Politechnika Wrocławska

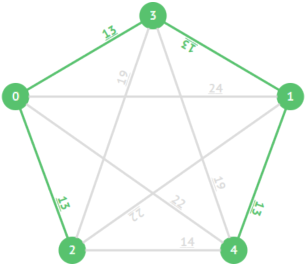
Wybrane problemy odpornej optymalizacji dyskretnej

z możliwością modyfikacji

Tomasz Strzałka
Wydział Podstawowych Problemów Techniki

18 kwietnia 2016

Minimalne drzewo rozpinające



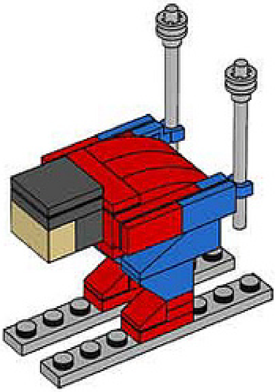
Właściwości

$$T^* = \min_{T \in \mathcal{T}} c(T)$$

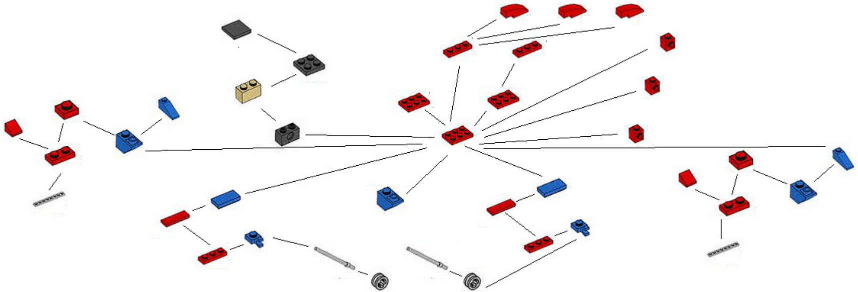
$$|T| = |V| - 1$$

$$\exists v \overset{*}{\rightsquigarrow} v' \ : \ v \neq v'$$

Przykład



Przykład



Właściwości

Graf pełny z 43 wierzchołkami.

Problem Incremental

Opis

$$\min_{\mathbf{y}\in S_{\mathbf{x}}^{k}} v\left(\mathbf{y},\mathbf{s}\right)$$

$$\mathbf{x}\in X$$

$$\mathbf{x}^{*}=\min_{\mathbf{x}\in X} arg\ \ v\left(\mathbf{x},\mathbf{s}^{0}\right)$$

$$\mathbf{s}\in S=\left\{\mathbf{s}^{1},\mathbf{s}^{2},\ldots,\mathbf{s}^{n}\right\}$$

$$v\left(\mathbf{x},\mathbf{s}^{0}\right)=\sum_{e_i\in E} c_i^{\mathbf{s}}\cdot x_i$$

Problem minimaxowy

Opis

$$\min_{\mathbf{x}\in X}\max_{\mathbf{s}\in S} v\left(\mathbf{x},\mathbf{s}\right)$$

$$\mathbf{s}\in S=\left\{\mathbf{s}^{1},\mathbf{s}^{2},\ldots,\mathbf{s}^{n}\right\}$$

Najgorszy scenariusz

Opis

$\mathbf{s}^?$ — pole grawitacyjne czarnej dziury zniekształca orbity planet układu słonecznego powodując kolizje między nimi.

$$\left(Pr\left[\mathbf{s}^?\right] \approx \frac{1}{10^{18}}\right)$$

Regret min-max

Opis

$$\min_{\mathbf{x}\in X}\max_{\mathbf{s}\in S}\left(v\left(\mathbf{x},\mathbf{s}\right)-v_{\mathbf{s}}^{*}\right)$$

$$v_{\mathbf{s}}^{*}=v\left(\mathbf{x}_{\mathbf{s}}^{*},\mathbf{s}\right)$$

$$\mathbf{x}_{\mathbf{s}}^{*}=\min_{\mathbf{x}\in X} arg\ v\left(\mathbf{x},\mathbf{s}\right)$$

Najgorszy scenariusz

Opis

$$\forall \mathbf{x} \in X \; v(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - v^*_{\mathbf{s}} \text{ — „małe''}$$

Problem Incremental

Opis

$$\min_{\mathbf{y} \in S_{\mathbf{x}}^{k}} v\left(\mathbf{y}, \mathbf{s}\right)$$

Odporna optymalizacja

Opis

$$\min_{\mathbf{x}\in X}\left(v\left(\mathbf{x},\mathbf{s}\right)+\max_{\mathbf{s}'\in S}\min_{\mathbf{y}\in S_{\mathbf{x}}} v\left(\mathbf{y},\mathbf{s}'\right)\right)$$

