Politechnika Wrocławska

Algorytmy wyznaczania najkrótszych ścieżek w rzeczywistych sieciach drogowych

Autor: Tomasz Strzałka
Promotor: dr hab. Paweł Zieliński, prof. PWr
Wydział Podstawowych Problemów Techniki

20 stycznia 2015

Problem

Definicja problemu cz.1

$$G = (V, E)\ ;\ |V| = n\ ;\ |E| = m$$

$$E = \left\{ e_{ij} : v_i \overset{1}{\rightsquigarrow} v_j \wedge v_i, v_j \in V \right\}\ ;\ i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

$$(\forall e_{ij})\,(\exists c_{ij})\ \ 0 < c_{ij} \leqslant C\ ;\ C = \max_{e_{ij} \in E} (c_{ij})$$

$$(\forall v_i \in V)\ \ \exists A(i) : A(i) \in \left\{ v_j : \exists v_i \overset{1}{\rightsquigarrow} v_j \right\}$$

Problem

Cel

Definicja problemu cz.2

Cel dla zadanego i:

$$(\forall v_j \in V : i \neq j)\, \exists v_i \overset{*}{\rightsquigarrow} v_j : \min \left(\sum_{e_{kl} \in P_E} c_{kl} \right)$$

$$v_i \overset{*}{\rightsquigarrow} v_j \equiv v_i \overset{1}{\rightsquigarrow} v_a \overset{1}{\rightsquigarrow} v_b \cdots \overset{1}{\rightsquigarrow} v_j$$

$$P_E \in \{e_{kl} : v_k, v_l \in P\}$$

$$P \in \{v_i, v_a, v_b, \cdots, v_j\}$$

Rozwiązanie

Przejść wszystkimi drogami, wybrać najkrótsze z nich.

Ważne własności

Własność górnego ograniczenia

Dla każdego wierzchołka $v_i \in V$ zachodzi $v_i.d \geqslant \delta(s, v_i)$, gdzie wartość $v_i.d$ monotonicznie maleje i, w momencie osiągnięcia swojego dolnego ograniczenia, przestaje ulegać zmianie.

Własność zbieżności

Jeśli w grafie ważonym $G = (V, E)$ istnieje najkrótsza ścieżka $P = \langle v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{k-1}, v_k \rangle$ i w dowolnym momencie przed relaksacją krawędzi e_{k-1k} zachodzi $v_{k-1}.d = \delta(v_p, v_{k-1})$, to po tej relaksacji $v_k.d = \delta(v_p, v_k)$.

Lepsze rozwiązanie

Zawsze chodzić najkrótszymi drogami.

LSA vs LCA

Pseudokod 1: GENERIC-DIJKSTRA (G, s)

begin

  $S \longleftarrow \emptyset$

  $\overline{S} \longleftarrow \{v : v \in V\}$

  while $\overline{S}$ *nie jest pusty* **do**

    $v \longleftarrow v_i : v_i.d = \min\left\{v_j.d : v_j \in \overline{S}\right\}$

    $S \longleftarrow S \cup \{v\}$

    $\overline{S} \longleftarrow \overline{S} - \{v\}$

    foreach $e_{ij} : v_i \overset{1}{\rightsquigarrow} v_j$ **do**

      $RELAX\,(v_i, v_j)$

LSA vs LCA

Pseudokod 2: GENERIC-LABEL-CORRECTING-ALG (G, s)

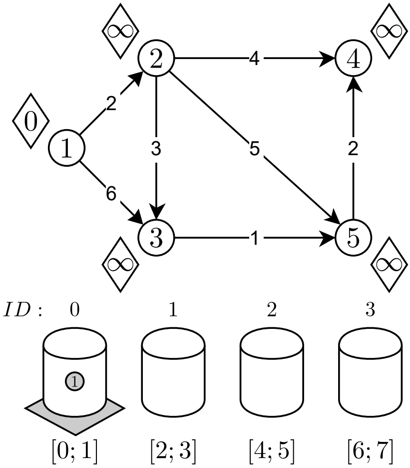
begin

  INIT-GRAPH (G, s)

  while $\exists e_{ij} : v_i \overset{1}{\rightsquigarrow} v_j \ \wedge \ v_j.d > v_i.d + c_{ij}$ **do**

