

Harmonogram i Metodyka: Estymacja i Prognozowanie Value at Risk

Spis treści

1. Etap 1: Przygotowanie danych i analiza wstępna
2. Etap 2: Specyfikacja i estymacja modelu
3. Etap 3: Prognozowanie i weryfikacja VaR
4. Zestawienie odpowiedzialności

Etap 1: Przygotowanie danych i analiza wstępna {#etap-1}

Odpowiedzialność: Iza

Transformacja danych

Pierwszym krokiem jest przygotowanie szeregu czasowego stóp zwrotu:

- **Wyznaczenie logarytmicznych stóp zwrotu:** Obliczenie $r_t = \log(P_t/P_{t-1})$, gdzie P_t to cena w okresie t
- **Podział próby na dwa podzbiory:**
 - Próba badawcza (In-sample): 80-90% obserwacji przeznaczonych do estymacji parametrów modelu
 - Okres prognozowany (Out-of-sample): Ostatnie 10-20% obserwacji przeznaczonych do weryfikacji VaR

Analiza statystyczna (na próbie badawczej)

Na etapie analizy wstępnej przeprowadza się kompleksową diagnostykę statystyczną:

1. **Weryfikacja stacjonarności (Test ADF)**
 - Test Augmented Dickey-Fuller dla potwierdzenia, że szereg jest procesem stacjonarnym
 - Istotna do prawidłowego modelowania szeregów czasowych
 2. **Weryfikacja normalności rozkładu (Test Jarque-Bera)**
 - Badanie, czy stopy zwrotu pochodzą z rozkładu normalnego
 - Ważne dla interpretacji wyników VaR
 3. **Badanie autokorelacji stóp zwrotu (ACF/PACF, Test Ljung-Boxa)**
 - Cel: Ustalenie rzędu modelu średniej (ARMA)
 - Analiza funkcji autokorelacji (ACF) oraz częściowej autokorelacji (PACF)
 - Test Ljung-Boxa do formalnej weryfikacji hipotezy o braku autokorelacji
 4. **Badanie efektu ARCH (Test Ljung-Boxa dla kwadratów stóp zwrotu)**
 - Cel: Uzasadnienie użycia modelu GARCH
 - Testowanie homoskedastyczności wariancji
 - Wykrycie skupiania wariancji (volatility clustering)
-

Etap 2: Specyfikacja i estymacja modelu {#etap-2}

Odpowiedzialność: Piotr

Modelowanie równania średniej (Mean Equation)

Drugi etap obejmuje specyfikację dynamicznego modelu warunkowej średniej:

- **Identyfikacja rzędu ARMA:** Zazwyczaj AR(0) lub AR(1) dla danych dziennych
 - Wybór między: modelem bez autoregresji, czy z autoregresją rzędu 1
 - Decyzja oparta na wynikach testów autokorelacji z Etapu 1
- **Analiza reszt z równania średniej (u_t):**
 - Weryfikacja występowania efektu skupiania wariancji
 - Przygotowanie do modelowania wariancji warunkowej

Modelowanie równania wariancji (Variance Equation)

Estymacja modelu warunkowej wariancji:

- **Specyfikacja modelu:** AR(1)-GARCH(1,1)
 - Równanie średniej: $r_t = \mu + u_t$
 - Równanie wariancji: $h_t = \omega + \alpha u_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$
- **Wyznaczenie warunkowej wariancji (h_t):**
 - Estymacja parametrów ω , α i β na próbie badawczej
 - Zapewnienie spełnienia warunków dodatniości parametrów

Diagnostyka modelu

Weryfikacja jakości dopasowania modelu:

1. **Analiza reszt ustandaryzowanych ($z_t = u_t / \sqrt{h_t}$)**
 - Resty ustandaryzowane powinny być niezależnymi zmiennymi losowymi
 - Badanie rozkładu reszt ustandaryzowanych
2. **Weryfikacja braku autokorelacji reszt ustandaryzowanych i ich kwadratów (Test Ljung-Boxa)**
 - Brak autokorelacji w z_t potwierdza prawidłowe modelowanie średniej
 - Brak autokorelacji w z_t^2 potwierdza prawidłowe modelowanie wariancji
3. **Cel diagnostyki:** Potwierdzenie, że model poprawnie opisał strukturę zależności w danych

