

WYDZIAŁ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

ALGORYTMY
WYZNACZANIA NAJKRÓTSZYCH ŚCIEŻEK
W RZECZYWISTYCH SIECIACH DROGOWYCH

TOMASZ STRZAŁKA

Praca inżynierska napisana
pod kierunkiem
dr hab. Pawła Zielińskiego, prof. PWr



Politechnika
Wrocławskiego

WROCŁAW 2015

Podziękowania chciałbym skierować do mojego promotora,
dr hab. Pawła Zielińskiego, prof. nadzw. Politechniki Wrocławskiej,
za nakład włożonej pracy w korektę tekstu,
poświęcony na konsultacjach czas oraz zaangażowanie,
pływające z chęci pomocy w przygotowaniu jak najlepszej pracy.

Chciałbym też podziękować Ani Centkowskiej,
która była dla mnie niewyczerpanym źródłem wsparcia
i motywacji w trakcie pisania poniższej pracy,
jak i wszystkim, którzy mnie w tym wspierali.



Spis treści

1 Wstęp	1
2 Podstawy	3
2.1 Grafy w sieciach drogowych	3
2.2 Reprezentacje grafu	3
2.2.1 Macierz incydencji	4
2.2.2 Macierz sąsiedztwa	5
2.2.3 Listy incydencji	6
2.2.4 Pęki	6
2.2.5 Złożoność pamięciowa i czasowa	8
2.3 Problem najkrótszych ścieżek	12
2.3.1 Reprezentacja problemu	13
2.3.2 Podstawowe operacje	15
2.3.3 Właściwości najkrótszych ścieżek	18
2.3.4 Algorytm Bellmana-Forda	18
2.4 Podsumowanie rozdziału	21
3 Najkrótsze ścieżki z jednym źródłem	23
3.1 Sortowanie topologiczne	23
3.1.1 Algorytm Khana	23
3.1.2 Przeszukiwanie w głąb	26
3.1.3 Sortowanie topologiczne	27
3.2 Gennykczny algorytm Dijkstry	28
3.2.1 Algorytm Dijkstry	28
3.2.2 Złożoność obliczeniowa	29
3.2.3 Ujemne koszty krawędzi	30
3.2.4 Poprawność działania	31
3.3 Podstawowe struktury danych	32
3.4 Struktury oparte na kopcach	32
3.4.1 Kopiec R-arny	32
3.4.2 Kopiec Fibonacciego	35
3.5 Struktury oparte na kubelkach	38
3.5.1 Pierwsze podejście	38
3.5.2 Z przepeleniem	39
3.5.3 Dial	41
3.5.4 Aproksymacja zakresu	43
3.5.5 Kubełki wielopoziomowe	46
3.5.6 Kopce pozycyjne	50
4 Inne algorytmy	57
4.1 Kombinacje struktur	57
4.1.1 Algorytm przyrostowy	57
4.1.2 Algorytm przyrostowy z dwoma kolejkami	59
4.2 Algorytm progowy	60

5 Wyniki eksperymentalne	65
5.0.1 Środowisko testowe	65
5.1 Mapa Ameryki	65
5.1.1 Metodyka i dane	66
5.1.2 Wyniki i wykresy zależności	66
5.2 Gęstość grafu	68
5.2.1 Metodyka i dane	68
5.2.2 Wyniki i wykresy zależności	69
5.3 Pozostałe testy	72
5.3.1 Metodyka i dane	72
5.3.2 Wyniki i wykresy zależności	72
6 Zakończenie	77
A Biblioteka: Take Me Home	81
A.1 Wymagania i instalacja	81
A.1.1 9th DIMACS Implementation Challenge - Shortest Paths	82
A.1.2 Pomocnicze skrypty	83
A.2 API biblioteki	87
A.2.1 Konfiguracja środowiska	87
A.2.2 Dziennik zdarzeń	88
A.3 Przykładowa sesja	89

Wstęp

Niniejsza praca porusza zagadnienie nieheurystycznych algorytmów wyszukiwania najkrótszych ścieżek w rzeczywistych sieciach drogowych. Jej celem jest teoretyczne omówienie każdego z przedstawianych algorytmów, a następnie na drodze przeprowadzanych eksperymentów jednoznaczne udzielenie odpowiedzi na pytanie, które z nich wyróżniają się na tle pozostałych szybkością działania dla badanych sieci. W tym celu przeprowadza analizę rzeczonych algorytmów, przedstawia sposób ich działania, wskazuje mocne i słabe strony, oraz poddaje seriom testów, mających na celu wykazać ich właściwości oraz sposoby zachowania się dla zadanych sieci. W związku z powyższym praca jest podzielona na dwie części w których to kolejno skupia się na omówieniu algorytmów oraz zbadaniu ich zachowań dla wybranych grafów, reprezentujących sieci drogowe. Pierwsza z nich — teoretyczna — zawiera opisy wszystkich implementacji, jakie później będą wykorzystane w części drugiej. Skupiamy się w niej głównie na omówieniu ich podstawowych założeń i idei. Każdy z takich opisów dodatkowo zawiera (obok pseudokodu) uwagi, dotyczące szczegółów implementacyjnych danego algorytmu, sugeruje możliwości jego usprawnienia (jeżeli te są na tyle istotne, by o nich wspominać), przeprowadza analizę najgorszego przypadku oraz zawiera ilustracje, mające na celu przedstawienie działania omawianego algorytmu na konkretnym przykładzie, ułatwiając tym samym jego zrozumienie. Pierwsza część, w rozdziale „Podstawy”, dodatkowo skupia się na innych aspektach, mających wpływ na działanie oraz sposób implementacji poszczególnych algorytmów. Formułuje przy okazji wszystkie podstawowe definicje i zwroty, jakie są wymagane do zrozumienia zawartości następnych rozdziałów. Część eksperymentalna zawiera wyniki przedstawiające zależności, jakie zachodzą pomiędzy poszczególnymi algorytmami a rodzajami sieci, do jakich je zastosowano. Zestawia ze sobą czasy ich działania i wskazuje te, których efektywność jest największa. Przeprowadzone eksperymenty opierają się na implementacjach algorytmów, które zostały wykonane w ramach tej pracy inżynierskiej i umieszczone w bibliotece języka C, o której szerzej można się dowiedzieć w dodatku jej poświęconej (patrz Dodatek A). Zawiera on dodatkowo opis wszystkich narzędzi i skryptów, które zostały w niniejszej pracy wykorzystane.

Część implementacyjna pracy inżynierskiej została napisana w języku C zgodnie ze standardami, ustalonymi przez ISO 9899:1999 z wykorzystaniem środowiska programistycznego ECLIPSE w wersji 4.4.0, debuggerów GDB oraz VALGRIND (w wersji 3.10.1). Tekst pracy inżynierskiej został złożony w systemie L^AT_EX 2_E z wykorzystaniem podstawowych pakietów do reprezentacji kodu programistycznego: LISTINGS oraz ALGORITHM2E. Do składu wszelkich ilustracji użyto aplikacji internetowej DRAW.IO¹ oraz programu INKSCAPE w wersji 0.48.4. Do wygenerowania przedstawionych w pracy wykresów dwu- i trójwymiarowych zastosowano programy: OCTAVE (w wersji 3.8.1) oraz CROPPDF (do korekty otrzymanych wykresów). Całość została skompilowana pod kontrolą systemu UBUNTU 14.04.1 LTS.

¹ Adres strony internetowej: <https://www.draw.io/>.

Podstawy

W tym rozdziale zostaną omówione wszystkie ważniejsze pojęcia, którymi będziemy się od tej pory posługiwać. Przede wszystkim przedstawimy pojęcie **grafu** i sposoby jego reprezentacji w algorytmach, które będziemy omawiać w późniejszej części pracy. Przedyskutujemy postawiony przed nami problem wyszukiwania **najkrótszych ścieżek** w rzeczywistych sieciach drogowych, a także przyjrzymy się dokładnie własnościom, z jakich przyjdzie nam niejednokrotnie skorzystać podczas analizy kolejnych implementacji rozwiązań tego problemu. Na końcu tego rozdziału przedstawimy algorytm Bellmana-Forda jako podstawową ideę rozwiązywania tego typu problemów. Zaproponujemy też kilka prostych sposobów na usprawnienie powyższego algorytmu, omawiając je po kolei w podrozdziale 8.

2.1 Grafy w sieciach drogowych

Grafem będziemy nazywać taką parę $G = (V, E)$, gdzie każdy $v \in V$ jest **wierzchołkiem** tego grafu, zaś każdy element $e \in E$ jest jego **krawędzią**, łączącą dowolne dwa wierzchołki.

W naszym przypadku krawędzie grafu będziemy rozumieć jako dowolny odcinek drogi na jazdni między dwoma dowolnie wybranymi punktami v_p oraz v_k , gdzie przez v_i ($i \in \{1, \dots, |V|\}$) będziemy od tej pory oznaczać dowolny wierzchołek w grafie G (w odniesieniu do rzeczywistego ruchu drogowego może to być skrzyżowanie, dowolny punkt drogi na wysokości jakiegoś specyficznego budynku lub miejsca wystąpienia znaku drogowego itp.). Taką krawędź będziemy zwykle oznaczać przez e_{pk} , gdzie kolejność wypisania indeksów określa nam zwrot danego łuku. Stosowanie grafowej reprezentacji w odniesieniu do sieci dróg determinuje w pewnym stopniu właściwości grafu, z jakim będziemy mieli do czynienia. Nie będzie w nim na pewno krawędzi, których **koszt** jest mniejszy lub równy zero. W ogólności nie będziemy także mogli nic powiedzieć o acykliczności grafu ani rozstrzygnąć, czy będziemy pracować na grafach skierowanych czy nie. Zdecydowana większość rozważanych sieci drogowych posiada jednak w swojej topologii liczne cykle oraz wiele dróg jednokierunkowych i właśnie na taki model grafu — skierowany z cyklami — się zdecydujemy.

Każda krawędź w grafie posiada swoją **wagę**, podobnie jak każda droga z punktu v_p do v_k ma zdefiniowaną odległość między tymi dwoma punktami, wyrazoną w dowolnych jednostkach długości. Aby uprościć nasz model grafu założymy, że **koszt** (waga) każdego łuku¹ będzie wyrażony przez jedną liczbę naturalną, będącą odzwierciedleniem odległości między punktami, które dana krawędź $e \in E$ łączy. W rzeczywistych warunkach drogowych takie połączenie mogłoby posiadać cały szereg atrybutów (takich jak np. intensywność ruchu ulicznego, rodzaj nawierzchni, nachylenie terenu, ograniczenia prędkości na danym odcinku drogi), które miałyby bezpośredni wpływ na wybór najkrótszej ścieżki od punktu v_p do v_k , a które my w swoich rozważaniach — dla zachowania ich prostoty — pominiemy.

2.2 Reprezentacje grafu

W informatyce istnieje kilka sposobów na efektywne przedstawienie struktury grafu. Jak później pokażemy, wybór ten w znaczny sposób może wpływać na efektywność algorytmów wyszukiwania najkrótszych ścieżek, zarówno na ich złożoność czasową, jak i pamięciową [6, 7 – 10]. W niniejszym podrozdziale pokażemy

¹ W odniesieniu do połączeń pomiędzy węzłami w grafie $G = (V, E)$ będziemy wymiennie stosować nazwy: krawędź, łuk, połączenie.

trzy różne podejścia do problemu przedstawienia grafu jako struktury w programie, gdzie pierwsze z nich opiera się na utworzeniu dla grafu wejściowego **macierzy incydencji** — jest to jeden z dwóch sposobów reprezentacji macierzowej grafu, jakie będziemy rozważać.

2.2.1 Macierz incydencji

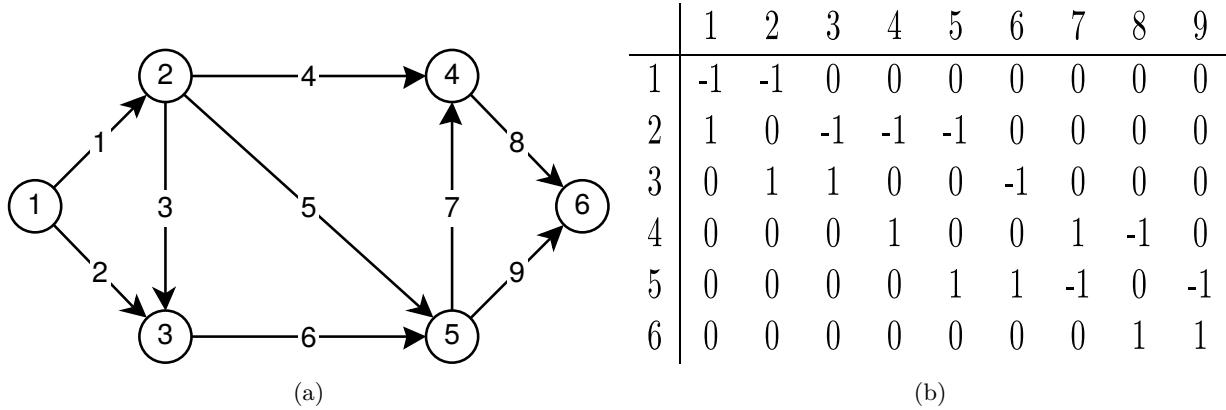
Macierz incydencji dla grafu $G = (V, E)$ to tablica o wymiarach $|V| \times |E|$, gdzie każda komórka jest zdefiniowana następująco:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{jeżeli krawędź } j \text{ wychodzi z wierzchołka } i, \\ 1 & \text{jeżeli krawędź } j \text{ wchodzi z wierzchołka } i, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}, \quad (2.1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} i &\in \{1, \dots, |V|\}, \\ j &\in \{1, \dots, |E|\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Innymi słowy, każde połączenie w grafie między dwoma wierzchołkami v_p i v_k jest traktowane jako takie, które uaktywniamy, pobierając jedną jednostkę „energii” (stąd w macierzy na odpowiednim miejscu wartość -1), którą następnie przekazujemy do docelowego wierzchołka v_k (co odnotowujemy w macierzy wartością $+1$).



Rysunek 2.1: **Macierz incydencji** (a) Graf skierowany $G = (V, E)$ z identyfikatorami węzłów 1–6 i łuków 1–9 (dla znanych identyfikatorów łuków będziemy stosować oznaczenie e_i zamiast e_{pk}). (b) Macierz incydencji $|V| \times |E|$ grafu G .

Operacje, jakie będziemy chcieli — jak się później okaże — wykonywać na tak zdefiniowanej macierzy (i na każdej następnej strukturze z tego podrozdziału), to procedury wyszukiwania wszystkich bezpośrednich następców danego węzła v_i (oznaczać będziemy taki zbiór za pomocą wyrażenia $A(i)$) oraz odnajdywania każdego łuku wychodzącego z v_i do wszystkich $v_k \in A(i)$. Dla pierwszego podejścia:

- koszt identyfikacji wszystkich łuków jest ściśle powiązany z liczbą krawędzi w grafie — wystarczy, że dla wierzchołka v_i przejrzymy wiersz o indeksie i , aby odnaleźć identyfikatory wszystkich krawędzi, bezpośrednio wychodzących z danego wierzchołka (wszystkie komórki o wartości mniejszej od zera). Możemy ograniczyć liczbę potrzebnych skanowań poprzez wprowadzenie licznika takowych krawędzi, lecz w najgorszym możliwym przypadku takie skanowanie wciąż będzie wymagało $O(m)$ porównań, gdzie m to oczywiście liczba krawędzi w grafie.
- Koszt wyszukania wszystkich następców węzła v_i obejmuje koszt odnalezienia wszystkich łuków prowadzących do takich wierzchołków oraz ustalenia ich identyfikatorów — co dla każdego znalezionej łuków e_j zmusza nas do przeszukania wszystkich elementów macierzy znajdujących się w tej samej, j -tej kolumnie. Takich kolumn — jak wspomnieliśmy wcześniej — będzie $|A(i)|$, zaś przeszukanie każdej z nich wymagać będzie (w najgorszym przypadku) $n-1$ porównań dla każdej z nich. Ostatecznie otrzymujemy $O(|A(i)| \cdot n)$ dla wyszukiwania wszystkich następców węzła v_i (wraz z wyszukiwaniem łuków — $O(m + |A(i)| \cdot n)$).

2.2.2 Macierz sąsiedztwa

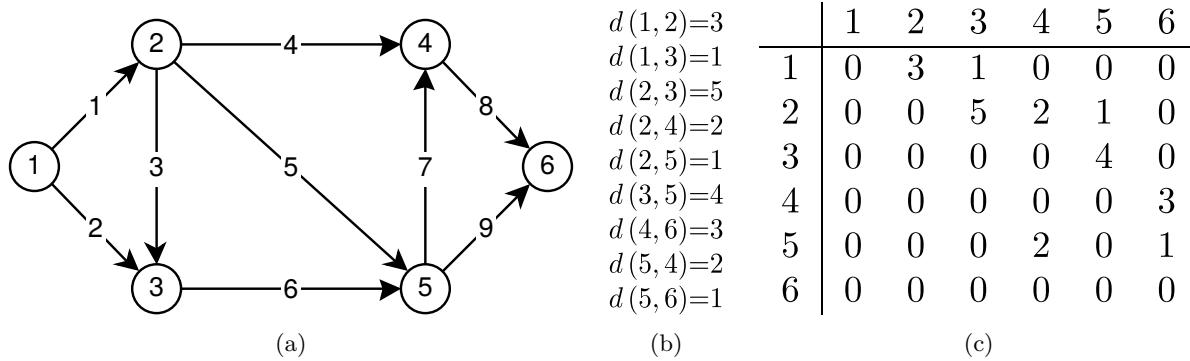
Oprócz macierzowej reprezentacji typu wierzchołek-krawędź możliwe jest także reprezentowanie struktury grafu za pomocą macierzy typu wierzchołek-wierzchołek. **Macierz sąsiedztwa** dla grafu $G = (V, E)$ jest macierzą o wymiarach $|V| \times |V|$, gdzie wartość każdej komórki definiuje się następująco:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli istnieje ścieżka z wierzchołka } v_i \text{ do } v_j, \\ 0 & \text{jeśli brak jest takiej ścieżki.} \end{cases} \quad (2.3)$$

O ile z powyższej reprezentacji grafu jesteśmy w stanie uzyskać informacje o wszystkich bezpośrednich następcach dowolnego węzła w czasie liniowym (dla węzła v_i wystarczy przeszukać wiersz o indeksie i), to macierz w takiej postaci nie niesie za sobą istotnych informacji o krawędziach grafu (takich, które umożliwiłyby ich szybką identyfikację, nie zmuszając nas do ponownego przeglądania wszystkich krawędzi grafu w poszukiwaniu łuku, który ma swój początek i koniec w wierzchołkach, danych nam przez macierz). Umiejętność szybkiej identyfikacji takich krawędzi będzie nam w późniejszych rozważaniach nieodzowna, jako że chcemy się skupić na wyszukiwaniu najkrótszych ścieżek, gdzie kluczowych informacji dla tego problemu będziemy szukać właśnie w krawędziach między wierzchołkami. Założymy, że każda krawędź będzie określana za pomocą trzech cech: wierzchołka startowego, końcowego oraz odległości między tymi dwoma punktami. Zauważmy, że w takim przypadku wszystkie informacje o krawędzi możemy umieścić bezpośrednio w macierzy sąsiedztwa, zastępując starą definicję nową:

$$b_{ij} = \begin{cases} d(i, j) > 0 & \text{jeżeli istnieje ścieżka z wierzchołka } v_i \text{ do } v_j, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \quad (2.4)$$

gdzie przez $d(i, j)$ zwykle będziemy oznaczać długość ścieżki (odległość między wierzchołkami, które łączy). Takie podejście pozwala nam nie tworzyć dodatkowych struktur, przechowujących informacje o krawędziach. Jeżeli chcielibyśmy wzrobić naszą strukturę krawędzi, zamiast wartości $d(i, j)$ w danych komórkach b_{ij} możemy wstawić numer identyfikatora danej krawędzi. Zapewni nam to dodatkowo jednoznaczność w przypadku chęci ich identyfikacji (zwróćmy uwagę, że oba łuki wchodzące do węzła v_4 mają ten sam koszt $d(2, 4) = d(5, 4) = 2$, co uniemożliwia nam ich rozróżnienie po tych danych).



Rysunek 2.2: **Macierz sąsiedztwa**² (a) Grafi skierowany $G = (V, E)$ z identyfikatorami węzłów 1–6 i łuków 1–9. (b) Wagi (koszty) łuków grafu G . (c) Macierz sąsiedztwa $|V| \times |V|$ grafu G . Dla każdej wagi łuku $d(v_p^{ID}, v_k^{ID}) = c$ odpowiednie komórki na przecięciu wiersza o numerze v_p^{ID} i kolumny v_k^{ID} mają wartość równą c , gdzie v_k^{ID} oznacza identyfikator węzła v_k ($v_k^{ID} = k$).

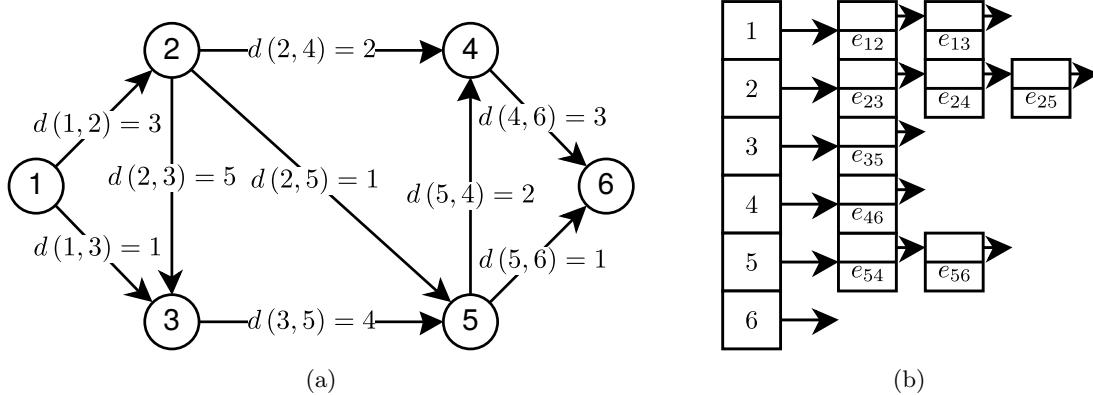
Zatem ostatecznie otrzymamy:

- koszt identyfikacji wszystkich łuków o złożoności liniowej $O(n)$, gdzie $n = |V|$,
- koszt wyszukiwania wszystkich następców węzła v_i w tym przypadku jest tożsamy z odnalezieniem wszystkich łuków wychodzących z danego węzła, co zajmuje $O(n)$.

²Rysunki mają charakter poglądowy — dla ilustracji, przedstawiających przykładowe sieci we wszystkich rozdziałach, skala nie jest zachowana, zaś rzeczywiste koszty ścieżek, jeżeli nie napisano inaczej, są zwykle przedstawione na krawędziach, których one dotyczą.

2.2.3 Listy incydencji

Wprowadzone wcześniej przez nas wyrażenie $A(i)$, oznaczające wszystkich bezpośrednich nastęników danego węzła v_i , od teraz będzie dla nas równoważne z pojęciem jednokierunkowej listy łuków wychodzących z węzła v_i oraz wchodzących do wierzchołków $v_k \in A(i)$ (ang. *Adjacency list*), a operacja wyszukiwania takich łuków będzie dla nas tożsama ze znalezieniem wszystkich węzłów v_k . Słowem — rozdzielane do tej pory operacje identyfikacji łuków i węzłów połączymy w jedną. Da to nam w najgorszym przypadku liniowy czas dostępu do dowolnego wierzchołka będącego bezpośredniem nastęncikiem badanego elementu (gdy będziemy musieli przejść przez całą listę $A(i)$).



Rysunek 2.3: **Lista sąsiedztwa** (a) Graf skierowany $G = (V, E)$ z identyfikatorami węzłów 1–6. Zamiast identyfikatorów łuków, na krawędziach zostały naniesione wagi każdego z nich. (b) Listy sąsiedztw grafu G . Dla każdego węzła $v_i : i \in \{1, \dots, 6\}$ jest tworzona lista jednokierunkowa, której każdy element zawiera informację o pojedynczym łuku e_{ij} .

Każdy taki łuk, oprócz swojej długości (dalej zwanej ogólniej: **kosztem**), będzie zatem posiadał dodatkowy atrybut, jednoznacznie wskazujący na węzeł, do którego prowadzi. Formalnie:

$$v_k \in A(i) \Leftrightarrow \exists e_{ik} = (v_i, v_k) \in E. \quad (2.5)$$

Taką strukturę będziemy dalej nazywać zamiennie listą sąsiedztwa lub **incydencji**³.

2.2.4 Pęki

Na podobnym pomyśle co listy sąsiedztwa, bazuje rozwiązywanie z użyciem tzw. pęków. Tutaj także dla każdego węzła tworzyć będziemy „listę” tych węzłów, które są jego bezpośredniimi następcami, z tą różnicą że te informacje będące zapisywane w jednej tablicy, nie zaś na osobnych listach.

W niniejszym podrozdziale omówimy najbogatszą wersję reprezentacji z jednoczesnym wykorzystaniem **pęków wyjściowych** jak i **wejściowych** (ang. *Forward and Reverse Star Representation*), koncentrując się po kolei na pierwszej i drugiej części, które równie dobrze mogą stanowić samodzielne reprezentacje grafów.

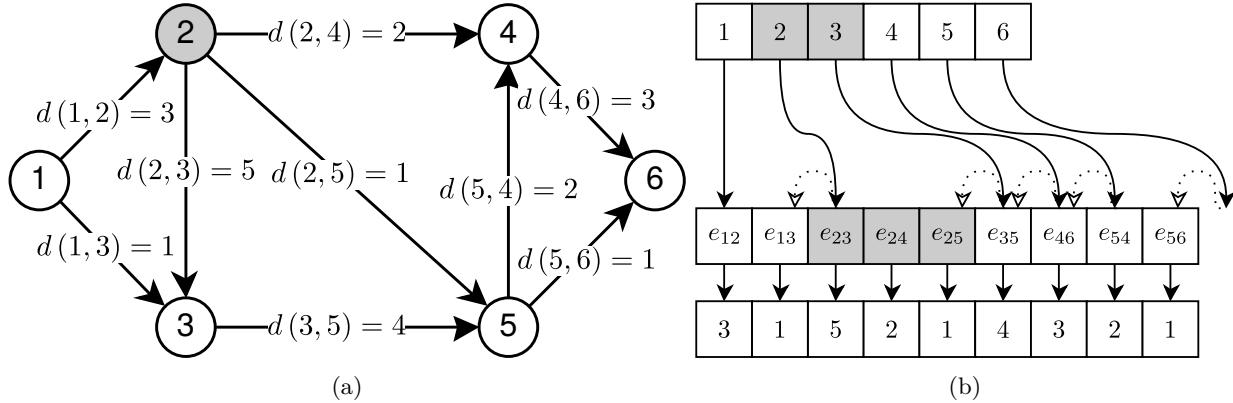
Pęki wyjściowe

Załóżmy, że nasza reprezentacja grafu zawiera tablicę indeksowaną od 1 do $|V|$ — nazwijmy ją $vtab$. Stwórzmy drugą tablicę, która będzie konstruowana następująco:

- dla każdego elementu $vtab$ o indeksie $vIdx$ (indeksy tej tablicy odpowiadają identyfikatorom wszystkich węzłów w grafie) będziemy chcieli, aby przechowywana w tej komórce wartość była równa minimalnemu indeksowi $aIdx$ w tablicy $atab$, dla którego element $atab[aIdx]$ będzie zawierał informacje o łuku wychodzącym z wierzchołka o identyfikatorze $vIdx$, zaś wartość $vtab[vIdx + 1]$ będzie zawierała ostatni taki indeks, powiększony o jeden. Innymi słowy będziemy chcieli, aby każdy element z tablicy $vtab$ zawierał

³ Mówimy, że dwa wierzchołki są incydentne, jeżeli istnieje łącząca je krawędź.

informację o tym, od którego miejsca w tablicy $atab$ są przechowywane kolejno wszystkie dane o łukach wychodzących z węzła, przechowywanego w badanym elemencie pierwszej tablicy (rys. 2.4).



Rysunek 2.4: **Pęki wyjściowe** (a) Grafi skierowany $G = (V, E)$ z identyfikatorami węzłów 1–6. (b) Pęki łuków dla grafu G . Dla każdego węzła $v_i \in vtab$ element $vtab[i]$ zawiera indeks pierwszej wychodzącej krawędzi z węzła v_i w tablicy $atab$. Elementy w $atab$ są z kolejnymi wskazaniami na odpowiednie krawędzie grafu.

Na początku musimy stworzyć obie tablice: pierwszą ($vtab$) zainicjalizować samymi jedynkami (numer pierwszego indeksu węzła), zaś drugą pozostawić pustą — będziemy ją wypełniać w trakcie działania algorytmu (zob. Pseudokod 1). Następnie, iterując po tablicy z wierzchołkami $vtab$, odnajdujemy wszystkie łuki wychodzące z danego wierzchołka i wstawiamy dane takich krawędzi (założmy, że są nimi identyfikatory łuków) do kolejnych elementów tablicy $atab$, jednocześnie zwiększając licznik $aIdx$. Gdy przeglądniętyemy wszystkie łuki wychodzące z pierwszego wierzchołka v_{vIdx} , wstawiamy do następnego elementu w tablicy $vtab$ ($vtab[vIdx + 1]$) wartość licznika $aIdx$ — jest to najmniejszy indeks w tablicy $atab$, dla którego element $atab[aIdx]$ będzie zawierał identyfikator łuku wychodzącego z wierzchołka v_{vIdx+1} , dzięki czemu łatwo będziemy mogli policzyć, który element w tablicy zawiera ostatni łuk, wychodzący z wierzchołka poprzedniego (o indeksie $vIdx$). Algorytm kontynuujemy, dopóki nie przeglądnięemy wszystkich elementów w tablicy $vtab$. W efekcie otrzymamy tablicę $atab$, której elementy będą posortowane względem identyfikatorów wierzchołków, z których wychodzą, a każda para elementów ($vtab[i], vtab[i + 1]$) będzie zawierać indeksy, dla których od $atab[vtab[i]]$ do $atab[vtab[i + 1] - 1]$ znajdują się łuki wychodzące z wierzchołka o indeksie i .

Jeżeli okaże się, że jakiś wierzchołek v_i nie ma żadnych krawędzi wychodzących, wtedy $vtab[i] = vtab[i + 1]$. W szczególności pierwszy element tablicy wierzchołków $vtab[1] = 1$.

Pseudokod 1: CREATE-FORWARD-STAR-REPRESENTATION

Data: $G = (V, E)$

Result: $atab[1 \dots |E|]$

```

1 begin
2   aIdx ← 1
3   vtab[1 … |V|] ← aIdx
4   for vIdx ∈ 1 … |V| do
5     for każdy łuk e prowadzący z  $v_{vIdx}$  do wierzchołka  $\in A(v_{vIdx})$  do
6       atab[aIdx] = e
7       aIdx ← aIdx + 1
8   vtab[vIdx + 1] ← aIdx

```

Pęki wejściowe

Mamy sytuację odwrotną: chcemy mieć możliwość szybkiego zidentyfikowania wszystkich wierzchołków wchodzących do danego węzła v_k . Aby taką uzyskać, będziemy musieli zdefiniować inną kolejność występowania łuków w tablicy $atab$ — będą one występować w kolejności rosnących identyfikatorów węzłów, do których prowadzą, a nie, gdzie mają swój początek. Reszta algorytmu pozostaje bez zmian. W obu przypadkach kolejność występowania krawędzi wychodzących/prowadzących do tych samych wierzchołków nie ma znaczenia — w algorytmach wyszukiwania najkrótszych ścieżek, jeżeli zapytamy o dany węzeł, będziemy chcieli poznać wszystkich jego bezpośrednich następców/poprzedników, zaniedbując kolejność ich występowania.

Pęki wejścia-wyjścia

W pewnych przypadkach warto abyśmy dysponowali możliwością nie tylko szybkiego przeglądania tablic incydencji w poszukiwaniu następców, ale chcielibyśmy także mieć taką możliwość w odniesieniu do wszystkich poprzedników dowolnego węzła w sieci. Aby zrobić to oszczędnie, będziemy wykorzystywać fakt, że we wcześniejszych wersjach algorytmu, w tablicy $atab$ celowo trzymaliśmy tylko identyfikatory łuków, nie zaś ich wszystkie atrybuty (np. dla łuku e_i o atrybutach: węzeł początkowy, końcowy oraz koszt, wartości te trzymalibyśmy w elementach osobnych tablic: $head[i]$, $tail[i]$ oraz $cost[i]$). Jako podstawę dla naszego algorytmu weźmiemy pierwszą z omawianych reprezentacji, a więc zakładamy, że mamy tablice:

- $vtab[1 \dots |V|]$ — przechowującą informacje o łukach dla węzłów o identyfikatorach od 1 do $|V|$,
- $atab[1 \dots |E|]$ — przechowującą krawędzie o identyfikatorach od 1 do $|E|$, posortowane rosnąco według identyfikatorów wierzchołków początkowych, gdzie dla każdego węzła v_k wszystkie identyfikatory łuków wychodzących z tego węzła znajdują się w elementach od $atab[vtab[k]]$ do $atab[vtab[k+1]-1]$ włącznie,

i do nich chcemy dodać dwie nowe:

- $rtab[1 \dots |V|]$ — przechowującą (analogicznie do $vtab$) informacje o łukach dla węzłów o identyfikatorach od 1 do $|V|$ (dla reprezentacji odwróconej — *Reverse Star Representation*),
- $mtab[1 \dots |E|]$ — mapującą krawędzie o identyfikatorach od 1 do $|E|$.

Druga z nich — $mtab$ — jest tablicą wejściową dla metody, opisanej w sekcji „Pęki wejściowe”. Przechowuje ona w swoich kolejnych elementach indeksy tablicy $atab$ w taki sposób, aby ciąg:

$$atab[mtab[1]], atab[mtab[2]], \dots, atab[mtab[|E|]] \quad (2.6)$$

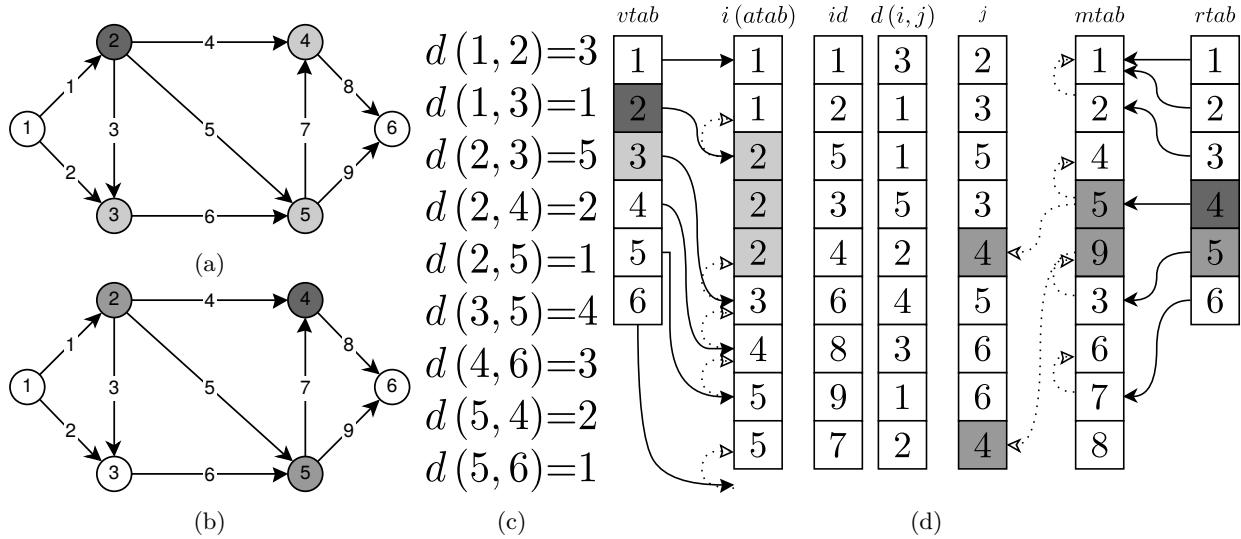
tworzył ciąg identyfikatorów łuków, które są posortowane rosnąco wedle wierzchołków wejściowych. Wówczas tablica $rtab$ razem z tablicą $mtab$ zachowuje się dokładnie tak samo jak pierwsza para tablic.

Oczywiście taki sposób reprezentacji danych jest bardzo wrażliwy na wszelkie zmiany w strukturze sieci [6] — każde usunięcie czy dodanie krawędzi powoduje konieczność aktualizacji wszystkich tablic, co jest bardzo pracochłonne w porównaniu z reprezentacjami macierzowymi (gdzie taka operacja mogła być wykonana w czasie stałym) czy przy wykorzystaniu list sąsiedztwa (gdzie koszt dodawania krawędzi jest także stały, zaś koszt jej usunięcia to czas rzędu $O(|E|)$). Wykorzystanie struktury pęków pozwala nam natomiast na błyskawiczne — bo polegające na odjęciu wartości $vtab[i]$ od $vtab[i+1]$ — policzenie **stopnia** wierzchołka v_i , a także na uzyskanie dostępu do wszystkich elementów $v \in A(i)$ dla dowolnego wierzchołka v_i w czasie liniowym (zależnym od liczby elementów w $A(i)$), jednocześnie przy zachowaniu stosunkowo małego — bo także liniowego — zapotrzebowania na pamięć (rys. 2.5).

2.2.5 Złożoność pamięciowa i czasowa

Innym kryterium wyboru najodpowiedniejszego sposobu przedstawienia grafu jest ilość pamięci, jakiej wymagają do funkcjonowania implementacje poszczególnych rozwiązań. Dla obu implementacji macierzowych będą to wymagania rzędu $O(|V| \cdot |E|)$ lub $O(|V| \cdot |V|)$, odpowiednio dla macierzy incydencji i sąsiedztwa. Ile tak naprawdę z tej pamięci jest przez nas marnowanej najlepiej widać w przypadku, gdy mamy do czynienia z **grafem rzadkim**⁴, gdzie w takiej sytuacji większość macierzy jest wypełniona zerami (macierz

⁴ Graf, którego stosunek posiadanych krawędzi do liczby węzłów w danym grafie jest niewielki np. $m = O(n)$.



Rysunek 2.5: **Pęki wejścia-wyjścia** (a) Reprezentacja grafu $G = (V, E)$ z oznaczonymi następcami węzła v_2 . (b) Ten sam graf skierowany z oznaczonymi poprzednikami węzła v_4 . (c) Koszty poszczególnych krawędzi. (d) Graf przedstawiony w formie tabeli.

rzadka). Stosując odpowiednie kodowanie, możemy wpływać na tą niepożądaną własność. Dla przykładu: macierz incydencji, której elementy a_{ij} posiadają tylko trzy wartości: $-1, 0, 1$, możemy przedstawić za pomocą dwóch macierzy, z której jedna — nazwijmy ją macierzą wyjścia — będzie zawierać jedynki na tych samych pozycjach, co poprzednia macierz, z tą różnicą że w miejscach wystąpienia wartości ujemnej będzie miała wartość równą zero. Dla macierzy wejścia z kolei będziemy wstawiać jedynki w miejscach, gdzie uprzednio znajdowały się wartości przeciwnie (tak jak to wyraźliśmy wzorami 2.7 i 2.8).

$$a_{ij}^{IN} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } a_{ij} = -1, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$a_{ij}^{OUT} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } a_{ij} = 1, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Następnie zamieniamy każdą macierz na ciągi binarne długości $|V| \cdot |E|$ każdy. Jest to prosta metoda na zgromadzenie potrzebnych nam informacji na jak najmniejszym fragmencie pamięci (jedna informacja — 1 bit), dodatkowo umożliwiająca nam bardzo szybkie przeszukiwanie takiej macierzy za pomocą operacji bitowych, a wykonanie kopii tak zgromadzonych danych to już nie koszt skopiowania wartości każdego elementu macierzy, a przepisanie jednej (potencjalnie olbrzymiej) liczby. Jednakże taka metoda wpływa tylko na obniżenie stałej i asymptotycznie nie daje żadnych widocznych różnic (jeżeli mówimy o złożoności pamięciowej), gdyż nadal pamiętamy $|V| \cdot |E|$ elementów.

W przypadku macierzy sąsiedztwa złożoność pamięciowa wynosi $O(|V|^2)$, co nie powinno być dla nas zaskoczeniem, gdyż na obu osiach macierzy znajdują się wszystkie wierzchołki grafu. Oczywiście także jest, że zapotrzebowanie na pamięć będzie wzrastać im więcej informacji będziemy chcieli przechowywać w komórkach macierzy.

Dla samych list sąsiedztwa będziemy potrzebować $O(|E|)$ pamięci, gdzie stała znowu może się różnić w zależności od tego, ile danych będziemy chcieli przechowywać w elementach list. Podczas tworzenia $|V|$ list incydencji mamy zagwarantowane, że żadnego łuku nie dodamy dwa razy oraz wszystkie łuki w grafie zostaną do nich dodane (łuk z definicji ma tylko jeden początek i koniec, więc jeśli dany łuk $e \in A(i)$ dla węzła v_i , to na pewno nie należy do żadnego $A(j)$, gdzie $j \neq i$). Stąd elementów na wszystkich $|V|$ listach sąsiedztwa jest dokładnie $|E|$. Łącznie zatem, aby zaimplementować rozwiązania oparte na listach sąsiedztwa, potrzebujemy $O(|V| + |E|)$ pamięci.

	Macierze Incydencji	Sąsiedztwa	Listy Sąsiedztwa	Pęki Wejścia-wyjścia
Potrzebna pamięć	$O(V \cdot E)$	$O(V ^2)$	$O(V + E)$	$O(V + E)$
Przegląd $v \in A(i)$	$O(E + A(i) \cdot V)$	$O(V)$	$O(A(i))$	$O(A(i))$
Dodawanie krawędzi ⁵	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(V + E)$
Dodawanie nowej krawędzi	$O(V \cdot E)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(V + E)$
Usuwanie krawędzi ⁶	$O(V)$	$O(V)$	$O(E)$	$O(V + E)$
Trwałe usuwanie krawędzi	$O(V \cdot E)$	$O(V \cdot E)$	$O(E)$	$O(V + E)$
Stopień wierzchołka	$O(E)$	$O(V)$	$O(A(i))$	$O(1)$

Jak widać, rozdzieliśmy operacje dodawania i usuwania elementów grafu wyróżniając takie, które mają na celu tylko „zakryć” obecność danego elementu (bądź z powrotem przywrócić jego widoczność) oraz te, których celem jest permanentna modyfikacja grafu przechowywanego w pamięci. Różnicę między tymi operacjami bardzo wyraźnie widać w przypadku korzystania z reprezentacji macierzowych grafu, gdzie „usunięcie” krawędzi możemy przeprowadzić w czasie zdecydowanie krótszym, niż byśmy mieli zmieniać rozmiar samych macierzy poprzez usuwanie/dodawanie do nich elementów. Chcąc „usunąć” z grafu daną krawędź wystarczy abyśmy zlokalizowali węzły, z którymi ma ona połączenie i w odpowiednich komórkach macierzy zamazali zapis o istniejącym połączeniu (założyliśmy, że grafy są skierowane — znając łuk, który chcemy usunąć, mamy informację tylko o węźle, do którego dany łuk prowadzi, co w obu przypadkach reprezentacji macierzowych zmusza nas do dodatkowego przeszukania jednej z wybranych kolumn, w celu odszukania węzła, z którego łuk, który chcemy usunąć, wychodzi). Krawędź w grafie nadal będzie istnieć, lecz stanie się ona bezużyteczna a dla algorytmów niezauważalna. Należy jednak tutaj podkreślić, że za takie traktowanie danych przyjdzie nam zapłacić (utrzymującym się na stałym poziomie kosztem przeglądania macierzy w poszukiwaniu nastęników interesujących nas węzłów), zaś poza macierzowymi reprezentacjami różnice pomiędzy trwałym a tymczasowym usuwaniem elementów nie ma żadnego wpływu na złożoność obliczeniową bez dodatkowych modyfikacji przedstawionych struktur.

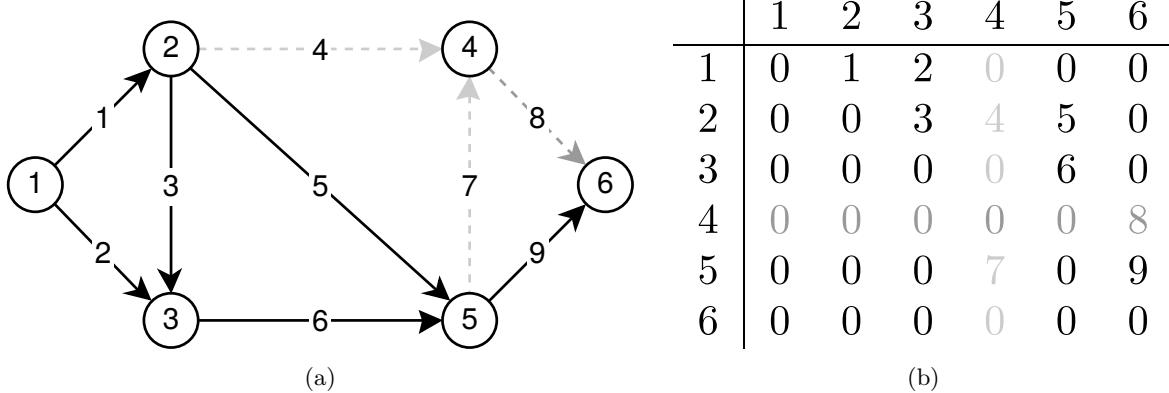
	Macierze Incydencji	Sąsiedztwa	Listy Sąsiedztwa	Pęki Wejścia-wyjścia
Dodawanie węzła	$O(V \cdot E)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(V + E)$
Dodanie nowego węzła	$O(V \cdot E)$	$O(V ^2)$	$O(1)$	$O(V)$
Przysłonięcie węzła	$O(V \cdot E)$	$O(V)$	$O(E)$	$O(V + E)$
Trwałe usunięcie węzła	$O(V \cdot E)$	$O(V ^2)$	$O(E)$	$O(V + E)$

Poza takimi operacjami jak: dodawanie, usuwanie krawędzi grafu, wyznaczanie stopnia wierzchołka, jego następców, możemy także chcieć na bieżąco modyfikować liczbę węzłów, jakie znajdują się w grafie. Poniżej przedstawiono zestawienie czasów trwania wymienionych operacji dla wszystkich omówionych sposobów reprezentacji grafu. Podobnie jak w poprzednim przypadku, dla macierzy incydencji potrafimy wykonać operację „usuwania” węzła bez faktycznej zmiany rozmiarów tych macierzy, jednak w tym wypadku zysk z takiego postępowania jest niewielki, by wręcz nie powiedzieć asymptotycznie żaden — podstawowym pomysłem na wymazanie informacji o danym węźle jest usunięcie wszystkich danych o łukach, które do niego prowadzą, w taki sposób, aby węzeł przestał być osiągalny. Należy pamiętać jednak, że każdorazowa operacja samego wymazania informacji o pojedynczej krawędzi już kosztuje nas $O(|V|)$ (jak pokazaliśmy wyżej). W najgorszym przypadku musielibyśmy usunąć wszystkie krawędzie w grafie, co daje nam łącznie złożoność operacji tymczasowego usuwania węzła $O(|V| \cdot |E|)$.