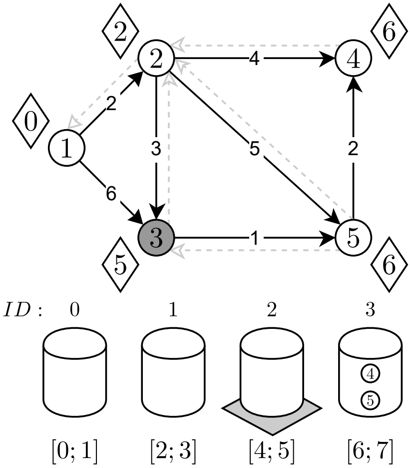
    $RELAX\,(v_i, v_j)$

DKA - kubełki aproksymacyjne

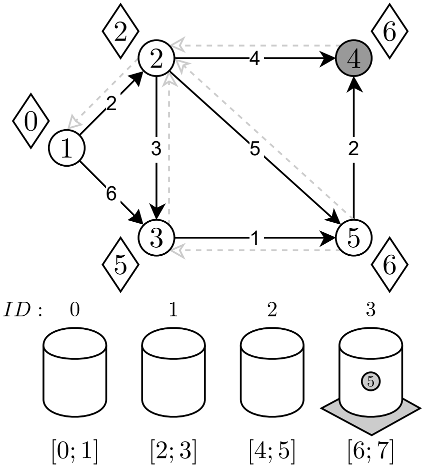


DKA - kubełki aproksymacyjne

„Poprawianie” krawędzi



DKA - kubełki aproksymacyjne



Złożoności

Skrót	Charakterystyka		Złożoność
	Struktura	Typ	
BFP	—	LCA	$O\left(n^2\right)$
DDL	Kubełki	LSA	$O\left(m+n\cdot C\right)$
DKA	Kubełki	LCA	$O\left(m\cdot b+n\cdot\left(b+\frac{C}{b}\right)\right)$
DKD	Kubełki	LSA	$O\left(m+n\cdot\sqrt{C}\right)$
DKM	Kubełki	LSA	$O\left(n^2\right)$
DKX	Kubełki	LSA	$O\left(m+n\cdot\log\left(C\right)\right)$
DKF	Kopce	LSA	$O\left(m+n\cdot\log\left(n\right)\right)$
DKR	Kopce	LSA	$O\left(m\cdot\log_d\left(n\right)\right)$
TQQ	Kolejki	LSA	$O\left(m+n^2\right)$
THR	*DL*-Listy	LCA	$O\left(m\cdot t+\frac{n^2\cdot C}{t}\right)$

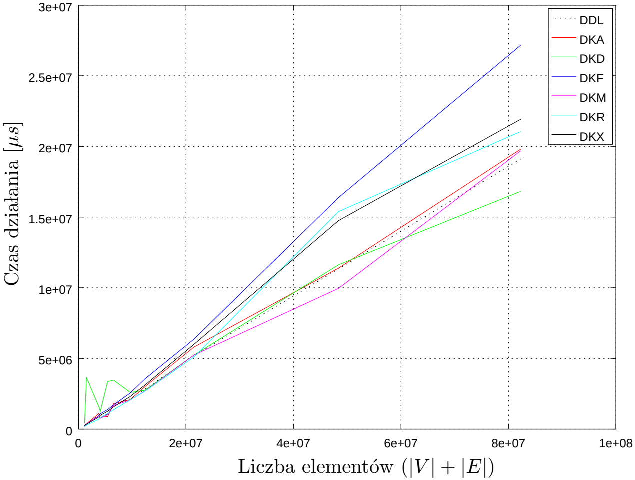
Dane — część 1

Nazwa Testu		Liczba elementów	
Skrót	Opis	Wierzchołków	Krawędzi
NY	New York City	264 346	733 846
BAY	Zatoka San Francisco	321 270	800 172
COL	Kolorado	435 666	1 057 066
FLA	Floryda	1 070 376	2 712 798
NW	USA (płn.-zach.)	1 207 945	2 840 208
NE	USA (płn.-wsch.)	1 524 453	3 897 636

Dane — część 2

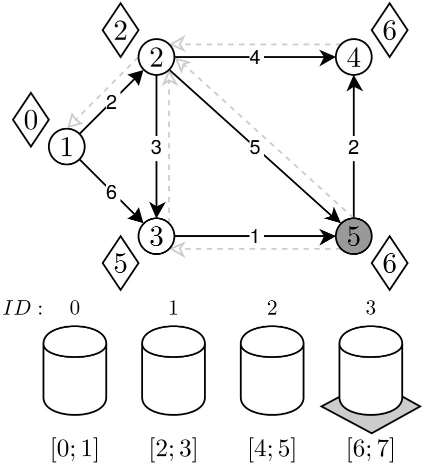
Nazwa Testu		Liczba elementów	
Skrót	Opis	Wierzchołków	Krawędzi
CAL	Kalifornia i Nevada	1 890 815	4 657 742
LKS	Wielkie Jeziora	2 758 119	6 885 658
E	Wschodnie USA	3 598 623	8 778 114
W	Zachodnie USA	6 262 104	15 248 146
CTR	Centralne USA	14 081 816	34 292 496
USA	Stany Zjednoczone	23 947 347	58 333 344