Etap 3: Prognozowanie i weryfikacja VaR {#etap-3}

Odpowiedzialność: Klaudia

Wyznaczenie VaR w próbie (In-sample)

Obliczenie Value at Risk na etapie historycznym:

- **Estymacja VaR na poziomach ufności:**
 - VaR na poziomie ufności 95% (dopuszczalny 5% ryzyko)
 - VaR na poziomie ufności 99% (dopuszczalny 1% ryzyko)
- **Formuła VaR warunkowy:**

$$\text{VaR}_t(\alpha) = -\sigma_t \cdot q_\alpha$$

gdzie $\sigma_t = \sqrt{h_t}$ to warunkowe odchylenie standardowe, a q_α to kwantyl rozkładu (np. -1.645 dla 95%, -2.326 dla 99%)

- **Wizualizacja stóp zwrotu na tle VaR:**

- Sporządzenie wykresu ilustrującego historyczne stopy zwrotu oraz obliczone wartości VaR
- Identyfikacja wizualna przekroczeń VaR

Proгноza VaR (Out-of-sample)

Prognozowanie wartości zagrożonej w okresie testowym:

- **Wyznaczenie jednookresowych prognoz VaR:**

- Dla każdego okresu w próbie testowej
- Wykorzystanie oszacowanych parametrów GARCH z próby badawczej
- Prognozy jednookresowe warunkowej wariancji: $\hat{h}_{t+1|t}$

- **Procedura prognozowania:**

1. Ustalenie warunkowej wariancji na ostatnim okresie próby badawczej
2. Rekurencyjne obliczenie prognoz warunkowej wariancji dla okresu testowego
3. Przeliczenie na VaR przy założonych poziomach ufności

Backtesting (Weryfikacja prognoz)

Formalna ocena dokładności prognoz VaR:

1. **Zliczenie przekroczeń (Exceptions Count)**

- Zidentyfikowanie sytuacji, gdy strata faktyczna przekroczyła prognozowany VaR
- Oznaczenie: sytuacja, gdy $r_t < -\text{VaR}_t(\alpha)$

2. **Test Kupca (Kupiec's Proportion of Failures Test)**

- **Hipoteza zerowa (H_0):** Odsetek przekroczeń jest zgodny z przyjętym poziomem istotności
- **Hipoteza alternatywna (H_1):** Odsetek przekroczeń różni się od założonego poziomu
- **Statystyka testowa:** Zastosowanie testu dwumianowego
- **Kryteria decyzyjne:**
 - Dla VaR 95%: Oczekiwana liczba przekroczeń = $5\% \times \text{liczba obserwacji}$
 - Dla VaR 99%: Oczekiwana liczba przekroczeń = $1\% \times \text{liczba obserwacji}$
- **Interpretacja wyników:**
 - Brak podstaw do odrzucenia $H_0 \rightarrow$ Model VaR jest statystycznie adekwatny
 - Odrzucenie $H_0 \rightarrow$ Model wymaga przeformułowania lub recalibracji

Zestawienie odpowiedzialności {#zestawienie}

Etap	Odpowiedzialny	Kluczowe zadania
Etap 1	Iza	Transformacja danych, analiza wstępna, diagnostyka
Etap 2	Piotr	Specyfikacja modelu, estymacja GARCH, diagnostyka reszt
Etap 3	Klaudia	Prognozowanie VaR, backtesting, raport wyników

Table 1: Podział odpowiedzialności między członkami zespołu

Uwagi dodatkowe

- Całość projektu wymaga ciągłej komunikacji między etapami
- Wyniki każdego etapu stanowią podstawę dla etapu następnego
- W przypadku niespełnienia warunków diagnostycznych na Etapie 2, może być konieczna respecyfikacja modelu
- Backtesting powinien być powtórzony dla różnych przedziałów czasowych w celu oceny stabilności modelu