Nieco lepsze rezultaty jesteśmy w stanie osiągnąć z macierzami sąsiedztwa, gdyż w tym przypadku odnalezienie wiersza/kolumny z danym węzłem, który chcemy usunąć, jest równoznaczne z odnalezieniem wszystkich łuków, które do niego prowadzą i, gdybyśmy zignorowali konieczność zmiany rozmiaru całej macierzy (chcieli tylko ukryć jej elementy), to otrzymalibyśmy górne ograniczenie na złożoność tej operacji na poziomie $O(|V|)$.

⁵W przypadku dodawania krawędzi znamy identyfikatory obu węzłów, z którymi połączony ma być dodawany łuk.

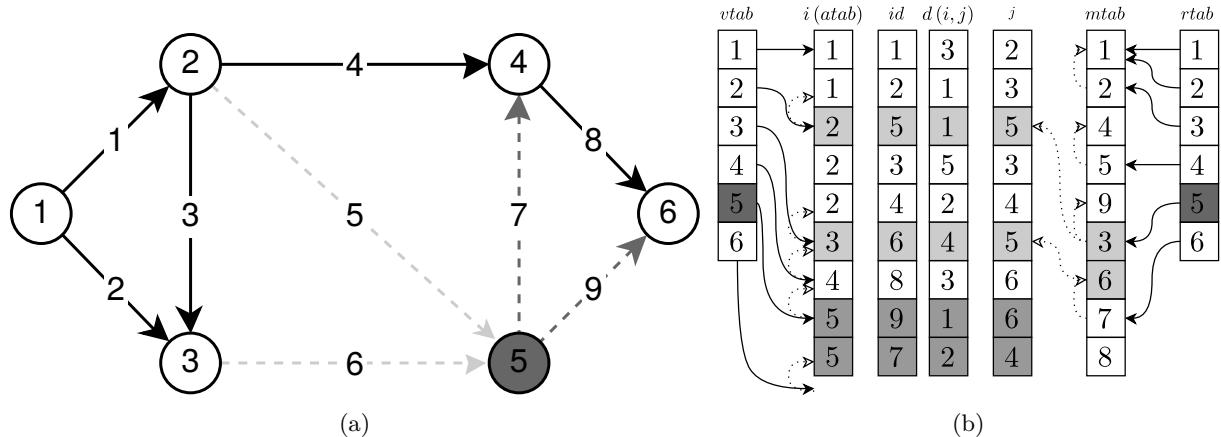
⁶Poza ostatnim przypadkiem, znany jest tylko identyfikator łuku i węzła, do którego dana krawędź prowadzi. Nie dotyczy to reprezentacji opartej na pęckach wejścia-wyjścia, gdzie znajomość identyfikatora, jaki posiada łuk, daje nam dostęp do identyfikatorów obu węzłów, które ta krawędź łączy.



Rysunek 2.6: **Ukrycie węzła w macierzy sąsiedztwa** (a) Graf skierowany $G = (V, E)$. (b) Macierz sąsiedztwa dla grafu G . Chcemy ukryć w niej informację o v_4 tak, aby nie był on osiągalny z żadnego innego węzła w grafie.

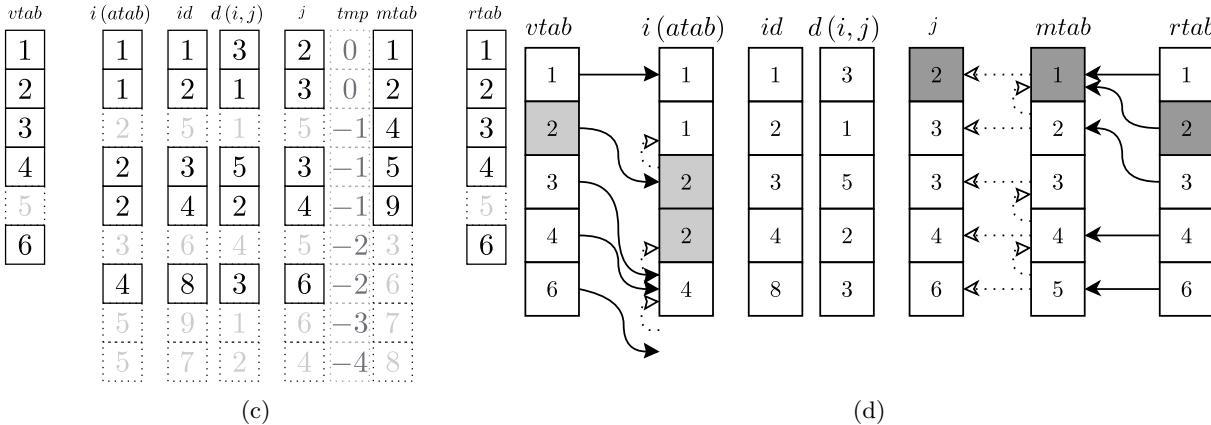
Dla takiej koncepcji, dodanie na powrót węzła do grafu jest tylko kwestią dodania jakiegokolwiek łuku, który będzie łączył istniejący w sieci węzeł z tym, który chcemy dodać, więc koszty tej operacji będą identyczne jak dla dodawania krawędzi z poprzedniej tabeli.

W przypadku pozostałych dwóch struktur znowu nie odnotujemy żadnej zmiany — aby usunąć dany węzeł z list sąsiedztwa, będziemy musieli odnaleźć wszystkie łuki, które prowadzą do usuwanego węzła, a na koniec usunąć całą listę jego sąsiedztwa wraz z łukami, które się na niej znajdują. W najgorszym przypadku będzie od nas to wymagało przeglądnienia wszystkich krawędzi występujących w grafie, co uczynimy w czasie $O(|E|)$. Dla pęków operacja usunięcia węzła jest jeszcze bardziej skomplikowana, gdyż nie istnieje w niej możliwość zaznaczenia konkretnego węzła, który chcielibyśmy ukryć, zaś jego usunięcie wymaga od nas odnalezienia obu zbiorów krawędzi (wychodzących z usuwanego węzła oraz do niego wchodzących), usunięcia ich z tablic przechowujących o nich informacje (co uczynimy w czasie $O(A(i) + A^R(i))$ ⁷), zmiany ich rozmiarów ($O(|E|)$), usunięcia danego węzła z dwóch pozostałych tablic indeksowanych od 1 do $|V|$ (oraz zmiana ich rozmiarów — $O(|V|)$), oraz — na końcu — aktualizacji tych ostatnich ($O(|V|)$) wraz z pomocniczą tablicą $mtab$, której rozmiar także trzeba zaktualizować ($O(|E|)$).



Rysunek 2.7: **Usunięcie węzła dla pęków wejścia-wyjścia** (a) Graf skierowany $G = (V, E)$. Usuwamy węzeł v_5 oraz wszystkie łuki wychodzące (e_7, e_9) i wchodzące do danego węzła (e_5, e_6). (b) Pęki z oznaczonymi łukami do usunięcia, wyznaczonymi odpowiednio w czasie $O(A(5))$ dla krawędzi wychodzących oraz $O(A^R(5))$ dla przychodzących. Węzeł, który należy usunąć, wyznaczamy w czasie $O(1)$.

⁷ Poprzez $A^R(i)$ oznaczać będziemy zbiór sąsiadów węzła v_i , lecz będą to węzły bezpośrednio ten węzeł poprzedzające, z których krawędzie prowadzą do tego węzła.



Rysunek 2.7: (c) Tablice z usuniętymi powiązaniem — po usunięciu chcianych elementów — odtworzymy w czasie liniowym. Rekonstrukcja związków zachodzących między tablicami $vtab$ a $atab$ wymagać będzie przejścia przez ich wszystkie elementy, wyjątki krawędzi, wychodzące z ostatniego węzła, gdyż jego lista następników naturalnie kończy się wraz z końcem tablicy (po usunięciu wszystkich elementów tablica $vtab$ i $atab$ nadal będą prawidłowo posortowane). (d) Stan tablic po usunięciu węzła wraz z wszystkimi łukami. Odtworzenie własności tablicy $rtab$ oraz $mtab$ wymaga od nas większego nakładu pracy (ciąg wartości $j[mtab[1]], \dots, j[mtab[|E|]]$ musi tworzyć ciąg niemalejący). W tym celu wprowadzamy pomocniczą tablicę tmp (rys. 2.7c), w której zapiszemy różnice indeksów elementów, jakie nastąpią w tablicy j w trakcie usuwania krawędzi, a następnie aktualizujemy wszystkie elementy tablicy $mtab$ tak, aby $mtab[i] = mtab[i] + tmp[mtab[i]]$ (poza tymi, które wskazują na łuki, które będziemy usuwać — tutaj cztery ostatnie). (d) Sytuacja po usunięciu węzła v_5 i aktualizowaniu wartości w tablicach. Szarym kolorem zaznaczono węzeł v_2 i powiązane z nim łuki.

W następnych rozdziałach spojrzymy już na sam problem najkrótszej ścieżki od strony zarówno formalnej jak i praktycznej — omówimy podstawowe własności problemu, zdecydujemy się na jeden ze sposobów reprezentacji grafu, omówionych w powyższych rozdziałach, przedstawimy dodatkowe założenia, które ułatwią nam rozwiązanie problemu, jaki przed sobą postawiliśmy. Na koniec rozdziału — tak jak obiecaliśmy na samym jego początku — przedstawimy krótko praktyczne zastosowanie zdobytej przez nas wiedzy, implementując algorytm Bellmana-Forda.

2.3 Problem najkrótszych ścieżek

Omówiliśmy sposoby w jaki efektywnie możemy reprezentować dane potrzebne nam do wyznaczenia najkrótszej ścieżki z punktu v_p do węzła v_k w skierowanym grafie z cyklami $G = (V, E)$, nie definiując przy tym formalnie samego problemu najkrótszej ścieżki — do tej pory, do opisu wszystkich reprezentacji grafu G , wystarczały nam intuicje, podparte prostą logiką. W dalszych rozważaniach będziemy opierać się o następujące oznaczenia i definicje:

- **Ścieżką** od węzła v_p do węzła v_k będziemy nazywać każdą krawędź $e \in E$ w grafie $G = (V, E)$, taką że ma ona swój początek w wierzchołku $v_p \in V$ i jest skierowana w stronę wierzchołka $v_k \in V$, gdzie ścieżka ma swój koniec. Z każdą ścieżką powiązana jest jej **waga** — dalej zwana również **kosztem** — c_{pk} , gdzie indeksy p i k odpowiadają indeksom węzłów: początkowego v_p oraz końcowego v_k , a którego wartość jest obliczana na podstawie, poniżej zdefiniowanej, **funkcji wagi**.
- **Funkcją wagą** nazywamy funkcję, na podstawie której jest obliczany **koszt** danej ścieżki e_{ij} . W pseudokodach będziemy ją zwykle oznaczali przez $d(v, u, \dots)$, gdzie ostatni argument (\dots) oznacza, że **koszt** danej ścieżki może być zależny od wielu dodatkowych parametrów. My, dla uproszczenia, będziemy koszt każdej takiej ścieżki e_{ij} utożsamiać z jej długością i odwoływać się do niej poprzez c_{ij} (ang. *cost*). Parametry funkcji $d(v, u, c)$ będą kolejno oznaczały:

- v — węzeł początkowy o indeksie i ,
- u — węzeł końcowy o indeksie j ,
- c — koszt c_{ij} związanego z łukiem e_{ij} , łączącym węzły v i u .

- **Najkrótszą ścieżką ze źródła v_p do węzła v_k** nazywać będziemy takim zbiorem $P = \langle v_p, \dots, v_k \rangle$, że suma kosztów c_{ij} ścieżek jest najmniejsza:

$$\min \left(\sum_{e_{ij} \in P_E} c_{ij} \right) \wedge e_{ij} \in P_E \Leftrightarrow v_i, v_j \in P \wedge v_i \rightsquigarrow v_j = e_{ij} \ni E \wedge v_p \rightsquigarrow^* v_k, \quad (2.9)$$

gdzie przez $v_i \rightsquigarrow v_j$ będziemy oznaczać pojedynczą ścieżkę z węzła v_i do węzła v_j . Wprowadzimy także zapis $v_i \stackrel{k}{\rightsquigarrow} v_k$, przez który będziemy rozumieć drogę złożoną z k ścieżek, prowadzących od punktu v_i do v_k (użyty symbol „ $*$ ” zamiast liczby ścieżek oznacza, że nie interesuje nas konkretna ich liczba, tylko fakt istnienia ścieżki o zadanych właściwościach — z danym punktem początkowym i końcowym).

- **Źródłem v_s** będziemy nazywać węzeł, z którego rozpoczynamy wyszukiwanie najkrótszych ścieżek do wszystkich pozostałych węzłów w grafie. Będzie to naszym podstawowym celem przy konstruowaniu wszystkich algorytmów, rozwiązywających problem najkrótszych ścieżek.

2.3.1 Reprezentacja problemu

Oprócz własności naszej struktury oraz jej elementów składowych (takich jak koszty ścieżek c_{ij} czy listy sąsiedztwa), omówimy także dodatkowe parametry dla węzłów, którymi będziemy się od teraz posługiwać:

- **identyfikator węzła (ID)** — jednoznacznie określa dany węzeł,
- **poprzednik węzła (Π)**, dalej zwany również jego **rodzicem**, determinuje poprzedni węzeł na najkrótszej ścieżce (dla węzła v_i będzie wyznaczał v_{i-1} w $P = \langle v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, \dots, v_k \rangle$),
- **waga najkrótszej ścieżki do węzła ($d(i)$)** — dla węzła v_i jej wartość przyjmuje zawsze najmniejszy znany koszt przejścia ze źródła do tego węzła (dalej będziemy mówić o górnym ograniczeniu na koszt najkrótszej ścieżki — jeśli węzeł v_i za wartość $d(i)$ przyjmie k , to znaczy, że każda ścieżka $v_s \rightsquigarrow^* v_i$, aby być tą najkrótszą, musi mieć łączny koszt nie większy niż $d(i)$, czyli mniejszy lub równy k). Ponadto założymy, że dla każdego węzła j , do którego nie istnieje żadna ścieżka (w tym najkrótsza), bądź nie jest ona jeszcze znana, wartość $d(j) = \infty$. Wtedy dowolna ścieżka, która będzie nam pozwalała osiągnąć węzeł j natychmiastowo stanie się najkrótszą ścieżką, do niego prowadzącą. Formalnie:

$$d(i) \geq \delta(s, i) = \delta(v_s, v_i) = \begin{cases} \min \{c(s, i) : v_s \rightsquigarrow^* v_i\} & \text{jeśli } \exists v_s \rightsquigarrow^* v_i \\ \infty & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \quad (2.10)$$

gdzie:

$$c(p, k) = c(v_p, v_k) = \sum_{e_{ij} \in P_E} c_{ij} : P = \langle v_p, v_1, \dots, v_k \rangle \quad (2.11)$$

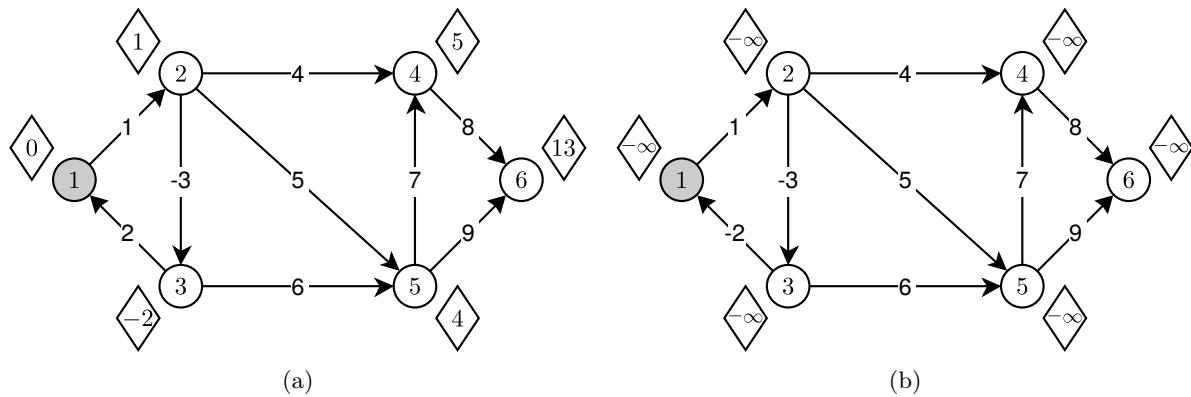
W dalszych rozważaniach będziemy się odwoływać do wszystkich atrybutów węzłów poprzez umieszczanie ich nazw albo w górnym indeksie, jak to robiliśmy do tej pory (np. v_i^{ID} oznaczał identyfikator węzła i), albo za operatorem kropki w przypadku, gdy górny indeks będzie potrzebny nam do czego innego (np. zapis $v_i^{(k)}.\Pi$ będzie oznaczał k 'tego rodzica⁸ węzła v_i).

Aby efektywnie móc rozwiązywać problem najkrótszych ścieżek, musimy przyjąć kilka założeń, które wynikają zarówno ze specyfikacji samego problemu, z przyjętego modelu grafu (rzeczywistych sieci drogowych), jak i w oczywisty sposób z ograniczeń, jakie nakłada na nas konieczność reprezentacji wszystkich danych w sposób zrozumiały dla komputera.

⁸ W sensie takim, że dla $k = 1$ (domyślnie) wyrażenie $v_i^{(k)}.\Pi$ oznacza rodzica podanego węzła, dla $k = 2$ dziadka, dla $k = 3$ pradziadka itd.

Na samym początku należy wspomnieć o sposobie numerowania podstawowych elementów grafu $G = (V, E)$. Do tej pory milcząco zakładaliśmy, że każdy wierzchołek $v \in V$ w grafie G ma przypisany swój własny, unikalny identyfikator, będący dodatnią liczbą całkowitą. Co więcej, były one przypisywane do tych wierzchołków w kolejności rosnącej ze skokiem o 1, tak aby identyfikator ostatniego węzła równocześnie był liczbą wszystkich węzłów w grafie (nie rozpoczęliśmy indeksowania od 0). Podobnie numerowaliśmy wszystkie krawędzie $e \in E$ — pozostaniemy przy tych oznaczeniach dla prostoty omawianego problemu, lecz nic nie stoi na przeszkodzie, by zamiast zwykłych tablic (bo temu właśnie ma służyć taka numeracja elementów grafu) wykorzystać bardziej złożone struktury (np. *tablice z haszowaniem*), które pozwoliliby nam nazywać węzły w dowolny, bardziej zrozumiały sposób.

Bardziej restrykcyjnym założeniem o podobnym charakterze jest ograniczenie wartości wag wszystkich krawędzi (a co za tym idzie — wag najkrótszych ścieżek w węzłach) do liczb całkowitych dodatnich. O ile jego obejście także nie stanowi większego problemu (wystellarzy podnieść rząd wielkości wszystkich wartości tak, aby otrzymać liczby całkowite ze zmiennoprzecinkowych), to brak spełnienia tego warunku uniemożliwi nam efektywną konstrukcję pewnych wariantów **algorytmu Dijkstry**⁹, które w dużej mierze opierają swoje działanie o tę właśnie własność (wspomniane algorytmy omówimy w rozdziale 3.5). Dodatkowo w międzyczasie przemyciliśmy kolejne, bardzo ważne założenie, które poczyniliśmy — żadna z wag krawędzi w naszym grafie nie będzie mogła przybrać wartości ujemnej. Dla rzeczywistych sieci drogowych takie założenie oczywiście możemy poczynić, choć z naszego punktu widzenia ważniejszą własnością bezpośrednio z niego wynikającą, jest fakt braku cykli o ujemnej długości tj. brak takich zamkniętych ścieżek, którymi da się przejść, a których koszt całkowity jest niedodatni ($c(i, i) \leq 0$, gdzie v_i to odpowiednio „początek” i „koniec” cyklu).



Rysunek 2.8: **Graf skierowany z ujemnymi wagami na krawędziach** (a) Węzeł v_1 jest źródłem, na krawędziach umieszczono ich wagi, a w rombach odpowiednio koszty najkrótszych ścieżek do tych węzłów, przy których są narysowane (np. $d(1) = 0$). W samych węzłach umieszczono ich identyfikatory. Pomimo wystąpienia krawędzi e_{23} o wadze $c_{23} < 0$, długości najkrótszych ścieżek dla każdego z węzłów nadal są poprawnie wyliczone i przedstawiają faktyczny koszt najkrótszych ścieżek. (b) Wraz z pojawiением się cyklu o ujemnej wagie ($v_1 \rightsquigarrow v_2 \rightsquigarrow v_3 \rightsquigarrow v_1 \rightsquigarrow \dots$) wszystkie koszty w wierzchołkach stają się nieskończoność małe (z każdym kolejnym cyklem koszt dotarcia do węzłów w tym cyklu maleje i jednocześnie wpływa na koszty we wszystkich wierzchołkach, które są z tych węzłów osiągalne). Dalej proces przebiega lawinowo, gdyż $-\infty + n = -\infty$). Oczywiście jest, że takie wyniki są dla nas bezwartościowe, gdyż informują co najwyżej o wystąpieniu w grafie ujemnego cyklu oraz o wierzchołkach, do których możemy dojść z jego wykorzystaniem.

Jak pokazano na rysunku 2.8, za poprawną ścieżkę będziemy uznawać tylko takie ścieżki, które nie zawierają w sobie cykli o ujemnej długości. Założymy, że istnieje najkrótsza ścieżka $P = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$, taka że $c(0, k) = D$ i zawiera ona cykl o dowolnej niezerowej długości (niech $c = \langle v_i, v_{i+1}, \dots, v_j \rangle$, gdzie $v_i = v_j$ oraz $c(i, j) \neq 0$). Nasza ścieżka wygląda zatem tak: $P = \langle v_0, v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_j, \dots, v_k \rangle$ i ma ona koszt $c(0, k) = D$. Jeżeli usuniemy teraz węzły cyklu od v_{i+1} do v_j , to otrzymamy ścieżkę $P' = \langle v_0, v_1, \dots, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k \rangle$ o tym samym węźle początkowym i końcowym (bez straty ogólności założymy,

⁹ Jeden z generycznych algorytmów wyszukiwania najkrótszych ścieżek, na podstawie którego będziemy konstruować nasze algorytmy.

że cykl nie znajduje się na żadnym z końców ścieżki¹⁰) co poprzednia ścieżka (a więc „tą samą” ścieżkę), tyle że o zmienionym koszcie. Jeżeli usuneliśmy cykl o długości dodatniej, to nowa ścieżka będzie miała mniejszą wagę od ścieżki P , co czyni tę drugą dłuższą od P' — czyli ścieżka P nie jest najkrótszą ścieżką, a to stoi w sprzeczności z naszym założeniem. Analogicznie możemy postępować dla cyklu o ujemnej długości, tyle że w tym przypadku zamiast usuwać cykle, będziemy je dodawać, by dojść do tego samego wniosku co wyżej.

Z tego co pokazaliśmy, dodatkowo wynika, że każda najkrótsza ścieżka może posiadać maksymalnie $|V| - 1$ składowych krawędzi — gdyby posiadała ich więcej, znaczyłoby to, że na ścieżce występuje cykl, a wykluczyciśmy już taką możliwość (nie zajmowaliśmy się cyklami długości zero, gdyż takie zawsze możemy eliminować z najkrótszych ścieżek).

Ostatnie założenia, jakie przyjmiemy, będą związane z poprawną reprezentacją obliczeń, z jakimi możemy mieć do czynienia podczas wykonywania algorytmów. Jako, że dopuszczać będziemy sytuacje, w których dla danego węzła v_i jego $v_i.d^{11}$ będzie się równać $-\infty$ albo ∞ , konieczne jest zdefiniowanie operacji przy wykorzystaniu tych symboli nieoznaczonych. W związku z tym będziemy przyjmować, że dla dowolnej liczby $n \neq \pm\infty$ zachodzić będzie równości: $n \pm \infty = \pm\infty + n = \pm\infty$.

W dalszej części, przy omawianiu algorytmów, będziemy posługiwać się niezmiennie tylko jedną z reprezentacji grafu — w naszym przypadku będą to listy sąsiedztwa, gdyż w najbardziej naturalny (a zarazem najprostszym) sposób wyrażają one wszystkie własności, z jakich przyjdzie nam korzystać podczas konstruowania algorytmów wyszukiwania najkrótszych ścieżek, będąc jednocześnie świadomym, że nie dla wszystkich grafów taki wybór jest najbardziej odpowiedni [6, 1].

2.3.2 Podstawowe operacje

Omówimy teraz podstawowe operacje, z których będziemy bardzo często korzystać w trakcie budowania kolejnych algorytmów wyszukujących najkrótsze ścieżki.

Jedną z takich operacji jest niewątpliwie procedura inicjalizująca graf, na którym dany algorytm będzie pracować. Jak wspomnieliśmy w poprzednich rozdziałach — w przypadkach, gdy nie istnieje najkrótsza ścieżka, bądź nie mamy informacji o takiej, która by prowadziła do danego węzła i , wtedy wartość parametru tego węzła $d(i) = \infty$. Przed rozpoczęciem działania algorytmu o ścieżkach nie wiemy nic, zatem każdy wierzchołek inicjalizujemy w ten sposób, dodatkowo upewniając się, że żaden z nich nie posiada informacji o swoim rodzicu (jako, że takie informacje posłużą nam później do odtworzenia znalezionych, najkrótszych ścieżek). Źródło v_s — wierzchołek w grafie, od którego zaczniemy poszukiwania najkrótszych ścieżek — będzie miało ustwiony dystans ($d(S)$) na wartość równą零 (założyliśmy brak ujemnych cykli oraz brak jakichkolwiek krawędzi o takim koszcie, więc „najkrótszą ścieżką” do węzła v_s z węzła v_s jest ścieżka długości zero).

Pseudokod 2: INIT-GRAF (G, s)

```

1 begin
2   for  $vIdx \in \{1, \dots, |V|\}$  do
3      $vtab[vIdx].d \leftarrow \infty$                                 /* Dla każdego węzła w vtab */
4      $vtab[vIdx].Pi \leftarrow \text{NULL}$ 
5    $vtab[s].d \leftarrow 0$ 
```

Dwa rozdziały temu wprowadziliśmy kilka nowych oznaczeń dla atrybutów węzłów, z których od tamtej pory mieliśmy korzystać. Mówiliśmy, że dla każdego węzła v_i jego wartość $d(i)$ przyjmuje zawsze koszt równy najmniejszemu znanemu kosztowi ścieżki prowadzącej ze źródła do danego węzła, co formalnie możemy w skróconej formie zapisać jako:

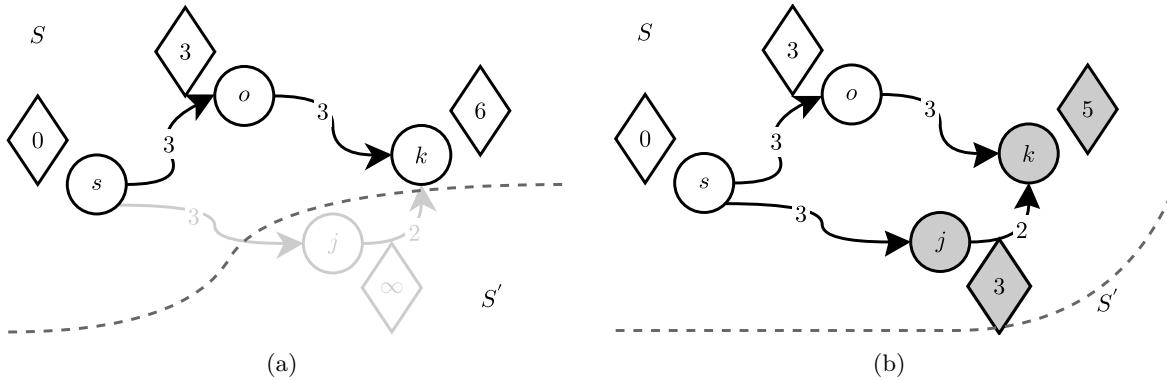
¹⁰ Nie usuwamy pierwszego węzła cyklu, więc jeżeli cykl znajdowałby się na początku ścieżki to w oczywisty sposób węzeł v_p na ścieżce $v_p \xrightarrow{*} v_k$ nie uległby zmianie. Analogicznie w przypadku, gdyby cykl znajdował się na końcu tj. $P = \langle v_0, v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_j \rangle$ i $v_j = v_k$, gdzie usunięcie cyklu spowodowałoby powstanie ścieżki $P' = \langle v_0, v_1, \dots, v_i \rangle$. Pamiętamy jednak, że węzły v_i oraz v_j były odpowiednio początkiem i końcem cyklu c , a co za tym idzie: $v_i = v_j = v_k$.

¹¹ $v_i.d \equiv v_i^d \equiv d(i)$

$$d(i) = \sum_{e_{jk} \in P_E} c_{jk} \rightarrow \min : P_E = \langle e_{sj_1}, e_{j_1 j_2}, \dots, e_{j_m i} \rangle \quad (2.12)$$

gdzie P_E jest zbiorem krawędzi dla istniejącej ścieżki $v_s \xrightarrow{m+1} v_i$.

W czasie działania wszystkich algorytmów wyszukiwania najkrótszych ścieżek będziemy chcieli zachować tę własność, by w momencie zakończenia ich działania otrzymać poprawne wyniki (czyli by $\forall v \in V d(i) = \delta(s, i)$). Aby to było możliwe, musimy wprowadzić kolejną operację, którą będziemy nazywać operacją **re-laksacji krawędzi**. Przyjrzyjmy się sytuacji, która wyjaśnia jej działanie (rys 2.9).



Rysunek 2.9: **Relaksacja krawędzi** (a) Sytuacja przed dodaniem wierzchołka v_j do zbioru wierzchołków o optymalnych wartościach $d(i)$, gdzie $i \in \{i' : v_{i'} \in S\}$. (b) Dodanie do zbioru S wierzchołka v_j spowodowało powstanie nowej ścieżki $v_s \xrightarrow{*} v_k$, której koszt jest mniejszy od dotychczasowej $v_s \rightsquigarrow v_o \rightsquigarrow v_k$, czego bezpośrednim następstwem jest konieczność reorganizacji najkrótszej ścieżki węzła v_k . Etykieta $d(k)$ uległa zmniejszeniu, a $v_k.\Pi$ wskazuje teraz na węzeł v_o (poprzednio v_k).

Na rysunku 2.9 przedstawiona jest sytuacja w trakcie działania pewnego algorytmu wyszukiwania najkrótszych ścieżek, gdzie wyszczególniono wszystkie wierzchołki (oraz powiązane z nimi krawędzie), o których algorytm jeszcze nic nie wie (przyjmijmy, że zbiór tych wierzchołków będziemy oznaczać krótko jako S' — rys. 2.9a), gdyż zaczął je przeglądać od węzła v_s — źródła. W tej chwili wszystkie atrybuty $d(i)$ węzłów, które nie należą do zbioru S' (nazwijmy go zbiorem S), mają wartości odpowiadające kosztom najkrótszych ścieżek od źródła do każdego z nich (są optymalne) i jest to sytuacja, którą chcemy utrzymać. Przyjmijmy teraz, że do zbioru wierzchołków S dołączamy wierzchołek $v_j \in S'$ (jednocześnie go stamtąd usuwając — rys. 2.9b). Po dodaniu wierzchołka v_j widzimy, że do v_k da się dojść krótszą ścieżką, niż to było przedstawione na rysunku 2.9a, a zatem $d(k)$ nie jest już długością najkrótszej ścieżki dla tego węzła. Podobnie węzeł $v_o = v_k^\Pi$ nie należy już do zbioru węzłów leżących na najkrótszej ścieżce $v_s \rightsquigarrow v_k$. Łatwo zauważyć, że jedyną możliwą alternatywą dla najkrótszej ścieżki do węzła v_k jest przed chwilą powstała ścieżka, tak więc nowa wartość parametru $d(k) = \min \{d(o) + c_{ok}, d(k)\}$ ¹².

Pseudokod 3: RELAX (j, k, d)

```

1 begin
2   if  $k.d > j.d + d(j, k)$  then
3      $k.d \leftarrow j.d + d(j, k)$ 
4      $k.\Pi \leftarrow j$ 
    /* Oznaczenia węzłów zachowane z rysunku 2.9 */
    /*  $d(j, k, \dots)$  — funkcja wagi */

```

Algorytm relaksacji wierzchołków (zob. Pseudokod 3) sprawdza, czy nowo dodany wierzchołek zaburza interesującą nas własność grafu. Jeżeli zaburzenie nie występuje, to następne kroki są pomijane. W przeciwnym przypadku aktualizowane jest wskazanie na rodzica Π oraz wartość $d(i)$ dla wierzchołka, który tego

¹² O tym, że tak jest w istocie przekonamy się w rozdziale 2.3.3 z lematu 2.3.2.

wymaga. Metoda relaksacji przyjmuje trzy parametry, z którego dwa są wierzchołkami, a trzecim — funkcja wagowa krawędzi, którą zdefiniowaliśmy w podrozdziale 2.3.

Ostatnią operacją, którą chcielibyśmy móc wykonywać, jest operacja przeglądania wierzchołków, które znajdują się na dowolnej najkrótszej ścieżce w grafie $G = (V, E)$, jako że sama informacja o długości takiej ścieżki nie zawsze okazuje się wystarczająca. Przy omawianiu dwóch poprzednich algorytmów, na równi z operowaniem na atrybutach węzłów (w tamtym przypadku $d(i)$), pozwalałyśmy sobie zmieniać także atrybut, odpowiadający wskazaniu na rodzica danego węzła ($v.\Pi$), doprowadzając zawsze do sytuacji, w której rodzicem danego węzła, leżącego na najkrótszej ścieżce, zawsze był węzeł, który także na niej się znajdował, będąc jednocześnie o jedną krawędź bliżej źródła, od którego dana ścieżka się rozpoczęła. Innymi słowy dbaliśmy o to, by dla każdej najkrótszej ścieżki $P = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ dla każdego $v_i : i \in \{1, \dots, k\}$ zachodziła prawidłowość: $v_i.\Pi = v_{i-1}$ (dla $i = 0$ w oczywisty sposób $v_0.\Pi = \text{NULL}$), a zatem nasz algorytm, pozwalający nam na wypisanie po kolejnych węzłach na danej, najkrótszej ścieżce $v_s \xrightarrow{*} v_k$, wyglądać mógłby dla przykładu tak jak pokazano w Pseudokodzie 4.

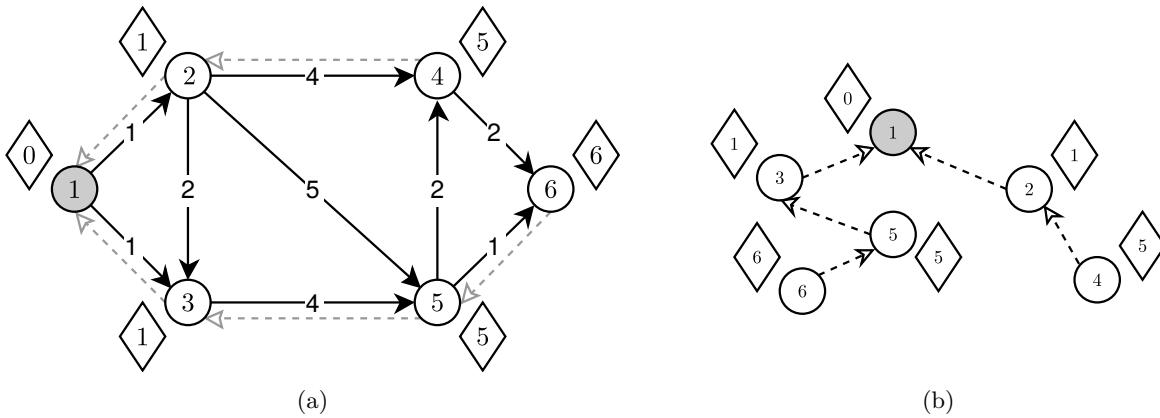
Pseudokod 4: WRITE-PATH (v)

Result: Ścieżka, wypisana w kolejności od węzła docelowego do źródła.

```

1 begin
2   while  $v.\Pi \neq \text{NULL}$  do
3     Wypisz  $v$ 
4      $v \leftarrow v.\Pi$ 
5   Wypisz  $v$ 
```

Algorytm na wejście przyjmuje węzeł, do którego ścieżkę chcemy wypisać, pamiętając, że będzie to ścieżka wypisana w odwrotnej kolejności i że nie jesteśmy w stanie wypisać najkrótszych ścieżek innych, niż te, które swój początek mają w źródle (zbiór wszystkich takich ścieżek tworzy swego rodzaju drzewo [4, 24.5], którego korzeniem jest właśnie ten węzeł — rys. 2.10).



Rysunek 2.10: **Poddrzewo najkrótszych ścieżek** (a) Graf $G = (V, E)$ z obliczonymi odległościami najkrótszych ścieżek dla wszystkich węzłów, gdzie przerywanymi liniami zaznaczone są wskazania na poprzedników każdego z nich. W przypadku braku takiej krawędzi dla danego węzła v zakładamy, że $v.\Pi = \text{NULL}$. (b) Poddrzewo grafu, zawierające najkrótsze ścieżki od źródła do wszystkich pozostałych węzłów w grafie G , wraz z ich kosztami.

Oczywiście nic nie stoi na przeszkodzie, byśmy zastosowali jedną z technik, by odwrócić kolejność takiego wypisywania (np. wpisać wyniki do kolejki FIFO, by później z niej odczytać wartości w kolejności od v_s do v_k czy też zastosować rekurencję).

2.3.3 Właściwości najkrótszych ścieżek

Algorytmy, które będziemy omawiać w następnych rozdziałach, poza czerpaniem pomysłów na ich implementacje z wielu innych zagadnień informatycznych (jak się przekonamy), w głównej mierze oparte będą na właściwościach najkrótszych ścieżek, które przytoczymy w tym podrozdziale bez dowodów (można je wszystkie odnaleźć w książce o algorytmach [4, 24.5]), wierząc, że pomoże się to skupić Czytelnikowi na samych algorytmach i dowodach ich poprawności, zwłaszcza że zdecydowana większość właściwości najkrótszych ścieżek jest naturalna i łatwa do zrozumienia.

Lemat 2.3.1 (Własność trójkąta) Dla każdej krawędzi $e_{ij} \in E$ zachodzi $\delta(v_k, v_j) \leq \delta(v_k, v_i) + c_{ij}$.

Lemat 2.3.2 (Własność optymalnej podstruktury) Jeśli w ważonym grafie skierowanym $G = (V, E)$ z funkcją wagową $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ (w naszym przypadku wagi są utożsamiane z kosztem przejścia między jednym węzłem a drugim, wyrażonym — bez straty ogólności — w liczbach naturalnych, gdyż zajmujemy się rzeczywistymi sieciami drogowymi, w których odległości między dowolnymi dwoma punktami mierzymy w całkowitych wielokrotnościach przyjętej jednostki długości) najkrótszą ścieżką z wierzchołka v_p do v_k jest ścieżka $P = \langle v_p, v_{p+1}, \dots, v_k \rangle$, to dla każdych i, j , takich że $p \leq i \leq j \leq k$ podścieżka $P_{ij} = \langle v_i, v_{i+1}, \dots, v_j \rangle$ jest najkrótszą ścieżką z v_i do v_j .

Lemat 2.3.3 (Własność braku ścieżki) Jeśli nie istnieje ścieżka z v_s do v_i , to zawsze $v_i.d = \delta(s, i) = \infty$.

Lemat 2.3.4 (Własność ścieżki z ujemnym cyklem) Jeśli istnieje ścieżka $P = \langle v_p, v_{p+1}, \dots, v_k \rangle$ z v_p do v_i , na której znajduje się cykl o ujemnej wadze $P = \langle v_i, v_{i+1}, \dots, v_j \rangle$, gdzie $p \leq i \leq j \leq k$, to zawsze $v_k.d = \delta(p, k) = -\infty$.

Lemat 2.3.5 (Własność górnego ograniczenia) Dla każdego wierzchołka $v_i \in V$ zachodzi $v_i.d \geq \delta(s, v_i)$, gdzie wartość $v_i.d$ 单调nie maleje i, w momencie osiągnięcia swojego dolnego ograniczenia, przestaje ulegać zmianie.

Lemat 2.3.6 (Własność zbieżności) Jeśli w grafie ważonym $G = (V, E)$ istnieje najkrótsza ścieżka $P = \langle v_p, v_{p+1}, \dots, v_{k-1}, v_k \rangle$ i w dowolnym momencie przed relaksacją krawędzi e_{k-1k} zachodzi $v_{k-1}.d = \delta(v_p, v_{k-1})$, to po tej relaksacji $v_k.d = \delta(v_p, v_k)$.

Lemat 2.3.7 (Własność relaksacji dla ścieżki) Jeśli $P = \langle v_p, v_{p+1}, \dots, v_k \rangle$ jest najkrótszą ścieżką z $s = v_p$ do v_k i wykonamy szereg relaksacji jej krawędzi w kolejności od e_{pp+1} do e_{k-1k} , to $v_k.d$ będzie równe $\delta(s, v_k)$ niezależnie od kolejności wykonywania pozostałych relaksacji.

Lemat 2.3.8 (Własność podgrafa poprzedników) Jeśli dla każdego węzła v_i w grafie $G = (V, E)$ zachodzi $v_i.d = \delta(s, v_i)$, to podgrafenem poprzedników grafu G jest drzewo o korzeniu w węźle s i krawędziach, będących odwzorowaniem wszystkich najkrótszych ścieżek w tym grafie.

2.3.4 Algorytm Bellmana-Forda

Ostatnim naszym krokiem w tym rozdziale będzie przedstawienie prostego algorytmu wykorzystującego całą naszą dotychczas zdobytą wiedzę do wyznaczenia najkrótszych ścieżek w zadanym, skierowanym grafie acyklicznym $G = (V, E)$ z nieujemnymi wagami na krawędziach. Algorytm, o którym będziemy mówić w tym rozdziale, jest oparty na właściwościach najkrótszych ścieżek, które wymieniliśmy powyżej, i bezpośrednio z nich wynika dowód jego poprawności (który przytoczymy pod koniec rozdziału). Bardzo prostą ideą omarwanego algorytmu jest wykonywanie operacji relaksacji krawędzi w rundach aż „do skutku”. Pod pojęciem rundy będziemy rozumieli przeprowadzenie takiej operacji dla każdej krawędzi w grafie dokładnie jeden raz, zaś wykonywanie rund będziemy powtarzać do momentu, w którym wartości $d(i)$ dla każdego wierzchołka $v_i \in V$ będą równe rzeczywistym wagom najkrótszych ścieżek $v_s \xrightarrow{*} v_i = \delta(s, i)$. Naszym celem zatem staje się już tylko znalezienie takiej minimalnej liczby rund, po których dla każdego wierzchołka $v_i \in G$ zachodzi równość $d(i) = \delta(s, i)$ (dla źródła s). W tym momencie warto przypomnieć sobie, że w naszym modelu rzeczywistych sieci drogowych przyjęliśmy brak krawędzi, których koszt byłby mniejszy lub równy 0, a co za tym idzie — najkrótsze ścieżki, które będziemy chcieli odnaleźć, nie będą składać się z więcej niż $|V| - 1$ wierzchołków (zwróciliśmy już uwagę na tę własność najkrótszych ścieżek pod koniec podrozdziału 2.3.1).

Pseudokod 5: BELLMAN-FORD (G, s)

```

1 begin
2   for  $i = 1$  to  $|V| - 1$  do
3     forall the  $(u, v) \in E$  do
4        $\quad\quad\quad$  RELAX ( $u, v$ )
5   forall the  $(u, v) \in E$  do
6     if  $v.d > u.d + c_{uv}$  then
7        $\quad\quad\quad$  return FALSE
8   return TRUE

```

Powyżej została przedstawiona podstawowa wersja algorytmu Bellmana-Forda, której pesymistyczna złożoność, jeżeli chodzi o liczbę wykonywanych operacji, da się w oczywisty sposób oszacować przez $O(|V| \cdot |E|)$ — wykonujemy $O(|V|)$ razy instrukcje 2–4, gdzie każda z nich wykonuje dokładnie $|E|$ operacji RELAX. Druga pętla, którą widzimy (5–7), przegląda raz jeszcze wszystkie krawędzie w grafie, upewniając się, że nie można wykonać na którejkolwiek z nich dodatkowej relaksacji (czyli czy nasz algorytm zakończył swoje działanie i dał poprawny wynik). Jeżeli po wykonaniu pierwszej z pętli znajdziemy taką krawędź $(u, v) \in E$, że spełniony będzie warunek $v.d > u.d + c_{uv}$, to niechybny znak, że w grafie, w którym szukaliśmy najkrótszych ścieżek od źródła s do wszystkich pozostałych węzłów, występuje cykl o ujemnej długości. Do takiego wniosku dojdziemy, wykonując proste rozumowanie:

Załóżmy, że mamy w grafie cykl $C = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$, gdzie $v_0 = v_k$ a ponadto, że — mimo jego występowania — algorytm po wykonaniu drugiej pętli zwróci nam wartość pozytywną **TRUE** (czyli, że dla każdej krawędzi $(u, v) \in E$ zaszła nierówność $v.d \leq u.d + c_{uv}$, w tym i dla wszystkich krawędzi, należących do cyklu). Jak wspomnieliśmy w podrozdziale 2.3.1, cyklem ujemnym nazywamy taką zamkniętą ścieżkę, po której jesteśmy w stanie przejść a całkowity koszt przejścia po wszystkich krawędziach tego cyklu wynosi $c(v_0, v_k) < 0$ (nierówność 2.11). Dokładniej:

$$\exists C = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle \wedge v_0 = v_k \wedge \sum_{i=1}^k c(v_{i-1}, v_i) = c(v_0, v_k) < 0 \Leftrightarrow C \text{ — cykl o ujemnej długości.} \quad (2.13)$$

Kluczową dla naszego rozumowania okaże się nierówność $\sum_{i=0}^{k-1} c(v_i, v_{i+1}) < 0$ oraz fakt, że z definicji cyklu $v_0 = v_k$, gdzie $v_0, v_k \in V$. Z założenia, że algorytm Bellmana-Forda zwraca wartość **TRUE** mamy $\forall_{v_i \in C} v_i.d \leq v_{i-1}.d + c_{v_{i-1}v_i}$. Sumując po $v_1, \dots, v_k \in C$ otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^k v_i.d \leq \sum_{i=1}^k (v_{i-1}.d + c_{v_{i-1}v_i}) = \sum_{i=1}^k v_{i-1}.d + \sum_{i=1}^k c(v_{i-1}, v_i) = \sum_{i=1}^k v_{i-1}.d + c(v_0, v_k). \quad (2.14)$$

Z własności cyklu: $v_0 = v_k$ możemy wyprowadzić taki ciąg równości:

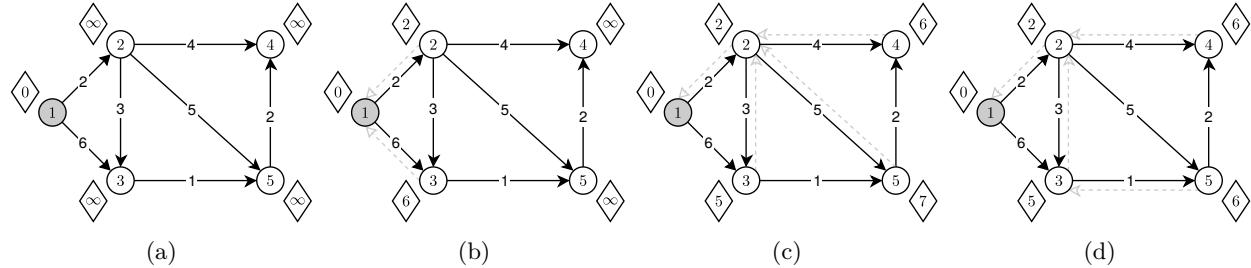
$$\sum_{i=0}^k v_i.d = v_0.d + \sum_{i=1}^{k-1} v_i.d + v_k.d = \sum_{i=1}^k v_{i-1}.d + v_k.d = v_0.d + \sum_{i=1}^k v_i.d, \quad (2.15)$$

zaś z obu wyprowadzeń w ostateczności otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k v_i.d &\leq \sum_{i=1}^k v_{i-1}.d + c(v_0, v_k) \\ \sum_{i=1}^k v_i.d &= \sum_{i=1}^k v_{i-1}.d \\ 0 &\leq c(v_0, v_k), \end{aligned}$$

co stoi w sprzeczności z tym, że na naszej ścieżce znajduje się cykl o ujemnej długości ($c(v_0, v_k) < 0$). Widzimy więc, że algorytm Bellmana-Forda, podobnie zresztą jak wszystkie omawiane w tej pracy algorytmy, nie radzi sobie z wyszukiwaniem najkrótszych ścieżek w grafach, gdzie występują cykle o długości ujemnej (jak pokazaliśmy na przykładzie 2.8).