Wyniki

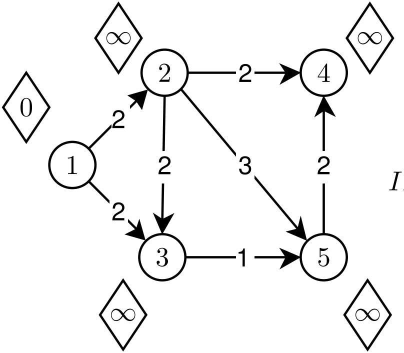


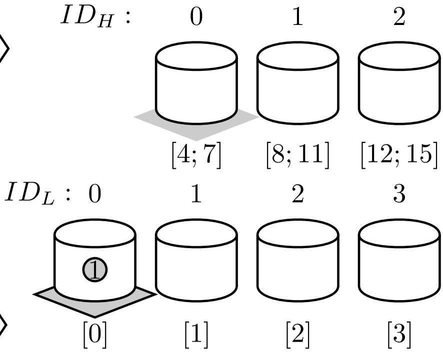
3e+07
2.5e+07
2e+07
1.5e+07
1e+07
5e+06
0
0
2e+07
4e+07
6e+07
8e+07
1e+08
Czas działania [μs]
Liczba elementów ($|V| + |E|$)
DDL
DKA
DKD
DKF
DKM
DKR
DKX

DKA - przypomnienie

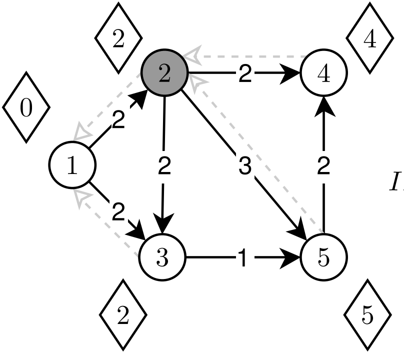


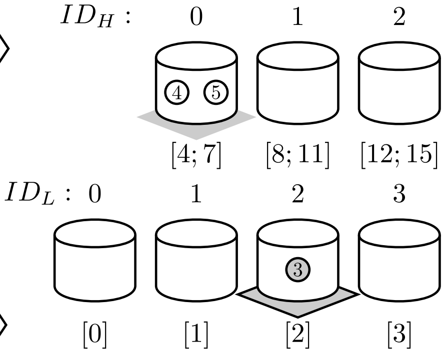
DKD - kubełki wielopoziomowe



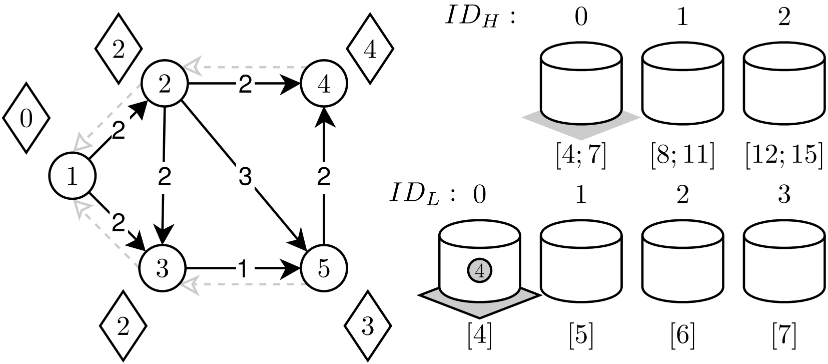


DKD - kubełki wielopoziomowe





DKD - kubełki wielopoziomowe

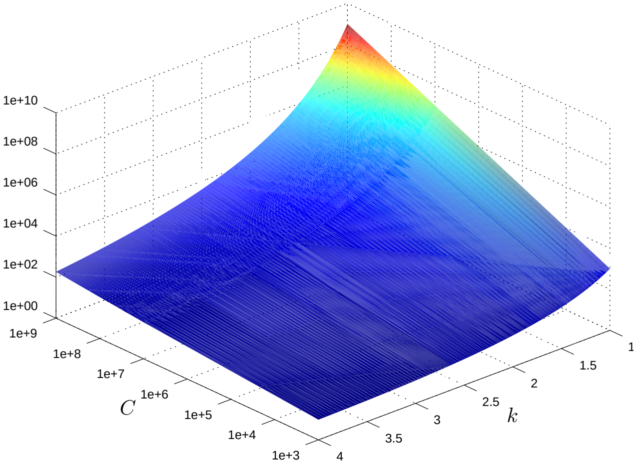


Więcej poziomów (uogólnienie DKD)