Odporna optymalizacja

Problem MST

$$\min_{\mathbf{y}} v\left(\mathbf{y}, \mathbf{s}\right)$$

Problem Incremental MST

$$\min_{\mathbf{y} \in S_{\mathbf{x}}^{k}} v\left(\mathbf{y}, \mathbf{s}\right)$$

Odporna optymalizacja

Problem Adwersarza MST

$$\max_{\mathbf{s}' \in S} \min_{\mathbf{y} \in S_{\mathbf{x}}} v\left(\mathbf{y}, \mathbf{s}'\right)$$

Odporna optymalizacja MST

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \left(v\left(\mathbf{x}, \mathbf{s}\right) + \max_{\mathbf{s}' \in S} \min_{\mathbf{y} \in S_{\mathbf{x}}} v\left(\mathbf{y}, \mathbf{s}'\right) \right)$$

Incremental LP

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{e \in E} c_e \cdot y_e, \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{(j,s) \in E} f_{js}^k - \sum_{(s,j) \in E} f_{sj}^k = -1, && \forall k \in V \setminus \{v_s\}, \\
& \sum_{(j,i) \in E} f_{ji}^k - \sum_{(i,j) \in E} f_{ij}^k = 0, && \forall i, k \in V \setminus \{v_s\} \ \wedge \ i \neq k, \\
& \sum_{(j,k) \in E} f_{jk}^k - \sum_{(k,j) \in E} f_{kj}^k = 1, && \forall k \in V \setminus \{v_s\}, \\
& f_{ij}^k \leqslant y_{ij}, && \forall (i,j) \in E \ \wedge \ \forall k \in V \setminus \{v_s\}, \\
& \sum_{(i,j) \in E} y_{ij} = n - 1,
\end{aligned}
$$

Incremental LP

s.t.$\cdots$

$$
\begin{aligned}
& f_{ij}^{k} \leqslant y_{ij}, && \forall (i,j) \in E \ \wedge \ \forall k \in V \setminus \{v_s\}, \\
& \sum_{(i,j) \in E} y_{ij} = n - 1, && \\
& \sum_{(i,j) \in E} |x_{ij} - y_{ij}| \leqslant k && \\
& \sum_{(i,j) \in E} y_{ij} = n - 1, && \\
& x_{ij} = 1, && \forall (i,j) \in T^0 \\
& x_{ij} = 0, && \forall (i,j) \notin T^0
\end{aligned}
$$

Incremental LP

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & \cdots \\
& f_{ij} \geqslant 0, \forall (i,j) \in E, \\
& y_{ij} \geqslant 0, \forall (i,j) \in E.
\end{aligned}
$$

Incremental LP

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{e_i \in E^*} c_i \cdot x_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{e_i \in E^*} x_i = |V| - 1, \\
& \sum_{e_i \in E^*(S)} x_i = |S| - 1, \qquad S \subseteq V, \\
& x_i \geqslant 0, \qquad\qquad e_i \in E^*, \\
& \sum_{e_i \in T^* \setminus T^0} x_i \leqslant k.
\end{aligned}
$$

Incremental LP

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{e_i \in E^*} c_i \cdot x_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{e_i \in E^*} x_i = |V| - 1, \\
& \sum_{e_i \in E^*(S)} x_i = |S| - 1, \qquad && S \subseteq V, \\
& x_i \geqslant 0, && e_i \in E^*, \\
& \sum_{e_i \in T^0} x_i \geqslant n - 1 - k.
\end{aligned}
$$

Incremental LP - relaksacja

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{e_i \in E^*} c_i \cdot x_i + \lambda \cdot \left((n-1-k) - \sum_{e_i \in T^0} x_i \right) & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{e_i \in E^*} x_i = |V| - 1, & \\
& \sum_{e_i \in E^*(S)} x_i = |S| - 1, & S \subseteq V, \\
& x_i \geqslant 0, & e_i \in E^*.
\end{aligned}
$$

Incremental LP - funkcja celu

$$L(\lambda, x) = \sum_{e_i \in E*} c_i \cdot x_i + \lambda \cdot \left((n - 1 - k) - \sum_{e_i \in T^0} x_i \right) =$$

$$\sum_{e_i \in T* \cup T^0} c_i \cdot x_i - \lambda \sum_{e_i \in T^0} x_i + \lambda \cdot (n - 1 - k) = \cdots$$

$$\cdots = \min \left\{ \sum_{e_i \in T* \setminus T^0} c_i \cdot x_i + \sum_{e_i \in T^0} (c_i - \lambda) \cdot x_i \right\}$$

Tabu Search