Sam zaś algorytm można nieco usprawnić, by nie wykonywał niepotrzebnych operacji i przez to działał szybciej od swojego pierwotnego. Nie są to jednak zmiany na tyle duże, by miały jakikolwiek wpływ na pesymistyczną złożoność algorytmu.



Rysunek 2.11: **Działanie algorytmu Bellmana-Forda** (a) Sytuacja po zainicjalizowaniu grafu $G = (V, E)$ przez INIT-GRAPH ze źródłem $v_s.id = 1$. (b) Warunek $v.d > u.d + c_{uv}$ spełniony jest tylko dla krawędzi e_{12} oraz e_{13} . Dla tych węzłów (v_2 i v_3) zostały zaktualizowani ich poprzednicy (zaznaczeni szarymi strzałkami) oraz etykiety d . Dla pozostałych wierzchołków algorytm nie wprowadza żadnych zmian w trakcie iterowania po wszystkich $v \in A(i) : i \in \{1, \dots, 5\}$. (c) Przyjęliśmy kolejność iterowania po wszystkich łukach (pętla 3–4) zgodną z kolejnością ponumerowania wierzchołków na rysunkach. Przyjmijmy ponadto rosnącą kolejność identyfikatorów węzłów, do których prowadzą łuki tj. podczas drugiej iteracji algorytm wykona operację RELAX dla krawędzi w kolejności: e_{12}, e_{13} (dla których relaksacja nie wprowadzi żadnych zmian), e_{23} (zostaje zaktualizowany węzeł v_3 — jego wartość d przyjmie długość odnalezionej, krótszej ścieżki oraz otrzyma nowego rodzica), e_{24}, e_{25} , (d) e_{35} i e_{54} . Dla normalnej wersji algorytmu powinniśmy wykonać jeszcze 3 iteracje ($|V| - 1$) po wszystkich krawędziach, jednak wprowadziliśmy modyfikację, która przerywa działanie algorytmu, jeżeli podczas pełnej iteracji nie nastąpi w grafie G żadna zmiana.

Usprawnienie algorytmu

Pierwsze co możemy zauważyć to fakt, że jeśli uporządkujemy wszystkie krawędzie e_{ij} względem pierwszego indeksu (czyli tak, aby kolejność przeglądania łuków w wierszach 3–4 była podyktowana przeglądanymi węzłami, z których dane łuki wychodzą) to możemy pomijać relaksacje tych wszystkich krawędzi, które wychodzą z węzła v , do którego jeszcze nie ma wyznaczonej ścieżki ($v.d = \infty$), gdyż warunek na jej wykonanie nigdy nie zajdzie ($k.d > \infty + d(j, k)$). W wybranym przez nas sposobie prezentowania danych grafu (jako listy sąsiedztwa) taka kolejność przeglądania krawędzi jest naturalna (chcąc przejść przez wszystkie krawędzie w grafie będziemy kolejno przeglądać zawartość $\text{list}_A(i) : v_i \in G$). Dodatkowo — jak już zaznaczono na rysunku 2.11d — jeżeli w czasie wykonywania relaksacji wszystkich krawędzi w grafie nie nastąpi żadna zmiana, to nie wystąpią one także podczas następnej iteracji głównej pętli algorytmu. Możemy zatem jej działanie przerwać, nie czekając aż wykona się ona dokładnie $|V| - 1$ razy.

Poprawność działania

Dowód poprawności działania takiego algorytmu dla grafu $G = (V, E)$, który nie zawiera ujemnych cykli (dla których pokazaliśmy już, że omawiany algorytm nie działa) jest natychmiastowy, jeżeli powołamy się na odpowiednie własności najkrótszych ścieżek.

Z lematu 2.3.7 wiemy, że jeśli w grafie istnieje najkrótsza ścieżka $P = \langle s = v_p, v_{p+1}, \dots, v_k \rangle$ i wykonamy dla jej krawędzi relaksację w odpowiedniej kolejności, to $v_k.d$ będzie się równać $\delta(s, v_k)$. Wiemy także, że każda najkrótsza ścieżka w grafie składać się może maksymalnie z $|V| - 1$ krawędzi. Z każdym nawrotem pętli głównej algorytmu Bellmana-Forda wykonywana jest relaksacja wszystkich krawędzi w grafie G , zaś pętla ta jest powtarzana dokładnie $|V| - 1$ razy. Podczas każdej i -tej iteracji w szczególności wykonamy relaksację dla wszystkich krawędzi na ścieżce P — w tym „kolejno” dla e_{pp+1} (w pierwszej iteracji), dla

e_{p+1p+2} i dla każdej następnej. W najgorszym przypadku (zależnym od faktycznej kolejności przeglądania krawędzi) ostatnią z nich na ścieżce P będziemy relaksować w iteracji $k - p + 1$ (w przypadku, gdy dla k pierwszych i -tych iteracji $i = 1, 2, \dots, |V| - 1$ będziemy wykonywali za każdym razem relaksację tylko jednej krawędzi ze ścieżki P : łączącej węzeł $v_{p+(i-1)}$ z następnym — $v_{p+(i-1)+1}$), gdzie po ich wykonaniu $v_k.d = \delta(s, v_k)$. Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić dla każdej najkrótszej ścieżki w grafie.

2.4 Podsumowanie rozdziału

W tym rozdziale zostały przedstawione podstawowe pojęcia niezbędne do pełnego zrozumienia dalszej ich części, gdzie skupimy się na omawianiu kilkunastu algorytmów wyszukiwania najkrótszych ścieżek wraz z ich modyfikacjami, które pozwolą im na jeszcze szybsze działanie. Dużą część z nich będą stanowiły algorytmy, oparte na podstawowym pomyśle holenderskiego informatyka Edsgera Dijkstry [5], którym poświęcimy cały następny dział. Podobnie jak algorytm Bellmana-Forda, będą one także służyły do znajdowania najkrótszej ścieżki z pojedynczego źródła w grafie bez ujemnych cykli, lecz tym razem nie będą mogły w nim występować krawędzie o takim koszcie ze względu na sposób realizacji algorytmu.

Najkrótsze ścieżki z jednym źródłem

W poprzednim rozdziale omówiliśmy prosty algorytm wyszukiwania najkrótszych ścieżek w charakterze przykładu na wykorzystanie w praktyce wcześniej omówionych zagadnień. Doszliśmy do wniosku, że algorytm wykonuje ogromną liczbę operacji, w tym większość z nich niepotrzebnie (jak na przykład próby relaksacji krawędzi wychodzących z wierzchołków, do których algorytm jeszcze nie potrafił dojść, wykorzystując wcześniej obliczone ścieżki), starając się zminimalizować liczbę tych ostatnich, poprzez wprowadzenie dodatkowych warunków do naszej implementacji. Ich obecność pozwalała mieć nadzieję na efektywniejsze działanie algorytmu, jednak asymptotycznie nie uzyskaliśmy żadnej poprawy, nadal oszacowując czas działania algorytmu na ograniczony przez $O(V \cdot E)$. Nie umknął też naszej uwadze fakt, iż od kolejności wykonywanych relaksacji głównie zależy liczba operacji, jakie algorytm musi wykonać, aby zwrócić poprawny wynik i zakończyć pracę. Nic więc dziwnego, że rozwój algorytmiki zaowocował zaproponowaniem wielu innych rozwiązań tego samego problemu, skupiających się przede wszystkim na wymuszeniu takiej kolejności operacji, aby algorytm wykonywał ich jak najmniej.

3.1 Sortowanie topologiczne

Aby przekonać się o skuteczności takiego podejścia, przedstawimy prosty algorytm **sortowania topologicznego**, z którego pomocą będziemy mogli odnaleźć wszystkie najkrótsze ścieżki w skierowanym grafie ważonym $G = (V, E)$ w czasie liniowym (co jest ogromnym skokiem wydajnościowym jeżeli chodzi o kwadratową złożoność algorytmu Bellmana-Forda)! Niestety, jak się będą mieli okazję przekonać, algorytm **sortowania topologicznego** narzuca nam bardzo silne ograniczenie na postać grafu, dla którego będziemy chcieli dokonywać obliczeń, przez co algorytm ten nie będzie już taki atrakcyjny, jakim wydawał się być na początku, by nie powiedzieć — bezużyteczny. Warto poświęcić mu jednak trochę uwagi, gdyż stanowi dogodne tło do dalszych rozważań.

Sortowanie topologiczne polega na takim posortowaniu wierzchołków, aby dla każdej pary (v_i, v_j) , w przypadku istnienia krawędzi pomiędzy tymi wierzchołkami, prowadzącej z v_i do v_j , w już posortowanym ciągu v_i znajdowała się przed wierzchołkiem, do którego dana krawędź prowadzi. Innymi słowy sortowanie topologiczne prowadzi do ustalenia możliwej kolejności odwiedzeń wszystkich wierzchołków w grafie. Jako przykład w literaturze najczęściej można spotkać problem stworzenia listy kolejno wykonywanych czynności na podstawie posiadanego grafu, przedstawiającego zależności między poszczególnymi czynnościami (na przykładzie pieczenia ciasta, bądź kolejności zakładania ubrań) [4, 22.4].

Mówiąc o kolejności w grafie oczywistym więc jest, że nie uda nam się ustalić odpowiedniego porządku dla grafów, które będą zawierały cykle. Poniżej przedstawimy dwie popularne metody wyznaczania takiego porządku, gdzie pierwsza z nich okaże całkowicie bezradna w obliczu wystąpienia cyklu, zaś druga będzie je po prostu ignorować. Należy wyraźnie podkreślić, że w tym drugim przypadku dla grafu zawierającego cykle jako wynik nie otrzymamy porządku topologicznego, tak więc będzie on — z naszego punktu widzenia — bezwartościowy.

3.1.1 Algorytm Khana

Jednym z naturalnych sposobów na wyznaczenie pożąданej kolejności wierzchołków jest rozpoczęcie ich spisywania od tych, do których nie prowadzą żadne krawędzie — powiedzmy, że takie wierzchołki nie mają żadnych „wymagań” by mogły być odwiedzone. Skoro odwiedziliśmy już wszystkie takie wierzchołki, możemy

założyć, że pewne „wymagania” które te wierzchołki sobą reprezentują, zostały spełnione i posiadamy nieco większe „możliwości”, by czynić zadość „wymaganiom” pozostałych wierzchołków. Takie rozumowanie przeprowadzone dla wszystkich wierzchózków w grafie bez cykli da nam listę, na którą zostały spisane wierzchołki w porządku topologicznym. Łatwo sobie wyobrazić analogiczne rozumowanie w przypadku wystąpienia cyklu: gdy wierzchołek v_A na swojej „liście wymagań” posiada takie, by przed jego odwiedzeniem był odwiedzony węzeł v_B (co przedstawilibyśmy na grafie w postaci krawędzi z v_B do v_A), a wierzchołek v_B — by przed jego odwiedzeniem był odwiedzony węzeł v_A . Widzimy, że żadnego z tych warunków nie da się spełnić. Algorytm, opisujący takie działanie, wyglądać mógłby tak, jak przedstawiono w Pseudokodzie 6.

Pseudokod 6: KHAN-TOPOLOGICAL-SORT (G)

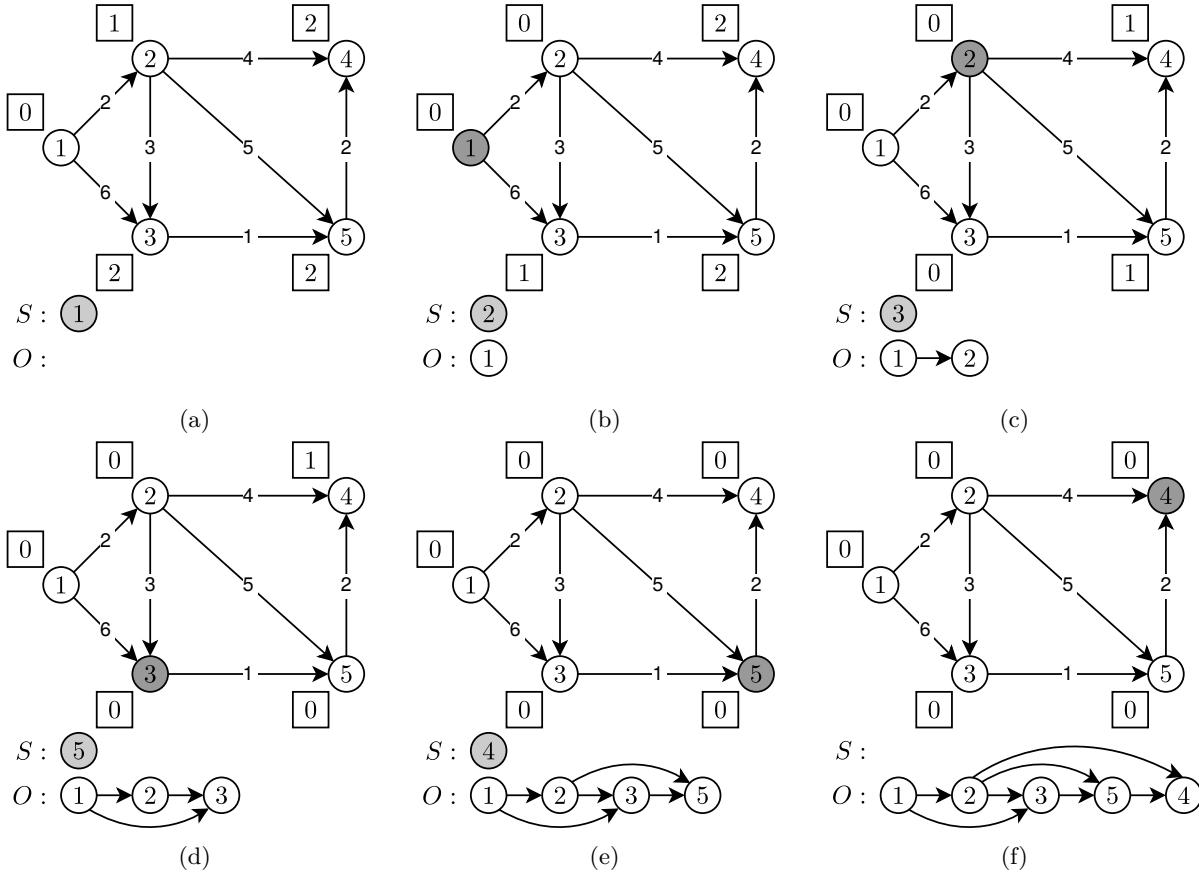
Input: Graf $G = (V, E)$.
Result: Lista O z posortowanymi topologicznie wierzchołkami.

```

1 begin
2   |    $S \leftarrow$  zbiór wszystkich wierzchołków, do których nie prowadzą żadne krawędzie
3   |    $O \leftarrow \emptyset$ 
4   |   while  $S$  nie jest pusta do
5   |     |   Przepnij wierzchołek  $v_i$  z  $S$  na koniec listy  $O$ 
6   |     |   foreach  $e_{ij} : v_i \xrightarrow{1} v_j$  do
7   |       |       Usuń krawędź  $e_{ij}$  z grafu  $G$ 
8   |       |       if do  $v_j$  nie wchodzą już żadne krawędzie then
9   |         |         Wstaw wierzchołek  $v_j$  do  $S$ 
10  |   if w grafie  $G$  nadal są wierzchołki then
11    |     return NULL
12  else
13    |     return  $O$ 
```

Algorytm działa niemal identycznie jak w przeprowadzonym przez nas rozumowaniu. Za punkt wejścia obieramy listę wierzchołków, do których nie prowadzą żadne krawędzie, zaś przez cały czas trwania algorytmu usuwamy wszystkie te, które wychodzą od wierzchołków już odwiedzonych. W momencie, gdy do jakiegoś węzła przestają prowadzić krawędzie w grafie, dodajemy go do listy węzłów, które sekwencyjnie odwiedzamy. Jest to sytuacja równoważna ze spełnieniem wszystkich „wymagań”, by dany wierzchołek móc odwiedzić. Co może okazać się problematyczne, to zdobycie informacji na temat liczby krawędzi wchodzących do każdego pojedynczego wierzchołka, gdyż — jak pamiętamy — zdecydowaliśmy się na przedstawienie struktury połączeń w grafie za pomocą list sąsiedztwa, które nam takiej wiedzy nie dają. Problem jest jednak bardzo prosty do rozwiązania — aby takie informacje zdobyć, musimy przejść po wszystkich krawędziach w grafie gromadząc w osobnej tablicy $deg[1 \dots |V|]$ informację o liczbie łuków wchodzących do poszczególnych węzłów o identyfikatorach z zakresu od 1 do $|V|$ (przy czym nie interesuje nas nic poza ich liczbnością, zaś czas, jaki potrzebujemy na jednorazowe przejście po wszystkich krawędziach grafu G — jest oczywiście liniowy w odniesieniu do ich liczby). Następnie ta sama tablica posłuży nam do symulowania takich wydarzeń jak: usunięcie krawędzi z grafu bądź sprawdzenie czy do danego wierzchołka przestały prowadzić jakieś łuki. Nie usuwając krawędzi z grafu zaraz po przejściu przez nie, a jedynie symulując ich usunięcia, narażamy się na sytuacje, w których algorytm zacznie nieprzerwanie krążyć pomiędzy węzłami w grafie, które tworzą cykl. Sprawdzenie czy taki występuje, następuje dopiero pod sam koniec algorytmu wierszach 9–12. Możemy sobie jednak z tym problemem poradzić równie łatwo, co z wyznaczaniem liczby krawędzi wchodzących do poszczególnych węzłów. Jedyne, co musimy zauważać to fakt, że z każdym powtórzeniem instrukcji 3–8 dodajemy do zbioru S kolejny wierzchołek grafu. W przypadku natrafienia na cykl i nieusuwanie krawędzi, każde wejście do węzła v_i po ścieżce należącej do cyklu, spowoduje, że zmniejszymy wartość licznika $deg[i]$ o jeden (symulując tym samym usunięcie krawędzi). Jeżeli okaże się, że po pierwszym przejściu taką ścieżką $deg[i] = 0$ (co odpowiada braku krawędzi wchodzących do v_i) dla każdego węzła należącego do cyklu, to wpadniemy w nieskończoną pętlę, dodając do zbioru S kolejne węzły, usuwając je z powrotem nieco dalej (w kroku 4). Jednym z wielu pomysłów na rozwiązanie tego problemu jest wprowadzenie ograniczenia na

liczbę elementów listy O — dla poprawnie wykonanego algorytmu będzie ona zawsze dłuższa niż $|V|$, podczas gdy dla omawianego przypadku złego zachowania się algorytmu bardzo szybko liczba tych elementów przekroczy ich oczekiwana liczbę.



Rysunek 3.1: Działanie algorytmu Khana (a) Sytuacja początkowa algorytmu. Na liście S znajdują się wszystkie węzły, do których — przed rozpoczęciem działania algorytmu — nie wchodziły żadne krawędzie. Przy każdym z węzłów (w kwadratach) znajduje się liczba takich krawędzi $e \in E$, które wchodzą do danego wierzchołka — reprezentują one elementy tablicy $\deg[i]$, gdzie i to identyfikator węzła, przy którym znajduje się dany element. (b) Algorytm wybiera z listy S jedyny możliwy element i usuwa z grafu wszystkie krawędzie wychodzące z wybranego węzła, dodając jednocześnie do listy S każdy węzeł, do którego — w wyniku usunięcia tych krawędzi — nie prowadzi już żaden łuk. Usuwanie połączenia $v_i \xrightarrow{1} v_j$ symbolizujemy zmniejszeniem wartości elementu $\deg[j]$. (c) Usunięcie krawędzi wychodzących z następnego, pobranego z listy S , elementu spowodowało dodanie do niej wierzchołka v_3 . Badany element v_2 — podobnie jak w poprzednim przypadku — po wyciągnięciu z listy S , przepinamy do listy O . (d) Dodanie do listy S węzła v_5 w wyniku usunięcia wszystkich krawędzi $e \in \{e_{ij} : i = 3\}$. Przepięcie badanego elementu v_3 na listę O . (e) Wykonanie kolejnej pętli algorytmu i dodanie skanowanego elementu v_5 do listy wynikowej. (f) Ostatni krok algorytmu. Zauważmy, że w grafie nie ma już żadnych łuków (wszystkie elementy z tablicy \deg zostały wyzerowane), więc algorytm zakończył się poprawnie — badana sieć nie miała cykli.

Czas działania takiej metody jest oczywiście liniowy, zależny od liczby zarówno węzłów jak i krawędzi w grafie. Zależnie od tego, czy w węzłach przechowujemy informację o liczbie wchodzących do nich krawędzi, te pierwsze będziemy musieli przejrzeć w czasie $O(|V|)$ w poszukiwaniu takich węzłów, które takowych krawędzi nie mają, zaś jeżeli takich informacji nie mamy — wówczas, skanując wszystkie krawędzie w grafie, będziemy musieli je sami wygenerować (co zajmie nam $O(|E|)$ czasu). Bez względu na wcześniej wykonany krok właściwa część algorytmu polega na usunięciu wszystkich krawędzi z grafu (gdyż taki chcemy uzyskać rezultat dla prawidłowej sieci) w czasie $O(|E|)$.

3.1.2 Przeszukiwanie w głąb

Alternatywnym sposobem na topologiczne uporządkowanie grafów w sieci jest wykorzystanie właściwości, posiadanych przez prosty algorytm przeszukiwania w głąb, w skrócie DFS (ang. *Depth-First Search*). Aby posortować topologicznie wszystkie węzły w grafie $G = (V, E)$ wykorzystujemy fakt, że wspomniany algorytm oznacza dany węzeł v jako przetworzony dopiero w momencie, gdy wszystkie węzły do których jest w stanie dojść z badanego węzła, są oznaczone. Innymi słowy nie jest możliwa sytuacja, by w grafie został oznaczony węzeł, którego wszystkie dzieci (a także jego dalsi potomkowie) nie zostały oznaczone. Zapisując kolejność takich operacji (oznaczania węzłów jako przetworzone), a następnie odwracając ją w kolejności odwrotnej, uzyskujemy listę z poprawnie posortowanymi topologicznie węzłami (odwrotna sytuacja do przedstawionej wcześniej ma następującą interpretację: żaden węzeł v_i nie zostanie zaznaczony, jeżeli istnieje jakikolwiek węzeł v_j , który jest jeszcze nie zaznaczony, a który posiada krawędź $v_j \xrightarrow{1} v_i$).

Pseudokod 7: BFS-TOPOLOGICAL-SORT (G)

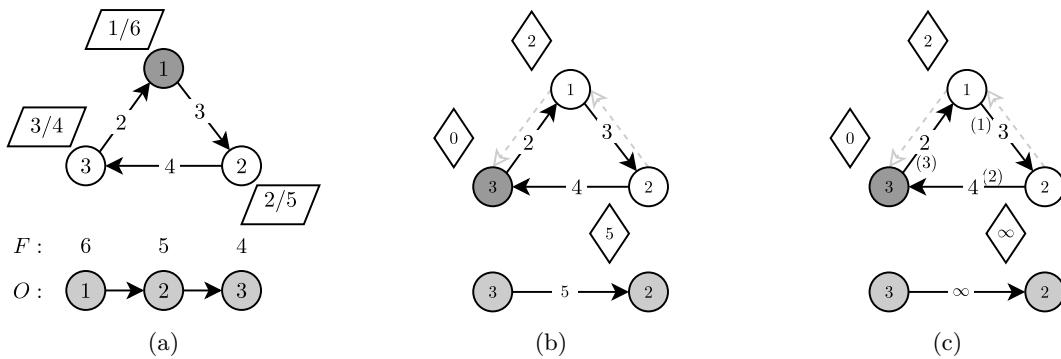
Input: Graf $G = (V, E)$.

Result: Lista O z posortowanymi topologicznie wierzchołkami.

```

1 begin
2   Wykonaj DFS dla grafu wejściowego  $G$ 
3   Wstaw na początek listy  $O$  każdy wierzchołek  $v$ , kiedy ten tylko zostanie oznaczony jako
        przetworzony.
4 return  $O$ 
```

W algorytmie niejawnie dokonujemy odwrócenia elementów, które znajdują się na liście O , poprzez wstawianie każdego wierzchołka na początek tej listy, nie na jej koniec. Algorytm oczywiście działa w czasie liniowym, podobnie jak sam DFS ($\Theta(|V| + |E|)$). Wspomnieliśmy na początku rozdziału, że drugi z omawianych algorytmów posiada nad pierwszym tą przewagę, że nie przerywa pracy nawet w momencie napotkania cyklu. Nie jest to do końca prawdą, gdyż zachowanie się algorytmu DFS głównie zależy od intencji jego autora — możemy napisać go w taki sposób, aby podczas przeglądania grafu wgłąb po natrafieniu na wierzchołek który został już odwiedzony, algorytm kontynuował swoją pracę (to jest albo wycofał się z aktualnie badanego wierzchołka zaznaczając go jako przetworzony, albo — w przypadku, gdy pozostałe krawędzie badanego węzła prowadzą do jeszcze nieodwiedzonych węzłów — kontynuował przeszukiwanie wgłąb). Innymi słowy — możemy go zmusić by ignorował cykle występujące w badanym grafie.



Rysunek 3.2: **Przykład złego działania DFS dla grafu z cyklem** (a) Graf po wykonaniu algorytmu DFS. W rombach znajdują się charakterystyczne dla grafu wartości w postaci x/y , gdzie x oznacza czas odwiedzenia danego węzła, zaś y to czas jego przetworzenia (po przetworzeniu wszystkich jego dzieci i ich potomków oraz wycofaniu się z niego). Lista O zawiera „poprawnie” uporządkowane węzły, w kolejności malejącej względem czasu przetwarzania węzłów. Algorytm rozpoczyna pracę od pierwszego węzła w grafie. (b) Poprawnie wykonany algorytm wyszukiwania najkrótszej ścieżki $v_3 \xrightarrow{1} v_2$ ($c(3, 2) = \delta(3, 2) = 5$). (c) Błędne rozwiązanie dla algorytmu opartego o listę O z rysunku 3.2a. Cyfry w nawiasach oznaczają kolejność wykonywania relaksacji, wynikającej z uporządkowania węzłów na liście O .

Niestety — choć początkowo może się wydawać, że ignorowanie cykli nie szkodzi, a wręcz jest po naszej myśl (algorytm DFS, napotykając ścieżkę, która zamyka cykl, nie zdecyduje się na pójście tą ścieżką, podobnie jak relaksacja takiej ścieżki nigdy nie przyniesie żadnego rezultatu — innymi słowy jest zbędna), to prosty przykład wystarcza, by algorytm wyszukiwania najkrótszych ścieżek, który opiera się o sortowanie topologiczne, zwracał nam niepoprawne wyniki dla tak zadanego grafu.

3.1.3 Sortowanie topologiczne

Jak widzimy z powyższych przykładów, możliwości wykorzystania sortowania topologicznego w algorytmach wyszukiwania najkrótszych ścieżek są ograniczone jedynie do małej klasy grafów — stanowczo za małej, jeżeli chodzi o grafy reprezentujące rzeczywiste sieci drogowe. Istnieją jednak pewne problemy (mniej trywialne od pieczęcia ciasta, czy kolejności nakładania ubrań), w których taki algorytm się przydaje i jest chętnie stosowany głównie ze względu na swoją szybkość działania — liniową, proporcjonalnie do liczby krawędzi w grafie¹. Implementacja takiego algorytmu sprowadza się do wykonania relaksacji dla wszystkich krawędzi, wychodzących z węzłów posortowanych topologicznie, w której to kolejności powinniśmy postępować.

Pseudokod 8: TOPOLOGICAL-SHORTEST-PATH (G)

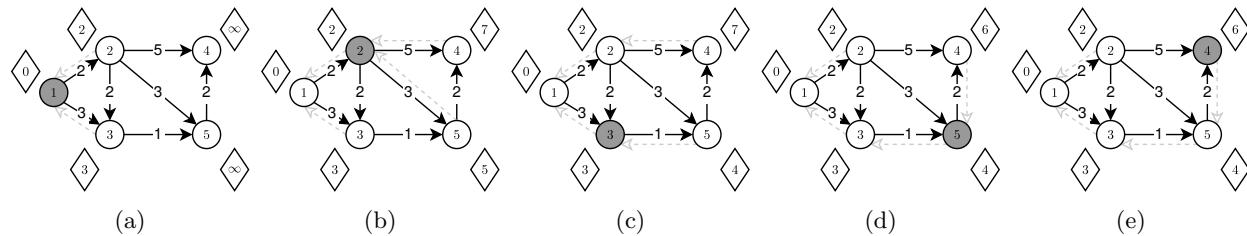
```

1 begin
2   foreach  $v_i$  w porządku topologicznym do
3     foreach  $e_{ij} : v_i \xrightarrow{1} v_j$  do
4       RELAX( $v_i, v_j$ )

```

Aby udowodnić poprawność działania takiego algorytmu, odwołamy się do dwóch wcześniej przedstawionych lematów: o optymalnej podstrukturze grafu (2.3.2) oraz zbieżności najkrótszych ścieżek (2.3.6).

Dowód. Założymy indukcyjnie, że algorytm przeskanował już wierzchołki $v_i : i \in \{1, 2, \dots, k\}$ i dla każdego z nich ich waga jest optymalna ($d(i) = \delta(s, v_i)$). W oczywisty sposób pierwszy krok indukcyjny jest spełniony: dla $k = 1$ naszym jedynym wierzchołkiem, który został obsłużony, jest wierzchołek początkowy — źródło, którego $d(s) = \delta(s, s) = 0$. Przyjrzyjmy się teraz sytuacji, w której algorytm bada węzeł $(k+1)$ 'y (nie v_{k+1}). Niech najkrótszą ścieżką do tego węzła będzie $P = \langle v_1, v_2, \dots, v_h, k+1 \rangle$. Z lematu 2.3.2 (o optymalnej podstrukturze) wiemy, że każda podścieżka ścieżki P jest ścieżką najkrótszą (w szczególności jest nią ścieżka $P' = \langle v_1, v_2, \dots, v_h \rangle$). Z faktu, że wszystkie wierzchołki w grafie są posortowane topologicznie oraz, że krawędź $v_h \xrightarrow{1} k+1 \in E$ (co nam gwarantuje istnienie ścieżki P) wynika, że wierzchołek v_h jest węzłem, dla którego $h \in \{1, 2, \dots, k\}$ — w związku z tym, na mocy założenia indukcyjnego, wartość $v_h.d = \delta(s, v_h)$. Zgodnie z lematem 2.3.6, jeżeli w dowolnym momencie przed relaksacją krawędzi $v_h \xrightarrow{1} k+1$ wartość $v_h.d = \delta(s, v_h)$, to po relaksacji tej krawędzi już zawsze $(k+1).d = \delta(s, k+1)$ (jest optymalna). Z faktu istnienia takiej krawędzi oraz z uporządkowania topologicznego wszystkich węzłów w grafie wiemy, że waga jaką posiada wierzchołek v_h , zawsze będzie optymalna przed przystąpieniem do przechodzenia po krawędzi $v_h \xrightarrow{1} k+1$, co kończy dowód². \blacklozenge



Rysunek 3.3: Przykład dla ustalonego porządku topologicznego węzłów: v_1, v_2, v_3, v_5, v_4 .

¹ Szeregowanie zadań, ustalanie zależności pakietów w systemach operacyjnych, itd.

² Przeprowadzając dowód oparliśmy się na rozumowaniu przedstawionym w [2, 4.4]

3.2 Generyczny algorytm Dijkstry

Pokazaliśmy w poprzednich rozdziałach, że kolejność przetwarzania węzłów może mieć ogromny wpływ na szybkość działania algorytmu — od przeglądania wierzchołków w kolejności narzuconej nam przez ich uporządkowanie w strukturach grafu (w czasie $O(|V| \cdot |E|)$), aż do badania wierzchołków w porządku topologicznym ($O(|V| + |E|)$). Oba te algorytmy miały zasadnicze wady: albo, wykonując zatrważającą liczbę niepotrzebnych operacji, działały w czasie dużo poniżej naszych oczekiwani, albo nie nadawały się do użytku w sieciach, które my chcieliśmy badać (z nieujemnymi cyklami). W tym rozdziale przedstawimy kolejny sposób przeglądania wierzchołków grafu $G = (V, E)$, zaprezentujemy generyczny algorytm na nim oparty oraz udowodnimy jego poprawność. Bazując na kontrprzykładzie wykażemy także, że nie działa on dla grafów, które zawierają krawędzie o ujemnych wagach (a co za tym idzie — dla grafów z ujemnymi cyklami). Algorytm, opracowany przez holenderskiego informatyka Edsgera Dijkstrę [2, 4.5], okaże się podstawą do powstania sześciu jego modyfikacji, którym niejednokrotnie zawdzięcza asymptotycznie szybsze czasy działania. Omówimy je wszystkie w dalszej części rozdziału, skupiając się kolejno na własnościach każdej z nich.

3.2.1 Algorytm Dijkstry

Sama idea algorytmu jest bardzo podobna do poprzedniej tj. zakłada wykonywanie relaksacji dla wszystkich krawędzi aktualnie badanych wierzchołków, których kolejność jest w specyficzny sposób ustalana. W przypadku algorytmu Dijkstry mamy regułę która mówi, że wierzchołki są skanowane w niemalejącej kolejności ich etykiet (atrybutów d — odległości węzła od źródła s), co wiąże się z wykorzystaniem w naszym algorytmie **kolejek priorytetowych**, które zapewniają nam właśnie taki porządek. Jak się później okaże — omawiane modyfikacje algorytmu Dijkstry różnią się głównie jej implementacją [1, 2.1].

Przyjmijmy, że mamy dwa zbiory rozłączne: S , który na początku działania algorytmu jest pusty (zob. Pseudokod 9) — do niego trafiać będą przetworzone już wierzchołki — oraz \bar{S} , w którym na początku przechowywane są wszystkie węzły. Jak już wspomnieliśmy, algorytm ma za zadanie sekwencyjne pobierać ze zbioru \bar{S} takie wierzchołki v_i , których $v_i.d = \min \{v_j.d : v_j \in \bar{S}\}$, aby następnie przenosić każdy z nich do zbioru S , jednocześnie wykonując relaksacje dla wszystkich krawędzi, które z takich wierzchołków wychodzą. Oczywiście — tak jak w każdym algorytmie który będziemy omawiać — na początku inicjalizujemy graf metodą INIT-GRAPH (G, s). Pseudokod generycznego algorytmu Dijkstry wygląda tak, jak przedstawiono (zob. Pseudokod 9). Wspomniana wcześniej metoda nie jest częścią omawianych algorytmów, więc nie będziemy jej w pseudokodach wymieniać.

Pseudokod 9: GENERIC-DIJKSTRA (G, s)

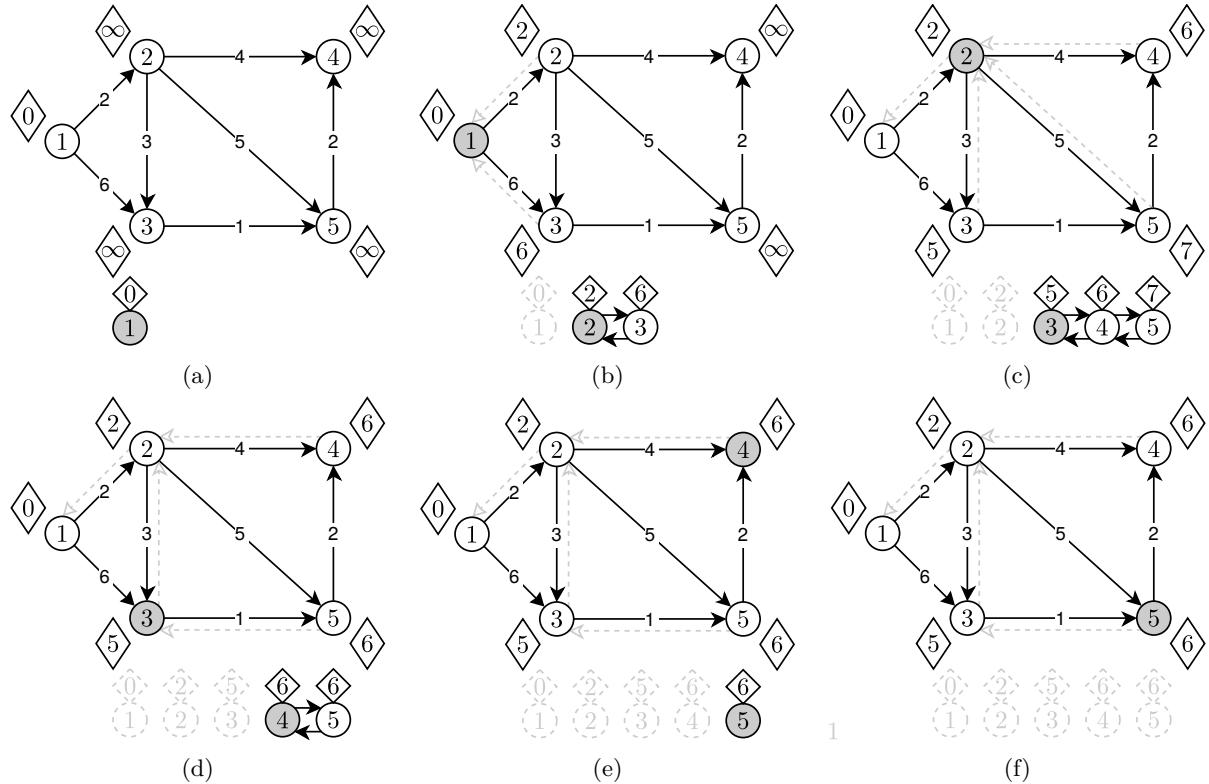
```

1 begin
2    $S \leftarrow \emptyset$ 
3    $\bar{S} \leftarrow \{v : v \in V\}$ 
4   while  $\bar{S}$  nie jest pusty do
5      $v \leftarrow v_i : v_i.d = \min \{v_j.d : v_j \in \bar{S}\}$ 
6      $S \leftarrow S \cup \{v\}$ 
7      $\bar{S} \leftarrow \bar{S} - \{v\}$ 
8     foreach  $e_{ij} : v_i \xrightarrow[1]{} v_j$  do
9       RELAX( $v_i, v_j$ )

```

W faktycznej implementacji, linijki 5–7 zwykle zastępuje się operacją EXTRACT-MIN (Q), gdzie Q to nasza kolejka priorytetowa. Zbiór S zaś w ogóle się nie uwzględnia, gdyż służy on tylko do celów przeprowadzenia dowodów poprawności tego algorytmu i wykazania, że jest on poprawnie skonstruowany (niezmiennikiem pętli 4–9 w tym przypadku będzie $Q = V - S$). Odnajdywaniem najmniejszego elementu (w sensie dystansu wierzchołka do źródła) i usuwaniem go ze zbioru \bar{S} zajmuje się wówczas wymieniona wyżej operacja (wtedy $\bar{S} = Q$). Na rysunku 3.4 jako kolejkę priorytetową wykorzystano podwójnie wiązaną listę (ang. *Doubly-Linked List*), której czas potrzebny na wyciągnięcie z niej najmniejszego elementu, jest zależny od

liczby tych elementów na liście (w najgorszym przypadku $|V|$). Wybór takiej struktury w żadnym wypadku nie jest najlepszym z możliwych rozwiązań, lecz całkowicie wystarcza do zapoznania się z podstawową ideą algorytmu.



Rysunek 3.4: **Działanie algorytmu Dijkstry** (a) Sytuacja po zainicjalizowaniu grafu $G = (V, E)$ przez INIT-GRAH ze źródłem $v_s.id = 1$. (b) Z listy dwukierunkowej została wyciągnięty najmniejszy element i została wykonana operacja RELAX dla krawędzi: e_{12} i e_{13} . Odpowiednio węzły v_2 i v_3 zostały wstawione do kolejki. (c) Najmniejszym elementem na liście był węzeł v_2 . Został usunięty z kolejki, algorytm wykonał relaksację krawędzi e_{23} , e_{24} i e_{25} . Etykieta węzła v_3 uległa zmniejszeniu. (d–f) Kroki analogiczne jak poprzednie.

3.2.2 Złożoność obliczeniowa

Analizując złożoność czasową algorytmu, widzimy że jego główna pętla 4–9 wykonuje się dokładnie $|V|$ razy, za każdym razem usuwając z kolejki priorytetowej dokładnie jeden węzel, gdzie skanowane węzły nie powtarzają się³. Podczas każdej takiej operacji wyszukiwany jest najmniejszy element w kolejce — jej złożoność czasowa jest naturalnie zależna od wybranego przez nas sposobu implementacji owej kolejki i — na pożytek naszych rozważyń — zajmuje $O(\text{EXTRACT-MIN}(Q))$. Takich operacji podczas działania algorytmu wykonamy $|V|$. Dla każdego węzła wyjętego z kolejki, dla wszystkich łuków wychodzących z danych węzłów, wykonywana jest operacja relaksacji — łatwo zauważać, że podczas całej procedury metoda RELAX zostanie wywołana dokładnie $|E|$ razy, podczas której może być wymagane zmniejszenie atrybutu d któregoś z węzłów. Koszt takiej operacji jest znowu zależny od implementacji kolejki priorytetowej (wraz ze zmniejszeniem się klucza może zajść konieczność przemieszczenia węzła bliżej głowy kolejki) i dla naszej analizy niech wyniesie $O(\text{DECREASE-KEY}(Q, v, k))$, gdzie k to nowy klucz (nowa odległość od źródła s — $v.d$) węzła v . Pozostaje nam jeszcze metoda INSERT(Q, v), która wstawia nam elementy do kolejki. Czas jej działania jest również zależny od wybranej implementacji kolejki Q , zaś miejsce jej wywołania zależne

³ Liczba wykonywanych pętli możemy ograniczyć, kończąc algorytm, gdy z kolejki zostanie wyjęty taki węzeł v , że $v.d = \infty$. Jak wiemy, relaksacja żadnej krawędzi wychodzącej z takiego węzła nie zmieni nam sytuacji w grafie, a z własności kolejki priorytetowej wiemy, że pozostałe elementy u , które w niej zostały, spełniają $u.d \geq v.d = \infty$.

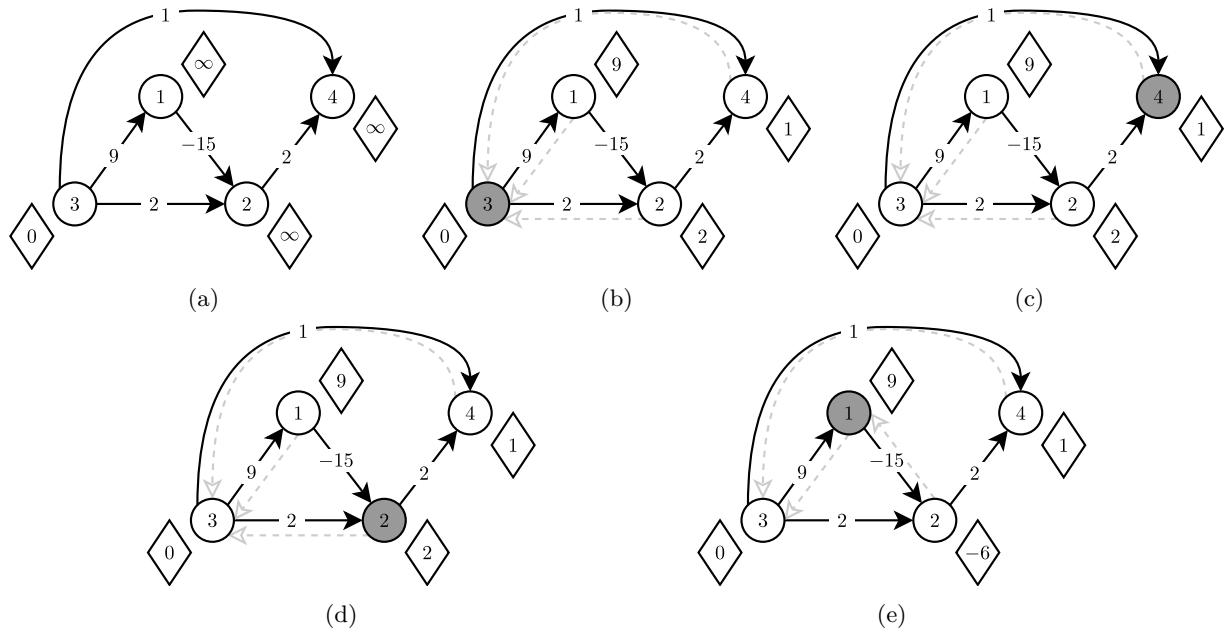
jest już od woli programisty; może on przed rozpoczęciem algorytmu wstawić wszystkie wierzchołki grafu do kolejki (wiersz 3), bądź też wstawiać je na bieżąco w chwili, gdy algorytm potrafi już do nich dojść (wtedy podczas relaksacji podejmowana jest decyzja czy wstawić nowy element do kolejki, czy taki już w kolejce istnieje i należy tylko zmniejszyć jego klucz oraz zadbać o zachowanie prawidłowego porządku w strukturze danych). Bez względu na preferowane rozwiązywanie liczba takich operacji wyniesie dokładnie $|V|$, jako że każdy wierzchołek wstawimy do kolejki (i wyjmiemy go z niej) tylko raz. Reasumując — złożoność algorytmu Dijkstry w uogólnionym przypadku jest ograniczona z góry przez:

$$O(|E| \cdot O(\text{DECREASE-KEY}(Q, v, k)) + |V| \cdot [O(\text{INSERT}(Q, v)) + O(\text{EXTRACT-MIN}(Q))]). \quad (3.1)$$

Wąskim gardłem algorytmu nazywamy taki jego element składowy, który przesądza o złożoności obliczeniowej całego algorytmu, niejednokrotnie go spowalniając. W tym przypadku nie ma wątpliwości, że takim elementem w algorytmie Dijkstry jest zastosowana struktura odpowiedzialna za wykonywanie tych trzech operacji.