k-poziomów

- Złożoność obliczeniowa: $O\left(m + n \cdot \left(k + \sqrt[k]{C}\right)\right)$
- Złożoność pamięciowa: $\Theta\left(k \cdot \sqrt[k]{C}\right)$

Współczynnik $n \cdot k + n \cdot \sqrt[k]{C})$



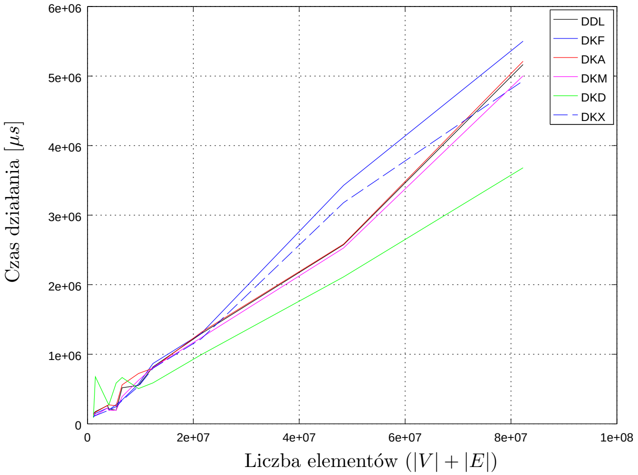
Wpływ stałych na efektywność

Algorytm	Analiza WCA
DKA	$O\left(m \cdot b + n \cdot \left(b + \frac{C}{b}\right)\right)$
DKF	$O\left(m + n \cdot \log\left(n\right)\right)$
DKX	$O\left(m + n \cdot \log\left(C\right)\right)$
DDL	$O\left(m + n \cdot C\right)$
DKD	$O\left(m + n \cdot \sqrt{C}\right)$

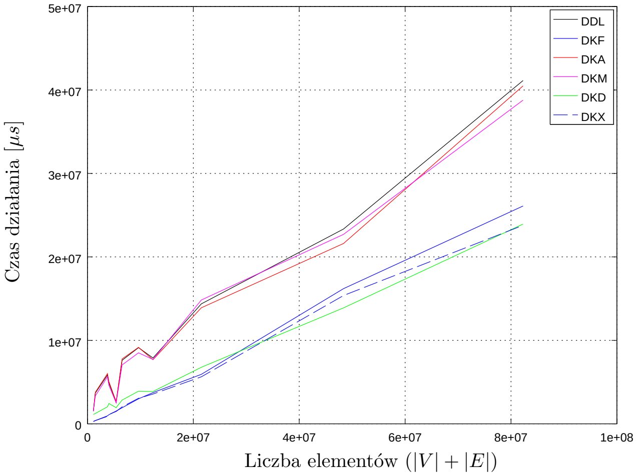
Pytanie

Co się stanie, gdy zwiększymy C ?

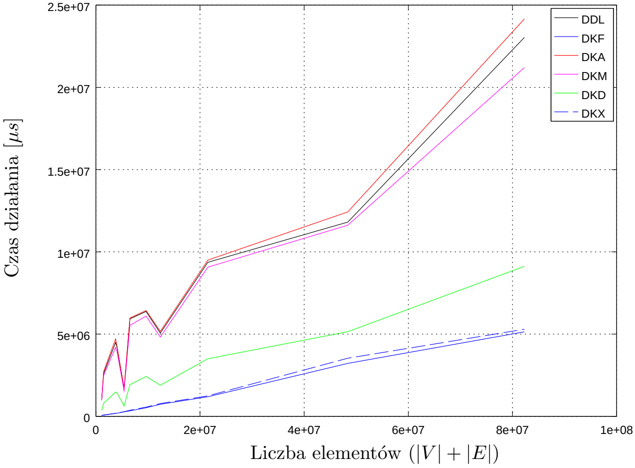
Wyniki - zwiększone koszty ścieżek



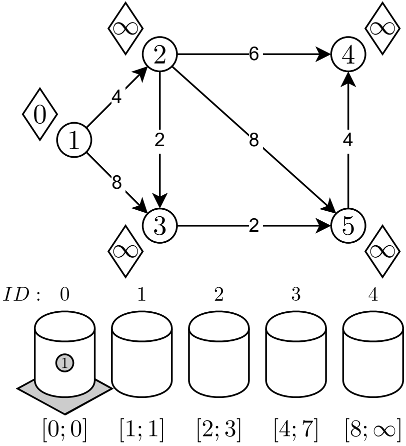
Jeszcze bardziej . . .



