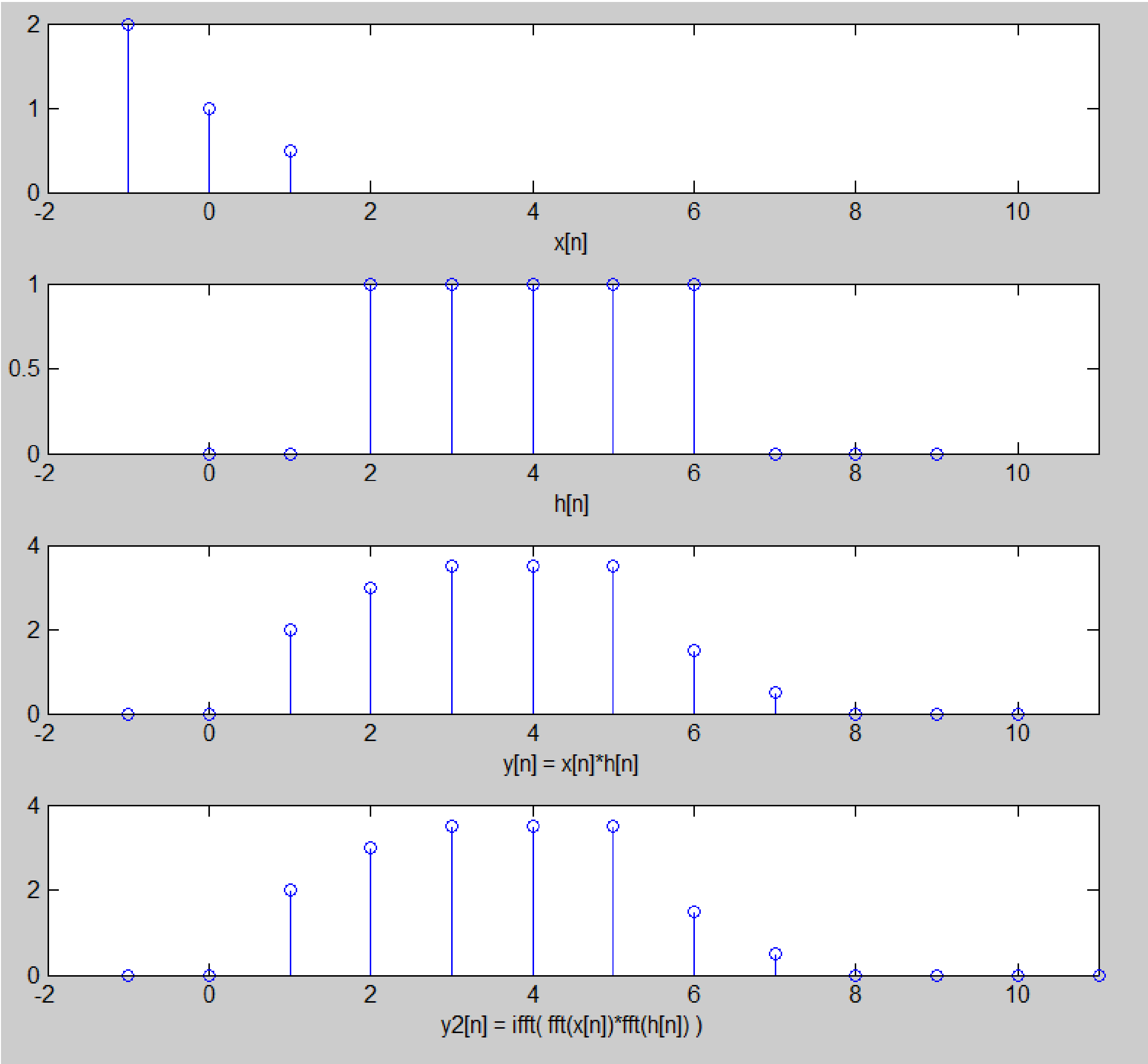


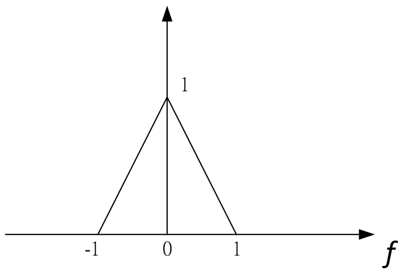
圖 3-3 conv_2.m 輸出圖

本程式展示梯形與長方形的摺積，分別各取三點與五點代表，梯形以 x[n]=[2, 1, 0.5] 及 時間 n1 = [-1, 0, 1]表示 ， 長方形 h[n] =[0,0,1,1,1,1,1,0,0,0] 及 時間 n2 = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]表示。 隨後再以傅立葉轉換方式(取 128 點作為計算過程之基礎)，驗證 x[n] * h[n] ←→ X(f) . H(f) 時域摺積等同於頻域乘積。

3. 作業

(1) 若

$$X_1(f) = \begin{cases} 1-|f|, & -1 \le f \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



及 $X_2(f) = \delta(f-10) + \delta(f+10)$，

請以 matlab 程式編寫 $Y(f) = X_1(f) * X_2(f)$，請畫出$X_1(f)$, $X_2(f)$, $Y(f)$之圖形。

(2) 同上題，以反傅立葉轉換方式分別畫出 $abs(x_1(t))$, $abs(x_2(t))$, $abs(\mathrm{y}(t))$， 其中

$$x_1(t) = ifft(X_1(f))$$
$$x_2(t) = ifft(X_2(f))$$
$$\mathrm{y}(t) = ifft(Y(f))$$

並畫出 $abs(y_2(t))$ ，$y_2(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$。請比較$abs(\mathrm{y}(t))$ 與 $abs(y_2(t))$ 是否有差異，若有差異，原因何在。

(3) 反思題 ：離散摺積方式若視為兩個多項式相乘如 $\mathrm{y}(x) = g(x) \cdot h(x)$，請以例題說明相乘後多項式 $\mathrm{y}(x)$ 長度等於 (3.1)。

(4) 反思題 ：請說明離散摺積 $y[n] = x[n] * h[n]$，$y[n]$開始位置點為 (3.2)。

(5) 挑戰題 ：請以 matlab 程式找出 $x(t)$，若

$$x(t) = \frac{\sin(100\pi t)}{\pi t} * \frac{\sin(200\pi t)}{\pi t} * \frac{\sin(300\pi t)}{\pi t} * \frac{\sin(400\pi t)}{\pi t}$$ 。