3.2.3 Ujemne koszty krawędzi

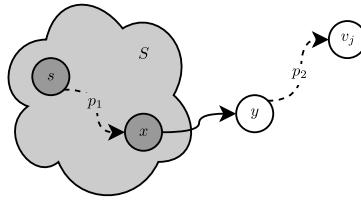
Nim udowodnimy poprawność algorytmu Dijkstry, opierając się w znacznej mierze na [4, 24.6], przeanalizujemy jeszcze prosty przykład (rys. 3.5), w którym dopuścimy wystąpienie krawędzi o ujemnym koszcie i pokażemy, że dla takiego grafu nasz algorytm zwróci błędny wynik.



Rysunek 3.5: Działanie algorytmu Dijkstry w grafie z ujemnymi kosztami krawędzi

Jak powiedzieliśmy, algorytm Dijkstry analizuje wierzchołki grafu $G = (V, E)$ w ścisłe określonym porządku tj. bada zawsze taki węzeł v , którego $v.d$ jest najmniejsze spośród wszystkich pozostałych, jeszcze nie przeanalizowanych węzłów. Na kolejnych rysunkach (rys. 3.5a–e) zaznaczono kolejność przeglądania węzłów jaka wynika z tej własności (za węzeł startowy przyjęliśmy v_3). Widzimy, że algorytm zwrócił błędną ścieżkę dla pary węzłów: v_3 i v_4 (poprawną, najkrótszą ścieżką $v_3 \xrightarrow{*} v_4$ jest ścieżka $P = \langle v_3, v_1, v_2, v_4 \rangle$ o koszcie -4 , nie zaś ścieżka $P' = \langle v_3, v_4 \rangle$) ze względu na wystąpienie w grafie krawędzi o ujemnym koszcie. Problemem tutaj jest oczywiście niepoprawna kolejność w jakiej algorytm otrzymywał informację o wierzchołkach (koszt dotarcia do węzła v_2 okazuje się w rzeczywistości dużo mniejszy dopiero, gdy algorytm wykona relaksacje dla krawędzi wychodzących z wierzchołka v_1 , który ma najwyższy priorytet — jest najbardziej oddalonym węzłem od źródła w sensie sumarycznego kosztu ścieżek, które do niego prowadzą).

3.2.4 Poprawność działania



Rysunek 3.6: **Dowód poprawności algorytmu Dijkstry** Tuż przed wstawieniem wierzchołka v_j do S ten ostatni nie jest pusty. Przerywanymi strzałkami zaznaczono ścieżki p_1 oraz p_2 , które mogą mieć dowolnie dużą liczbę składowych (w skrajnym przypadku $s = x$ i/lub $y = v_j$). Dodatkowo $x \neq y$. Podobny rysunek znajduje się w [4, 674].

Dowód. Założymy indukcyjnie, że dla każdego węzła v_i w momencie dodawania go do zbioru wierzchołków przetworzonych S zachodzi $v_i.d = \delta(s, v_i)$. Pierwszy krok indukcyjny jest oczywisty, gdyż na samym początku zbiór S jest pusty i założenie jest prawdziwe. Pierwszym wierzchołkiem, który jest dodawany do tego zbioru, jest wierzchołek s będący źródłem, którego w oczywisty sposób $s.d = 0 = \delta(s, s)$ (w grafie dla algorytmu Dijkstry założyliśmy brak krawędzi o ujemnych długościach). Przyjmijmy nie wprost, że istnieje w grafie taki wierzchołek v_j dla którego $v_j.d \neq \delta(s, v_j)$ w trakcie jego dodawania do zbioru S i będzie on pierwszym takim wierzchołkiem, jaki będziemy chcieli do tego zbioru dodać. Wiemy, że $v_j \neq s$ oraz, że do takiego wierzchołka na pewno istnieje najkrótsza ścieżka ze źródła s (gdyby tak nie było, to odpowiednio wtedy $v_j.d = s.d = 0 = \delta(s, s) = \delta(s, v_j)$ lub $v_j.d = \delta(s, v_j) = \infty$ — z własności braku ścieżki). Bezpośrednio z poprzednich spostrzeżeń wynika, że w momencie dodawania wierzchołka v_j do zbioru S , ten jest niepusty i zawiera co najmniej jeden element — źródło. Niech istniejąca ścieżka z s do v_j nazywa się P . Rozważmy sytuację taką jaką widać na rysunku 3.6. Rozbiliśmy na nim ścieżkę P na dwie składowe: p_1 i p_2 , gdzie $v_s \xrightarrow{p_1} x \xrightarrow{1} y \xrightarrow{p_2} v_j$ oraz pierwsza z nich składa się tylko z wierzchołków, będących w zbiorze S , zaś druga — tylko z węzłów poza tym zbiorem. Dodatkowo węzeł y jest pierwszym na ścieżce P , który nie należy do tego zbioru. Pokażemy teraz, że w momencie dodawania wierzchołka v_j ($v_j.d \neq \delta(s, v_j)$) do zbioru S zachodzi $y.d = \delta(s, y)$. Aby udowodnić ten fakt wystarczy zauważyc, że skoro wierzchołek v_j był pierwszym takim, dla którego zachodzi $v_j.d \neq \delta(s, v_j)$, to wstawiając do zbioru S wierzchołek x na pewno $x.d = \delta(s, x)$, a ze zbieżności (lemat 2.3.6) mamy, że zachodzi również $y.d = \delta(s, y)$ (w trakcie dodawania wierzchołka x do zbioru S zajdzie relaksacja krawędzi $x \xrightarrow{1} y$, gdzie wcześniej $x.d = \delta(s, x)$).

Ponieważ na naszym rysunku wierzchołek y występuje na ścieżce P wcześniej od wierzchołka v_j i każda krawędź w grafie ma koszt nieujemny, to $\delta(s, y) \leq \delta(s, v_j)$. Z tego wnioskujemy, że:

$$\begin{aligned} y.d &= \delta(s, y) \\ &\leq \delta(s, v_j) \\ &\leq v_j.d \quad (\text{z lematu 2.3.5 o górnym ograniczeniu}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Wiemy jednak, że z własności algorytmu Dijkstry zawsze wybieramy wierzchołek spoza zbioru S o jak najmniejszej wartości atrybutu d — skoro oba wierzchołki (y i v_j) nie należą do zbioru S w chwili wyboru wierzchołka v_j , mamy zagwarantowane, że $v_j.d = \min\{v.d : v \notin S\}$ (w szczególności $v_j.d \leq y.d$). Dodając to ostatnie równanie do szeregu poprzednich nierówności otrzymujemy:

$$y.d = \delta(s, y) = \delta(s, v_j) = v_j.d \tag{3.3}$$

Widzimy, że $v_j.d = \delta(s, v_j)$, co jest sprzeczne z naszym założeniem (dodanie do zbioru S pierwszego wierzchołka v_j o własności $v_j.d = \delta(s, v_j)$). Rozumowanie jest identyczne w przypadku, gdyby na ścieżkach p_1 i/lub p_2 znajdowała się dowolna liczba węzłów, spełniających nasze założenia. Pokazaliśmy zatem, że dla każdego wierzchołka $v \in V$ w momencie jego dodawania do zbioru S , zachodzi $v.d = \delta(s, v)$. Algorytm kończy działanie, gdy w kolejce Q nie ma już żadnych wierzchołków (wszystkie zostały dodane do zbioru S) — to jest w momencie, gdy każdy wierzchołek spełnia $v.d = \delta(s, v)$, co kończy dowód. ♦

3.3 Podstawowe struktury danych

Jak pokazaliśmy wcześniej — efektywność algorytmu Dijkstry w głównej mierze zależy od efektywności implementacji struktury od której będziemy wymagać wykonywania trzech podstawowych operacji: $\text{INSERT}(Q, v)$, $\text{EXTRACT-MIN}(Q)$ i $\text{DECREASE-KEY}(Q, v, k)$. Wyspecjalizowanymi strukturami do ich wykonywania są kolejki priorytetowe, choć — jak mogliśmy się już przekonać — inne struktury, takie jak tablice, listy jednokierunkowe (ang. *Singly-Linked Lists*) czy podwójnie wiązane, także umożliwiają nam poprawną konstrukcję algorytmu Dijkstry. Korzystając z nich, musimy jednak płacić cenę za ich wysoką nieefektywność (dla listy dwukierunkowej, wykorzystanej przy omawianiu algorytmu, wyszukanie najmniejszego elementu kosztuje nas proporcjonalnie do liczby wierzchołków, znajdujących się na niej w trakcie wyszukiwania). Jeżeli spojrzymy na złożoność algorytmu Dijkstry (3.2.2), natychmiastowo uzyskamy górne ograniczenie na poziomie $O(|V|^2)$, co niewiele oddala nas od złożoności tak prostego algorytmu jakim jest algorytm Bellmana-Fora.

Mówiąc o różnych wcieleniach algorytmu Dijkstry, nie sposób jest więc nie poruszyć tematu podstawowych struktur danych jakie możemy wykorzystać do implementacji różnych kolejek priorytetowych, ich właściwości i czasu działania podstawowych operacji, których wykonywanie dane struktury umożliwiają — w szczególności $\text{INSERT}(Q, v)$, $\text{EXTRACT-MIN}(Q)$ i $\text{DECREASE-KEY}(Q, v, k)$. W niniejszym rozdziale omówimy takie struktury jak: kopce binarne (w uogólnionym spojrzeniu na kopce R -arny), kopce Fibonacciego, kolejki z przepełnieniem oraz szereg innych pomysłów opartych o kontenery, zwane dalej kubelkami (ang. *buckets* [2, 4.6, 4.8]).

3.4 Struktury oparte na kopcach

Jedną ze struktur, przystosowanych do operacji charakterystycznych dla kolejki priorytetowej, jest kopiec (ang. *heap*). Jego najogólniejszą własnością jest to, że operacja, zwracająca najmniejszy (lub największy) element, który znajduje się w kopcu, działa w czasie stałym i polega na odwołaniu się do szczytu takiego kopca. Kopce to szczególne przypadki drzew, gdzie pomiędzy rodzicem a potomkami zwykle jest ustalona stała relacja (w przypadku który nas interesuje, klucze przechowywane przez potomków węzła v powinny być zawsze większe od klucza rodzica: $v.d \leq v_i : v_i.\Pi = v$ — właściwość kopca typu MIN). Przedstawimy dwa, powszechnie znane rodzaje kopców: zwykły kopiec R -arny (uogólnioną wersję bardziej znanej jego wersji binarnej), do którego implementacji wykorzystamy tablicę, oraz kopiec Fibonacciego, który — jak się okaże — pomimo swojej teoretycznej przewagi w szybkości wykonywania poszczególnych operacji, w praktyce często działa wolniej od wspomnianej wcześniej wersji, znacznie prostszej w implementacji.

3.4.1 Kopiec R-arny

Kopiec R -arny jest uogólnieniem kopca binarnego — podczas gdy dla tego drugiego każdy rodzic może posiadać do 2 potomków, w pierwszym przypadku takich węzłów rodzic może mieć od 0 do R , co zauważalnie zmniejsza wysokość takiego kopca (kosztem jego szerokości). Poniższa tabela przedstawia koszty poszczególnych operacji dla kopca binarnego i R -arnego:

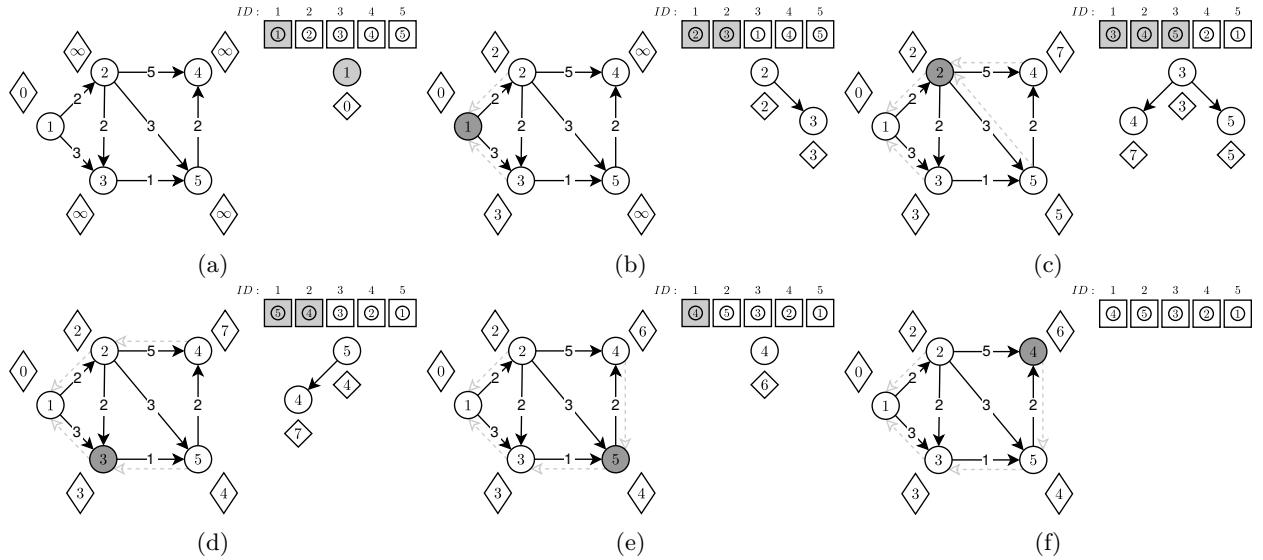
Operacja	Kopiec	
	binarny	R -arny
$\text{INSERT}(Q, v)$	$O(\log(n))$	$O(\log_R(n))$
$\text{EXTRACT-MIN}(Q)$	$O(\log(n))$	$O(R \cdot \log_R(n))$
$\text{DECREASE-KEY}(Q, v, k)$	$O(\log(n))$	$O(\log_R(n))$

Implementacja

Algorytm wyszukiwania najkrótszych ścieżek oparty na strukturze R -arnego kopca jest jedynym algorytmem, który nie wymaga od nas tworzenia dodatkowych struktur. Jak dobrze wiemy, jedną z właściwości

kopców jest ich zdolność do pracy w miejscu tj. nie wykorzystywania dodatkowej pamięci podczas działania. Pod pojęciem naszego grafu $G = (V, E)$ kryje się tablica $tab[1 \dots |V|]$ przechowującą wierzchołki indeksowane ich identyfikatorami ($tab[i] = v_i$) oraz listy sąsiedztwa, które są przyporządkowane do każdego z takich węzłów. Aby skorzystać z właściwości kopca, będziemy chcieli zbudować jego strukturę bezpośrednio na wspomnianej tablicy węzłów tj. kopiec o k elementach będziemy chcieli przedstawić jako tablicę $vertices[1 \dots k] \subseteq tab[1 \dots |V|]$. W takiej sytuacji, jeżeli dowolny wierzchołek v znajduje się na pozycji $i \leq k$ w tablicy tab , to znaczy, że w którymś momencie został on wstawiony do naszej kolejki priorytetowej i nie opuści jej, dopóki nie stanie się on najmniejszy spośród tych k elementów. Aby jednak nie stracić informacji o pierwotnym rozmieszczeniu wierzchołków w tablicy tab , będziemy chcieli wprowadzić pomocniczą tablicę $heapIDArray[1 \dots |V|]$, której wartości będą odzwierciedlać faktyczne rozmieszczenie wierzchołków w tab po modyfikacjach ($tab[heapIDArray[i]] = v_i$) jakich dopuści się na niej nasza kolejka priorytetowa (indeksami tablicy tab pierwotnie były identyfikatory wierzchołków, a ich nie możemy zmieniać).

Zasada działania takiego kopca nie różni się niczym od zastosowania takiej samej struktury do posortowania n liczb, gdzie rozmiar kopca monotonicznie rośnie w trakcie jego budowania, a następnie maleje w czasie działania takiego algorytmu. W naszym przypadku liczba jego elementów może się zwiększać jak i zmniejszać w dowolnej kolejności — jeżeli się zwiększa, to ostatni element w części tablicy należącej do powiększonego kopca zamieniamy z elementem, który chcemy faktycznie do niego wstawić, następnie „wypychając” go ku górze (analogiczna procedura jest wykonywana podczas powiększania kopca w czasie jego budowania dla algorytmu sortowania). W przypadku odwrotnym (jeżeli rozmiar kopca maleje) — zachowanie, w porównaniu z algorytmem sortującym, jest identyczne.



Rysunek 3.7: **Działanie algorytmu Dijkstry w oparciu o kopiec R-arny** (a) Sytuacja po zainicjalizowaniu grafu G przez INIT-GRAH ze źródłem v_1 . W tablicy na szaro zaznaczone są elementy należące do kopca, przedstawionego poniżej. Niech k oznacza rozmiar kopca, tablica tab jest indeksowana od 1. (b) Z kopca zostaje usunięty węzeł v_1 ($k = 0$). W wyniku relaksacji na kopiec zostaje przeniesiony węzeł v_2 ($k = 1$ i $tab[k] = v_2$), zaś na stare miejsce wstawionego węzła zostaje przeniesiony węzeł v_1 . Analogicznie na koniec kopca wstawiany jest v_3 ($k = 2$, $tab[k] = v_3$), w wyniku czego $tab[3] = v_1$. (c) Z kopca zostaje pobrany węzeł v_2 , a na szczyt stosu — przeniesiony ostatni element w kopcu (v_3). W wyniku relaksacji krawędzi wychodzących z pobranego węzła do kopca zostają dodane węzły: v_4 i v_5 . Tablica tab zmienia się odpowiednio: $\{3\} [2] [1] [4] [5] \rightarrow \{3\} \{4\} [1] [2] [5] \rightarrow \{3\} \{4\} \{5\} [2] [1]$, gdzie w klamrach „{}” zostały zaznaczone węzły znajdujące się w kopcu. Żadna operacja nie narusza własności kopca. (d) Wybrano kolejny węzeł ze szczytu stosu: v_3 , zamieniono go z ostatnim elementem w kopcu i zmniejszono jego rozmiar ($k = 2$). Zachowana jest własność kopca. W wyniku relaksacji zostają zmienione atrybuty: $v_5.\Pi = v_3$ i $v_5.d = 4$. (e) Z kopca zostaje zabrany jego najmniejszy element: v_5 i wykonywana jest operacja RELAX dla krawędzi z niego wychodzących. Na szczyt kopca zostaje wstawiony jego ostatni element ($k = 1$). Własność kopca jest zachowana. (f) Po wykonaniu analogicznych kroków dla ostatniego węzła w kopcu (v_4), algorytm kończy działanie.

Złożoność obliczeniowa

Uzupełniając wzór 3.2.2 na ogólną złożoność generycznego algorytmu Dijkstry z wykorzystaniem kolejek priorytetowych dla kopców R -arnych, natychmiast otrzymujemy $O(m \cdot \log_d(n) + n \cdot [\log_d(n) + d \cdot \log_d(n)]) = O(m \cdot \log_d(n) + n \cdot d \cdot \log_d(n))$ (dla przejrzystości zapisu przyjęliśmy $n = |V|$ i $m = |E|$). Dla kopca binarnego mamy: $O(m \cdot \log(n) + n \cdot \log(n)) = O(m \cdot \log(n))$ dla $m \geq n$ (stałe wyeliminowaliśmy). Przypomnijmy sobie, że naiwna implementacja algorytmu Dijkstry miała złożoność $O(m + n^2) = O(n^2)$. Łatwo zauważyc, że dla bardzo gęstych grafów (gdzie $m = \Omega(n^2)$) nasz nowy algorytm asymptotycznie staje się wolniejszy nawet od wspomnianej, naiwnej implementacji. Sytuacja jednak zmienia się na korzyść kopców, gdy liczba krawędzi w grafie jest z góry ograniczona przez $O\left(\frac{n^2}{\log(n)}\right)$ (wtedy $O(m \cdot \log(n)) \leq O\left(\frac{n^2}{\log(n)} \cdot \log(n)\right) = O(n^2)$).

Z kolei dla kopców, których arność jest większa ($d \geq 2$), mamy: $O(m \cdot \log_d(n) + n \cdot d \cdot \log_d(n))$. Z tego bezpośrednio wynika, że optymalną wartością parametru d jest $\max\{2, \lceil \frac{m}{n} \rceil\}$, dla którego zrównują nam się obie strony sumy otrzymanej wcześniej złożoności ($n \cdot \frac{m}{n} \cdot \log_d(n) = m \cdot \log_d(n)$). Otrzymaliśmy złożoność algorytmu Dijkstry opartego o kopce R -arne, który znów — w zależności od sieci dla której go zastosujemy, będzie porównywalny albo do podstawowej, naiwnej implementacji tego samego algorytmu (dla sieci gęstych, gdzie $m = \Omega(n^2)$ mamy: $O(m \cdot \log_d(n)) = O(n^2 \cdot \log_{\frac{n^2}{n}}(n)) = O(n^2 \cdot \log_n(n)) = O(n^2)$), albo do algorytmu opartego na kopcu binarnym (w przypadku, gdy sieć jest bardzo rzadka). Dla tej drugiej możliwości otrzymujemy natychmiastowo złożoność $O(n \cdot \log(n))$ dla $m = O(n)$ [1, 2.2].

Co więcej, jeżeli założymy $m = \Omega(n^{1+\epsilon})$ dla $\epsilon > 0$ i $d = \lceil \frac{m}{n} \rceil > 2$, to będziemy mogli wyprowadzić następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned}
 O(m \cdot \log_d(n)) &= O\left(m \cdot \frac{\log(n)}{\log(d)}\right) \quad (\text{zamiana podstawy logarytmu}) \\
 &= O\left(m \cdot \frac{\log(n)}{\log(n^\epsilon)}\right) \quad \left(d = \lceil \frac{m}{n} \rceil = \frac{n^{1+\epsilon}}{n}\right) \\
 &= O\left(m \cdot \frac{\log(n)}{\epsilon \cdot \log(n)}\right) \quad (\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)) \\
 &= O\left(\frac{m}{\epsilon}\right) \\
 &= O(m) \quad \left(\frac{1}{\epsilon} \text{ jest stałą.}\right)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Jeśli $\epsilon = 1$, to $m = \Omega(n^2)$ i mamy przypadek jaki omawialiśmy wyżej dla grafu pełnego. Widzimy więc, że w zależności od gęstości grafu te same algorytmy mogą zachowywać się zupełnie inaczej, a co za tym idzie — nie jesteśmy w stanie wskazać jednej implementacji algorytmu wyszukiwania najkrótszych ścieżek, która działałaby równie szybko (w porównaniu do reszty algorytmów) dla każdej z możliwych sieci.

Drzewa

Strukturami bardzo podobnymi do kopców są drzewa K -arne [3, 3.1] — należy wręcz powiedzieć, że kopce są **pełnymi drzewami** (ang. *complete tree*), podczas gdy struktura zwykłego drzewa jest mniej rygorystyczna. Pełnym drzewem K -arnym (jakim jest kopiec tej samej arności) nazywamy takie drzewo, na poziomach którego (poza ostatnim) wszystkie węzły mają dokładnie K potomków. W przypadku drzew K -arnych każdy węzeł może mieć co najwyżej K węzłów potomnych co nie musi wcale oznaczać, że stworzone tak drzewo jest drzewem pełnym. Obie struktury (kopce i drzewa) da się zaimplementować przy wykorzystaniu zwykłych tablic, choć oczywiście pomiędzy kolejnymi elementami takiej tablicy mogą pojawić się miejsca puste, gdy któryś z węzłów drzewa ma mniej niż K potomków. Inne są także założenia samych struktur: każdy węzeł w drzewie K -arnym posiada tyleż potomków w ściśle zdefiniowanym porządku (niemalejącym lub nierosącym), zaś reguły, odnoszące się do kopców nic o takim porządku nie mówią — jedyna własność, która musi zostać spełniona dla węzła, to przewyższanie jego priorytetem wszystkich swoich potomków (bądź posiadanie najmniejszego priorytetu pośród nich w przypadku kopca typu *min*). Bezpośrednią konsekwencją tych własności są różne zastosowania wymienionych struktur danych:

Operacja	Drzewo		Kopiec	
	binarne ⁴	K -arne	binarny	R -arny
INSERT (Q, v)	$O(\log(n)) / O(1)$	$O(K \cdot \log_K(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log_R(n))$
EXTRACT-MIN (Q)	$O(\log(n)) / O(n)$	$O(\log_K(n))$	$O(\log(n))$	$O(R \cdot \log_R(n))$
DECREASE-KEY (Q, v, k)	$O(\log(n)) / O(1)$	$O(K \cdot \log_K(n))$	$O(\log(n))$	$O(\log_R(n))$
SEARCH (Q, k)	$O(\log(n)) / O(n)$	$O(K \cdot \log_K(n))$	$O(n)$	$O(n)$.

Strukturę drzew stosuje się dla problemów, gdzie nacisk jest kładziony na wyszukiwanie elementów po ich właściwościach, zaś wybieranie minimum jest sprawą drugorzędną. Odwrotna sytuacja występuje w przypadku kopków, które w żaden sposób nie wspierają operacji wyszukiwania — sprowadzają ją do przeszukania całej tablicy reprezentującej kopiec. Innymi słowy: drzewa K -arne nie są tak dobrze przystosowane do pełnienia roli kolejki priorytetowej jak kopce. Przywołując wzór na ogólną złożoność algorytmu Dijkstry (3.2.2):

$$O(m \cdot O(DK(Q, v, k)) + n \cdot [O(I(Q, v)) + O(EM(Q))]), \quad (3.5)$$

i porównując czasy wykonywanych operacji, dojdziemy do następujących złożoności:

- $O((n+m) \cdot \log(n))$ dla zbalansowanych drzew przeszukiwań binarnych,
- $O(m+n^2) = O(n^2)$ dla niezbalansowanych drzew przeszukiwań binarnych,
- $O((n+m) \cdot K \cdot \log_K(n))$ dla zbalansowanych drzew K -arnych,

gdzie złożoności operacji dla algorytmu wyszukiwania najkrótszych ścieżek w oparciu o kopce policzyliśmy w poprzednim podrozdziale i wynosiły one: $O((n+m) \cdot \log(n))$ i $O(m \cdot \log_d(n))$ — odpowiednio dla kopków binarnych i R -arnych. Na podstawie powyższego zestawienia możemy podejrzewać, że struktura zbalansowanych drzew binarnych jest w pewnym stopniu konkurencyjna dla kopków tej samej arności⁵, jednak w tej analizie nie braliśmy w ogóle pod uwagę stałych czynników jakie pojawiają się podczas wykonywania wszystkich przeanalizowanych operacji, a które przemawiają na niekorzyść zbalansowanych drzew przeszukiwań — te struktury (takie jak Drzewo Czerwono-Czarne czy Adelsona-Velskiego-Landisa) są znacznie bardziej złożone, przez co wymagają nie tylko więcej ilości pamięci na przechowywanie danych, ale też wykazują się mniejszą efektywnością niż prostsze struktury o tych samych asymptotycznych czasach działania. Jak się przekonamy w następnym rozdziale, prawidłowość ta dotyczy również kopków Fibonacciego, które pomimo lepszych wyników teoretycznych, nie sprawdzą się jako kolejka priorytetowa dla algorytmu Dijkstry właśnie ze względu na możliwość zastąpienia tej struktury przez dużo prostsze i mniej skomplikowane rozwiązania.

3.4.2 Kopiec Fibonacciego

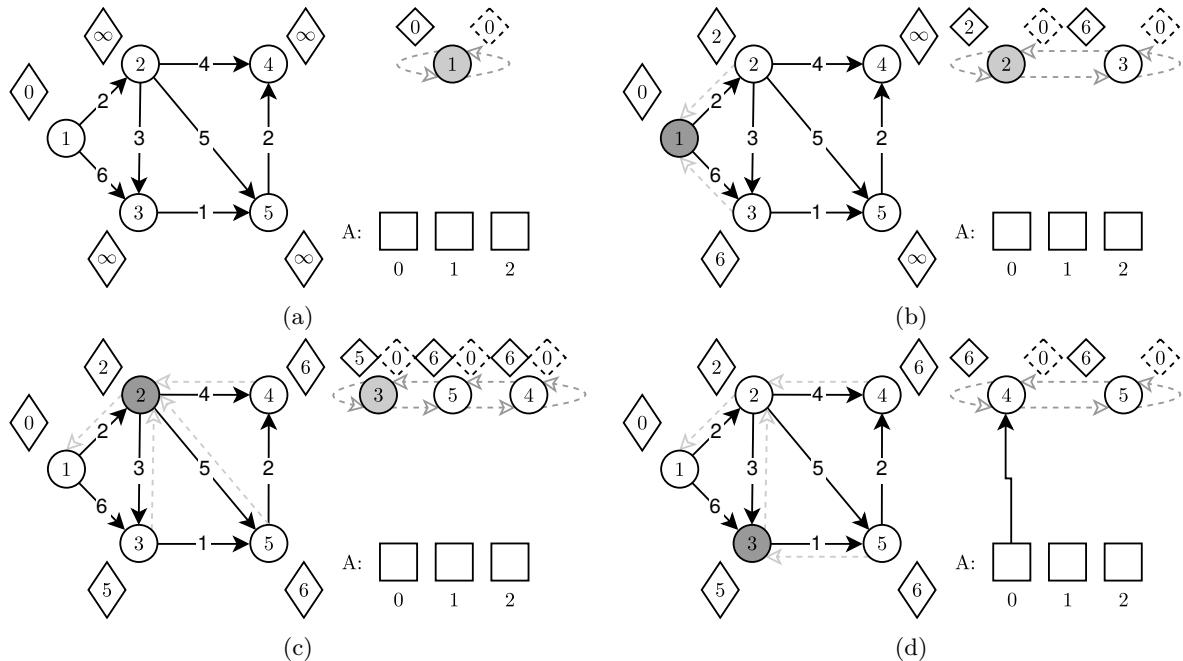
Przedstawiona w tym rozdziale implementacja algorytmu Dijkstry, jako kolejkę priorytetową będzie wykorzystywać jedną z bardziej złożonych struktur danych jakie będziemy omawiać — kopce Fibonacciego. Zaletą jej wykorzystania jest **amortyzacyjnie** [4, 17] lepszy czas wykonywania się dwóch podstawowych operacji, wykorzystywanych podczas działania algorytmu wyszukiwania najkrótszych ścieżek — INSERT (Q, v) i DECREASE-KEY (Q, v, k) [4, 514].

Dodatkowo, aby jeszcze przyśpieszyć działanie podstawowej wersji implementacji kopca Fibonacciego, możemy dostosować ją do właściwego środowiska, w którym to oparta na kopcu kolejka priorytetowa będzie wykorzystywana. Pierwszą rzeczą jaką możemy zauważać, to sposób zmiany liczby elementów, które znajdują się na kopcu — w odróżnieniu od algorytmu wyszukiwania najkrótszych ścieżek dla danego grafu $G = (V, E)$, gdzie liczba węzłów jest z góry znana, dla ogólnego przypadku nie jesteśmy w stanie nic powiedzieć o maksymalnej liczbie elementów jakie znajdą się w kopcu. Konsekwencją tej niewiedzy jest konieczność rezerwowania dodatkowej pamięci dla pomocniczych tablic za każdym razem, gdy wykonujemy operację EXTRACT-MIN (Q). Choć rozmiar takich tablic jest z góry znany i wynosi on $\lfloor \log_\Phi(n) \rfloor$, to (bez

⁴Przedstawiono czasy dla odpowiednio: drzew zbalansowanych (takich jak RBT, AVL) i drzew niezbalansowanych, dla których pesymistyczna wysokość wynosi $O(n)$.

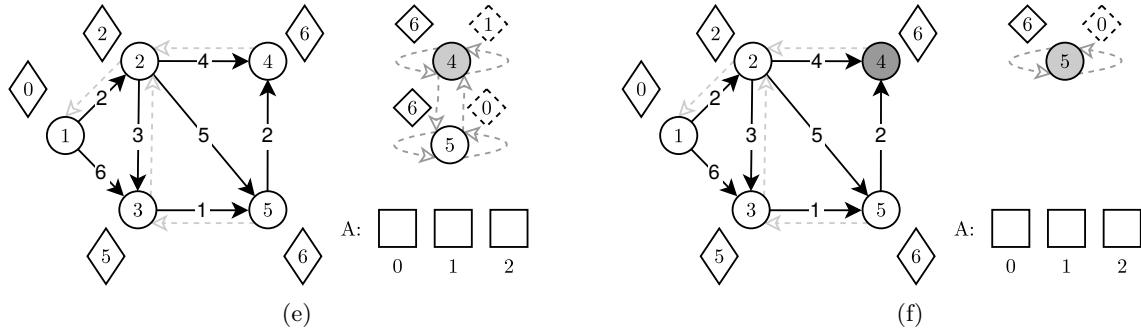
⁵ Jeżeli byśmy chcieli uzyskać dla zbalansowanych drzew K -arnych takie samo oszacowanie na asymptotyczną złożoność obliczeniową, musielibyśmy przyjąć $K = \frac{m}{m+n}$ (wtedy $O((n+m) \cdot K \cdot \log_K(n)) = O(m \cdot \log_K(n))$), lecz nie możemy mieć struktury, której współczynnik rozgałęzienia (d) jest mniejszy od dwóch (przypadek drzewa binarnego)

znajomości maksymalnej wartości parametru n) nie jesteśmy w stanie tego faktu w jakikolwiek sposób wykorzystać⁶. Inaczej jest w przypadku, gdy mamy dany graf G , którego liczba wierzchołków wynosi dokładnie $|V|$, co przekłada się na maksymalną liczbę elementów, jakie jednocześnie mogą znaleźć się na kopcu Fibonacciego — wówczas z każdą operacją EXTRACT-MIN (Q) korzystamy z tej samej tablicy pomocniczej $A[1 \dots \lfloor \log_{\Phi}(n) \rfloor]$, którą „czyścimy” pod sam koniec procedury, budując — zgodnie z podstawowym algorytmem — nową listę korzeni kopca Fibonacciego (iterując po całej tablicy i dodając trzymane w niej drzewa ukorzenione do głównej listy, zaś elementy samej tablicy — zerując [4, 523–524]). Inną bardziej oczywistą modyfikacją jest wykorzystanie faktu, iż każda lista która znajduje się w wewnętrznej strukturze kopca, jest cykliczną listą dwukierunkową, co znów (w przypadku wykonywania procedury EXTRACT-MIN (Q)) pozwoli nam zaoszczędzić trochę czasu podczas pierwszych kroków tego algorytmu — zamiast usuwać najmniejszy element v z listy korzeni i iteracyjnie przepinać potomków tego węzła do wspomnianej listy, możemy „rozerwać” obie listy w wybranym przez nas punkcie, a następnie połączyć w czasie $O(1)$. Usuwanie powiązań między potomkami usuwanego węzła możemy tymczasowo zignorować (podstawowa wersja algorytmu podczas przepinania węzłów u , takich że $u.\Pi = v$ ustawia te parametry na wartość **NULL**). Podkreślić należy słowo „tymczasowo”, gdyż ta czynność zostanie wykonana w momencie rekonstrukcji kopca Fibonacciego z drzew przechowywanych w tablicy $A[1 \dots \lfloor \log_{\Phi}(n) \rfloor]$. Wiedząc, że każdy jej element przechowuje wskaźnik do przeszłego węzła na liście korzeni, będziemy dla każdego elementu z tablicy A dodatkowo niszczyć wskazanie tego węzła na jego rodzica, którego nie zniszczyliśmy wcześniej.



Rysunek 3.8: **Działanie algorytmu Dijkstry w oparciu o kopiec Fibonacciego** **(a)** Sytuacja po zainicjalizowaniu grafu $G = (V, E)$ przez INIT-GRAF ze źródłem $v_s.id = 1$. Przerwanymi strzałkami odwzorowane są relacje między węzłami na kopcu Fibonacciego. W rombach od lewej dla każdego węzła v kolejno przedstawione są jego atrybuty: $v.d$ i $v.deg$. Szarym kolorem zaznaczono węzeł, który aktualnie jest minimalnym węzłem w kopcu. **(b)** Usunięto z kopca jego najmniejszy węzeł: v_1 . W wyniku relaksacji do listy korzeni kopca Fibonacciego zostały dodane węzły v_2 — ustawiony jako węzeł minimalny w momencie, gdy był on jedynym elementem na kopcu — oraz v_3 . **(c)** Wykonano relaksację dla następnego (wyjętego z kopca) węzła: v_2 . W kopcu pozostały tylko dwa wierzchołki v_3 , który stał się tym samym jego najmniejszym elementem. W wyniku relaksacji do kopca zostały dodane nowe elementy: v_5 oraz v_4 . **(d)** Usunięto najmniejszy węzeł z kopca: v_3 . Po tej operacji na kopcu zostało więcej niż jeden element, więc wykonujemy operację CONSOLIDATE (Q). Przeglądamy kolejno węzły v na liście korzeni i jeżeli $A[v.deg] = \text{NULL}$ (zaczynamy od węzła v_4 , $v_4.deg = 0$), to zapamiętujemy w $A[v.deg]$ aktualnie badany korzeń drzewa v .

⁶ Pełen dowód takiego oszacowania znajduje się w [4, 19.4].



Rysunek 3.8: (e) W przypadku, gdy dla kolejnego (wedle porządku, w jakim węzły występują na liście korzeni) skanowanego elementu (v_5) zachodzi warunek przeciwny ($A[v.deg] \neq \text{NULL}$), tworzymy nowe drzewo typu min , łącząc to o korzeniu w aktualnie badanym wierzchołku z drzewem, na którego korzeń wskazuje element $A[v.deg]$. Korzeniem nowego drzewa zostaje węzeł o mniejszym kluczu, zaś drzewo mające korzeń w drugim węźle, staje się potomkiem tego pierwszego. W tym przypadku oba korzenie drzew (v_4 i v_5) mają te same priorytety ($v_4.d = v_5.d$) — korzeniem nowego drzewa staje się wcześniej badany węzeł v_4 , a jego stopień zostaje zwiększony o 1. Korzeń nowo powstałego drzewa jest zapamiętywany w $A[v_4.deg]$ (jeśli przed tym krokiem zachodzi $A[v.deg] \neq \text{NULL}$, gdzie $v.deg$ oznacza stopień korzenia nowego drzewa, to operacja d-e powtarza się). (f) Z kopca usuwany jest kolejny wierzchołek o najmniejszej wartości atrybutu d . Brak jest dla niego krawędzi wychodzących. Na szczytzie kopca zostaje ostatni węzeł, który staje się jego najmniejszym elementem. Następny krok opróżnia zawartość kopca, wykonuje relaksację krawędzi wychodzących z węzła v_5 i kończy algorytm.

Złożoność obliczeniowa

Przyjrzyjmy się na początek złożonościom poszczególnych operacji, wykorzystywanych w algorytmie Dijkstry, dla wcześniej omawianych kopków — binarnych i R -arnych — oraz dla nowo przedstawionej struktury.

Operacja	Kopiec		
	(koszt pesymistyczny)	(koszt zamortyzowany)	
	binarny	R -arny	Fibonacciego
INSERT (Q, v)	$O(\log(n))$	$O(\log_R(n))$	$O(1)$
EXTRACT-MIN (Q)	$O(\log(n))$	$O(R \cdot \log_R(n))$	$O(\log(n))$
DECREASE-KEY (Q, v, k)	$O(\log(n))$	$O(\log_R(n))$	$O(1)$

Tablica 3.1: **Złożoności poszczególnych operacji, charakterystycznych dla kolejek priorytetowych.**

Przytaczając raz jeszcze ogólny wzór na złożoność obliczeniową generycznego algorytmu Dijkstry (3.4.1), natychmiast otrzymamy następującą złożoność: $O(m \cdot O(\text{DK}(Q, v, k)) + n \cdot [O(\text{I}(Q, v)) + O(\text{EM}(Q))]) = O(m \cdot O(1) + n \cdot [O(1) + O(\log(n))]) = O(m + n \cdot \log(n))$.

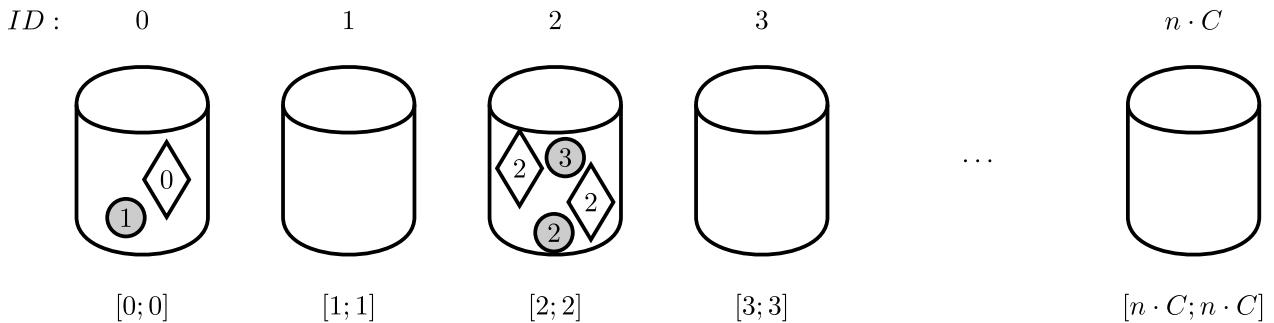
Jeszcze raz stanowczo należy podkreślić, że w przypadku analizy złożoności operacji dla kopków Fibonacciego posłużyliśmy się kosztami zamortyzowanymi — oznacza to, że w tabeli 3.1 dla ostatniego z kopków podaliśmy tylko oczekiwany czas wykonania danych operacji, nie ich złożoności, jakie wynikłyby z analizy najgorszego przypadku.

3.5 Struktury oparte na kubełkach

Analizując wszystkie algorytmy, które do tej pory omawialiśmy, możemy dojść do wniosku, że każdy kolejny do poprawnego działania wykorzystywał coraz to bardziej skomplikowaną strukturę danych (od algorytmu Bellmana-Forda, który nie korzystał z żadnych dodatkowych struktur, przez proste uporządkowanie wierzchołków w grafie dla algorytmów opartych na sortowaniu topologicznym, wykorzystanie prostych struktur danych w charakterze kolejek priorytetowych takich jak listy i tablice, aż po te bardziej złożone). W tych ostatnich wykorzystywaliśmy szeroki wachlarz struktur danych ogólnego przeznaczenia, które wykazywały własności odpowiednie kolejkom priorytetowym. W tym rozdziale przyjrzymy się rodzinie modyfikacji algorytmów Dijkstry opartych na **kubełkach** (ang. *buckets*) oraz strukturach z nich zbudowanych. Przestaniemy także opierać naszą analizę złożoności obliczeniowej o trzy podstawowe operacje $\text{INSERT}(Q, v)$, $\text{EXTRACT-MIN}(Q)$ i $\text{DECREASE-KEY}(Q, v, k)$ na rzecz bardziej indywidualnej analizy każdego z przedstawionych rozwiązań. O ile w poprzednich podejściach do generycznego algorytmu Dijkstry i jego modyfikacji większość czasu poświęciliśmy tylko na zamianach jednych struktur kolejek priorytetowych na drugie (co pozwalało nam na taką analizę), to w przypadku niżej omawianych implementacji będziemy niejednokrotnie chcieli zmienić podstawowy szkielet algorytmu, jaki przedstawiliśmy jakiś czas temu (pseudokod 9 w podrozdziale 3.2.1).

3.5.1 Pierwsze podejście

Pierwszą, naiwną próbą zrezygnowania z tradycyjnych kolejek priorytetowych będzie stworzenie tablicy o liczbie elementów odpowiadającej wszystkim możliwym kluczom wierzchołków, jakie mógł wygenerować algorytm Dijkstry w momencie wstawiania danego węzła do jednej z wybranych implementacji kolejki priorytetowej. Mówiąc prościej, nasza tablica będzie mieć taką liczbę elementów, by jej ostatni indeks odpowiadał odległości najdłuższej z możliwych ścieżek dla danego grafu $G = (V, E)$. Zdefiniujmy $C = \max\{c_{ij} : e_{ij} \in E\}$ jako największy koszt ścieżki występującej w grafie G . Wiedząc, że najdłuższa ścieżka bez cykli (w sensie liczby składowych) ma co najwyżej $|V| - 1$ krawędzi, możemy oszacować z góry liczbę potrzebnych elementów tablicy przez $(n - 1) \cdot C + 1 \leq n \cdot C + 1$ (ostatni szacunek robimy tylko dla własnej wygody, gdyż taka sytuacja, gdzie na ścieżce, składającej się z $|V| - 1$ krawędzi znajdują się same takie o koszcie równym C , najprawdopodobniej się nie zdarzy i rzeczywisty koszt najdłuższej takiej ścieżki będzie z reguły dużo mniejszy — dla tej skali problemu spieranie się o jedności nie ma większego sensu).



Rysunek 3.9: **Struktura oparta na kubełkach.** Pod każdym kubełkiem zaprezentowany jest indeks elementu tablicy, w jakim się znajduje, oraz jego zakres. Do kubełka należą te węzły v , których $v.d$ znajduje się w zakresach, które są przypisane do każdego z kubełków (wartości pomiędzy „[]”).