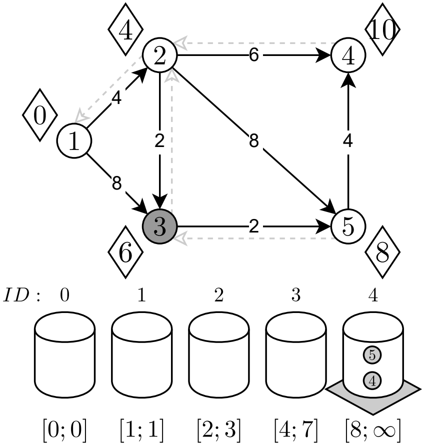
. . . i jeszcze.


2.5e+07
2e+07
1.5e+07
1e+07
5e+06
0
0
2e+07
4e+07
6e+07
8e+07
1e+08
Czas działania [μs]
Liczba elementów ($|V| + |E|$)
DDL
DKF
DKA
DKM
DKD
DKX

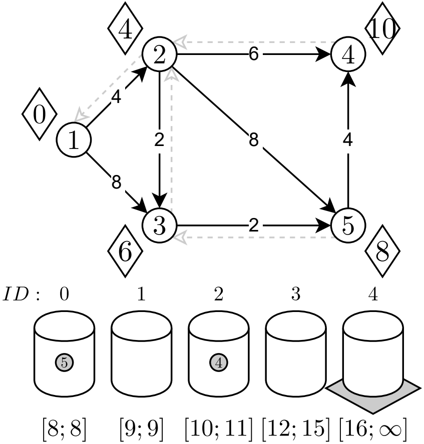
DKX - kubełki pozycyjne



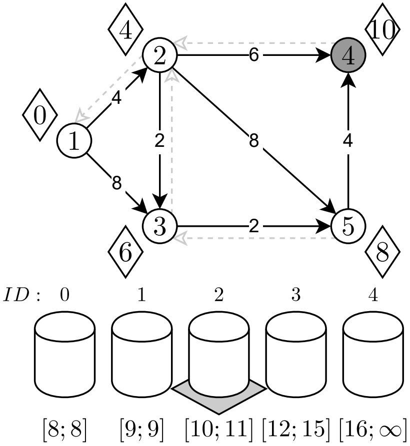
DKX - kubełki pozycyjne



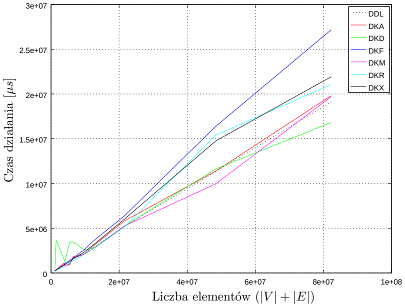
DKX - kubełki pozycyjne

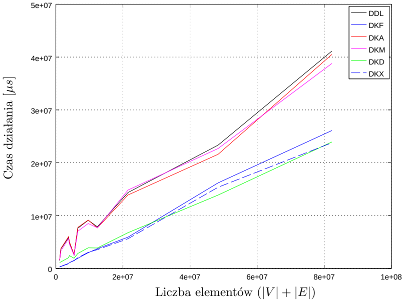


DKX - kubełki pozycyjne



Wnioski


3e+07
2.5e+07
2e+07
1.5e+07
1e+07
5e+06
0
Czas działania [μs]
0
2e+07
4e+07
6e+07
8e+07
1e+08
Liczba elementów ($|V| + |E|$)
DDL
DKA
DKD
DKF
DKM
DKR
DKX


5e+07
4e+07
3e+07
2e+07
1e+07
0
Czas działania [μs]
0
2e+07
4e+07
6e+07
8e+07
1e+08
Liczba elementów ($|V| + |E|$)
DDL
DKF
DKA
DKM
DKD
DKX

Koniec

Dziękuję