Samo zaimplementowanie tablicy, indeksowanej od 0 do $n \cdot C$ oczywiście nie zagwarantuje nam jeszcze poprawności działania algorytmu polegającego na przeszukiwaniu (w kolejności rosnących indeksów) elementów tablicy w celu znalezienia węzła v o najmniejszej wartości etykiety d i zwróceniu go jako wynik operacji $\text{EXTRACT-MIN}(Q)$. Musimy rozważyć także sytuację, w której dwa lub więcej węzłów w trakcie działania algorytmu okazuje się być równoodległymi od źródła. Stąd pojawia się pojęcie **kubełków**, które będziemy traktować jako kontenery (najczęściej zaimplementowane jako listy dwukierunkowe) z możliwymi

operacjami IS-EMPTY (B), EXTRACT-HEAD (B), EXTRACT-TAIL (B) oraz EXTRACT-MIN (B), a które będą przechowywać wierzchołki grafu o zadanych właściwościach. Właściwości kubelków będą różniły się w zależności od algorytmu [11, 79–81]. W tym przypadku będziemy mieli tablicę składającą się z $n \cdot C + 1$ kubelków, gdzie każdy z nich będzie mógł zawierać tylko takie węzły v , których $v.d = k$, gdzie k to numer indeksu w naszej tablicy (rysunek 3.9).

Algorytm po kolej skanuje kubelki (w kolejności od tego o najniższym indeksie) i dla napotkanych w nich wierzchołków wykonuje relaksację⁷. W naszym grafie nie ma krawędzi o ujemnym koszcie (pokazaliśmy, że dla takiego przypadku algorytm Dijkstry nie działa), więc wykonując operację relaksacji dla dowolnego węzła v_i w kubelku o indeksie k ($v_i.d = k$) dla wszystkich krawędzi z niego wychodzących $e : v_i \xrightarrow{1} v_j$, mamy pewność, że po jej wykonaniu dla każdego węzła v_j zachodzi $v_i.d \leq v_j.d$. To zaś gwarantuje nam, że analizując kubelki w kolejności jaką podaliśmy, nie pominiemy żadnego z węzłów należących do grafu G^8 .

Algorytm działa w czasie $O(m + n \cdot C)$.

- W najgorszym przypadku musimy przeskanować $O(n \cdot C)$ kubelków.
- Operację relaksacji w najgorszym możliwym przypadku wykonamy za każdym razem i każdorazowo spowodujemy przepięcie węzła u z jednego kubelka do drugiego (co między listami dwukierunkowymi zrobimy w czasie stałym).

3.5.2 Z przepełnieniem

Jak nietrudno zauważyc, poprzednie podejście wykorzystywało ogromnie dużo pamięci na dodatek nie zapewniając, że algorytm będzie działał dostatecznie szybko. Stała C , którą ustalaliśmy na początku algorytmu, może być dowolnie duża, w szczególności przekraczać n — otrzymalibyśmy wtedy algorytm nie tyle co o dużej złożoności pamięciowej, ale także czasowej. W tym podrozdziale, aby zaradzić pierwszemu z problemów, ograniczymy liczbę kubelków z $n \cdot C$ do $a + 1$, gdzie za a przyjmiemy dowolną liczbę mniejszą od $C + 1$. Dodatkowo wprowadzimy specjalny kubelek, do którego będą trafiać wszystkie takie węzły, których dystans do źródła będzie większy niż zakres ostatniego z a kubelków. Innymi słowy ograniczymy ich liczbę z pierwszego algorytmu, pozostawiając a pierwszych kubelków, zaś wszystkie następne następując jednym, o potencjalnie nieskończonym zakresie $[A + a; \infty]$, gdzie początkowo $A = 0$. $(a + 1)$ 'y kubelek będziemy nazywać przepełnieniem (ang. *Overflow bucket*).

Pseudokod 10: DKM (G, s)

```

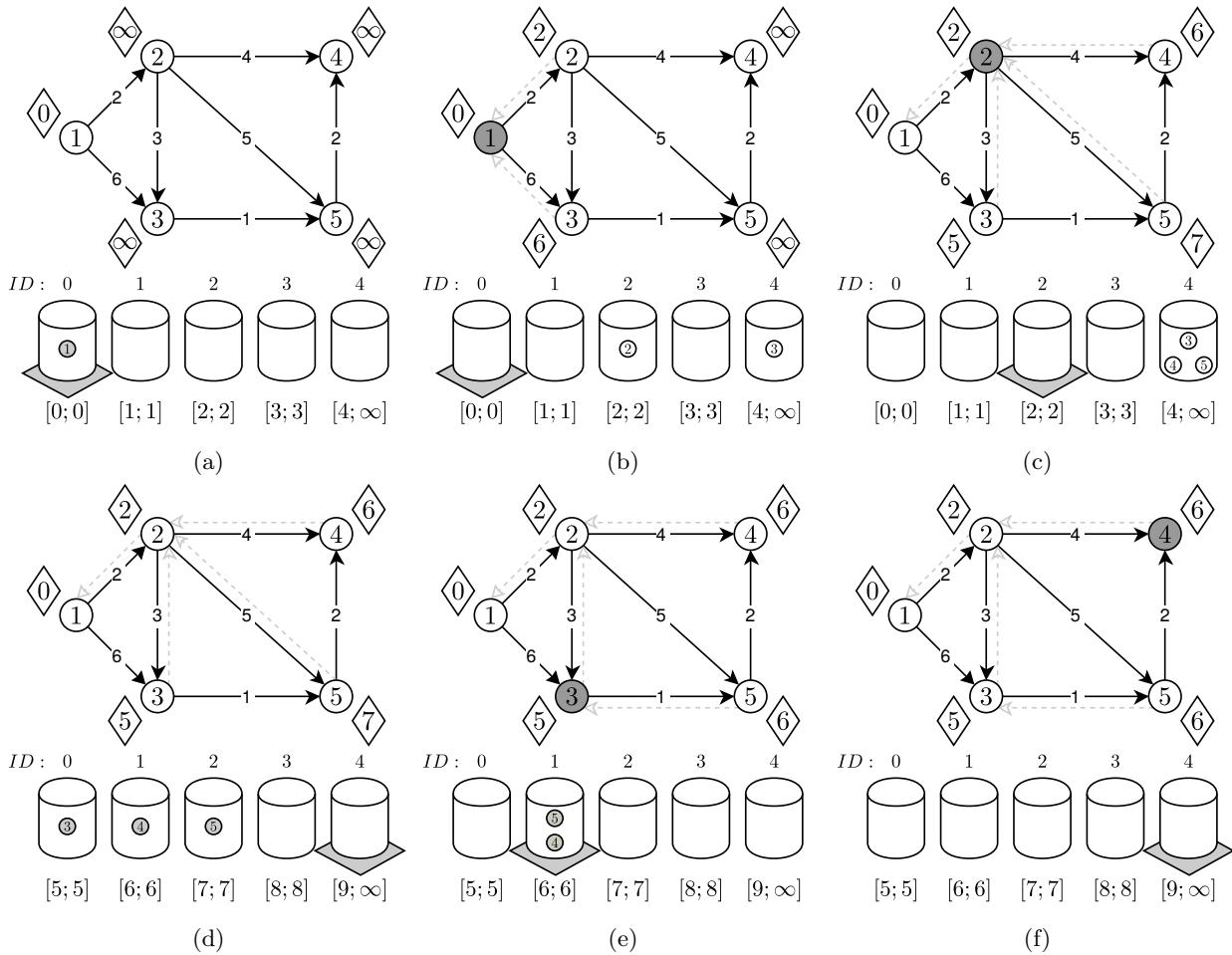
1 begin
2   foreach  $i \in \{0, \dots, a - 1\}$  do
3      $B[i] \leftarrow$  pusty kubelek o zakresie  $[i; i]$ 
4    $B[a] \leftarrow$  Overflow bag
5   while Wszystkie kubelki nie są puste do
6     for  $i = 0$  to  $a - 1$  do
7       foreach  $v_j \in B[i]$  do
8         Usuń  $v_j$  z  $B[i]$ 
9         foreach  $e_{jk} : v_j \xrightarrow{1} v_k$  do
10            $RELAX(v_j, v_k)$  /* Jeśli  $v_k.d$  się zmieniło, to przenieś  $v_k$  do odpowiedniego kubelka. */
11    $minDist \leftarrow \min\{v_j.d : v_j \in B[a]\}$ 
12   foreach  $i \in \{0, \dots, a\}$  do
13      $B[i] \leftarrow [minDist + i; minDist + i]$  /* Dla  $B[a]$  (overflow) prawy zakres cały czas =  $\infty$  */
14   foreach  $v_j \in B[a]$  do
15     Przenieś  $v_j$  do odpowiedniego kubelka.

```

⁷ Kolejność w jakiej wierzchołki należące do tego samego kubelka są wyciągane zależy od sposobu ich implementacji.

⁸ Jeżeli tylko będą osiągalne ze źródła

Algorytm rozpoczyna pracę od skanowania wszystkich kubelków w kolejności od tego o najmniejszym zakresie aż do kubelka $B[a]$. Dla kolejno napotkanych wierzchołków algorytm usuwa je, po czym wykonuje relaksacje dla wszystkich krawędzi z nich wychodzących (przenosząc do odpowiednich kubelków wierzchołki, które tego wymagają). W przypadku dojścia do ostatniego kubelka o zakresie $[A + a; \infty]$, algorytm wyszukuje w nim najmniejszy (w sensie odległości od źródła) wierzchołek v i aktualizuje A ($A = v.d$). Następnie algorytm aktualizuje zakresy wszystkich pierwszych a kubelków, których całkowity zakres wynosi $[A(i); A(i) + a - 1]$ w i -tej iteracji algorytmu. Po przeniesieniu wszystkich wierzchołków do prawidłowych kubelków oraz zmianie ich zakresów, algorytm rozpoczyna kolejną iterację — wraca do pierwszego kubelka i działa, dopóki wszystkie nie zostaną opróżnione (zob. Pseudokod 10 oraz Rysunek 3.10a–f).



Rysunek 3.10: Działanie algorytmu DKM (alg. Dijkstry opartego na kubelkach z przepełnieniem)

(a) Sytuacja po zainicjalizowaniu grafu $G = (V, E)$ przez INIT-GRAH ze źródłem $v_s.id = 1$ i $a = 4$. Badany kubelek jest na rysunku podświetlony zaciemionym rombem. **(b)** Z pierwszego kubelka został wyciągnięty jedyny wierzchołek. W wyniku relaksacji krawędzi z niego wychodzących, do odpowiednich kubelków zostały dodane nowe węzły ($v_2.d = 2$ i $v_2.d \in B[2].range$ oraz $v_3.d = 6$ i $B[a - 1].range < v_3.d$). **(c)** Kubelek $B[1]$ był pusty. Algorytm wykonał operację RELAX dla następnego najmniejszego węzła (v_2) i usunął go z jego kubelka. W jej wyniku zostały zrelaksowane krawędzie: e_{24} , e_{23} , i e_{25} . Dla wszystkich węzłów v , wskazywanych przez te krawędzie, ich $v.d \in B[a].range$. **(d)** Kubelek $B[3]$ był pusty i algorytm dotarł do ostatniego kubelka. Najmniejsza wartość $v.d$ dla $v \in B[a]$ to 5. Algorytm zaktualizował zakresy wszystkich kubelków i przepiął wszystkie węzły z badanego kubelka na ich odpowiednie miejsca. **(e)** Algorytm ponownie zaczął skanować kubelki od $B[0]$ i usunął z niego węzeł v_3 . W wyniku relaksacji węzła v_5 został przepięty do kubelka odpowiadającego zakresem jego nowej odległości od źródła. **(f)** Po usunięciu z kubelka $B[1]$ węzłów v_4 i v_5 (w dowolnej kolejności jako, że $v_4.d = v_5.d$) wszystkie kubelki są puste.

Złożoność obliczeniowa

Algorytm działa w czasie zależnym od parametru $a < C + 1$. Analizując zachowanie się algorytmu w najgorszym możliwym przypadku mamy kolejno:

- $O\left(\frac{n \cdot C}{a}\right)$ — tyle razy zostaną przeskanowane wszystkie kubelki, gdzie w każdej iteracji i ich łączny zakres to $[A(i); A(i) + a - 1]$ (dla kubelków od $B[0]$ do $B[a - 1]$). Przed rozpoczęciem następnej iteracji algorytm zmienia zakresy wszystkich kubelków, wyszukując w ostatnim z nich węzeł v taki, że $v.d = \min\{v_i.d : v_i \in B[a]\}$, gdzie $v.d$ jest na pewno większe od prawej strony zakresu przedostatniego kubelka w tablicy (wynika to z samej własności zakresów kubelków, które są rozłączne). Niech zakres kubelka z przepełnieniem podczas i -tej iteracji wynosi $[A(i) + a; \infty]$. W najgorszym przypadku $v.d = A(i) + a$ — wtedy podczas zmiany zakresów kubelków od $B[0]$ do $B[a - 1]$ lewa strona nowego zakresu pierwszego kubelka jest o 1 większa od starego zakresu $B[a - 1]$. Dla tak zmienianych zakresów mamy zapewnione, że podczas $\frac{n \cdot C}{a}$ iteracji każda wartość od 0 do $n \cdot C - 1$ będzie występowała jako zakres któregoś kubelka nie będącego przepełnieniem, dokładnie jeden raz. W najgorszym przypadku w grafie będzie istnieć węzeł, którego odległość od źródła wynosi $(n - 1) \cdot C$, więc algorytm będzie musiał wykonać wszystkie $O\left(\frac{n \cdot C}{a}\right)$ iteracji nim do niego dotrze i usunie go z kubelka.
- Dla $a = C$ w każdej kolejnej i -tej iteracji w ostatnim kubelku znajduje się $k(i)$ węzłów, tak że $\bigcup_{i=1}^{\frac{n \cdot C}{a}} |k(i)| = n - 1$ (na przestrzeni działania całego algorytmu każdy z $|V| - 1$ wierzchołków, poza źródłem, znajdzie się w tym kubelku dokładnie jeden raz). Łączny koszt wyszukiwania takiego węzła, że $v.d = \min\{v_i.d : v_i \in B[a]\}$ we wszystkich iteracjach możemy zatem oszacować z góry przez $O(n)$. Dla każdego innego a własność ta może nie zachodzić, a oszacowanie wzrosnąć do $O(n^2)$.
- $O(n \cdot C)$ — w takim czasie zostaną przeskanowane wszystkie kubelki, jeżeli algorytm wykona $O\left(\frac{n \cdot C}{a}\right)$ iteracji (za każdym razem skanując a kubelków od $B[0]$ do $B[a - 1]$).
- Pod koniec każdej iteracji algorytm wykonuje przeniesienia wszystkich węzłów z ostatniego kubelka — w najgorszym możliwym przypadku takich wierzchołków będzie $\sum_{i=1}^{\frac{n \cdot C}{a}} |v_j : v_j \in B[a]| = O(n)$.
- Poza przenoszeniem węzłów pod koniec każdej iteracji, algorytm wykonuje także m relaksacji podczas skanowania pierwszych $a - 1$ kubelków (w trakcie trwania wszystkich rund).
- Przeniesienie węzła z kubelka $B[i]$ do $B[j]$ jest wykonywane w czasie stałym.

W najgorszym możliwym przypadku algorytm może charakteryzować się złożonością $O(n^2)$, która jest silnie zależna od operacji wyszukiwania minimum dla ostatniego kubelka.

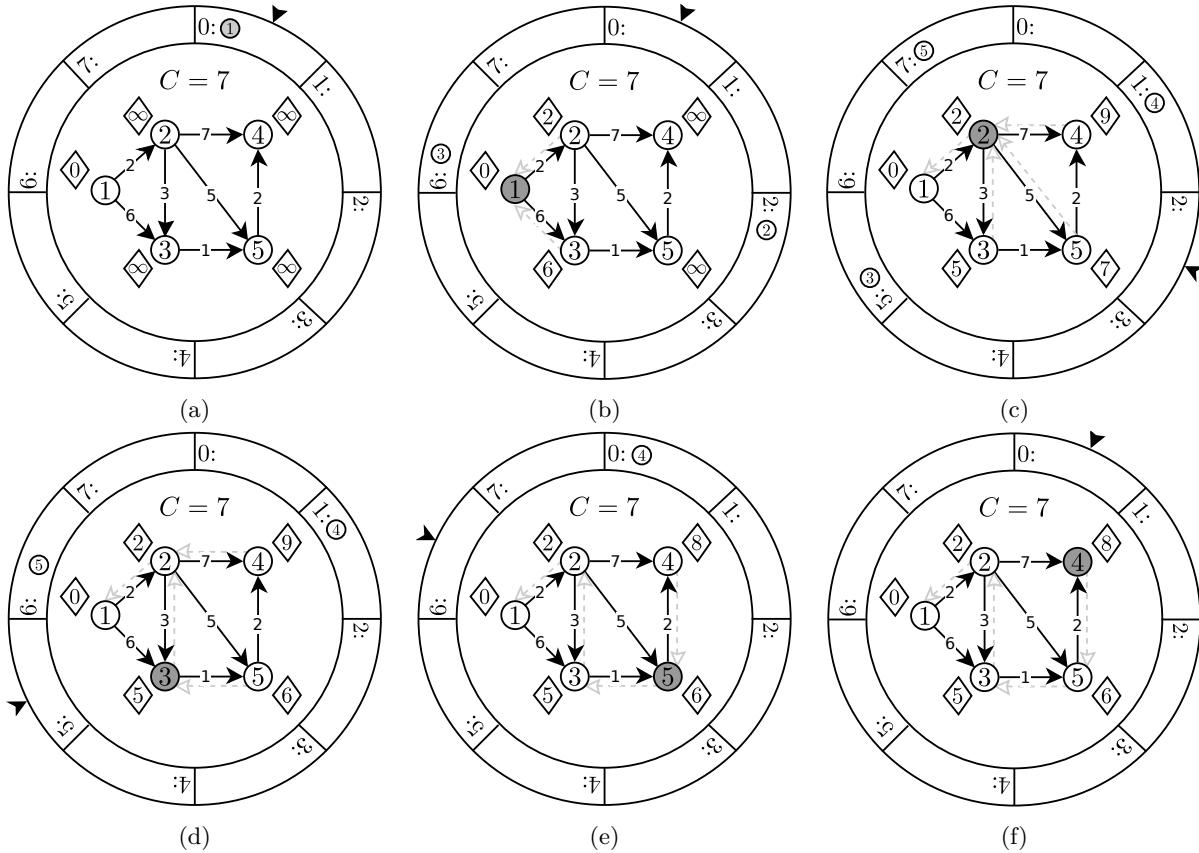
3.5.3 Dial

Zwróćmy uwagę, że dla $a = C$ poprzedni algorytm zachowuje się niemal identycznie co opisany jako pierwszy ($n \cdot C$ kubelkami), z tą różnicą, że działa on w rundach, gdzie maksymalnie może być ich $O\left(\frac{n \cdot C}{a}\right)$. Pokazaliśmy, że dla tak dobranego parametru a zakresy kubelków we wszystkich rundach tworzą **partycję**⁹, taką że $\bigcup_{i=1}^{\frac{n \cdot C}{a}} \bigcup_{j=0}^{a-1} [A(i) + j; A(i) + j] = \bigcup_{i=1}^{\frac{n \cdot C}{a}} [A(i); A(i) + a - 1] = [0; n \cdot C - 1]$, co sprowadza się do skanowania wszystkich kubelków o zadanych zakresach z naiwnej wersji algorytmu. Dopiero dla parametru $a < C$ możemy zacząć liczyć na to, że z każdą iteracją pewna liczba kubelków zostanie pominięta.

Wybór takiego ograniczenia dla a ma swoje uzasadnienie — wnioski z niego wynikające zostały wykorzystane do konstrukcji następnego algorytmu, jakim jest algorytm wymyślony przez Roberta B. Diala [2, 4.6], nazwany od nazwiska jego pomysłodawcy, którego pierwotna implementacja w najgorszym przypadku także wymagała użycia $n \cdot C$ kubelków. Powołując się jednak na fakt, że w dowolnym momencie algorytmu po wykonaniu relaksacji krawędzi prowadzącej z węzła v_i do v_j , odległości od źródła tych dwóch węzłów są w relacji: $v_i.d \leq v_j.d \leq v_i.d + C$, gdzie $C = \max\{c_{ij} : e_{ij} \in E\}$, możemy ograniczyć liczbę potrzebnych kubelków do $C + 1$ (tym samym algorytm znacznie usprawniając). W momencie skanowania k -tego kubelka spośród $C + 1$ kubelków i założenia, że następnym kubelkiem po $B[C]$ jest $B[0]$, wszystkie węzły v_j , których odległość od źródła $v_j.d$ ulegnie zmianie w wyniku relaksacji krawędzi wychodzących z węzła v_i (gdzie

⁹ Rodzina niepustych, rozłącznych podzbiorów danego zbioru dająca w sumie cały zbiór.

$v_i.d = k$), zostaną przemieszczone do kubelków o indeksach od k do $k + C$. Założymy, że kubelki ułożyliśmy na okręgu tak, by po ostatnim z nich następował pierwszy. W takiej sytuacji indeks $k + C$ w rzeczywistości odpowiada kubelkowi o indeksie $(k + C) \bmod C + 1 = k - 1$. W związku z tym dla $C + 1$ kubelków nigdy nie zajdzie sytuacja, by w jednym kubelku znajdowały się węzły v i u , dla których $v.d \neq u.d$ (co oczywiście mogłoby się wydarzyć, gdybyśmy wzięli $c < C + 1$). Umożliwia nam to wspomnianą redukcję liczby kubelków z $n \cdot C$ do zaledwie C .



Rysunek 3.11: **Działanie algorytmu Dial z $C+1$ kubelkami** (a) Sytuacja po zainicjalizowaniu grafu $G = (V, E)$ przez INIT-GRAPH ze źródłem $v_s.id = 1$. Mamy $C+1$ kubelków, indeksowanych od 0 do C . Grot strzałki wskazuje obecnie badany kubelek. (b) Z aktualnie badanego kubelka pobierany jest węzeł i wykonywane są relaksacje jego krawędzi wychodzących. W ich wyniku do kubelków $B[2]$ i $B[6]$ odpowiednio wstawione są węzły v_2 ($v_2.d = 2$) i v_3 ($v_3.d = 6$). Następny kubelek ($B[1]$) jest pusty. (c) Algorytm przeskanował następny niepusty kubelek $B[2]$, w wyniku czego dokonał relaksacji krawędzi e_{23} , e_{25} oraz e_{24} . Węzły na końcach tych krawędzi zmniejszyły swoją odległość od źródła v_1 i zostały przeniesione do odpowiednich kubelków ($v_4.d = 9$, więc v_4 został przeniesiony do kubelka o indeksie: $9 \bmod C+1 = 1$). (d) Następny niepusty kubelek to $B[5]$, zawierający węzeł v_3 ($v_3.d = 5$), dla którego, w wyniku relaksacji jego wychodzących krawędzi, przepięty zostaje węzeł v_5 — jego odległość od węzła zmniejsza się z $v_5.d = 7$ do $v_5.d = 6$. (e) Analogicznie jak w poprzednim kroku, w wyniku operacji RELAX, wykonanej dla krawędzi e_{54} , przepinany jest wierzchołek v_4 (z kubelka $B[9 \bmod C+1]$ do $B[8 \bmod C+1]$). (f) Algorytm skanuje następny niepusty kubelek, wykonuje potrzebne operacje relaksacji, po czym kończy działanie, jeżeli podczas całego „obrotu” nie napotkał żadnego niepustego kubelka.

Uwagi do algorytmu

Jak w każdym poprzednim przypadku, gdy zakres kubelków był jednostkowy (to znaczy $B[i].range = [k; k]$), także i w tym nie ważna jest kolejność wyciągania wierzchołków z takiego kubelka. Co więcej, warto

zauważać, że dla pewnych sytuacji bardziej opłacalną operacją jest obliczanie nowych indeksów kubelków, do których mają trafić wierzchołki w czasie rzeczywistym, niż modyfikować już istniejące zakresy (w tym przypadku wykonywaliśmy operację $\text{mod } C + 1$, zamiast modyfikować zakresy wszystkich kubelków — przy omawianiu algorytmu opartego na kubelkach z przepeleniem taki indeks mogliśmy obliczyć poprzez odjęcie od $v.d$, dla dowolnego v , wyrażenia $A(i)$). Analizując obydwa podejścia mamy następującą sytuację:

	Liczba iteracji	Złożoność obliczeniowa pojedynczego wywołania
Zmiana zakresu kubelków	$O(n)$	$\Theta(C + 1)$
Modulowanie indeksów	$\Theta(m)$	$\Theta(1)$

W pierwszym przypadku liczba modyfikacji zakresów każdego z $C + 1$ kubelków jest ściśle zależna od liczby „okrążeń”, jakie musi wykonać algorytm Dijkstry, by przeskanować wszystkie wierzchołki w grafie. Dla drugiego przypadku liczba operacji obliczania nowych indeksów wierzchołków jest ściśle ograniczona do liczby wykonywanych relaksacji na przestrzeni działania całego algorytmu. Zastosowanie pierwszego wariantu dodatkowo wymaga od nas stworzenia osobnej struktury, która umożliwiałaby przechowywanie zakresów każdego z $C + 1$ kubelków (gdź, w przypadku algorytmu Dial, podstawą do obliczenia zakresów kubelków są ich indeksy w tablicy $B[0 \dots C]$).

Na koniec możemy zauważać, że warunek który musi zajść by algorytm Dial zakończył działanie (to jest w momencie, gdy wszystkie kubelki są puste), wymaga od nas wykonania $O(n \cdot C)$ operacji (w najgorszym przypadku). Możemy je łatwo zastąpić przez sprawdzanie, czy w momencie wykonywania relaksacji, węzeł którego odległość od źródła się zmienia, zostanie przeniesiony do kubelka o mniejszym indeksie niż ten, który aktualnie skanujemy. Jeżeli taka sytuacja nie będzie miała miejsca dla żadnego ze skanowanych $C + 1$ kubelków, to znaczy że wszystkie kubelki są puste i po wykonaniu skanowania ostatniego kubelka algorytm powinien zakończyć pracę. Jednak, tak jak w poprzednim przypadku, jest to tylko niewielka modyfikacja, zamieniająca złożoność jednej ze składowych operacji algorytmu Dijkstry z $O(n \cdot C)$ na $O(m)$ i na odwrót.

Złożoność obliczeniowa

Algorytm Dial działa w czasie $O(m + n \cdot C)$ — algorytm wykona co najwyżej m operacji relaksacji, każdą w czasie $O(1)$, i będzie musiał przeskanować w najgorszym przypadku $O(n \cdot C)$ kubelków.

3.5.4 Aproksymacja zakresu

W poprzednich algorytmach skupialiśmy się na redukcji liczby wykorzystywanych kubelków w celu oszczędzenia jak największej części pamięci operacyjnej i przyspieszeniu obliczeń. Jednocześnie zachowywaliśmy jednostkowe zakresy kubelków, co w najgorszych przypadkach zmuszało nas do wykonania $O(n \cdot C)$ operacji bez względu na to, jak przeglądaliśmy stworzone przez nas kubelki. Będziemy chcieli zmienić to podejście. Przedstawiony poniżej algorytm (zob. Pseudokod 11) jest pierwszym algorytmem typu korekcyjnego (ang. *Label Correcting Algorithm* [1, 2.4]), opartym na kubelkach. Algorytmy tego typu różnią się od do tej pory omawianych (*LSA* — ang. *Label Setting Algorithm* [1, 2.1]) tym, że nie posiadają własności zapewniającej nas o zajściu warunku $v.d = \delta(s, v)$ tuż po wykonaniu relaksacji dla wszystkich krawędzi wychodzących z tego wierzchołka i usunięciu go z listy węzłów czekających na przetworzenie [1, 17]. Innymi słowy dopuszczały w nich możliwość wielokrotnego poprawiania odległości od źródła dla dowolnego węzła (takim algorytmem jest np. algorytm Bellmana-Forda)). Dodatkowo wierzchołki nie muszą być badane w porządku, jaki wcześniej zapewniały nam kolejki priorytetowe. Pokazując, że w efekcie końcowym otrzymamy $\forall v \in V v.d = \delta(s, v)$, udowodnimy poprawność takiego postępowania.

Pseudokod 11: GENERIC-LABEL-CORRECTING-ALGORITHM (G, s)

```

1 begin
2   INIT-GRAPH ( $G, s$ )
3   while  $\exists e_{ij} : v_i \xrightarrow{1} v_j \wedge v_j.d > v_i.d + c_{ij}$  do
4     [
      RELAX ( $v_i, v_j$ )
    ]

```

Dowód. Bardzo łatwo wykazać, że powyższy algorytm działa w skończonym czasie i zwraca poprawne wyniki. Wiemy, że dla każdego węzła v po inicjalizacji grafu procedurą INIT-GRAF(G, s) zachodzi $v.d \geq \delta(s, v)$ a dodatkowo $n \cdot C \geq v.d$. Dla grafu z ujemnymi kosztami ścieżek, z którymi algorytm typu LCA jest w stanie sobie poradzić, możemy także dopisać $\delta(s, v) > -n \cdot C$. Dla każdego znalezionej ścieżki e_{ij} w grafie, takiego że zachodzi $v_j.d > v_i.d + c_{ij}$ algorytm wykonuje relaksację, po której $v_j.d = v_i.d + c_{ij}$. Inaczej mówiąc podczas każdej relaksacji zmniejsza wartość $v_j.d$ co najmniej o 1. Z ograniczenia $n \cdot C \geq v_j.d \geq \delta(s, v_j) > -n \cdot C$ wynika zatem, że w najgorszym przypadku algorytm potrzebuje wykonać $2 \cdot n \cdot C$ kroków, by $v_j.d \leq v_i.d + c_{ij}$ dla każdego węzła v_i (dla $v_j.d = \delta(s, v_j)$ z lematu 2.3.5). Analogicznie wykonamy operacje relaksacji dla wszystkich n węzłów w grafie, więc po $O(n \cdot (n \cdot C))$ krokach algorytm zakończy działanie i dla wszystkich węzłów v otrzymamy $v.d = \delta(s, v)$. ♦

W algorytmie wykorzystującym aproksymacyjne kubełki (ang. *Dijkstra algorithm implemented with approximate buckets*), zakres każdego i -tego kubełka określany jest jako $[i \cdot b; (i+1) \cdot b - 1]$, gdzie $b < C + 1$. Algorytm łączy w sobie ideę konieczności posiadania jedynie $C + 1$ kubełków, a dodatkowo jeszcze zmniejsza ich liczbę (kosztem poszerzania ich zakresów), co powoduje, że potrzebujemy ich już tylko $\lfloor \frac{C}{b} \rfloor + 1$ (zob. Pseudokod 12). Wierzchołki w każdym kubełku są trzymane w kolejce FIFO (nie przejmujemy się kolejnością wyciągania wierzchołków w przypadku, gdy jest ich kilka w jednym kubełku), a ich skanowanie odbywa się na dokładnie tej samej zasadzie co w pozostałych algorytmach tego typu [7, 23–24].

Pseudokod 12: DKA (G, s)

```

1 begin
2   INIT-GRAF( $G, s$ )
3    $K \leftarrow \lfloor \frac{C}{b} \rfloor + 1$ 
4   foreach  $i \in \{0, \dots, K\}$  do
5      $B[i] \leftarrow$  pusty kubełek o zakresie  $[i \cdot b; (i+1) \cdot b - 1]$ 
6   for  $i = 0$  to  $K$  do
7     foreach  $v_j \in B[i]$  do
8       Usuń  $v_j$  z  $B[i]$ 
9       foreach  $e_{jk} : v_j \xrightarrow{1} v_k$  do
10       $RELAX(v_j, v_k)$  /* Jeśli  $v_k.d$  się zmieniło, to przenieś  $v_k$  do odpowiedniego kubełka. */

```

Złożoność obliczeniowa

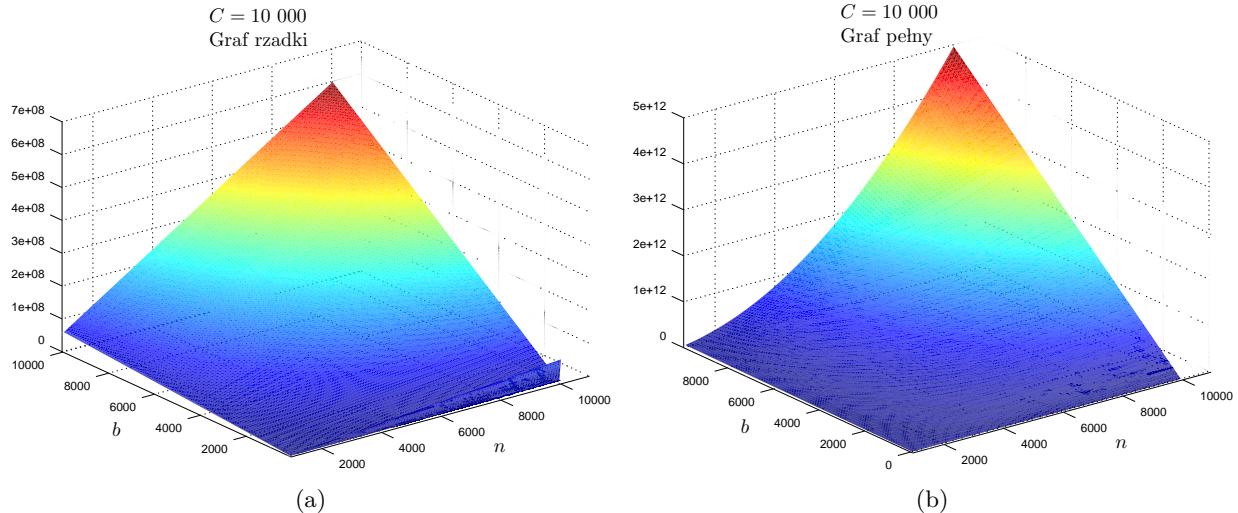
W najgorszym przypadku algorytm działa w czasie $O(m \cdot b + n \cdot (b + \frac{C}{b}))$.

- Za każdym razem, gdy mieliśmy do czynienia ze strukturą opartą na kubełkach, algorytm, by skończyć działanie, musi je wszystkie przeglądać. W najgorszym przypadku dla każdego z n węzłów będziemy musieli przenosić je do kubełków o coraz niższych indeksach — tych mamy $O(\frac{C}{b})$, co łącznie daje nam czas ograniczony z góry przez $O(n \cdot \frac{C}{b})$.
- Przyjrzyjmy się sytuacji, w której do kubełka k o zakresie $[i \cdot b; (i+1) \cdot b - 1]$ pierwszy raz jest wstawiany węzeł v_j taki, że $v_j.d = (i+1) \cdot b - 1$. Przyjmijmy dodatkowo, że dla każdej relaksacji krawędzi która prowadzi do tego węzła, odległość $v_j.d$ jest zmniejszana o 1 tak, że jest on b razy wstawiany do tego samego kubełka. Dla takiego przypadku w wyniku skanowania kubełka k , algorytm wyciągnie dany wierzchołek dokładnie b razy, gdzie za ostatnim razem wierzchołek znajduje się na samym początku kubełka ($v_j.d = i \cdot b$). W czasie skanowania kubełka relaksacje (w liczbie k) które są wykonywane, dotyczą tylko takich krawędzi $e : v_l \xrightarrow{1} v_j$, dla których węzły $v_l \in B[k]$, z czego wynika, że dla dowolnego takiego wierzchołka $i \cdot b \leq v_l.d \leq (i+1) \cdot b - 1$. Zatem, gdy $v_j.d = i \cdot b$ to dla dowolnej operacji $RELAX(v_l, v_j)$ będziemy mieli $v_j.d \geq v_l + c_{lj} = i \cdot b \geq i \cdot b + c_{lj}$ (dla kosztów ścieżek nieujemnych), co jest równoważne temu, że relaksacja krawędzi nigdy już nie zajdzie, a tym samym nie dodamy wierzchołka v_j ponownie do któregoś z kubełków (algorytm skanuje kubełki od lewej do prawej, więc relaksacja, którą opisaliśmy, tym bardziej

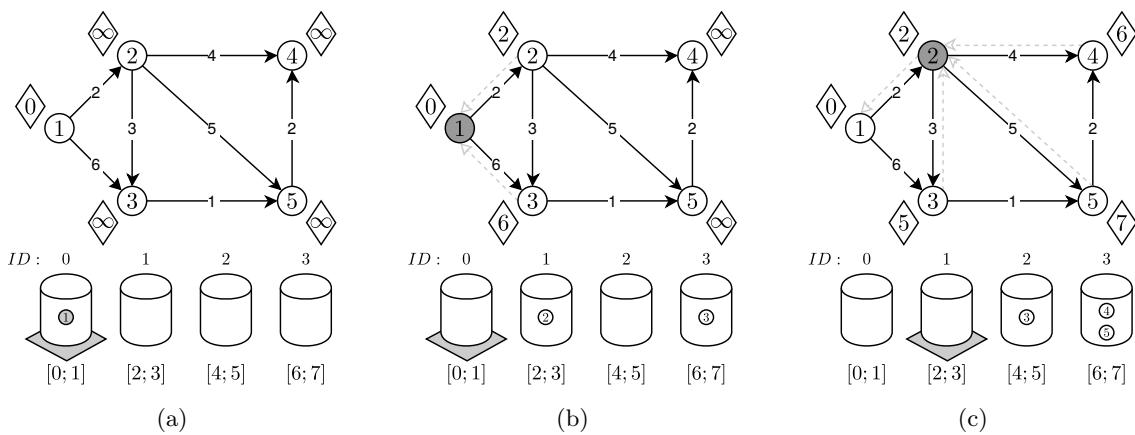
nie zajdzie, jeżeli pójdziemy do dalszych kubelków). W związku z tym dany wierzchołek algorytm będzie badał co najwyżej b razy. Dla n wierzchołków mamy ograniczenie $O(n \cdot b)$.

- Bezpośrednio z powyższego wniosku wynika także, że algorytm może w najgorszym przypadku wykonać $O(m \cdot b)$ relaksacji (dla każdego kubelka b razy).

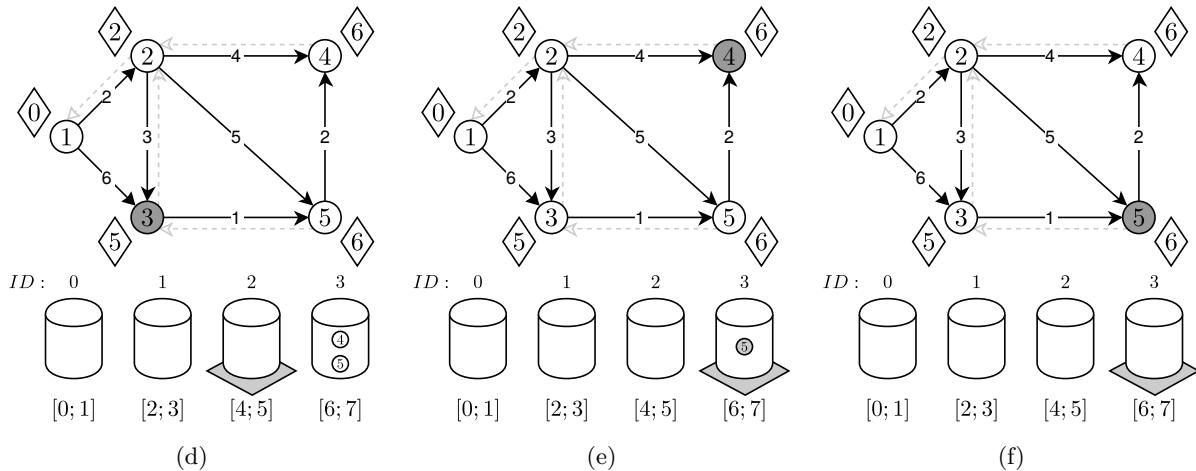
Ostatecznie daje nam to złożoność algorytmu ograniczoną z góry przez $O(m \cdot b + n \cdot (b + \frac{C}{b}))$. Warto zwrócić uwagę, że dla $b = 1$ (czyli, gdy kubelki mają jednostkowe zakresy) otrzymujemy algorytm Dial, którego złożoność wynosiła $O(m + n \cdot C)$.



Rysunek 3.12: Wykresy zależności $O(m \cdot b + n \cdot (b + \frac{C}{b}))$ dla $C = 10000$ (a) Wykres przedstawia zależność czasu działania algorytmu od liczby węzłów i szerokości kubelków dla grafu rzadkiego ($m = n$). (b) Wykres przedstawia zależność czasu działania algorytmu od liczby węzłów i szerokości kubelków dla grafu pełnego ($m = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$). Wyraźnie widzimy, że algorytm zamienia złożoność obliczeniową na pamięciową (i odwrotnie).



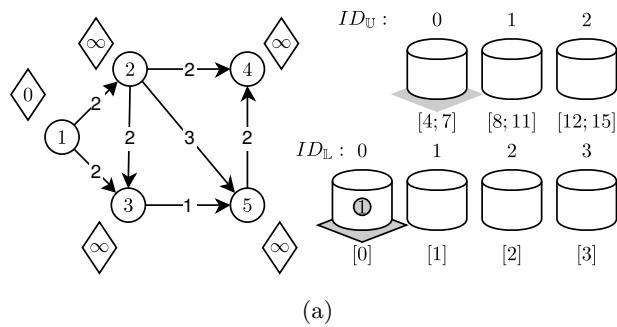
Rysunek 3.13: Działanie algorytmu Dijkstry opartego na aproksymacji kubelków (a) Początkowa sytuacja w grafie G ($b = 2$). (b) Z pierwszego, przeskanowanego kubelka zostało wyciągnięty węzeł v_1 . W wyniku relaksacji do kubelków $B[1]$ i $B[3]$ odpowiednio zostały włożone węzły: v_2 i v_3 . (c) Po wykonaniu relaksacji $B[0]$ jest pusty — algorytm rozpoczął skanowanie kubelka $B[1]$, po czym wyciągnął z niego wierzchołek v_2 i wykonał następnie relaksacje krawędzi z niego wychodzących.



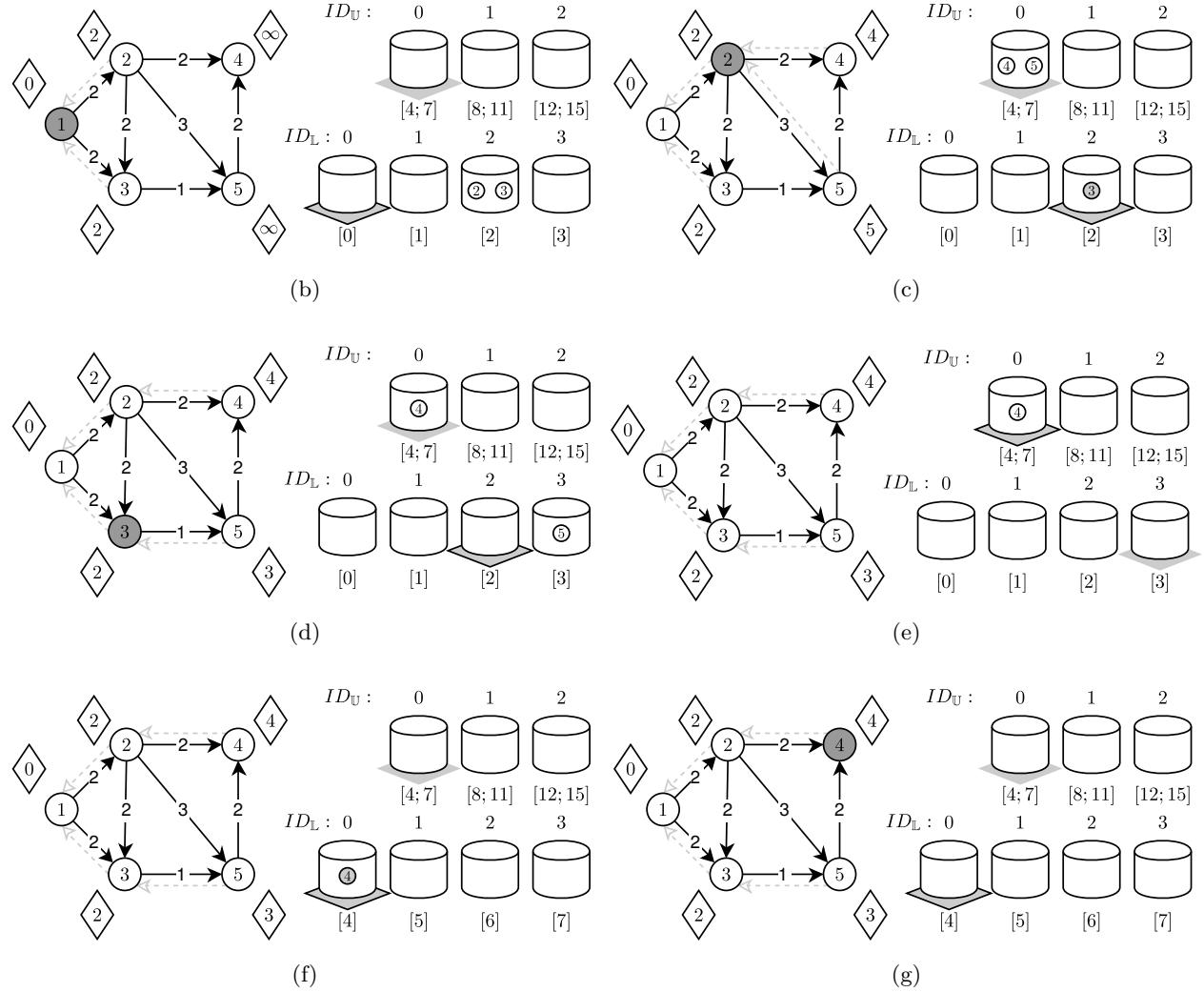
Rysunek 3.13: (d) Po wykonaniu relaksacji dla wszystkich wierzchołków $v \in B[1]$, algorytm rozpoczyna skanowanie następnego kubelka w tablicy. Dla wierzchołka $v_3 \in B[2]$ wykonana jest relaksacja krawędzi e_{35} , a następnie — dla pustego już kubelka — algorytm przechodzi do kolejnego. (e–f) Z kubelka $B[3]$ kolejno są wyciągane węzły. Algorytm przeprowadza ostatnie relaksacje i kończy działanie.

3.5.5 Kubełki wielopoziomowe

Kolejnym algorytmem, któremu poświęcimy naszą uwagę, będzie algorytm oparty na kubełkach wielopoziomowych (w naszym przypadku będą to dwa poziomy [8, 4.2]). Dotychczasowe algorytmy, które były oparte o tę strukturę danych, w różny sposób podchodząc do jego implementacji, wykorzystywały model jednopoziomowy. W tym algorytmie zamiast jednego poziomu kubełków, który wcześniej zwykliśmy oznaczać przez $B[0 \dots k]$, będziemy wykorzystywać oznaczenia $B_L[0 \dots k_L]$ i $B_U[0 \dots k_U]$ odpowiednio dla kubełków niskiego (ang. *Low-level buckets*) oraz wysokiego poziomu (ang. *High-level buckets*). Ideą algorytmu jest stworzenie $\lfloor \frac{n \cdot C}{d} \rfloor$ kubełków wysokiego poziomu, gdzie każdy i -ty taki kubełek ma zakres $[i \cdot d; (i + 1) \cdot d - 1]$ oraz d kubełków niskiego poziomu o zakresach jednostkowych — tym samym suma ich zakresów wynosi dokładnie $[L \cdot d; (L + 1) \cdot d - 1]$ (początkowo $L = 0$). W czasie pracy algorytm nieprzerwanie skanuje kubełki o zakresach jednostkowych od lewej do prawej. Gdy wszystkie wierzchołki z kubełków niskiego poziomu zostaną usunięte, algorytm wyszukuje pierwszy niepusty kubełek $k \in B_U$, odpowiednio zwiększa L a następnie przekonwertowanych wierzchołków $v \in k$ do odpowiednich kubełków niskiego poziomu i rozpoczyna ich skanowanie od początku. Algorytm wykonuje pracę, dopóki na którejś z list znajdują się nieprzetworzone wierzchołki. Algorytm powstał jako złączenie dwóch poprzednich: w oparciu o kubełki z przepełnieniem oraz algorytmem *DKA* (szczególnie do tego ostatniego widzimy podobieństwo z sposobie implementacji kubełków wysokiego poziomu).



Rysunek 3.14: **Działanie algorytmu DKD** (a) Sytuacja po zainicjalizowaniu grafu G ($d = 4, n \cdot C = 15$). Do pierwszego kubełka w B_L wstawiony zostaje wierzchołek będący źródłem (ang. B_L — *lower bucket*, B_U — *upper bucket*).



Rysunek 3.14: (b) Algorytm rozpoczyna skanowanie kubelków niskiego poziomu (aktualny postęp algorytmu dla obu poziomów jest zaznaczony za pomocą rombów pod odpowiednimi kubelkami). Algorytm wykonuje relaksacje dla wszystkich krawędzi $e : v_1 \xrightarrow{1} v_i$, w wyniku których do kubelka $B_{\mathbb{L}}[2]$ wstawione zostają węzły v_2 oraz v_3 ($v_2.d = v_3.d = 2$). (c) Algorytm zatrzymuje się na pierwszym niepustym kubelku, wyjmuje z niego dowolny element (na rysunku v_2) oraz przeprowadza relaksacje jego wychodzących krawędzi (e_{23} , e_{24} i e_{25}). W ich wyniku węzły v_4 oraz v_5 stają się osiągalne ze źródła i zostają wstawione do kubelka $B_{\mathbb{U}}[0]$ ($v_4.d, v_5.d \in B_{\mathbb{U}}[0].range$). (d) W wyniku relaksacji krawędzi wychodzących z aktualnie badanego węzła (v_3), dla wierzchołka v_5 została zmniejszona odległość od źródła tak, że $v_5.d \leq B_{\mathbb{L}}[d-1].range$. Wierzchołek został z powrotem przepięty do tablicy kubelków niskiego poziomu — do kubelka $B_{\mathbb{L}}[3]$. (e) Z ostatniego niepustego kubelka został wyjęty węzeł v_5 . Po przeprowadzeniu operacji RELAX wszystkie kubelki $k \in B_{\mathbb{L}}$ są puste. Algorytm kontynuuje skanowanie kubelków wysokiego poziomu, zatrzymując się na pierwszym niepustym. (f) Następuje zmiana zakresów kubelków dolnego poziomu (tak, że zachodzi $[B_{\mathbb{L}}[0].range; B_{\mathbb{L}}[d-1].rrange] = B_{\mathbb{U}}[0].range$), a następnie wszystkie wierzchołki z kubelka $B_{\mathbb{U}}[0]$ zostają przeniesione do odpowiednich kubelków w tablicy $B_{\mathbb{L}}$. Po przeniesieniu wszystkich węzłów, algorytm rozpoczyna na nowo skanowanie kubelków $B_{\mathbb{L}}[0 \dots d-1]$. (g) Z kubelka $B_{\mathbb{L}}[0]$ zostaje wyjęty ostatni wierzchołek. Po wykonaniu relaksacji dla krawędzi wychodzących z v_4 (brak jest takich), wszystkie kubelki są puste. Algorytm, doszedłszy do końca $B_{\mathbb{U}}$, kończy pracę.

Złożoność obliczeniowa — kubełki 2-poziomowe

Analizując złożoność obliczeniową algorytmu Dijkstry opartego o kubelki wielopoziomowe, podzielimy naszą analizę na dwie części: w pierwszej z nich pokażemy złożoność algorytmu, którego przykład przedstawiono na rysunku 3.14, zaś następnie uogólnimy algorytm na k poziomów.

Algorytm oparty na kubełkach dwupoziomowych składa się z trzech faz, którymi są: skanowanie górnej części kubelków, przenoszenie wierzchołków do tablicy $B_{\mathbb{L}}[0 \dots d - 1]$ oraz wykonywanie skanowania kubelków niskiego poziomu w celu wykonania relaksacji dla krawędzi wychodzących z wierzchołków, które tam się znajdują. Kolejno mamy zatem:

- $O\left(\frac{n \cdot C}{d}\right)$ — jest to czas potrzebny na przeskanowanie kubelków wysokiego poziomu, których jest $\lfloor \frac{n \cdot C}{d} \rfloor$. W najgorszym przypadku będziemy musieli przeskanować je wszystkie.
- Bez względu na to, ile kubelków wysokiego poziomu przeskanowaliśmy, co najwyżej $|V|$ wierzchołków zostanie przeniesionych z $B_{\mathbb{U}}[0 \dots \lfloor \frac{n \cdot C}{d} \rfloor - 1]$ do $B_{\mathbb{L}}[0 \dots d - 1]$, a zatem w najgorszym możliwym przypadku będziemy zmuszeni do wykonania $|V|$ skanowań kubelków niskiego poziomu, za każdym razem skanując ich d , gdzie na skanowanie jednego kubelka przypada $O(1)$. Zatem łączny kosz tej operacji to $O(n \cdot d)$.
- W omawianym powyżej przypadku algorytm będzie musiał $n = |V|$ razy wykonać zmiany zakresów każdego z d kubelków. Wykorzystując fakt, że zakres każdego z kubelków jest opisany w zależności od jednej zmiennej $L(B_{\mathbb{L}}[i].range = [L \cdot d + i; (L + 1) \cdot +i])$, gdzie L oznacza najmniejszą wartość zakresu aktualnie badanego kubelka wysokiego poziomu, zaś reszta wzoru nie ulega zmianie dla poszczególnych kubelków, jesteśmy w stanie przeprowadzić taką zmianę w czasie liniowym (obliczenia związane z wstawianiem wierzchołka do odpowiedniego kubelka zostaną wykonane każdorazowo w czasie $O(1)$ i są zależne od liczby przemieszczanych z $B_{\mathbb{U}}$ do $B_{\mathbb{L}}$ wierzchołków — maksymalnie n).
- Ostatnią fazą algorytmu, jaką wyodrębniliśmy, była faza relaksacji wierzchołków, a tych jest co najwyżej m — każdy wierzchołek, będący w kubelkach niskiego poziomu, skanujemy dokładnie raz.

Podsumowując powyższe rozważania: algorytm Dijkstry, zbudowany w oparciu o strukturę kubelków dwupoziomowych, działa w czasie nieprzekraczającym $O\left(\frac{n \cdot C}{d} + n \cdot d + m\right)$. Tak jak w przypadku, gdy analizowaliśmy algorytm oparty na kopcach R -arnych, tak samo tutaj zoptymalizowany czas działania algorytmu otrzymamy, gdy doprowadzimy największe wyrażenia (od których zależy ten czas) do równości (czyli do $\frac{n \cdot C}{d} = n \cdot d$), z której natychmiastowo wynika $d = \sqrt{C}$.

Warto też jeszcze raz podkreślić, że implementacje w oparciu o kubelki, którymi zajmowaliśmy się na samym początku to tak naprawdę algorytmy jednopoziomowe, dla których poniższa analiza jest jak najbardziej prawidłowa ($O\left(\frac{n \cdot C}{d} + n \cdot 1 + m\right) = O(m + n \cdot C)$). Nasuwa się pytanie, czy takiej samej analizy nie możemy przeprowadzić dla algorytmu Dial, który także jest implementacją jednopoziomową (jego kubelki mają identyczne własności co $B_{\mathbb{L}}$). Odpowiedź oczywiście jest pozytywna.

Niech maksymalna liczba kubelków wysokiego poziomu wynosi $\lfloor \frac{C+1}{d} \rfloor$ i niech dodatkowo $d = \sqrt{C+1}$ ($C+1$ kubelków wymagała implementacja algorytmu Dial). Zauważmy, że w takiej sytuacji mamy tyle samo kubelków na każdym poziomie a każdy z $\sqrt{C+1}$ ma ten sam zakres, gdzie dla i -tego kubelka wynosi on $[i \cdot d; (i+1) \cdot d - 1]$. Łącznie daje to nam rozpiętość kubelków $[0; (\sqrt{C+1} + 1) \cdot \sqrt{C+1} - 1] = [0; (C+1) + \sqrt{C+1} - 1]$ (dla przypadku algorytmu Dial wymagany zakres kubelków to $[0; C]$). Wykonując teraz analizę okaże się, że otrzymamy takie samo oszacowanie na złożoność obliczeniową, co dla przypadku, gdy $|B_{\mathbb{U}}| = \lfloor \frac{n \cdot C}{d} \rfloor$, gdzie $d = \sqrt{C}$ (a zatem $O\left(\frac{n \cdot C}{d} + n \cdot d + m\right) = O(n \cdot \sqrt{C} + m)$).

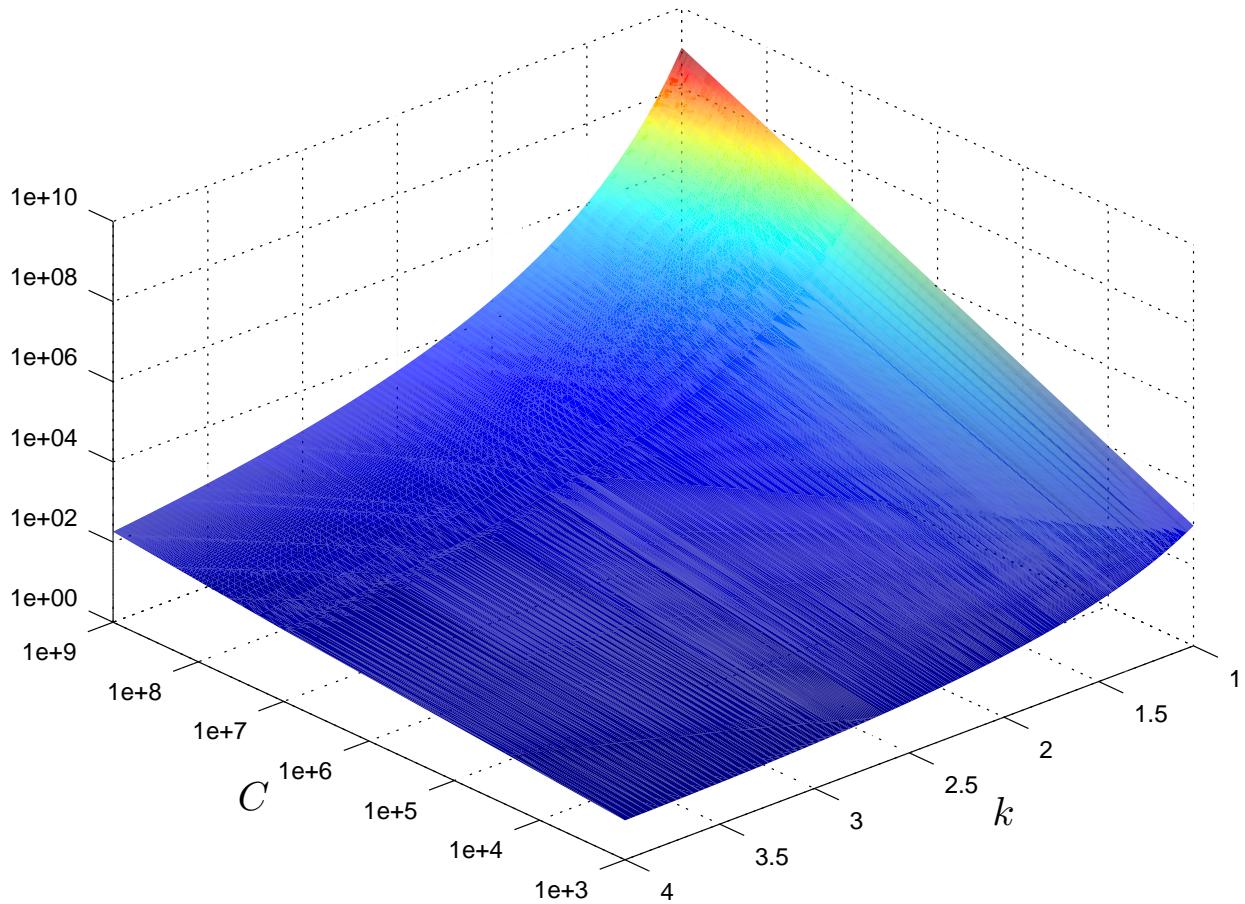
Podstawową naszą obserwacją będzie fakt, że algorytm do pracy wymaga $2 \cdot \sqrt{C+1}$ kubelków. Jak przekonaliśmy się podczas poprzedniej analizy, każdy z kubelków wysokiego poziomu może zostać zbadany co najwyżej raz i taką samą liczbę razy jak wcześniej, może być wymagane wykonanie skanowania dla wszystkich kubelków niskiego poziomu wraz ze zmianą ich zakresów w czasie liniowym ($n \cdot \sqrt{C+1}$ i $n \cdot 1$). Dodatkowo może być wymagane przeskanowanie każdego kubelka należącego do $B_{\mathbb{U}}$ w celu zakończenia pracy algorytmu ($\sqrt{C+1}$). Daje nam to łącznie złożoność ograniczoną przez $O\left(m + n \cdot (1 + \sqrt{C})\right)$ (relaksacji jak zawsze potrzebujemy wykonać najwyżej m), co daje nam $O\left(n \cdot \sqrt{C} + m\right)$.

Złożoność obliczeniowa — kubełki k-poziomowe

Po pokazaniu powyższej prawidłowości dla $d = \sqrt{C + 1}$, analiza k -poziomowej struktury okazuje się być prosta.

Załóżmy, że mamy k poziomów kubełków, gdzie przez B_0 będziemy oznaczać poziom najniższy, zaś przez B_{k-1} — najwyższy. Każdy z poziomów ma $d = \lceil \sqrt[k]{C+1} \rceil$ kubełków ponumerowanych od 0 do $d-1$. Zakresy każdego z kubełków rosną analogicznie jak w przypadku dla struktury dwupoziomowej (dla najniższego stopnia mamy $\sqrt[k]{C+1}$ kubełków o zakresach jednostkowych, kubełki należące do B_1 posiadają zakresy obejmujące $\sqrt[k]{(C+1)^2}$ wartości, zaś na ostatnim k 'tym poziomie każdy kubełek i ma zakres, do którego wpadają wartości z przedziału $[i \cdot \sqrt[k]{(C+1)^{k-1}}, (i+1) \sqrt[k]{(C+1)^{k-1}} - 1] \approx [0; |C+1|]$) [8, 4.1–4.3].

Analiza problemu dla k -poziomów jest analogiczna jak w przypadku poprzednim, co od razu daje nam złożoność algorytmu $O(m + n \cdot (k + \sqrt[k]{C}))$ i wykorzystuje $\Theta(k \cdot \sqrt[k]{C})$ kubełków (w najgorszym przypadku teraz, nim wierzchołki trafią do najniższego poziomu, muszą przejść kolejno przez wszystkie poziomy, co może oznaczać konieczność przepięcia każdego z n wierzchołków d razy, zaś skanowanie najniższego poziomu oraz sama relaksacja krawędzi odbywa się analogicznie jak w przypadku dla $k = 2$).



Rysunek 3.15: Wykres funkcji $O(m + n \cdot (k + \sqrt[k]{C}))$ w zależności od $C \in \langle 10 \cdot 10^3, \dots, 10 \cdot 10^{11} \rangle$ (na osi X) i $k \in \langle 1, \dots, 4 \rangle$ (na osi Y). Tak jak w przypadku algorytmu, opierającego się na kubełkach aproksymacyjnych, widzimy, że algorytm zamienia złożoność obliczeniową na pamięciową i odwrotnie [8, 7.1–7.4]. Oś „ C ”, w odróżnieniu od tej, na której znajduje się parametr k , została przedstawiona w skali logarytmicznej, co pokazuje jak powoli rośnie złożoność obliczeniowa algorytmu dla $k \in \{2, 3, 4\}$ w zależności od największego kosztu ścieżek w grafie.

3.5.6 Kopce pozycyjne

Kopcami pozycyjnymi (ang. *Radix Heap*) nazywamy jednopoziomową strukturę kubelków, których zakresy definiowane są w następujący sposób:

$$B[i].range = \begin{cases} [i; i] & \text{gdy } i = 0, \\ [2^{i-1}; 2^i - 1] & \text{gdy } i > 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Od razu widzimy, że w ten sposób ograniczamy liczbę kubelków do $\lceil \log_2(L) \rceil + 1$, gdzie L to największy zakres kubelków, co w zasadniczy sposób przełoży się na szybkość działania algorytmu (zawsze musielibyśmy skanować wszystkie kubelki — w najgorszym przypadku n razy).

Celowo użyliśmy tutaj zmiennej L , gdyż tak jak w poprzednich przypadkach możemy skorzystać z właściwości, która pozwoli nam ograniczyć liczbę kubelków z $n \cdot C$ do zaledwie $C + 1$, co da nam możliwość skonstruowania jeszcze szybszego algorytmu. Najpierw jednak zajmiemy się omówieniem jego podstawowej wersji — z $n \cdot C$ kubelkami.

Pierwsze podejście

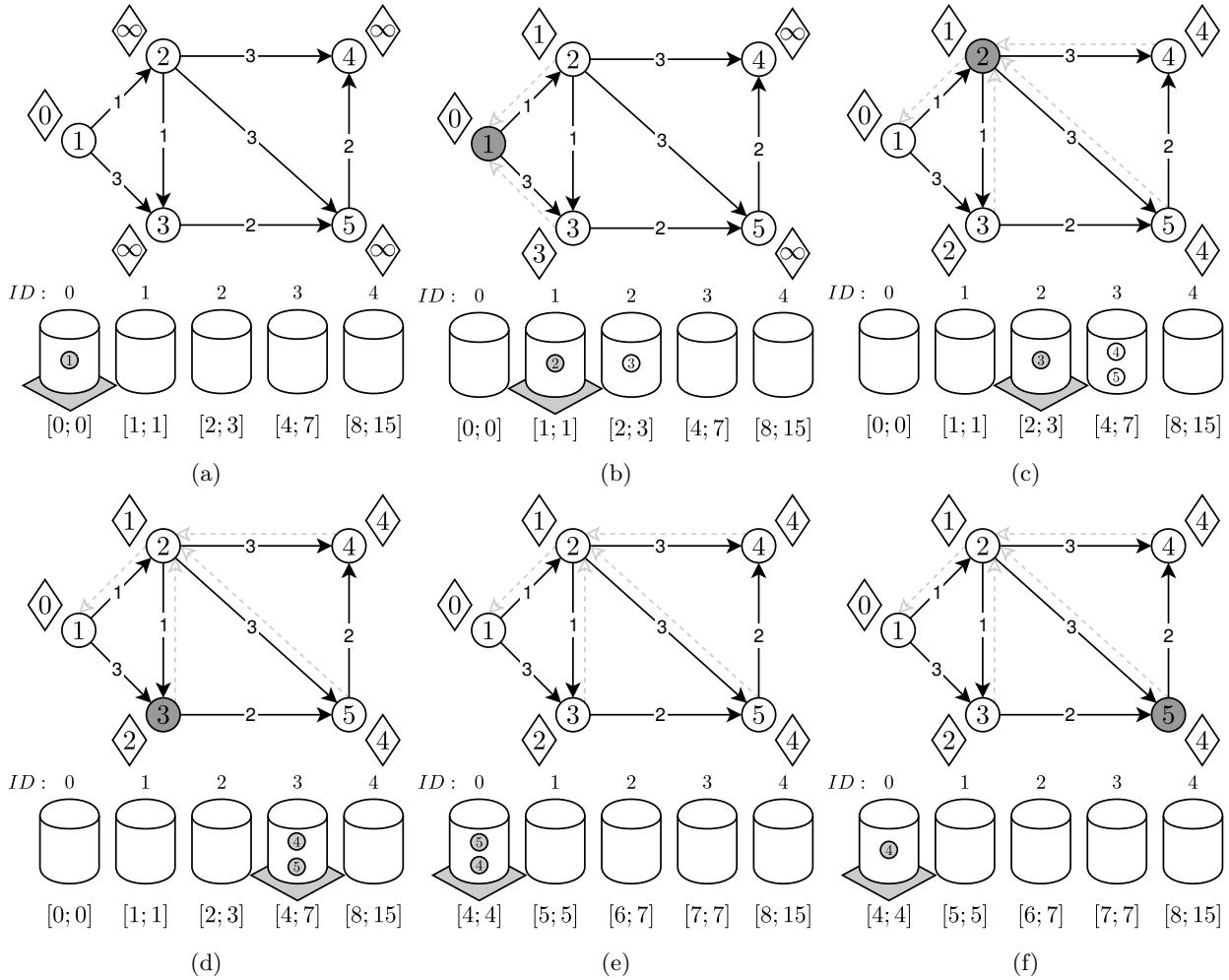
Mamy $\lceil \log_2(n) + \log_2(C) \rceil + 1$ kubelków, którego każdy zakres został zdefiniowany tak, jak przedstawiono we wzorze 3.6. Algorytm dąży do tego, by wykonywać relaksacje krawędzi wierzchołków, których odległość od źródła w danej chwili jest najmniejsza (wśród węzłów, które nie zostały jeszcze przetworzone). Aby zapewnić takie właściwości, będziemy dążyć do tego, by w każdym momencie działania algorytmu pierwszy kubelek $B[0]$ zachował swój jednostkowy zakres, najmniejszy spośród wszystkich pozostałych. Z niego też na początku, skanując kubelki w kolejności ich rosnących indeksów, będziemy pobierać kolejno wierzchołki do przetworzenia. Ponieważ dopuszczałyśmy niejednostkowe zakresy (tak samo jak przy kubelkach aproksymacyjnych), a nie chcemy dla każdego z nich wyszukiwać najmniejszego (w sensie odległości od źródła) wierzchołka v (co natychmiast da nam górne ograniczenie na złożoność algorytmu $O(n^2)$ w przypadku, gdy wszystkie wierzchołki znajdują się w jednym kubelku), będziemy rozróżniać w naszym algorytmie dwie sytuacje:

- 1 Algorytm skanując kubelki od lewej do prawej, napotyka na kubelek i o zakresie jednostkowym $[k; k]$ (taka sytuacja zawsze zachodzi dla pierwszych dwóch kubelków). W takiej sytuacji algorytm wykonuje relaksacje krawędzi wychodzących ze wszystkich wierzchołków znajdujących się w kubelku (jako że wszystkie są równoodległe od źródła — $\forall (v_i, v_j) \in K[i] : K[i].range = [k; k] \Rightarrow v_i.d = v_j.d$), usuwa przetworzone wierzchołki z kubelka, a na końcu przechodzi do następnego.
- 2 Wykonując skanowanie od lewej do prawej strony, algorytm napotyka na kubelek i o szerszym zakresie $([2^{i-1}; 2^i - 1] : i > 1)$. W takim wypadku jeśli:
 - ◊ W kubelku znajduje się tylko jeden wierzchołek, to algorytm wykonuje relaksacje dla wszystkich krawędzi które z niego wychodzą i usuwa węzeł z kubelka.
 - ◊ W kubelku znajduje się więcej niż jeden wierzchołek, to algorytm zmienia wówczas zakresy wszystkich kubelków o indeksie mniejszym od i tak, aby ich sumaryczny zakres wynosił $[v_{min}.d; 2^i - 1]$, gdzie $v_{min}.d = \min\{v \in B[i]\}$ (z faktu, że nigdy nie będziemy przetwarzając wierzchołków u , takich że $u.d < v_{min}.d$, wiemy że wszystkie kubelki o indeksie mniejszym od i nigdy nie będą już używane, więc wolno nam je wykorzystać). Po wykonaniu tej operacji w kubelku $B[0]$ (o nowym zakresie $[v_{min}.d; v_{min}.d]$) znajdą się wszystkie wierzchołki o takiej samej odległości od źródła jak $v_{min}.d$. Algorytm rozpocznie wtedy, powracając do kroku pierwszego (1), skanowanie kubelków od początku.

Przykład działania takiego algorytmu zaprezentowano na rysunkach 3.16a–f, gdzie można zaobserwować wystąpienie wszystkich (opisanych wyżej) sytuacji.

Uwagi do algorytmu

W czasie wykonywania zmian zakresów należy podkreślić, że nie możemy dopuścić, by którykolwiek ze zmienionych zakresów $B[j].range : j < i$, gdzie i to aktualnie skanowany kubelek, przekroczył prawą stronę zakresu badanego kubelka. Stąd wartość $U = 2^i - 1$ będzie największą wartością jaką możemy przypisać



Rysunek 3.16: **Działanie algorytmu Dijkstry z wykorzystaniem kopków pozycyjnych** (a) Sytuacja po zainicjalizowaniu grafu G ($n = 5$; $C = 3$; $\lceil \log_2(n \cdot C) \rceil + 1 = 5$). (b) W wyniku relaksacji krawędzi wychodzących z węzła v_1 wstawiono do kubelków wierzchołki: v_2 oraz v_3 . (c) Z pierwszego niepustego kubelka zostaje wyjęty węzeł v_2 . Po relaksacji jego krawędzi zostają do kubelków dodane wierzchołki v_4 i v_5 , a odległość węzła v_3 od źródła uległa zmniejszeniu (jednak nadal pozostaje on w tym samym kubelku). (d) Następuje relaksacja wszystkich krawędzi które prowadzą do sąsiadów wierzchołka v_3 . Algorytm napotyka niepusty kubelek (B_3) o niejednostkowym zakresie, w którym znajduje się więcej niż jeden wierzchołek i $v_{min}.d = 4$. (e) Zastosowano nowe zakresy dla kubelków $B[0 \dots i - 1]$ ($i = 3$), po czym na właściwe miejsce zostały przeniesione z kubelka B_i wszystkie wierzchołki. (f) Wyciągając z kubelka $B[0]$ węzeł v_5 , algorytm wykonał relaksacje. Po wyciągnięciu v_4 (kolejność nie ma znaczenia, gdyż $B[0].range = [k; k]$), algorytm kończy działanie.

nowym zakresem (czy to z ich lewej, czy prawej strony). Podczas takiej zmiany szerokość zakresów poszczególnych kubelków nie ulega zmianie. Możemy zatem opisać nowe zakresy każdego z j kubelków ($j > 0$) jako $B[j].range = [v_{min}.d + 2^{j-1}; \min\{U, v_{min}.d + 2^j - 1\}]$. Zakres pierwszego kubelka ($B[0]$) zdefiniujemy jako $[v_{min}.d; v_{min}.d]$ (gdzie $v_{min}.d = \min\{v \in B[i]\}$). Aby usprawnić przeliczanie zakresów kubelków, możemy skorzystać z wcześniejszego faktu i na równi z tablicą $B[0 \dots \lceil \log_2(n \cdot C) \rceil]$ stworzyć tablicę $S[0 \dots \lceil \log_2(n \cdot C) \rceil]$, w której będziemy przechowywać stałe szerokości wszystkich kubelków. W związku z tym, że w algorytmie opartym o kopce pozycyjne zakresy kubelków zmieniają się dynamicznie w czasie jego trwania, nie możemy w prosty sposób określić do którego kubelka należy przenieść dany wierzchołek (czy to w wyniku relaksacji prowadzącej do niego krawędzi, czy też zmiany zakresów). Możemy jednak usprawnić

ten proces, gdyż wiemy, że ilekroć dany wierzchołek v będzie przemieszczał się między kubelkami, zostanie on wstawiony do kubelka o indeksie mniejszym niż ten, w którym się znajdował (wynika to z własności relaksacji, o sposobie konstrukcji nowych zakresów nie wspominając). Zauważając, że każdy kolejny kubelek posiada dwukrotnie szerszy zakres, możemy za każdym razem rozpoczynać proces szukania nowego kubelka dla danego wierzchołka v (przyjmijmy, że znajduje się w kubelku k) od kubelka o indeksie k , dla którego mamy największą szansę, że wspomniany wierzchołek doń trafi (lub w nim pozostanie).

Alternatywnym, nie omówionym tutaj rozwiązańiem, jest przyjęcie takich zakresów, by dla $B[j].range : j < i$ ich sumaryczny zakres wynosił $[v_{min}.d, v_{max}.d]$ oraz dodatkowo by zakres każdego z kubelków nie rósł wykładniczo, lecz liniowo — usprawniłoby to dystrybucję kubelków, powodując rzadszą konieczność zmian ich zakresów, lecz skomplikowałoby to równocześnie proces ich obliczania (nie mielibyśmy dłużej stałych szerokości zakresów dla kubelków).

Złożoność obliczeniowa

Algorytm działa w czasie $O(m + n \cdot \log(n \cdot C))$. Na tą złożoność składają się następujące elementy, które możemy wyróżnić podczas działania algorytmu:

- Aby zakończyć działanie, algorytm musi — w najgorszym przypadku — przeskanować wszystkie kubelki w tablicy $B[0 \dots \lceil \log_2(n \cdot C) \rceil]$. Każdą taką operację algorytm wykona w czasie stałym, więc daje nam to łącznie czas na poziomie $O(K)$, gdzie za K przyjmijmy liczbę kubelków ($K = \lceil \log_2(n \cdot C) \rceil + 1$).
- W przypadku napotkania sytuacji, w której algorytm rozpocznie zmienianie zakresów kubelków, będzie musiał w najgorszym przypadku wykonać K takich zmian (każda jest wykonywana w stałym czasie).
- W każdym takim przypadku, nim algorytm zacznie zmieniać zakresy kubelków, będzie musiał najpierw odnaleźć v_{min} w aktualnie skanowanym i -tym kubelku. Czas jaki jest potrzebny, by odnaleźć taki element, jest proporcjonalny do liczby wierzchołków w kubelku i (założmy, że jest ich d). Dla najgorszego przypadku będzie to n . Dodatkowo wiemy, że po znalezieniu takiego wierzchołka i zmienieniu zakresów dla wszystkich kubelków, każdy węzeł z kubelka i będzie musiał zostać przeniesiony do któregoś z pozostałych, którego indeks jest mniejszy od i . Jak już wcześniej wspominaliśmy, dla każdego takiego węzła konieczne jest znalezienie jego nowego kubelka, zaś pesymistyczny czas tej operacji to $O(K)$. Z tego wynika, że czas, potrzebny do przemieszczenia wszystkich wierzchołków z kubelka i , wynosi $O(d \cdot K)$, co pozwala nam zaniedbać czas potrzebny do wyszukania v_{min} .
- Algorytm wykonuje m relaksacji i każdy wierzchołek aktualizowany jest tylko raz, co daje nam łącznie $O(m + n \cdot K)$ czasu, jaki jest potrzebny na relaksację m krawędzi oraz przeniesienie maksymalnie n węzłów (każde wykonane w czasie $O(K)$).

Podsumowując, daje nam to następujące czasy wykonywanych operacji:

- czas potrzebny na procedurę zmiany zakresów i przeniesienie wszystkich wierzchołków: $O(K)$ (razem $O(n \cdot K)$),
- czas na znalezienie najmniejszego wierzchołka w kubelku i : $O(d)$, gdzie $d = |v \in B[i]|$ (razem $O(d \cdot K)$, zdominowane przed $O(n \cdot K)$),
- czas wykonywania wszystkich relaksacji w grafie: $O(m)$,
- czas aktualizacji wszystkich wierzchołków: $O(n \cdot K)$ (dla pojedynczego wierzchołka $O(K)$).

Sumując wszystko razem, otrzymujemy — podaną na wstępie — złożoność: $O(m + n \cdot K)$, gdzie, po zastąpieniu K , otrzymujemy $O(m + n \cdot \log(n \cdot C))$.

Drugie podejście

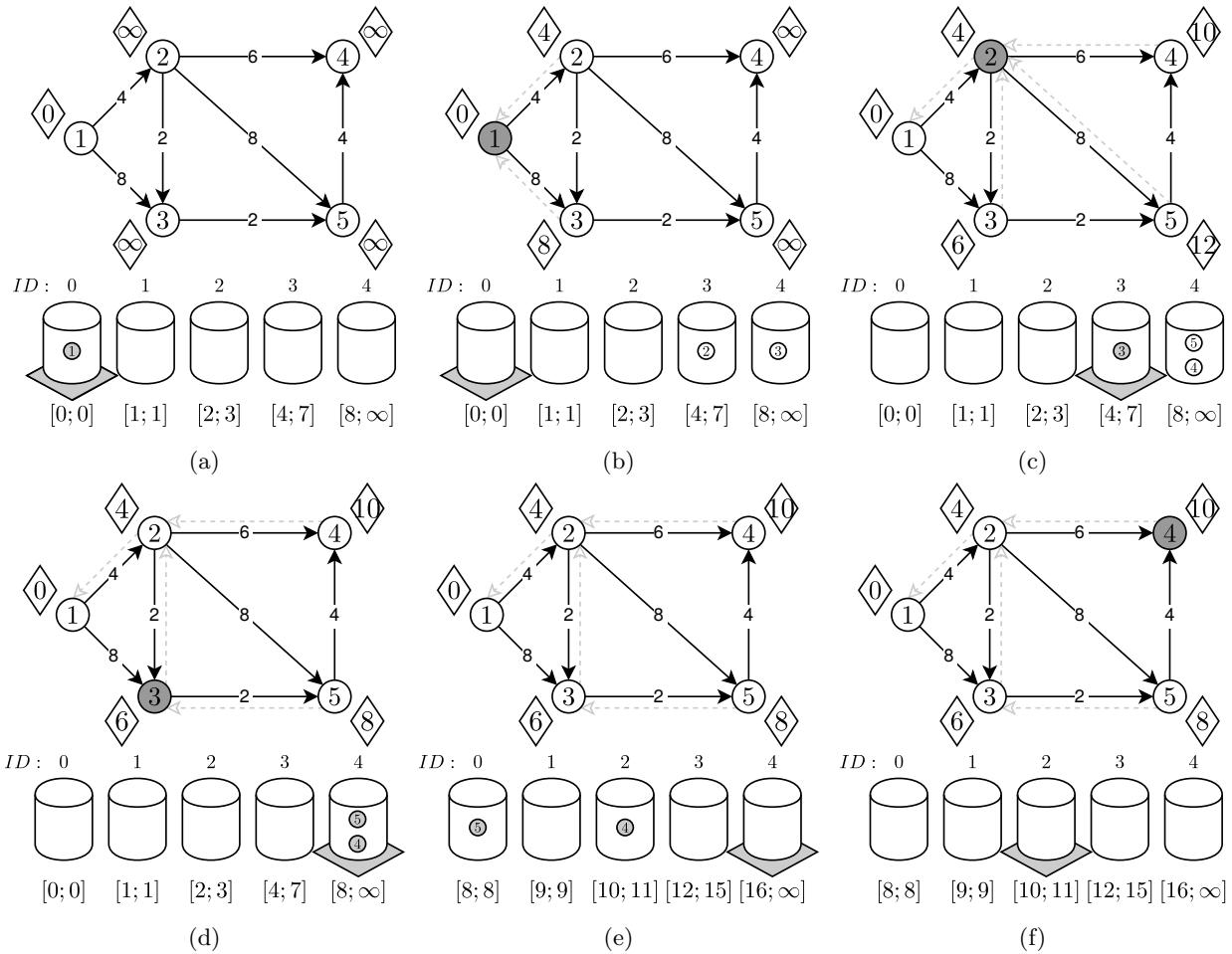
Chcemy ograniczyć liczbę potrzebnych nam kubelków do $\lceil \log_2(C) \rceil + 1$. By osiągnąć nasz cel, wykorzystamy pomysł, który omówiliśmy podczas opisywania implementacji algorytmu *DKM* (opartego na kubelkach z przepełnieniem). Przypomnijmy, że zgodnie ze wspomnianą implementacją mieliśmy do dyspozycji $a < C + 1$ kubelków, gdzie $a + 1$ ’y miał tę własność, że jego teoretyczny zakres wynosił $[k; \infty]$, a pozostałe zakresy kubelków były jednostkowe. W przypadku kopców pozycyjnych zdefiniujemy je następująco:

$$B[i].range = \begin{cases} [i; i] & \text{gdy } i = 0, \\ [2^{i-1}; 2^i - 1] & \text{gdy } i \in \{1, \dots, \lceil \log_2(C) \rceil\}, \\ [2^{i-1}; \infty] & \text{gdy } i = \lceil \log_2(C) \rceil + 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Algorytm wykonywania wszystkich operacji pozostaje ten sam. W przypadku napotkania przez algorytm kubelka $B[a]$ ($a = \lceil \log_2(C) \rceil + 1$), traktuje go on jak zwykły kubelek o niejednostkowym zakresie z (najprawdopodobniej) wieloma wierzchołkami w środku. Dla tego przypadku opisywaliśmy już kroki, jakie podejmie algorytm z tą tylko różnicą, że nie znamy górnego zakresu skanowanego kubelka (gdyż jest on teoretycznie nieskończony). W takiej sytuacji zamiast zmieniać zakresy wszystkich kubelków (poza aktualnie skanowanym, ostatnim w tablicy $K[0 \dots a]$) według wzoru: $B[j].range = [v_{min}.d + 2^{j-1}; \min\{U, v_{min}.d + 2^j - 1\}]$ (patrz 3.5.6), będziemy korzystać z nieznacznie zmodyfikowanej jego wersji, bez górnego ograniczenia (którego nie ma — wynosi ∞): $B[j].range = [v_{min}.d + 2^{j-1}; v_{min}.d + 2^j - 1]$. Dodatkowo, po przesunięciu zakresów wszystkich kubelków, będziemy musieli zaktualizować dolną granicę aktualnie badanego kubelka $B[a]$, tak aby jego zakres był o 1 większy od maksymalnie ustalonego (aby zakresy nie nachodziły na siebie a do przepełnienia trafiały tylko te wierzchołki v , których $v.d$ jest za duże, by trafić do któregoś z pozostałych kubelków). Zwróćmy uwagę, że zastosowanie w naszej implementacji kubelków z przepełnieniem nie ogranicza nas tylko do wspomnianych a kubelków. Możemy zastosować dowolną ich liczbę, lecz najlepsze rezultaty otrzymamy dla ustalonych parametrów — w tym przypadku $\lceil \log_2(C) \rceil + 1$. Na rysunkach 3.17a–f przedstawiamy przykład działania algorytmu dla $C = 8$ i $a = \lceil \log_2(8) \rceil + 1 = 4$, zaś na końcu tego rozdziału przedstawiamy alternatywną wersję algorytmu, którą opisujemy poniżej (zob. Pseudokod 13).

Uwagi do algorytmu

Tak samo jak wykorzystaliśmy ideę algorytmu *DKM* implementując kopce pozycyjne z przepełnieniem, podobnie możemy skonstruować algorytm w oparciu o strukturę dwupoziomową zastosowaną w algorytmie *DKD* (ang. *Dijkstra with Double-Level Buckets*). W tym przypadku, dla $\lceil \log_2(C) \rceil + 1$ kubelków, naszym celem jest stworzenie dwóch identycznych jednopoziomowych struktur o tym właśnie kubelkach, które naprawiennie będzie wykorzystywał nasz algorytm. Jak pamiętamy, w wyniku relaksacji dowolnej krawędzi dla dowolnego wierzchołka w grafie nigdy nie otrzymamy takiego węzła, którego odległość od źródła w porównaniu z tą, którą ma skanowany węzeł, byłaby większa od tej ostatniej o więcej niż C . Tym samym każdy wierzchołek, który wstawialiśmy do kubelków (czy też go przesuwaliśmy między nimi) nie „okrągał” aktualnie badanego kubelka (patrz 3.11). Jak wyraźnie widzieliśmy w algorytmie Dial, który wykorzystywał jednopoziomową strukturę z kubelkami, często zdarzały się w nim sytuacje, w których wstawialiśmy wierzchołki do kubelków będących „za” aktualnie skanowanym kubelkiem (to jest jeżeli skanowaliśmy kubelek o indeksie $i > 0$, to wierzchołek był wstawiany do kubelka o indeksie $0 \leq j < i$). W implementacji algorytmu opartego na kopcach pozycyjnych naszą kluczową obserwacją było to, że przy skanowaniu k ’tego kubelka wszystkie wcześniejsze (o indeksach $0 \leq k' < k$) nie były już potrzebne i mogliśmy zmienić ich zakresy. Aby uniknąć zdarzenia polegającego na wstawieniu wierzchołka do jednego z tych kubelków, rozmieszczamy kubelki na dwóch poziomach, gdzie łączny zakres każdego z nich wynosi C . Teraz, jeżeli wydarzy się opisywana przez nas sytuacja, zamiast wstawić węzeł do kubelka znajdującego się „za” aktualnie badanym kubelkiem, będziemy taki wierzchołek wstawać do drugiego poziomu kubelków (traktując go jako naturalne przedłużenie pierwszego, lecz zachowując dla niego zakresy takie same jak gdyby był on osobną strukturą). Wreszcie, jeżeli skończymy proces skanowania pierwszego poziomu kubelków (który, poza omawianą sytuacją, działa identycznie jak dla omawianych wcześniej algorytmów opartych o kopce pozycyjne), to następnym naszym krokiem będzie „podmienienie” poziomów i rozpoczęcie wykonywania tej samej procedury skanowania dla drugiego poziomu. Pierwszy poziom kubelków wraca wtedy do stanu początkowego (z tą różnicą, że teraz najmniejszy zakres powinien być większy o $2 \cdot C$ tak, aby stanowił naturalną kontynuację aktualnie skanowa-



Rysunek 3.17: **Działanie algorytmu Dijkstry z wykorzystaniem kopców pozycyjnych** (a) Sytuacja po zainicjalizowaniu grafu G ($C = 8, a = 4$). (b) Sytuacja po zdjęciu węzła v_1 z kubelka i wykonaniu relaksacji. (c) Po relaksacji wszystkich krawędzi wychodzących z wierzchołka v_2 , który został wyjęty z następnego niepustego kubelka, węzeł v_3 zmniejszył swoją odległość od źródła na tyle, by zostać przepięty z ostatniego kubelka do tego, który aktualnie jest badany. (d) Algorytm usunął z kubelka $B[3]$ ostatni wierzchołek oraz wykonał relaksacje jego krawędzi. Następnym niepustym kubelkiem jest kubelek z nieograniczonym zakresem. (e) Algorytm wyszukuje w kubelku $B[a]$ najmniejszy wierzchołek v_{min} , a następnie zmienia zakresy wszystkich wcześniejszych kubelków. Zakres pierwszego kubelka z definicji jest ustawiany na $[v_{min}.d; v_{min}.d]$, zaś dolna granica zakresu aktualnie badanego kubelka jest ustawiana na $B[a].range.max + 1$. Z kubelka $B[a]$ przepinane są wszystkie wierzchołki v , których $v.d$ już dłużej nie należy do $B[a].range$. (f) Po przepięciu wszystkich węzłów algorytm rozpoczyna skanowanie kubelków od pierwszego z nich. Po usunięciu jeszcze dwóch wierzchołków wszystkie kubelki są puste, a algorytm kończy pracę.

nego poziomu) i cały proces zaczyna się od początku. Czas działania takiego algorytmu jest asymptotycznie taki sam jak złożoność obliczeniowa poprzedniego podejścia, którą udowodnimy w następnym podrozdziale.

Złożoność obliczeniowa

Analiza złożoności obliczeniowej dla wersji algorytmu wykorzystującego kopce pozycyjne z ograniczoną liczbą kubelków jest dokładnie taka sama, jak dla wersji, którą analizowaliśmy poprzednio. Należy jednak się zastanowić nad możliwością dalszego zmniejszania liczby kubelków, jako że złożoność algorytmu który przedstawiliśmy, wynosi $O(m + n \cdot K)$, gdzie K to liczba kubelków. Dla wersji, w której mamy $\lceil \log_2(C) \rceil + 1$ kubelków jest to oczywiście $O(m + n \cdot \log(C))$. Co się stanie, jeżeli weźmiemy $K < \lceil \log_2(C) \rceil + 1$?

Przypomnijmy sobie, że dla algorytmu który wykorzystywał kubelki z przepełnieniem, wyznaczyliśmy największą możliwą liczbę iteracji jaką algorytm musi wykonać, by zakończyć działanie (przez iterację rozumiemy przeskanowanie wszystkich kubelków $B[0 \dots K - 1]$). Wykazaliśmy, że w najgorszym możliwym przypadku takich iteracji jest $O(\frac{n \cdot C}{a})$, gdzie a było mniejsze od $C + 1$. Zauważmy, że pierwszym elementem, którego złożoność analizowaliśmy przy badaniu algorytmu opartego o kopce pozycyjne, była operacja zmiany zakresów, gdzie

- czas potrzebny na procedurę zmiany zakresów i przeniesienie wszystkich wierzchołków: $O(K)$ (razem $O(n \cdot K)$).

Dla $\lceil \log_2(C) \rceil + 1$ kubelków mieliśmy pewność, że podczas każdej iteracji algorytm zostanie z nich usunięty co najmniej jeden węzeł (dla węzłów v i u różnica $v.d$ i $u.d$ nie mogła być większa niż C). Dla mniejszej liczby kubelków taka własność nie zachodzi i stąd — zamiast otrzymywać dobre oszacowanie $O(n \cdot K)$ — otrzymujemy $O(o \cdot K)$, gdzie $o > n$ w związku z czym rośnie nam także złożoność obliczeniowa całego algorytmu (dokładnie $o = O(\frac{n \cdot C}{2^K})$, gdzie dla $K = \lceil \log_2(C) \rceil + 1$ mamy $o = O(n)$). Szacowanie wynika z tego, że w najgorszym możliwym przypadku w każdej następnej iteracji zakresy kubelków będą dokładnie o 2^K większe — żaden zakres nie zostanie pominięty, a suma zakresów kubelków ze wszystkich iteracji będzie tworzyła partycję zakresu $[0 \dots n \cdot C]$.

Pseudokod 13: DKX (G, s)

```

1 begin
2   INIT-GRAFH ( $G, s$ )
3    $n \leftarrow \lceil \log_2(C + 1) \rceil$ 
4    $S[0] \leftarrow 1; S[1] \leftarrow 1$ 
5   foreach  $i \in \{2, \dots, n + 1\}$  do
6      $| S[i] \leftarrow 2 \cdot S[i - 1]$ 
7    $B_{\mathbb{L}}[0] \leftarrow \text{SET-RANGE}(0, 0); B_{\mathbb{U}}[0] \leftarrow \text{SET-RANGE}(C + 1, C + 1)$ 
8   foreach  $i \in \{1, \dots, n\}$  do
9      $| B_{\mathbb{L}}[i] \leftarrow \text{SET-RANGE}(S[i], S[i + 1] - 1)$  /* Ustawia zakres kubelka o indeksie  $i$  na */
10     $| B_{\mathbb{U}}[i] \leftarrow \text{SET-RANGE}(C + 1 + S[i], C + 1 + S[i + 1] - 1)$  /*  $[S[i]; S[i + 1] - 1]$  */
11    $B \leftarrow B_{\mathbb{L}}; B \leftarrow \text{INSERT}(s)$ 
12  for  $i = 0$  to  $n$  do
13    if  $|B[i]| == 1$  lub zakres kubelka jest jednostkowy then
14      foreach  $v_j \in B[i]$  do
15        Usuń  $v_j$  z  $B[i]$ 
16        foreach  $e_{jk} : v_j \xrightarrow{1} v_k$  do
17           $| RELAX(v_j, v_k)$  /* Jeśli  $v_k.d$  się zmieniło, to przenieś  $v_k$  do odpowiedniego kubelka. */
18    else
19       $minDist \leftarrow \min\{v_j.d : v_j \in B[i]\}$ 
20       $B[0] \leftarrow \text{SET-RANGE}(minDist, minDist)$ 
21      foreach  $B[j] : 1 \leq j < i$  do
22         $| B[j] \leftarrow \text{SET-RANGE}(minDist + S[j], \min\{minDist + S[j + 1] - 1, B[i].rrange\})$ 
23         $i \leftarrow 0$ 
24      Przenieś z  $B[i]$  wszystkie wierzchołki do odpowiednich kubelków i kontynuuj pętlę 12–24
25  Ustaw odpowiednie zakresy dla wszystkich kubelków  $B[0, \dots, n]$  /* Patrz „Uwagi do algorytmu”. */
26   $B \leftarrow (B == B_{\mathbb{L}}) ? B_{\mathbb{U}} : B_{\mathbb{L}}$ 
27  if  $\exists i \in \{0, \dots, n\} B[i] \neq \emptyset$  then
28    Powróć do pętli w linii 12–24
29  else
30    Obie listy kubelków  $B_{\mathbb{L}}$  oraz  $B_{\mathbb{U}}$  są puste. Algorytm kończy pracę.
```

Inne algorytmy

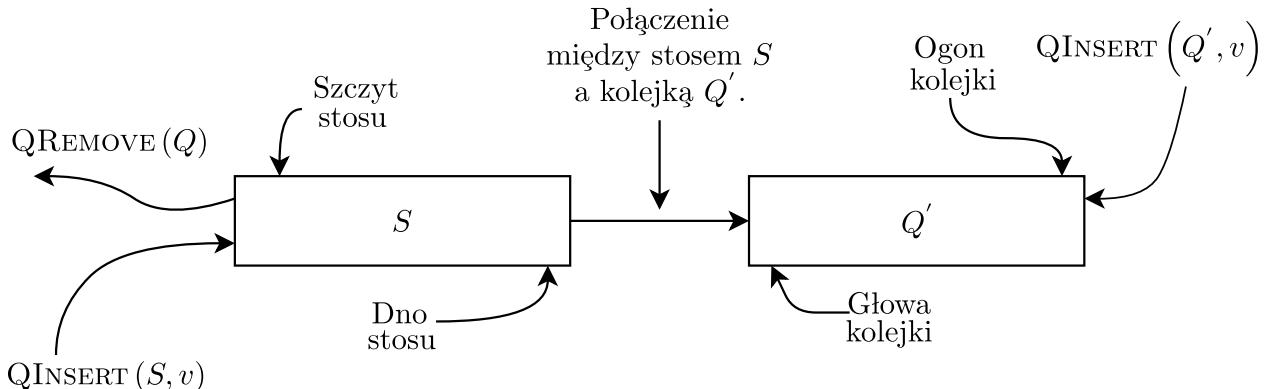
W poprzednim rozdziale skupiliśmy się głównie na algorytmie Dijkstry i jego różnych implementacjach. Jeszcze wcześniej wprowadziliśmy algorytmy, które stanowiły dla nas tło do dalszych rozważań (algorytm sortowania topologicznego, czy Bellmana-Forda). Rozpoczęliśmy od algorytmów o kwadratowej złożoności obliczeniowej ($O(n^2)$), skończyliśmy zaś na implementacji kopców pozycyjnych, dla których czas działania w najgorszym przypadku wynosił $O(m + n \cdot \log(C))$. W tym rozdziale będziemy chcieli zaprezentować kilka mniej znanych algorytmów rozwiązujących problem najkrótszych ścieżek — między innymi algorytmy zaproponowane przez U.Pape'a (algorytm *PAP*) oraz Stefana Pallottino (modyfikacja poprzedniego algorytmu) [11, 4.]. Na końcu przedstawimy algorytm progowy, który jest algorytmem typu *Label-Correcting*.

4.1 Kombinacje struktur

Do konstrukcji pierwszych dwóch algorytmów wykorzystamy połączenia dwóch różnych typów abstrakcyjnych struktur danych, którymi będą kolejki: *FIFO* (ang. *First In First Out*) oraz *LIFO* (ang. *Last In First Out*). Do implementacji pierwszej z nich oryginalnie był wykorzystany stos, zaś drugą będziemy reprezentować przez zwykłą listę podwójnie wiązaną.

4.1.1 Algorytm przyrostowy

Pseudokod algorytmu przyrostowego (ang. *Graph Growth Algorithm*) wygląda identycznie jak ten, który przedstawiliśmy dla generycznego algorytmu Dijkstry. Różnica między tymi dwoma implementacjami wynika ze specyficznej struktury, jaka została zastosowana w tym przypadku, a której przykład znajduje się poniżej:



Rysunek 4.1: Struktura wykorzystywana w algorytmie *PAP*

W zastosowanym rozwiązaniu wyróżniamy dwie struktury, z których pierwsza jest implementacją kolejki *FIFO* (stos), druga zaś to zwykła kolejka typu *LIFO*. Obie są połączone ze sobą, co oznacza że za ostat-

nim elementem należącym do stosu S , znajduje się pierwszy wierzchołek w kolejce Q' . Dla takiej struktury wyróżniamy następujące operacje:

- $\text{QREMOVE}(Q)$ — usuwa ze szczytu stosu (lub początku kolejki Q' , gdy stos jest pusty) wierzchołek v ,
- $\text{QINSERT}(_, v)$ — gdy wierzchołka v nie ma jeszcze ani na stosie S , ani w kolejce Q' , w zależności od właściwości danego wierzchołka wykonujemy jedną z możliwych operacji:
 - ◊ $\text{QINSERT}(S, v)$ — jeżeli w momencie wstawiania wierzchołek jest osiągalny ze źródła ($v.d < \infty$) to jest on wstawiany na szczyt stosu S ,
 - ◊ $\text{QINSERT}(Q, v)$ — w przeciwnym przypadku (gdy węzeł jest nieosiągalny — $v.d = \infty$) wierzchołek wstawiany jest na koniec kolejki Q' .

Oprócz nich wyróżniamy jeszcze operację $\text{IS-EMPTY}(Q)$, gdzie poprzez Q oznaczamy całą powyżej opisaną strukturę (jest ona pusta, gdy zarówno w S jak i Q' nie ma wierzchołków). Dodatkowo chcemy, by pierwsza ze struktur (ta, z której ściągamy elementy) miała własności kolejki priorytetowej [11, 4.77–78].

Uwagi do algorytmu

Aby efektywnie zaimplementować kolejkę priorytetową z wykorzystaniem stosu, będziemy potrzebować albo rekurencyjnie wyciągać elementy ze stosu, aż do momentu, gdy natrafimy na odpowiednie miejsce, w które włożymy nowy (bądź aktualizowany) element, albo możemy wykorzystać do tego drugi stos — w takiej sytuacji będziemy przenosić elementy pierwszego stosu na drugi, porównując przy okazji każdy taki element z tym, który chcemy na stos wstawić (niech będzie to element v). W momencie, gdy z pierwszego stosu wyciągniemy taki element u , dla którego $u.v \geq v.d$, wstawiamy na stos wierzchołek v , a następnie z powrotem przekładamy elementy z pomocniczego stosu na ten właściwy. Pierwotna kolejność pozostałych elementów nie ulega zmianie. W przypadku modyfikacji wierzchołka v już będącego na stosie, przekładamy elementy ze stosu do momentu, w którym nie wyciągniemy interesującego nas węzła. Następnie przekładamy z powrotem elementy, które dopiero co włożyliśmy na drugi stos, do momentu, w którym na szczytce tego stosu nie znajdzie się wierzchołek u , którego $u.d \leq v.d$ (lub $u.d < v.d$ — w zależności co chcemy osiągnąć). Po wystąpieniu takiej sytuacji na oryginalny stos wstawiamy zaktualizowany element, a następnie kontynuujemy przerzucanie wierzchołków z tymczasowego stosu, dopóki ten nie zostanie pusty, a na szczytce tego pierwszego z powrotem nie znajdzie się element, który był tam uprzednio (chyba, że zaktualizowany element okaże się być teraz najmniejszym elementem na stosie). Należy jednak zwrócić uwagę, że w oryginalnej implementacji nie mamy wsparcia dla operacji aktualizacji wierzchołka w kolejce, nie zależy nam w niej na własnościach kolejki priorytetowej, wyciągamy elementy „po kolei”, zaś złożoność obliczeniowa w najgorszym przypadku staje się wykładnicza.

Złożoność obliczeniowa

Jak w każdym przypadku, gdzie wykorzystywaliśmy kolejki priorytetowe do zwracania wierzchołków v , takich że $v.d = \min\{u.d : u \in Q\}$, także tutaj nasza analiza czasu działania algorytmu opiera się będzie na analizie kosztów związanych z kosztami wykonywania operacji na takiej kolejce (wzór 3.4.1), a zatem:

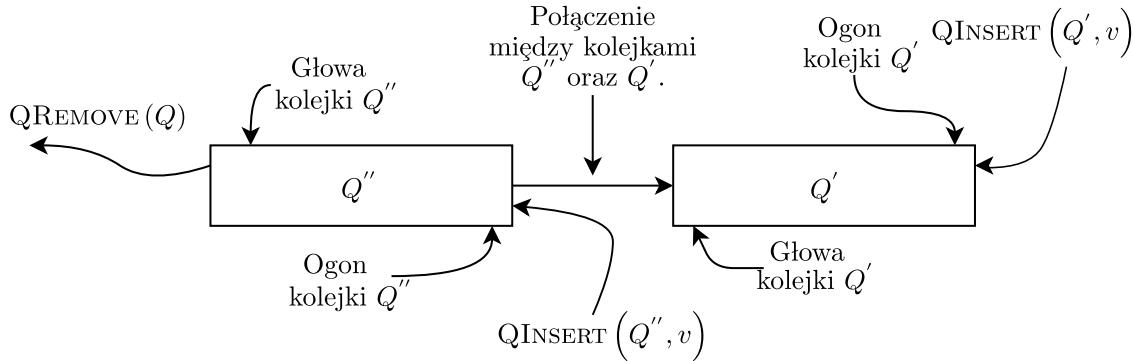
- w każdym kroku algorytm trwale usuwa jeden wierzchołek v z kolejki, gdzie w tym momencie już $v.d = \delta(s, v)$. Ta własność została przez nas udowodniona w 3.2.4.
- Wyszukanie na stosie takiego elementu v , by $v.d = \min\{u.d : u \in Q\}$ w najgorszym przypadku zajmie $O(n)$ (gdzie przy wykorzystaniu dwóch stosów sprowadzi się to do wyciągnięcia wszystkich elementów z pierwszego, zapamiętania najmniejszego podczas wstawiania ich na drugi stos, a następnie — przy operacji odwrotnej — przepięcia ich z powrotem na stos pierwszy, przy pominięciu zapamiętanego elementu).
- Algorytm wykona skanowanie każdego wierzchołka dokładnie jeden raz, więc liczba relaksacji jakie wykona, będzie równa m .

Da nam to złożoność algorytmu PAP na poziomie $O(m + n^2)$ ¹.

¹ Jeżeli zrezygnowalibyśmy z wyszukiwania minimalnych elementów na stosie to złożoność czasowa może sięgać nawet czasów wykładniczych [11, 4].

4.1.2 Algorytm przyrostowy z dwoma kolejkami

Konsekwencją chęci usprawnienia poprzedniego algorytmu jest modyfikacja jego słabego punktu — stosu, na którym wymusiliśmy własności kolejki priorytetowej. Algorytm, oparty na dwóch kolejkach (ang. *Graph Growth Algorithm with Two Queues*) został opracowany przez Stefana Pallottino jako modyfikacja pierwszego algorytmu [11, 4.], która w miejsce stosu S wprowadziła drugą kolejkę, tak jak to przedstawiono na rysunku 4.2.

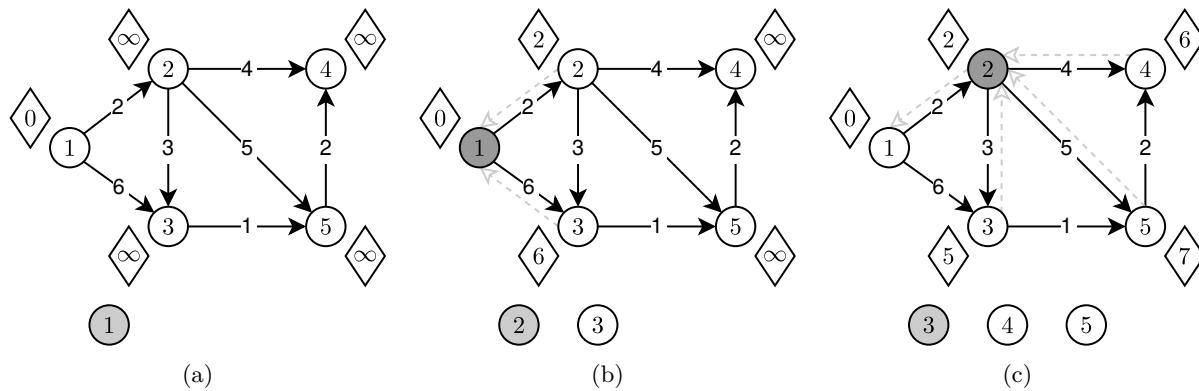


Rysunek 4.2: Struktura wykorzystywana w algorytmie TQQ

Widzimy, że jedyna modyfikacja, jaka została dokonana w oryginalnej strukturze, to przedefiniowanie operacji wstawiania elementów do struktury, która teraz wygląda w następujący sposób:

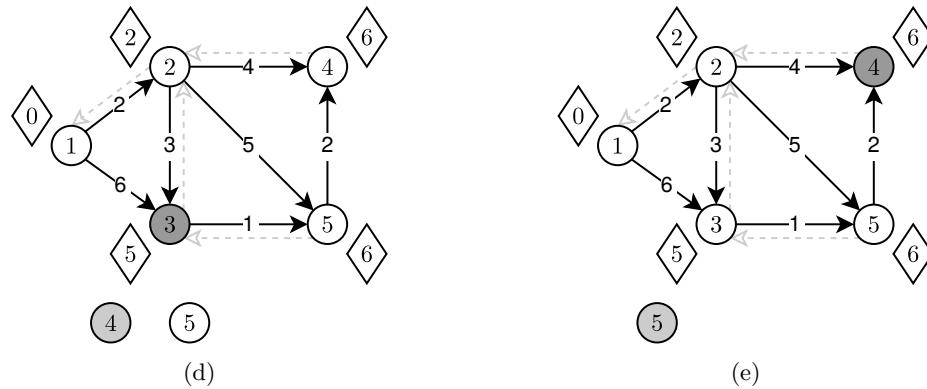
- $\text{QINSERT} (? , v)$ — gdy wierzchołka v nie ma w żadnej z kolejek Q' i Q'' , w zależności od właściwości danego wierzchołka wykonujemy jedną z możliwych operacji:
 - ◊ $\text{QINSERT}(S, v)$ — jeżeli wierzchołek w momencie wstawiania jest osiągalny ze źródła ($v.d < \infty$), to jest on wstawiany na koniec kolejki Q'' .

Reszta operacji nie ulega zmianie, zaś analiza złożoności obliczeniowej pozostaje dokładnie taka sama (z wyjątkiem mniej kosztownej operacji wyszukiwania minimum w kolejce priorytetowej)².



Rysunek 4.3: Działanie algorytmu z dwoma kolejkami (a) Algorytm rozpoczyna pracę ze źródłem w wierzchołku v_1 . (b) W wyniku relaksacji jego krawędzi wychodzących na koniec kolejki Q'' kolejno trafiają wierzchołki v_2 i v_3 . (c) Algorytm pobiera element ze stosu po czym wykonuje dla krawędzi e_{23} , e_{24} , e_{25} operację RELAX.

² Znowu możemy zrezygnować z własności kolejki priorytetowej i otrzymać złożoność na poziomie $O(n^2 \cdot m)$. Może się jednak okazać, że dla pewnych grafów algorytm będzie dawał dość dobre wyniki [7, 3.10.2].



Rysunek 4.3: (d–e) Algorytm kontynuuje działanie według tego samego schematu i kończy pracę w momencie, gdy na żadnej z kolejek Q'' i Q' nie ma już elementów.

4.2 Algorytm progowy

Ostatnim algorytmem, jaki omówimy, będzie algorytm progowy (ang. *Threshold algorithm*). Pojęcie progu pojawia się w wielu dziedzinach informatyki (na przykład w grafice komputerowej) i oznacza graniczną wartość, tyczącą się konkretnego zbioru danych, dla którego będącego poniżej/powыżej wartości progowej, ma zajść konkretna operacja. Nie inaczej jest w przypadku algorytmu wyszukiwania najkrótszych ścieżek, dla których wartość progowa będzie pewną z góry ustaloną odległością wierzchołków od źródła. Wszystkie węzły v o odległości $d.v$ większej od zadanej wartości progowej będą trafiały do zbioru wierzchołków, których badaniem zajmiemy się dopiero wówczas, gdy wykonamy wszystkie możliwe operacje dla pozostałych elementów. Gdy taka sytuacja nastąpi, wartość graniczna ulegnie stosownemu zwiększeniu, tym samym odległość pewnej liczby wierzchołków od źródła stanie się mniejsza niż nowo ustalony próg. Następnie algorytm wykona te same operacje, które wykonał dla wcześniejszego zbioru, aż do momentu w którym wartość progowa nie zostanie przezeń podniesiona na tyle wysoko, by zbiór wierzchołków o odległości od źródła, przekraczających tę wartość, był pusty, podobnie jak zbiór pozostałych wierzchołków.

Pseudokod 14: THR (G, s)

```

1 begin
2   INIT-GRAPH ( $G, s$ )
3    $t \leftarrow$  wylicz wartość progową
4    $L \leftarrow \{s\}$                                 /* Lista zawierająca wierzchołki  $v : v.d < t$  */
5    $\bar{L} \leftarrow \emptyset$                          /* Lista zawierająca pozostałe wierzchołki */
6   while Lista  $L$  nie pusta do
7     while Lista  $L$  nie pusta do
8       Usuń wierzchołek  $v_i$  z końca listy  $L$ 
9       foreach  $e_{ij} : v_i \xrightarrow{v_j} v_j$  do
10        RELAX ( $v_i, v_j$ )
11        if  $v_j \notin \{L, \bar{L}\}$  then
12          Wstaw węzeł  $v_j$  na koniec  $L$ , jeśli  $v_j.d < t$ . W przeciwnym przypadku wstaw na
13          koniec  $\bar{L}$ 
14        else if Po relaksacji  $v_j.d < t$  i  $v_j \in \bar{L}$  then
15          Przenieś węzeł  $v_j$  na koniec listy  $L$ 
16         $t \leftarrow t + \min \{v.d : v \in \bar{L}\}$ 
17        Przepnij wszystkie  $v : v.d < t$  do  $L$ 
```

Złożoność obliczeniowa

W najgorszym możliwym przypadku wartość progowa na samym początku zostanie ustawiona na tyle wysoko, by wszystkie wierzchołki trafiły do listy L (patrz Pseudokod 14). Otrzymujemy wówczas natychmiastowo złożoność $O(m \cdot n)$, gdyż nie jesteśmy w stanie nic powiedzieć o kolejności skanowania wierzchołków (za każdym razem wybieramy po prostu ostatni z listy, gdzie $|L| = n$). Założymy jednak, że mamy daną wartość progową t i niech funkcja $L(i)$ oznacza zbiór wierzchołków jakie znajdują się na liście L po i -tym zwiększeniu wartości progowej.

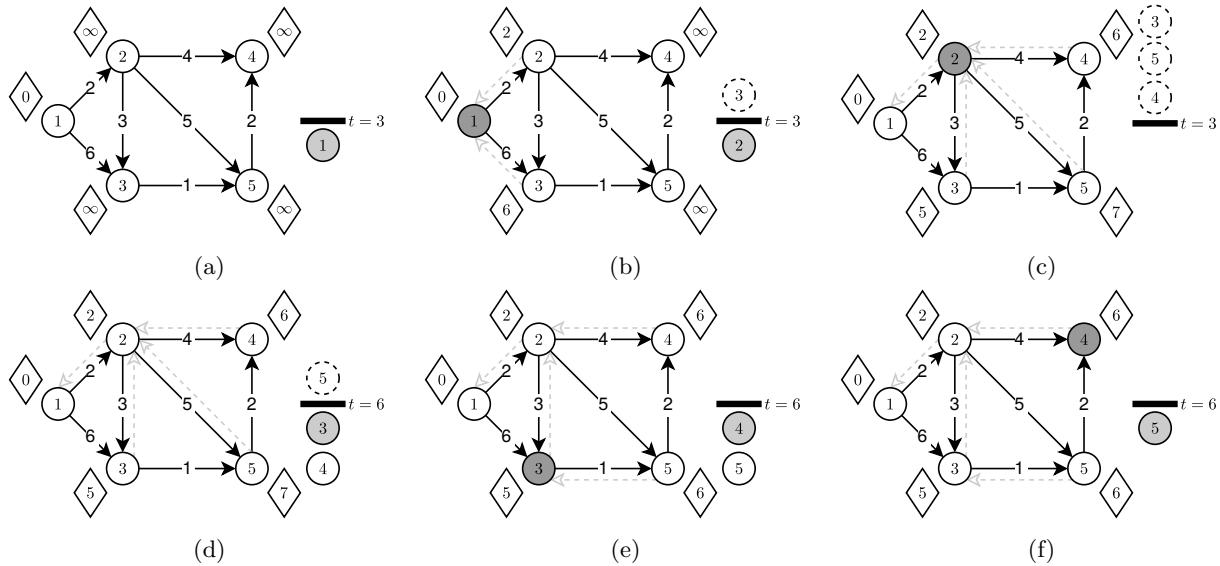
- W najgorszym możliwym przypadku największą odległośćą węzła od źródła będzie $(n - 1) \cdot C$. Znając wartość progową t oraz zakładając, że za każdym razem w zbiorze wierzchołków \bar{L} najmniejszy wierzchołek v_{min} to taki, dla którego $v_{min}.d = t + 1$, możemy wyznaczyć liczbę iteracji jaką w takim przypadku będzie musiał wykonać algorytm, nim skończy działanie. Takich iteracji zostanie wykonanych co najwyżej $O\left(\frac{n \cdot C}{t}\right)$ (podobną analizę przeprowadziliśmy dla algorytmu, wykorzystującego kubelki z przepełnieniem, gdzie ostatni kubek można porównać do zbioru \bar{L}).
- W każdej i -tej iteracji do listy L w danym przypadku trafia $|L(i)|$ węzłów. Dla każdego z nich zachodzi $t_{nowe} < v.d < t_{nowe} + t$. Wiedząc, że $t_{nowe} = \min\{v.d : v \in \bar{L}\}$, możemy oszacować maksymalną liczbę razy, jaką każdy wierzchołek v będzie skanowany, zanim nie zostanie usunięty z aktualnej listy L . Ponownie wykorzystując analogię do analizy algorytmu kubekowego (tym razem DKA), zauważmy, że z każdą wykonaną relaksacją krawędzi, która prowadzi do wierzchołka v , jego odległość od źródła ulega zmniejszeniu o co najmniej 1. Zatem, jeżeli dla aktualnie badanego L znajdują się w nim wierzchołki spełniające $t_{nowe} < v.d < t_{nowe} + t$, to po najwyżej t skanowaniach wierzchołka v zostanie on trwale usunięty z listy L (w następnych iteracjach do listy L będą trafiać wierzchołki u o $u.d > v.d$, więc ponowna relaksacja krawędzi wchodzącej do węzła v na pewno nie zajdzie). Zatem nasz algorytm wykona maksymalnie $O(m \cdot t)$ relaksacji.
- W każdej iteracji usunięcie wszystkich elementów z $L(i)$ zajmuje $O(L(i))$. Ponieważ możemy wykonać maksymalnie $O(m \cdot t)$ relaksacji, to podczas trwania algorytmu usuniemy co najwyżej $O(n \cdot t)$ wierzchołków.

Łącznie zatem otrzymujemy złożoność na poziomie $O(m \cdot t + n \cdot t + \frac{n \cdot C}{t}) = O(m \cdot t + n \cdot (t + \frac{C}{t}))$.

Nie jest to koniec przeprowadzanej przez nas analizy, gdyż omineliśmy analizę czasu, jaki potrzebny jest do odnalezienia minimalnych wierzchołków w \bar{L} dla każdej z $O\left(\frac{n \cdot C}{t}\right)$ iteracji. Zakładając najgorszy możliwy przypadek, natychmiast otrzymujemy górne ograniczenie $O(n \cdot \frac{n \cdot C}{t})$. Jest ono jednak bardzo niedokładne gdyż zakłada, że z każdą iteracją musimy przeszukać $O(n)$ wierzchołków w \bar{L} , by znaleźć ten najmniejszy. Nie jest to prawda, chociażby z tego względu, że algorytm kończy działanie tylko wtedy, gdy w powyższym zbiorze nie ma już żadnych elementów. Przyjmijmy zatem bardziej optymistyczną wersję: niech w każdej z $O\left(\frac{n \cdot C}{t}\right)$ iteracji ze zbioru \bar{L} będzie usuwanych tyle samo elementów. Daje nam to od razu ich liczbę: mamy $n - 1$ wierzchołków, z czego ich liczba w liniowy sposób maleje w czasie trwania wymienionej liczby iteracji, a zatem każdorazowo usuwanych jest ich $\frac{t}{C}$. W czasie działania całego algorytmu suma liczby elementów w zbiorze \bar{L} wynosi zatem:

$$\begin{aligned}
 D &= \sum_{i=\frac{(n-1) \cdot C}{t}}^1 i \cdot \frac{t}{C} \approx \frac{t}{C} \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n \cdot C}{t}} i \\
 &= \frac{t}{C} \cdot \frac{C \cdot n \cdot (C \cdot n + t)}{2 \cdot t^2} \\
 &= \frac{n \cdot (n \cdot C + t)}{2 \cdot t}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Czas wyszukiwania minimalnego wierzchołka w zbiorze \bar{L} zawsze jest proporcjonalny do liczby jego elementów, więc ostatecznie mamy: $O\left(\frac{n^2 \cdot C}{t}\right)$. Taki sam wynik otrzymaliśmy dla analizy wcześniejszego przypadku. Tym samym złożoność całego algorytmu to $O\left(m \cdot t + \frac{n^2 \cdot C}{t}\right)$.



Rysunek 4.4: **Działanie algorytmu opartego o wartość progową** (a) Sytuacja po zainicjalizowaniu grafu $G = (V, E)$ przez INIT-GRAF ($t = 3$). Poniżej wartości progowej znajduje się węzeł v_1 , będący źródłem. Powyżej znajdują się zawartości listy \bar{L} (obecnie pusta). (b) Sytuacja po wykonaniu relaksacji krawędzi e_{12} oraz e_{13} . Wartość $v_3.d \geq t$ — wierzchołek został wstawiony do \bar{L} . (c) Po wykonaniu relaksacji krawędzi wychodzących z wierzchołka v_2 , na koniec kolejki, ponad wartością progową, kolejno zostały dodane węzły: v_5 i v_4 . Lista L jest pusta. (d) Próg zostaje zwiększony o t oraz zostały przeniesione na koniec kolejki wszystkie wierzchołki v , dla których $v.d < t$ (wierzchołki z \bar{L} do L są przepinane w kolejności od góry pierwnej listy do ogona a każdy węzeł zostaje wstawiony na koniec drugiego zbioru). (e) Z listy L zostaje pobrany minimalny wierzchołek a następnie algorytm wykonuje relaksację krawędzi wychodzącej z danego wierzchołka (e_{35}), w wyniku czego węzeł v_5 zostaje przepięty na koniec listy L . (f) Po wykonaniu pozostałych relaksacji i opróżnieniu listy \bar{L} algorytm kończy działanie.

W naszym przypadku za wartość progową uznaliśmy średnią arytmetyczną kosztów wszystkich ścieżek w grafie, odpowiednio przemnożoną przez stałą, wyznaczaną przez ogólną gęstość grafu. Dokładniej:

$$threshold = t \cdot \frac{PARAM}{DENCE}, \quad (4.2)$$

gdzie

$$DENCE = \min \left(d, \frac{m}{n} \right) \quad (4.3)$$

$$t = \frac{1}{m} \cdot \sum_{e_{ij} \in E} c_{ij} \quad (4.4)$$

$$5 \leqslant PARAM \leqslant 10. \quad (4.5)$$

Przykład tak wybranego parametru algorytmu progowego można znaleźć w pracy autorstwa Warrena Powella [9, 2].

Wyniki eksperymentalne

Chcąc podsumować dotychczas omówione zagadnienia, sprawdzimy czy teoretyczne rozważania na temat algorytmów wyszukiwania najkrótszych ścieżek w znacznej mierze pokrywają się z eksperymentalnymi wynikami, jakie przedstawimy w tym rozdziale. Sprawdzimy czy do tej pory wyłożona teoria wyjaśni sposób zachowywania się (w trakcie testów) wszystkich omówionych metod rozwiązywania problemu najkrótszych ścieżek oraz w jakim stopniu analizy, jakie do tej pory wykonaliśmy (w wielu przypadkach uciekając się do analizy najgorszego przypadku), odzwierciedlają faktyczne zachowanie się badanych algorytmów w prawdziwym środowisku. Aby się o tym przekonać, zbadać zachowanie się poszczególnych algorytmów dla jak najbardziej różnorodnych sieci, część eksperymentalna została podzielona na trzy części. W pierwszej z nich przeanalizujemy zachowanie się algorytmów dla prawdziwych sieci drogowych, do czego posłużą nam grafowe reprezentacje sieci dróg poszczególnych obszarów Stanów Zjednoczonych Ameryki. Druga część testów posłuży nam do wydzielenia tych algorytmów, które dobrze radzą sobie ze stosunkowo rzadkimi grafami oraz tych, których używanie jest zalecane dla grafów o dużo większym stosunku liczby krawędzi do posiadanych węzłów. Na koniec przyjrzymy się algorytmom, które mogą opcjonalnie przyjmować parametry. Sprawdzimy, czy te, które wyliczyliśmy przy okazji omawiania każdego z nich po kolej, rzeczywiście dadzą najlepsze rezultaty dla zadanych grafów (np. dla algorytmu *DKR* był to parametr $d = \max\{2, \lceil \frac{m}{n} \rceil\}$). Tutaj także zostały zgromadzone wszystkie wykresy tyczące się badanych algorytmów, których wyczerpującym omówieniem zajmowaliśmy się we wszystkich poprzednich rozdziałach.

5.0.1 Środowisko testowe

W celach przeprowadzenia eksperymentów został użyczony serwer Politechniki Wrocławskiej o nazwie OTRYT. Wszystkie testy zostały przeprowadzone zdalnie na środowisku LINUX DEBIAN w wersji 7.7, pracującego pod dyktandem 80 procesorów INTEL® XEON® CPU E7- 4850 @ 2.00GHz, zaopatrzonych w 256 GB pamięci RAM i 6,3 TB przestrzeni dyskowej. Testy stabilności algorytmów i inne pomniejsze testy zostały zaś wykonane na lokalnej maszynie pod kontrolą systemu LINUX UBUNTU w wersji 14.04 LTS z 4 GB pamięci dynamicznej oraz 74 GB przestrzeni dyskowej pod dyktandem procesora INTEL® CORE™ i5 CPU M 540 @ 2.53GHz i skompilowane przy pomocy GCC w wersji 4.8.2.

5.1 Mapa Ameryki

Zbiór danych do tej części testowej pochodzi z DIMACS Implementation Challenge¹, którego dziewiąta edycja skupiała się wokół algorytmów wyszukiwania najkrótszych ścieżek, tworząc jednocześnie pewien standard, jeżeli chodzi o interfejsy algorytmów, które ten problem rozwiązują. W tym rozdziale nas jednak bardziej będą interesować dane źródłowe, które dostarczył organizator, by przetestować możliwości opracowanych specjalnie na „Dziewiąte Wyzwanie” algorytmów, niż samo wydarzenie, z okazji którego takie dane dostarczono. Wśród danych testowych znalazły się grafowe reprezentacje takich sieci dróg jak mapa New York City (składająca się z ponad 250 tysięcy węzłów), stanu Kalifornia, czy też wreszcie sieć dróg całych Stanów Zjednoczonych Ameryki (których liczba węzłów sięga prawie 24 milionów). Ze względu na ogrom danych, jakie każdy z algorytmów będzie musiał przetworzyć, za cel w tego typu testach (ang. *Stress testing*) zostało obrane odnalezienie najkrótszych ścieżek do wszystkich węzłów z arbitralnie wybranych źródeł (w liczbie 500), osobno dla każdego grafu, których najważniejsze dane przedstawione są w tabeli 5.1.

¹ Adres strony internetowej: <http://www.dis.uniroma1.it/challenge9/>

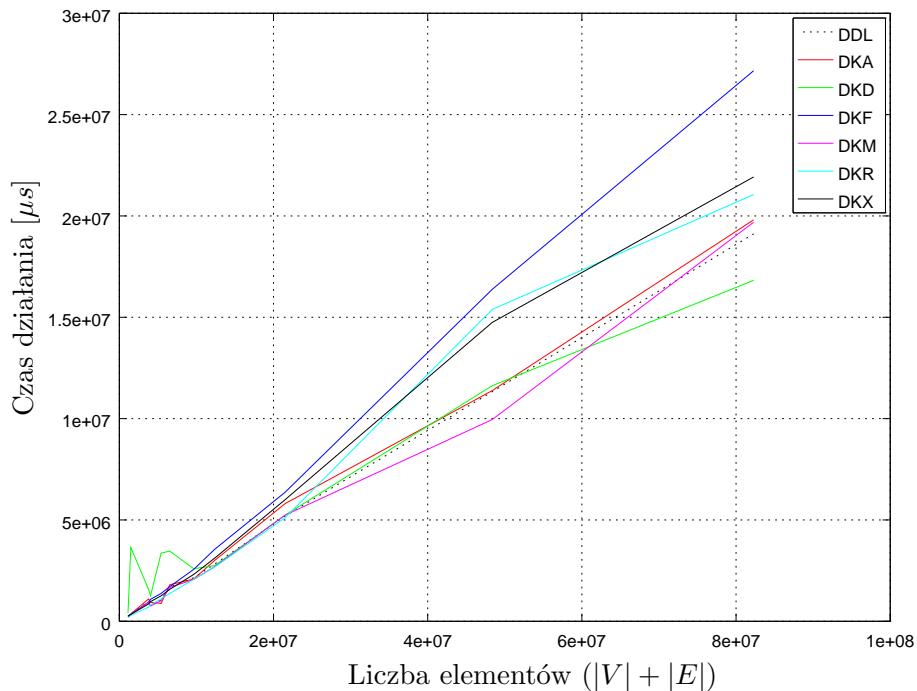
5.1.1 Metodyka i dane

Dla zachowania wiarygodności otrzymanych wyników każdy test został powtórzony $t = 40$ razy dla wszystkich algorytmów, które zostały dopuszczone do testów (nie uwzględniono w testach tych algorytmów, które stanowiły podstawę do implementacji ich sprawniejszych alternatyw, mających kwadratową złożoność w średnim przypadku bądź nie będących algorytmami, przeznaczonymi do pracy z tego typu grafami) i zostały wymienione w tabeli 5.2.

Nazwa Testu		Liczba elementów		Gęstość	Budowa sieci		
					Statystyki kosztów		
Skrót	Opis	Wierzchołków	Krawędzi		$\max(c_{ij})$	$\text{avg}(c_{ij})$	$\sigma(c_{ij})$
NY	New York City	264 346	733 846	2,78	36 946	1 293,30	1 129,81
BAY	Zatoka San Francisco	321 270	800 172	2,49	943 05	1 630,17	2 386,23
COL	Kolorado	435 666	1 057 066	2,43	137 384	3 499,81	5 375,39
FLA	Floryda	1 070 376	2 712 798	2,53	214 013	2 043,46	2 916,05
NW	USA (płn.-zach.)	1 207 945	2 840 208	2,35	128 569	3 335,88	4 824,52
NE	USA (płn.-wsch.)	1 524 453	3 897 636	2,56	6 3247	1 714,93	2 009,48
CAL	Kalifornia i Nevada	1 890 815	4 657 742	2,46	215 354	2 695,01	4 270,10
LKS	Wielkie Jeziora	2 758 119	6 885 658	2,50	138 911	2 718,75	3 450,13
E	Wschodnie USA	3 598 623	8 778 114	2,44	200 760	2 115,62	2 725,84
W	Zachodnie USA	6 262 104	15 248 146	2,43	368 855	3 743,86	5 288,60
CTR	Centralne USA	14 081 816	34 292 496	2,44	214 013	2 810,69	3 380,14
USA	Stany Zjednoczone	23 947 347	58 333 344	2,44	368 855	2 950,32	3 876,86

Tablica 5.1: Dane testowe dla sieci dróg Stanów Zjednoczonych Ameryki

5.1.2 Wyniki i wykresy zależności



Rysunek 5.1: Porównanie algorytmów dla testu USA. Wszystkie punkty testowe zostały przedstawione w tabeli 5.1.

Skrót	Charakterystyka		Opis
	Struktura	Typ	
BFM	—	LCA	Podstawowa implementacja algorytmu Bellmana-Forda
BFP	—	LCA	BFM ze sprawdzaniem rodziców
DDL	Kubelki	LSA	Algorytm Dial (Dijkstra)
DKA	Kubelki	LCA	Algorytm z aproksymacją zakresu (Dijkstra)
DKB	Kubelki	LSA	Podstawowa implementacja (Dijkstra)
DKD	Kubelki	LSA	Algorytm dwupoziomowy (Dijkstra)
DKM	Kubelki	LSA	Algorytm z przepełnieniem (Dijkstra)
DKX	Kubelki	LSA	Podstawowa implementacja RadixHeap (Dijkstra)
DKX	Kubelki	LSA	RadixHeap z przepełnieniem (Dijkstra)
DKF	Kopce	LSA	Algorytm Dijkstry dla kopków Fibonacciego
DKF	Kopce	LSA	Usprawniona implementacja DKF
DKH	Drzewa	LSA	Algorytm Dijkstry dla K -drzew
DKR	Kopce	LSA	Implementacja algorytmu Dijkstry dla R -kopków
DKQ	S -Listy	LSA	Naiwny algorytm Dijkstry
DKQ	DL -Listy	LSA	Naiwny algorytm Dijkstry
PAP	Kolejki	LSA	Algorytm Pape'a
TQQ	Kolejki	LSA	Algorytm Pallottino z dwoma kolejkami
GR1	—	LSA	Algorytm topologiczny
GR2	—	LSA	Algorytm topologiczny z uaktualnianiem odległości
THR	DL -Listy	LCA	Algorytm progowy

Tablica 5.2: Lista testowanych algorytmów wraz z odrzuconymi implementacjami o zbyt dużej złożoności czasowej lub pamięciowej (zaznaczonymi na szaro).

Pierwsze co najbardziej rzuca się w oczy to potwierdzenie naszych słów dotyczących algorytmu Dijkstry, który opierał się na kopcach Fibonacciego. Pomimo, że algorytm ten wydawał się najszybszy spośród wszystkich, które zostały przedstawione (Poza implementacją RADIXHEAP, którego złożoność wyniosła $O(m + n \cdot \log(C))$), dla prawdziwych sieci drogowych działa on zdecydowanie najwolniej ze wszystkich przetestowanych implementacji dla których wykonano te same testy. Co się okazuje, także implementacja algorytmu RADIXHEAP nie przyniosła w testach oczekiwanych rezultatów, gdyż jej szybkość działania także ustępuje większości z pozostałych algorytmów. Co natomiast się potwierdziło to stwierdzenie zawarte w [11], jakoby najszybszymi implementacjami dla prawdziwych sieci drogowych były algorytmy Dijkstry wykorzystujące kubelki aproksymacyjne (DKA), którego efektywność w bardzo dużym stopniu zależy od doboru jego parametrów (zob. Wykres 5.10), oraz — bez cienia wątpliwości — kubelki wielopoziomowe (DKD), których stopień nachylenia do poziomej osi wykresu pozwala sądzić, że wraz ze wzrostem liczby danych algorytm utrzymałby swoją dominację nad pozostałymi. Wszystkie algorytmy w trakcie testów przyjęły parametry domyślne (jeżeli takowe były wymagane tak jak np. w algorytmie DKA) — optymalne, wyliczone przez sam algorytm (w oparciu o metody wyliczania ekstremów na podstawie wzoru określającego rzad złożoności takiego algorytmu²) albo takie, których optymalność została udowodniona i wzór na nie jest z góry wiadomy. Warto zwrócić uwagę, że wszystkie dane testowe jakie dostarczył DIMACS Implementation Challenge, reprezentują grafy dość rzadkie — sieci o większej gęstości próżno szukać w prawdziwych warunkach, chociażby ze względu na dominujące typy skrzyżowań samych dróg, gdzie w takich można wyróżnić od trzech do czterech odnów, chyba że mamy do czynienia z większym elementem konstrukcyjnym jakim jest rondo (co w języku grafu przekłada się na kilka węzłów, ułożonych na okręgu, od których odchodzą co najwyżej trzy krawędzie). Z tego też względu w następnym rozdziale zajmiemy się badaniem grafów o nienaturalnie — jak na sieci drogowe — dużych gęstościach, rozpoczynających się od $m = O(n^{1.2})$, a kończących na $m = O(n^{2.0})$.

² Warto tu zaznaczyć, że sam wzór na złożoność wyrażony w notacji „dużego O” jest obarczony błędem, będącym konsekwencją tego, że wyniknął on z prostej analizy najgorszego przypadku — WCA.

5.2 Gęstość grafu

W tej części eksperymentów zajmiemy się badaniem bezpośredniego wpływu gęstości grafu na zachowanie się algorytmu. Będziemy do tego korzystać z losowo wygenerowanych grafów, gdyż odnalezienie odpowiednich, rzeczywistych danych testowych byłoby niezwykle trudnym zadaniem, co uzasadniłoby powyżej. Możliwość generowania danych testowych nie ogranicza nas do 12 punktów kontrolnych — jak widzieliśmy podczas pierwszych eksperymentów taka ich liczba jest zdecydowanie za mała, by pokryć nimi gęsto całą oś OX wykresów. W odróżnieniu od poprzednich testów, tym razem wykorzystamy do nich niewielkie zbiory danych. Będziemy jednak chcieli, aby dla zadanego grafu każdy algorytm wykonał dokładnie n niezależnych iteracji, gdzie n to liczba węzłów w grafie.

5.2.1 Metodyka i dane

Zdając się na pseudolosowość przy generowaniu danych testowych musimy ograniczyć wpływ tego nie-deterministycznego elementu na otrzymywane wyniki. Wszystkie testy otrzymujemy poprzez wygenerowanie odpowiedniej liczby wierzchołków, wyliczenie prawdopodobieństwa z jakim powinny pojawiać się łuki w grafie dla zadanej gęstości oraz utworzenie danej liczby krawędzi zgodnie z wcześniejszymi rachunkami. Ne mamy przy tym gwarancji, że wszystkie węzły w sieci będą miały jakiekolwiek połączenie — im mniejsza gęstość zostanie zadana, tym to prawdopodobieństwo jest mniejsze. Może się więc zdarzyć, że ze źródła dla którego algorytmy będą wyszukiwały najkrótsze ścieżki do wszystkich pozostałych węzłów w grafie nie prowadzi żadna ścieżka. Czas działania takiego algorytmu ulegnie oczywiście w takim przypadku nienaturalnemu skróceniu. Aby zapobiec takim sytuacjom będziemy chcieli, by dla każdego grafu $G = (V, E)$ algorytmy wyszukiwania najkrótszych ścieżek były uruchamiane osobno dla każdego wierzchołka $v \in V$ w charakterze źródła, a następnie pod uwagę była brana średnia ich czasu działania będąca wynikiem podzielenia całkowitego czasu, jaki algorytm potrzebował na wykonanie zadania, przez liczbę wierzchołków w grafie (jakie algorytm po kolei przyjmował za węzły startowe). Przykładowe dane testowe przedstawia tabela 5.3.

Nazwa Testu		Liczba elementów		Budowa sieci			
				Gęstość	Statystyki kosztów		
Numer	Rząd gęstości	Wierzchołków	Krawędzi		$\max(c_{ij})$	$\text{avg}(c_{ij})$	$\sigma(c_{ij})$
234	$m = O(n^{1,4})$	7 400	261 170	35,3	1 000	499,90	288,76
235	$m = O(n^{1,4})$	7 500	266 125	35,5	1 000	499,60	289,42
236	$m = O(n^{1,4})$	7 600	271 105	35,7	1 000	500,68	289,18
237	$m = O(n^{1,4})$	7 700	276 113	35,9	1 000	500,35	288,49
238	$m = O(n^{1,4})$	7 800	281 146	36,0	1 000	499,60	288,78
239	$m = O(n^{1,4})$	7 900	286 205	36,2	1 000	503,14	288,74
240	$m = O(n^{1,4})$	8 000	291 290	36,4	1 000	499,90	288,78
...
474	$m = O(n^{1,8})$	7 400	9 217 583	1245,6	1 000	500,03	288,68
475	$m = O(n^{1,8})$	7 500	9 443 006	1259,1	1 000	499,95	289,05
476	$m = O(n^{1,8})$	7 600	9 670 845	1272,5	1 000	499,89	289,23
477	$m = O(n^{1,8})$	7 700	9 901 096	1285,9	1 000	502,13	288,89
478	$m = O(n^{1,8})$	7 800	10 133 752	1299,2	1 000	500,52	289,38
479	$m = O(n^{1,8})$	7 900	10 368 806	1312,5	1 000	499,77	288,77
480	$m = O(n^{1,8})$	8 000	10 606 252	1325,9	1 000	501,64	288,73

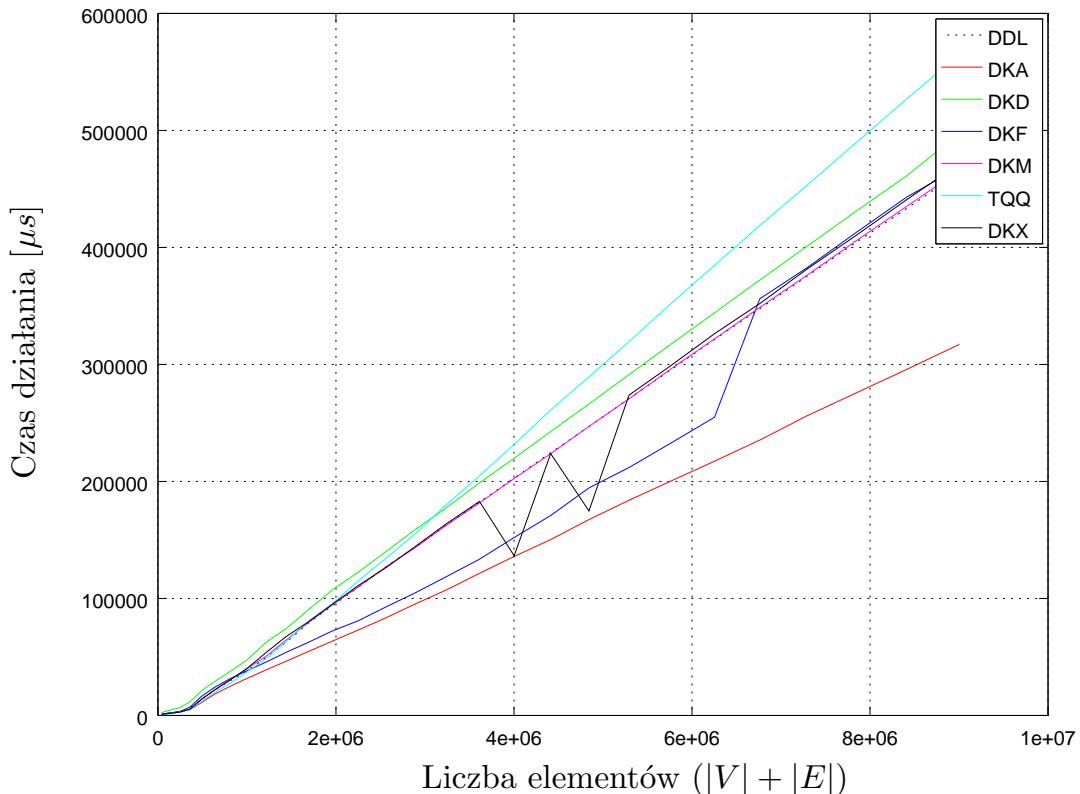
Tablica 5.3: Dane testowe dla różnych gęstości sieci

Możemy wyróżnić 6 poziomów gęstości grafu, dla których w tym podrozdiale zostały przeprowadzone eksperymenty, gdzie dla każdego z nich liczba krawędzi w grafie jest rzędu $O(n^{2.0-i \cdot 0.2})$ dla $i \in \{0, \dots, 5\}$, zaś każdy z nich składa się z 80 grafów charakteryzujących się stopniowo zwiększającą liczbą wierzchołków. Co oczywiste, w powyższej tabeli nie przedstawiono wszystkich danych testowych, gdyż łącznie jest ich ponad 450, zaś zasada ich konstrukcji — taka sama. Wykorzystując moc obliczeniową serwera, na którym przeprowadzane były powyższe testy, każdy z algorytmów był uruchamiany równolegle wraz z pozostałymi

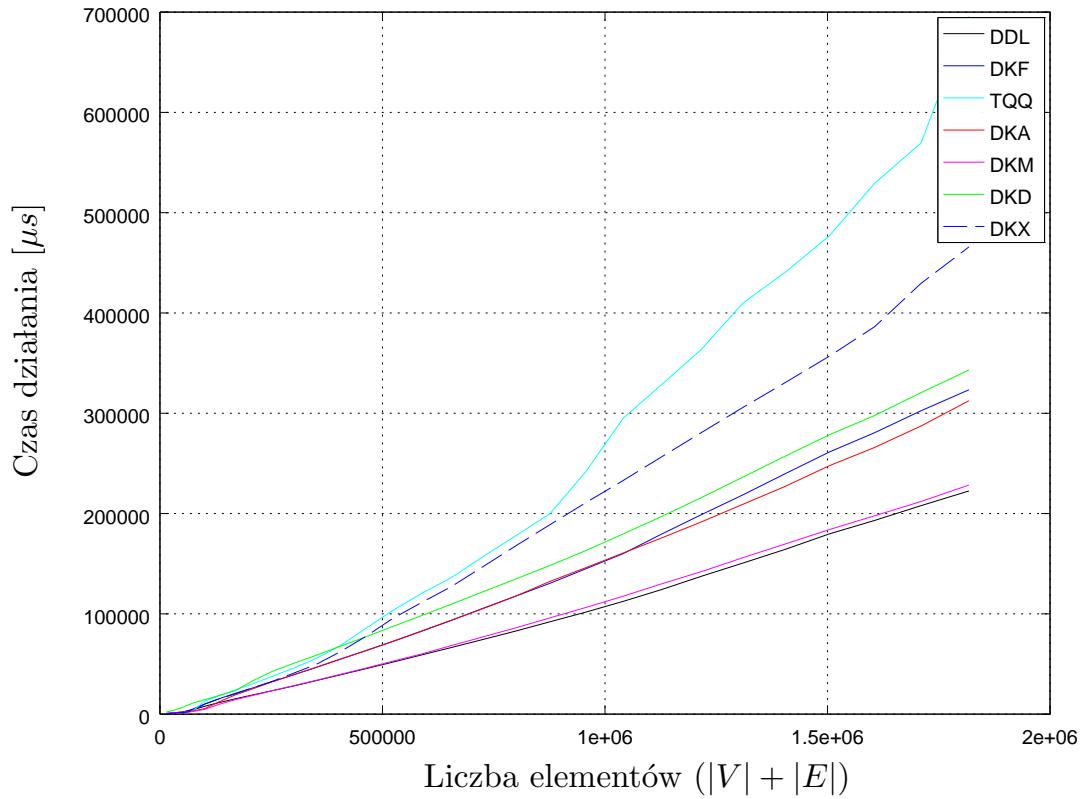
implementacjami. Za miarę efektywności algorytmów przyjęto czas, jaki każdy z nich sumarycznie otrzymał od procesorów na wykonywanie obliczeń. Tym samym nie uwzględniono wszelkich operacji wejścia/wyjścia jakich dopuszczały się algorytmy w trakcie działania — między innymi nie został wzięty pod uwagę czas jaki każdy z algorytmów potrzebował na wczytanie danych. Jak pokazaliśmy w części teoretycznej, prawie każdy z algorytmów (za wyjątkiem *DKR*) potrzebował także czasu na stworzenie odpowiednich struktur, zaś poziom ich skomplikowania był bardzo różny — te operacje także nie wymagały zbytniej aktywności procesora. Ich rzeczywisty czas trwania był więc zdecydowanie dłuższy, niż wynikałoby to z takiej metody pomiaru jaką przyjęliśmy. Aby uwzględnić i te części działania każdej z implementacji, należałoby powołać się na rzeczywisty upływ czasu. Wtedy jednak uruchomienie kilku algorytmów równolegle byłoby niedopuszczalne ze względu na wpływ jaki każdy z uruchomionych procesów miałby na wydłużenie się czasu działania wszystkich pozostałych. Poniżej przedstawiono wykresy zależności, jakie zostały otrzymane dla grafów o różnym stopniu gęstości (wykresy: 5.6, 5.5, 5.4, 5.3 i 5.2), a na których możemy zaobserwować jaki ogromny wpływ na efektywność poszczególnych algorytmów ma ich gęstość. Z całą stanowczością należy jeszcze raz podkreślić, że przedstawione poniżej wykresy dotyczą sieci, których gęstość jest nienaturalnie wysoka w odniesieniu do rzeczywistych sieci drogowych, a przedstawienie tych wyników eksperymentalnych ma na celu ukazać różne sposoby zachowania się algorytmów ze względu na ten parametr.

5.2.2 Wyniki i wykresy zależności

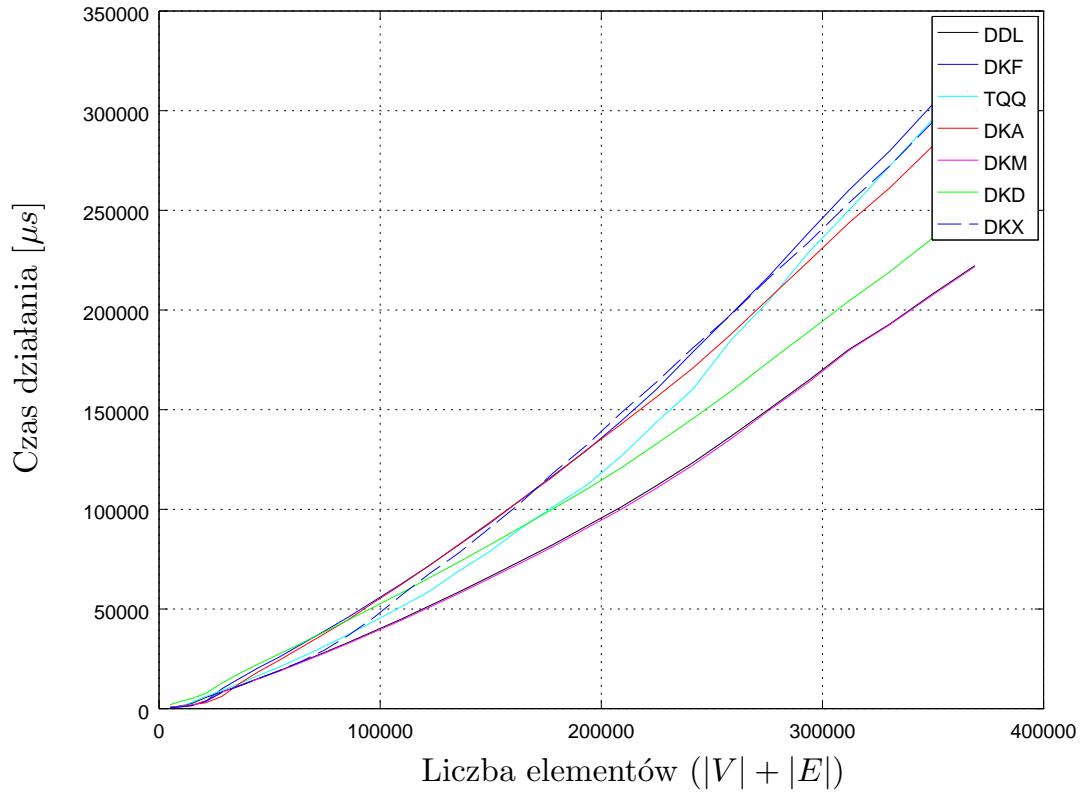
Charakterystycznym elementem wybranych sieci, które zostały przedstawione w tabeli 5.3, jest ich nienaturalna regularność — dla gęstości rzędu $m = O(n^{1+\epsilon})$, gdzie $0,2 \leq \epsilon \leq 1,0$ liczba krawędzi dla każdego z wierzchołków jest pomniejszana (w stosunku do grafu, gdzie $m = O(n^2)$) równomiernie w odniesieniu do pozostałych węzłów w sieci. Daje to w wyniku graf, który nie posiada żadnych wyraźniejszych skupisk elementów — jego gęstość pozostaje taka sama bez względu na to, na który fragment grafu spojrzymy.



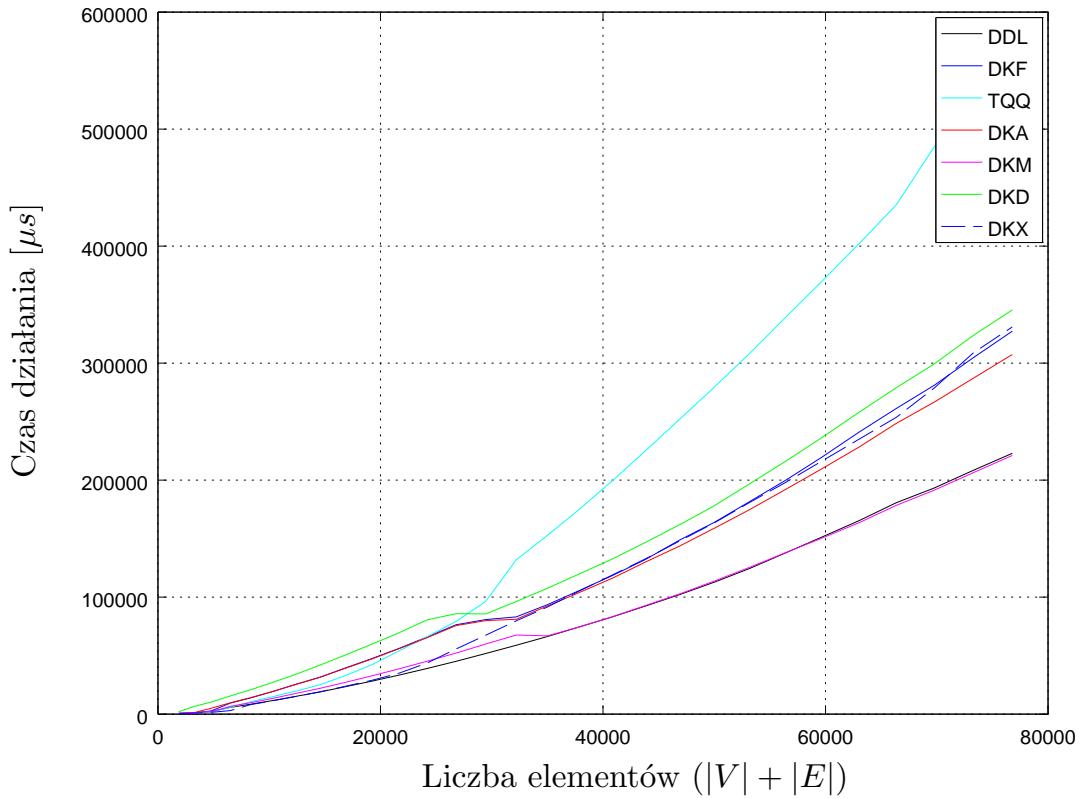
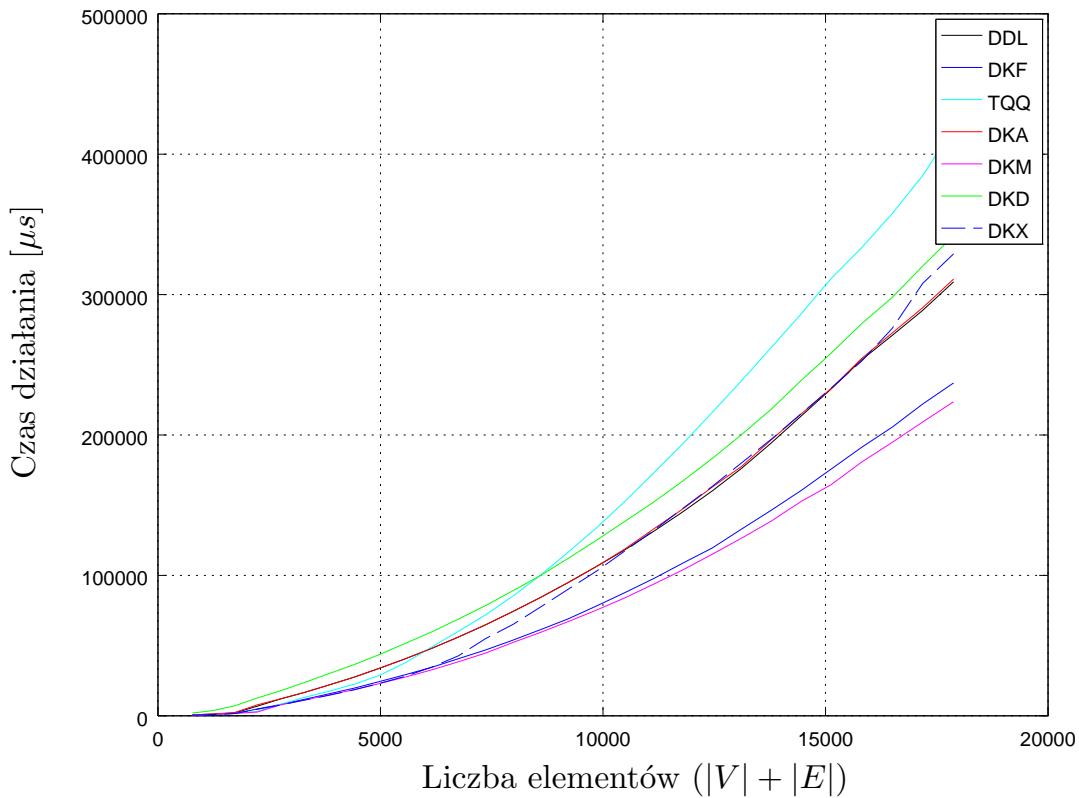
Rysunek 5.2: Porównanie algorytmów dla grafu o gęstości $m = O(n^2)$. Na osi poziomej wykresu przedstawiona jest suma liczby wierzchołków oraz krawędzi w grafie. Oś OY przedstawia czas w mikrosekundach jaki algorytm potrzebował na zakończenie działania ($\mu = 10^{-6}s$).



Rysunek 5.3: Porównanie algorytmów dla grafu o gęstości wyrażonej równością $m = O(n^{1.8})$.



Rysunek 5.4: Porównanie algorytmów dla grafu o gęstości wyrażonej równością $m = O(n^{1.6})$.

Rysunek 5.5: Porównanie algorytmów dla grafu o gęstości wyrażonej równością $m = O(n^{1.4})$.Rysunek 5.6: Porównanie algorytmów dla grafu o gęstości wyrażonej równością $m = O(n^{1.2})$.

5.3 Pozostałe testy

Na podstawie wcześniejszych analiz można zauważyc, że wyliczone zależności pomiędzy czasem działań poszczególnych algorytmów w najgorszych przypadkach nie do końca pokrywają się z przedstawionymi wynikami. W szczególności na uwagę zasługują implementacje i ich złożoności, które przedstawione są w tabeli 5.4

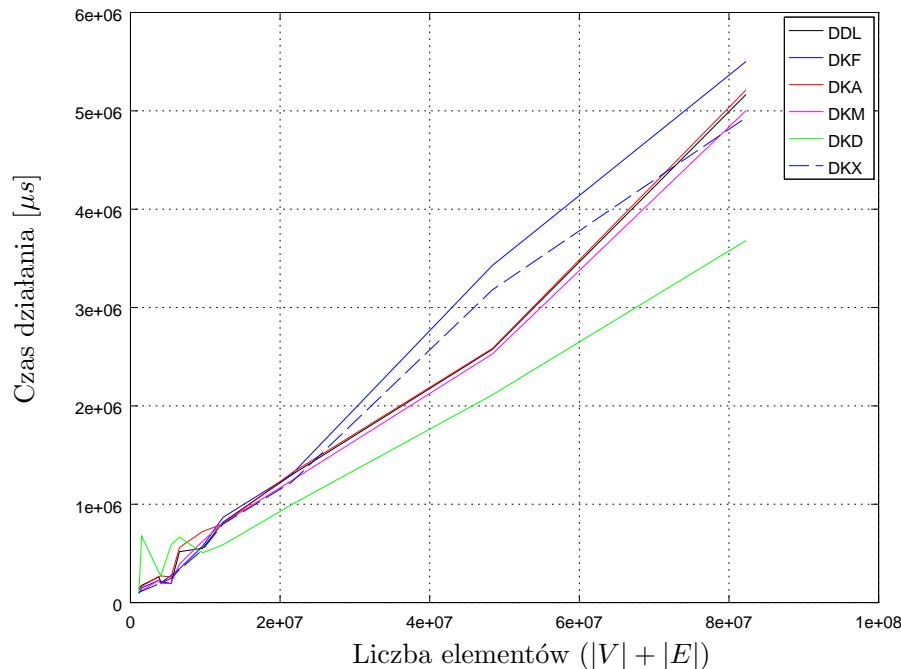
Algorytm	Analiza WCA
DKA	$O(m \cdot b + n \cdot (b + \frac{C}{b}))$
DKF	$O(m + n \cdot \log(n))$
DKX	$O(m + n \cdot \log(C))$
DDL	$O(m + n \cdot C)$
DKD	$O(m + n \cdot \sqrt{C})$

Tablica 5.4: **Podsumowanie najważniejszych złożoności algorytmów**, silnie zależnych od parametru C (przypominamy, że $C = \max\{c_{ij} : e_{ij} \in E\}$).

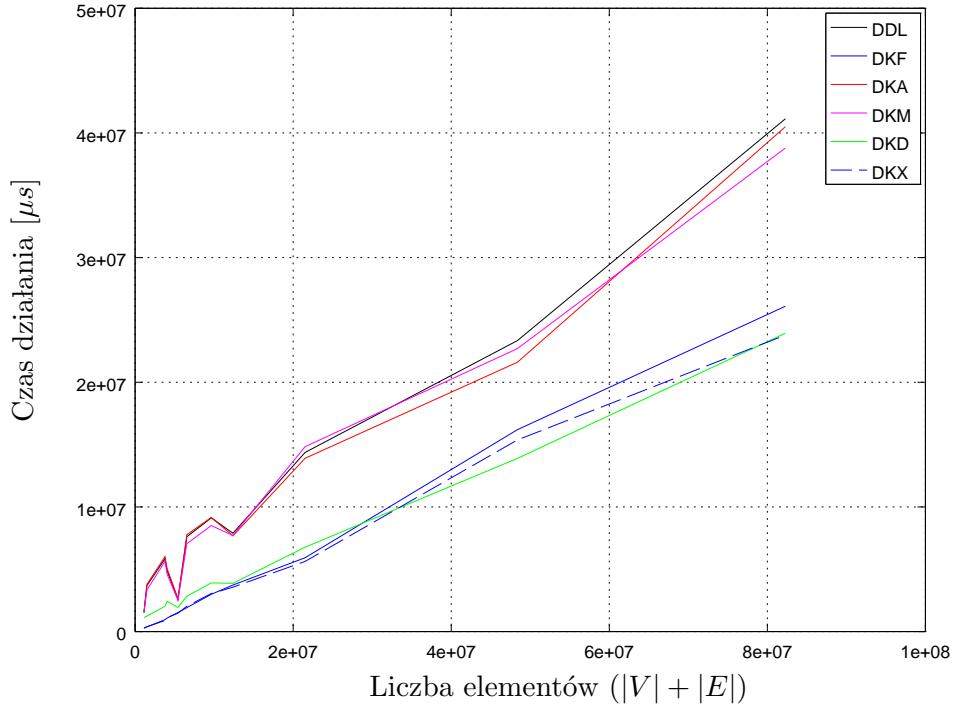
5.3.1 Metodyka i dane

Przedstawione algorytmy zostały przetestowane przy wykorzystaniu sieci, których użyliśmy w pierwszej części eksperymentów (zob. Tabela 5.1). Jedynymi modyfikacjami jakich dopuściliśmy się wobec wspomnianych sieci były zmiany parametrów c_{ij} związanych z każdą krawędzią $v_i \xrightarrow{1} v_j$ — odpowiednio zostały one przemnożone przez następujące stałe: 10, 50 i 100. Testy przeprowadzono tak samo jak we wcześniej wspomnianych eksperymentach (przy wykorzystaniu grafów reprezentujących sieć dróg Stanów Zjednoczonych Ameryki). Dla każdego z punktów testowych algorytmy zostały uruchomione $t = 40$ razy, przy czym dla każdego takiego punktu algorytm miał za zadanie wyszukać wszystkie najkrótsze ścieżki ze źródeł, które z góry zostały ustalone. Dla każdego z testów wybrano równo 500 takich źródeł.

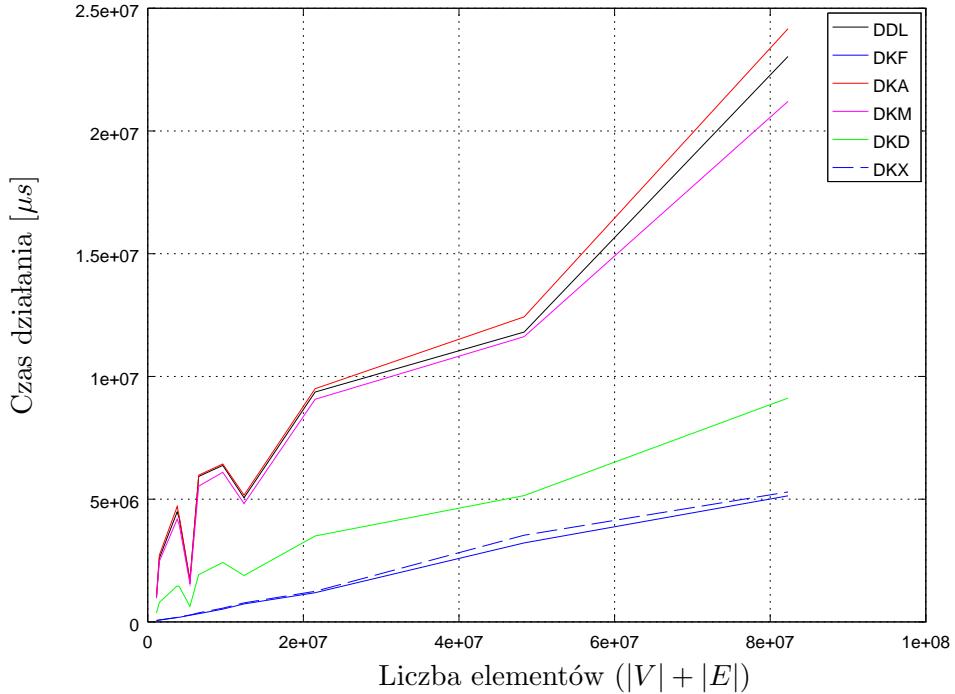
5.3.2 Wyniki i wykresy zależności



Rysunek 5.7: **Porównanie algorytmów dla testu USA ze zwiększoną kosztami** ($\forall e_{ij} \in E : c'_{ij} = c_{ij} \cdot 10$).



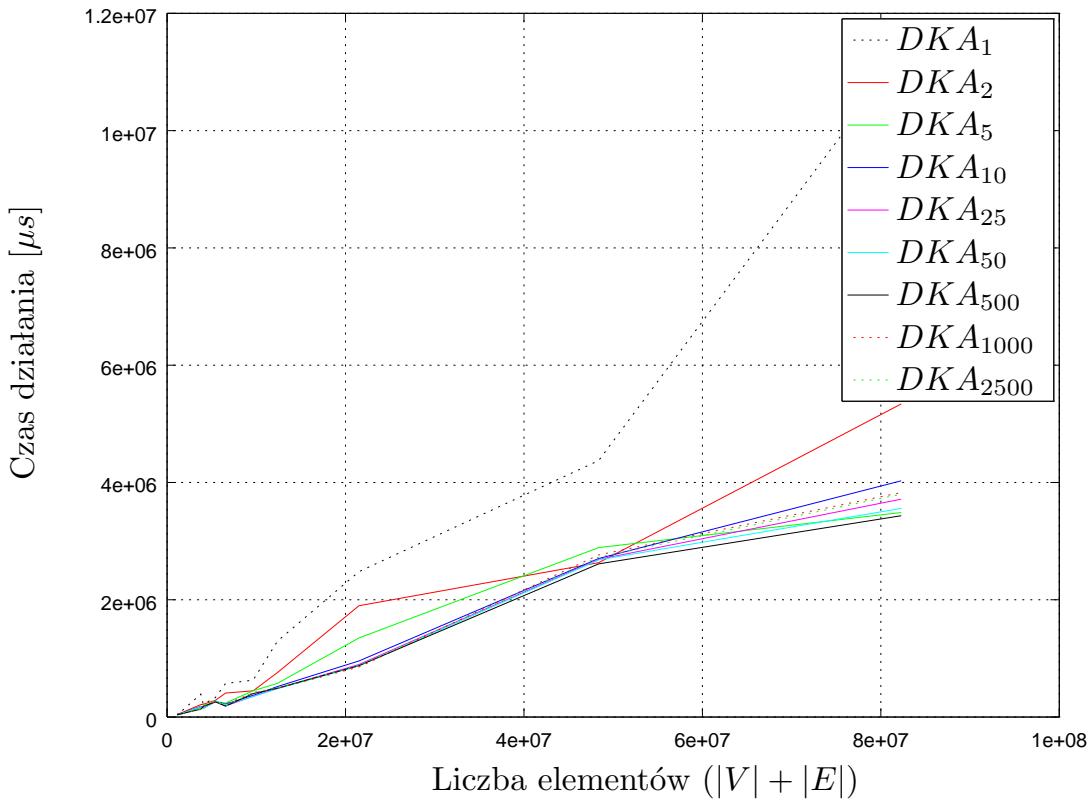
Rysunek 5.8: Porównanie algorytmów dla testu USA ze zwiększymi kosztami ($\forall e_{ij} \in E : c'_{ij} = c_{ij} \cdot 50$). Wszystkie punkty testowe zostały przedstawione w tabeli 5.1.



Rysunek 5.9: Porównanie algorytmów dla testu USA ze zwiększymi kosztami ($\forall e_{ij} \in E : c'_{ij} = c_{ij} \cdot 100$). Wszystkie punkty testowe zostały przedstawione w tabeli 5.1.

W oparciu o wyniki, przedstawione na wykresach 5.7, 5.8 oraz 5.9, możemy ponad wszelką wątpliwość wskazać algorytmy, których złożoność obliczeniowa w znacznej mierze zależy od parametru C . Jeżeli spojrzymy jeszcze raz na dane w tabeli 5.4, zobaczymy że wraz z rosnącymi kosztami w grafie rośnie przepaść między dwoma grupami algorytmów, gdzie w jednej z nich znajdują się algorytmy takie jak: DKF, DKX oraz DKD. Jak dobrze pamiętamy, algorytm Dijkstry zbudowany w oparciu o kopce Fibonacciego, był jednym z wolniejszych algorytmów jakie testowaliśmy. Wraz z rosnącymi kosztami w grafie sytuacja się odwraca i staje się on jednym z najszybszych. Przyczyną tego typu zachowania jest oczywiście brak zależności między nim a rosnącymi kosztami każdej z krawędzi ($O(m + n \cdot \log(n))$). Pozostałe, zależne od C , algorytmy mają nałożoną na tę zmienną funkcję, która w znaczny sposób niweluje wpływ zwiększenia się jej na efektywność danej implementacji (odpowiednio dla DKX i DKD są to: $\log(C)$ oraz $\sqrt[3]{C}$). Nie zaprezentowaliśmy tutaj złożoności algorytmu DKM, gdyż jego złożoność ograniczyliśmy przez $O(n^2)$. Jak jednak łatwo było zauważyć w czasie jej analizy (15), takie oszacowanie głównie wynikało z konieczności wyszukiwania minimalnego elementu z ostatniego kubelka w algorytmie dla każdej z rund. Przyglądając się dokładniej wspomnianej analizie łatwo zauważać, że i ten algorytm wykazuje się silną zależnością od maksymalnego kosztu w sieci ($O(n \cdot C)$), podobnie z resztą jak algorytm Dial oraz DKA ($O(n \cdot C \cdot \frac{1}{b})$).

Wspominaliśmy na początku rozdziału poświęconego eksperymentom, że implementacje wszystkich algorytmów w miarę możliwości starają się dobrać optymalne parametry dla każdego z nich, jeżeli takowe są przez dany algorytm wymagane. Nie wszystkie jednak parametry da się jednoznacznie wyliczyć, czego najlepszym przykładem jest algorytm DKA. Poniżej przedstawiono wykres zależności między dobranym parametrem dla wspomnianego algorytmu, a czasem jego działania. W charakterze danych testowych ponownie zostały wykorzystane grafy, których opis znajduje się w tabeli 5.1, wielokrotnie już przywoływanej.



Rysunek 5.10: **Zależność efektywności algorytmu DKA od dobranego parametru**, wymaganego przez algorytm.

Przedstawione wyniki wyraźnie sugerują zależność między rozmiarami sieci a odpowiednio dobranym współczynnikiem, którego wybór należałoby dopasowywać do tych rozmiarów [7, 3.3.2, 3.10.3], gdyż jak widać stały współczynnik może skrajnie wpływać na efektywność takiego algorytmu.

Zakończenie

Celem powyższej pracy było nie tyle co przedstawić szeroki wachlarz algorytmów wyspecjalizowanych w odnajdywaniu najkrótszych ścieżek, co na drodze eksperymentów stwierdzić, które z nich dobrze sprawdzają się w swojej roli, które są warte polecenia dla konkretnych klas problemów, a których użycie należałoby odradzić. Po przeprowadzeniu szczegółowej analizy dla każdego z takich algorytmów oraz wykonaniu serii eksperymentów można dojść do wniosku, że dla prawdziwych sieci drogowychgodnymi polecenia są dwa z nich, zwłaszcza ze względu na prostotę implementacji: algorytm Dial oraz inna modyfikacja algorytmu Dijkstry oparta o kubelki wielopoziomowe (których stopień skomplikowania jest co prawda dalece większy, lecz daje on zdecydowanie najlepsze wyniki). Szereg dodatkowych eksperymentów przeprowadzonych dla zmodyfikowanych danych wejściowych (poprzez zwiększenie kosztów wszystkich ścieżek w grafie) także okazał się wskazywać na przewagę tych algorytmów nad innymi, co tylko potwierdza wcześniejszą rekomendację algorytmu DKD jako najszybszego dla dużego rozmiaru sieci drogowych. Dodatkowo także pokazaliśmy zalety posiadane przez algorytmy zbudowane w oparciu o kubelki pozycyjne (ang. *RadixHeap*) oraz kopce Fibonacciego. Ze względu na małą wrażliwość wobec powiększania kosztów w sieci algorytmy te także z powodzeniem znajdą zastosowanie w wyszukiwaniu najkrótszych ścieżek, z tym że implementacja algorytmu Dijkstry w oparciu o kopiec Fibonacciego jest zdecydowanie bardziej skomplikowana niż zaprogramowanie drugiego z rozwiązań. Na sam koniec należy jeszcze zwrócić uwagę, że każdy z przedstawionych algorytmów zależał od liczby krawędzi w grafie, co przy ich liczbie rzędu $m = O(n^2)$ potrafi uczynić bezcelową analizę najgorszego przypadku większości z omawianych rozwiązań. W takich przypadkach, aby ocenić efektywność algorytmów, niezbędne okazują się eksperymenty, które zostały w tej pracy inżynierskiej wykonane.

Bibliografia

- [1] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. Some recent advances in network flows. Technical report, Massachusetts Institute of Technology, Październik 1989.
- [2] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1993.
- [3] Alfs T. Berztiss. Trees and data structures. Technical report, Departament of Computing Science, University of Wollongong, 1979.
- [4] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Wprowadzenie do algorytmów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 7 edition, 2014.
- [5] Edsger Wybe Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1):269–271, Grudzień 1959.
- [6] Georgia Mali, Panagiotis Michail, Andreas Paraskevopoulos, and Christos Zaroliagis. A new dynamic graph structure for large-scale transportation networks. Technical report, eCOMPASS, Wrzesień 2012.
- [7] Ulrich Meyer. Design and analysis of sequential and parallel single-source shortest-paths algorithms. Dissertation, Universität des Saarlandes, 10 2002.
- [8] Panos M. Pardalos, Donald Hearn, and William W. Hager. *Network Optimization*. Springer, 1997.
- [9] Warren B. Powell and Zhi long Chen. A generalized threshold algorithm for shortest path problem with time windows.
- [10] Robert Sedgewick and Kevin Wayne. *Algorithms, 4th Edition*. Addison-Wesley, 2011.
- [11] F. Benjamin Zhan. Three fastest shortest path algorithms on real road networks: Data structures and procedures. *Journal of Geographic Information and Decision Analysis*, 1(1):70–82, 1997.

Biblioteka: Take Me Home

Wszystkie algorytmy, które wcześniej opisywaliśmy, zostały zaimplementowane w języku C (standard C99) i umieszczone w bibliotece o przewrotnie nazwanej *Take Me Home* (jako, że wszystkie algorytmy miały za zadanie wyszukiwanie najkrótszych ścieżek). W niniejszym rozdziale omówimy strukturę wykorzystanej biblioteki, skupiając się na jej kluczowych właściwościach i operacjach które za jej pomocą wykonamy. Przyjrzymy się udostępnionemu użytkownikowi interfejsie oraz prześledzimy przykładową sesję działania prostego programu wykorzystującego tą bibliotekę.

A.1 Wymagania i instalacja

Biblioteka w całości została napisana w języku programowania C (zgodnie z jego wszystkimi standardami ustalonymi przez ISO 9899:1999) na komputerze pracującym pod kontrolą systemu UBUNTU 14.04.1 LTS dla architektury 64-bitowej. W związku z tym wszystkie skrypty, które będą opisywane w poniższych podrozdziałach, oraz przykłady wywołań owych programów będą specyficzne dla tego systemu operacyjnego. Co za tym idzie, aby wykorzystać bibliotekę na komputerze pod kontrolą innego systemu operacyjnego, niezbędne może okazać się przystosowanie biblioteki pod dany system, dlatego też wraz ze skompilowaną wersją biblioteki są też udostępnione jej wszystkie kody źródłowe wraz z przykładowym programem mającym na celu zweryfikować poprawność jej działania. W związku z tym, poniżej został przedstawiony cały proces komplikacji biblioteki aż do momentu uruchomienia testowego programu, który ją wykorzystuje.

Struktura katalogów wszystkich plików, wchodzących w skład biblioteki wygląda następująco:

```
/  
└── PRESENTATIONS  
└── REFERENCES  
└── SCRIPTS  
└── THESIS  
└── TMH_EXAMPLES  
└── TMH_LIBRARY  
└── TMH_GRAPHHELPER  
└── clear.bash  
└── README.md
```

Katalogi, które zostały wyszarzone nie interesują nas z punktu widzenia implementacji biblioteki. W pozostałych katalogach znajdują się odpowiednio kody źródłowe odpowiadające za dane części funkcjonalności, które oddają ich nazwy. Aby skompilować oba projekty naraz, należy wykorzystać skrypt znajdujący się w odpowiednim katalogu: `/Scripts/compileProject.bash`, uruchamiając go polecienniem wpisanym w terminalu (CRTL + ALT + T):

```
pcname@user:/ Scripts$ bash compileProject.bash
```

```
Enter full path to library project or leave empty (TMH_Library/):  
Enter full path to sample project or leave empty (TMH_Examples/):  
Enter full path for where generated library should be copy or leave empty (/usr/lib):  
Enter name for generated program or leave empty (run):  
...
```

Nim proces komplikacji się rozpocznie, zostaniemy poproszeniu o podanie dodatkowych informacji. W przypadku pozostawienia pustych linii zostaną ustawione domyślne wartości podane w nawiasach (zgodne z oryginalną strukturą katalogów). Parametrami tymi kolejną są:

- pełna ścieżka katalogu zawierającego projekt biblioteki (domyślnie `TMH_Library/`),
- pełna ścieżka katalogu zawierającego projekt przykładowego programu testowego wykorzystującego bibliotekę (domyślnie `TMH_Examples/`),
- pełna ścieżka katalogu, do którego zostanie skopiowany kod w postaci wygenerowanej biblioteki `libTMH_Library.so` (domyślnie dla systemów LINUX jest to ścieżka, gdzie przechowywane są wszystkie biblioteki użytkowników `usr/lib`),
- nazwa programu będącego efektem końcowym komplikacji projektu `TMH_Examples`.

W wyniku poprawnej komplikacji powinniśmy ujrzeć:

```
Finished building: ... / Source / TMH_Examples . c
```

```
Building target: TMH_Examples
Invoking: GCC C Linker
gcc -L... / ... / TMH_Library / Debug -o "TMH_Examples" ... / Source / TMH_Examples . o -lTMH_Library
Finished building target: TMH_Examples
```

Następnie program będzie próbował automatycznie przenieść wygenerowany plik `libTMH_Library.so` do podanej wcześniej lokacji oraz poinformować system o pojawienniu się takiej biblioteki (poprzez wywołanie polecenia `ldconfig`). Te kroki są zależne od systemu operacyjnego, więc nie zostaną one tutaj szczegółowo opisane. Na samym końcu skrypt poinformuje nas o wyniku jego działań oraz zasugeruje przeprowadzenie testu mającego wykazać poprawność funkcjonowania programu testowego (a, co za tym idzie, wszystkich algorytmów w bibliotece) pod kątem pamięciowym.

Done.

```
Type ./run to execute program or
'valgrind --leak-check=full --track-fds=yes --show-leak-kinds=all -v ./run'
to scan for memory leaks.
```

A.1.1 9th DIMACS Implementation Challenge - Shortest Paths

Aby zapewnić poprawność działania aplikacji, należy bezwzględnie stosować się do pewnych założeń dotyczących formatu plików wejściowych dla algorytmów zaimplementowanych w bibliotece TMH. Jednocześnie, aby nie wprowadzać nowego standardu kodowania plików, posłużono się jednym z już istniejących standardów narzuconych podczas dziewiątej edycji programu DIMACS IMPLEMENTATION CHALLENGE, która skupiała się na problemie wyszukiwania najkrótszych ścieżek. Oto przykłady plików wejściowych dla algorytmów:

Lista źródeł

```
c 9th DIMACS Implementation Challenge: Shortest Paths
c http://www.dis.uniroma1.it/~challenge9
c Sample single-source problem specification file
c
p aux sp ss 3
c contains 3 source lines
c
s 1
s 3
s 5
```

Powyższy, przykładowy, pomocniczy (ang. *auxiliary*) plik definiuje problem najkrótszych ścieżek (ang. *sp- Shortest Paths*) z trzema pojedynczymi źródłami (ang. *ss — Single Source*). Definicje takiego problemu w przyjętym formatowaniu rozpoczynamy w osobnej linii, na początku której znajduje się litera „p”. Podanej w tej linijce liczbie musi odpowiadać liczba linii rozpoczętych symbolem „s” definiujących numer węzła, który ma być źródłem. Dla każdej z tych linii wywołana zostanie osobna procedura, wyliczająca najkrótsze ścieżki od podanego źródła do wszystkich pozostałych. W liniach, które rozpoczynają się od znaku „c”, znajdują się komentarze.

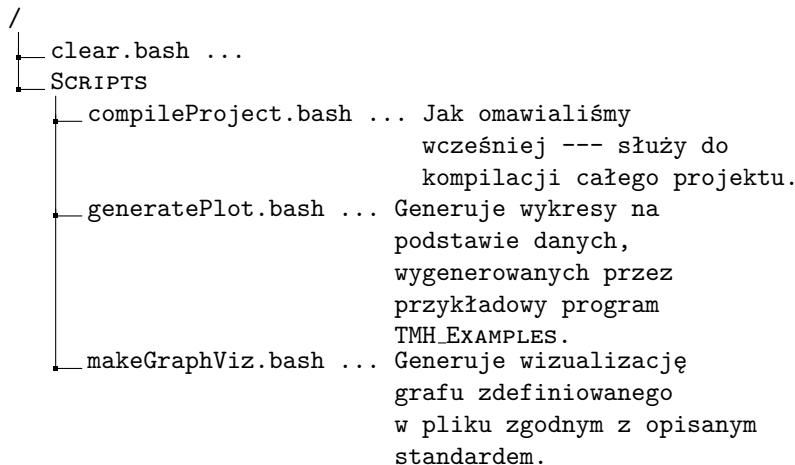
Definicja grafu

Na poniżej przedstawionym przykładzie znajdują się definicje wszystkich węzłów oraz krawędzi należących do grafu opisującego poniższy plik. Analogicznie do poprzedniego przypadku, linie które rozpoczynają się od litery „c”, są liniami komentarza, zaś ta, na której początku jest znak „p”, opisuje problem. W tym przypadku dwie liczby, które znajdują się na jej końcu, oznaczają liczbę węzłów $|V|$ oraz krawędzi $|E|$ w grafie $G = (V, E)$. Wiersze zaczynające się literą „a”, zawierają pojedynczą definicję krawędzi, na którą składają się trzy liczby, oznaczające kolejno: identyfikator węzła z którego wychodzi krawędź, numer wierzchołka na drugim końcu krawędzi oraz jej koszt.

```
c 9th DIMACS Implementation Challenge: Shortest Paths
c http://www.dis.uniroma1.it/~challenge9
c Sample graph file
c
p sp 6 8
c graph contains 6 nodes and 8 arcs
c node ids are numbers in 1..6
c
a 1 2 17
c arc from node 1 to node 2 of weight 17
c
a 1 3 10
a 2 4 2
a 3 5 0
a 4 3 0
a 4 6 3
a 5 2 0
a 5 6 20
```

A.1.2 Pomocnicze skrypty

Do biblioteki TMH dołączony został szereg skryptów, które mają za zadanie ułatwienie korzystania z niej, przygotowanie danych wejściowych oraz interpretację otrzymanych wyników. Są to między innymi skrypty:



```

/
  └─SCRIPTS
    └─randDistance.pl ... Pozwala na szybką
        modyfikację wszystkich
        kosztów ścieżek w pliku,
        definiującym graf.
    └─TMH_GRAPHHELPER... Pomocniczy projekt do
        generowania danych
        wejściowych (napisany
        w języku JAVA).

```

Przykładowe użycie każdego z nich zaprezentowano poniżej (jeśli do działania skrypt nie wymaga parametrów, to nie zostało ono przedstawione).

generatePlot.bash

Skrypt, jak zostało to już wcześniej powiedziane, służy do generowania wykresów funkcji na podstawie danych otrzymanych w wyniku działania programu TMH_EXAMPLES. Na wejście skrypt przyjmuje szereg parametrów, które są następnie przekazywane do programu, odpowiedzialnego za właściwe rysowanie wykresów podanych funkcji (OCTAVE).

```
pcname@user:/ Scripts$ bash generatePlot .bash
<nazwa pliku z danymi>
<styl linii na wykresie dla funkcji>
<etykieta funkcji>
...
```

Skrypt może przyjąć dowolną liczbę parametrów pod warunkiem, że będzie to wielokrotność liczby 3. Każdy trójelementowy zbiór parametrów zostanie odzwierciedlony na końcowym wykresie. Dodatkowo, po wywołaniu skryptu, poprosi on o podanie dodatkowych parametrów opisujących generowany wykres oraz o miejsce, w którym znajdują się podane pliki z danymi. Tak samo jak dla skryptu COMPILEPROJECT.BASH, w przypadku nie podania któregoś z żądanego parametrów, zostanie przyjęta jego wartość domyślna podana w nawiasie dla każdego z nich osobno.

```
Enter path to generatePlot Octave's function or leave empty (./ octave):
Enter path to folder with Data Input Files or leave empty (./ plots/inData):
Enter full path to output or leave empty (./ plots/outData):
Enter plot's title (Plot's title):
Enter title of plot's X label (X):
Enter title of plot's Y label (Y):
Enter name of output file (out):
Enter extension of output file (epsc):
Plot configuration summary:
  Octave function path:      ./ octave
  Input data path:          ./ plots/inData
  Output plot path:         ./ plots/outData
  Plot's title:             Plot's title
  Plot X label:             X
  Plot Y label:             Y
  Output file:              out.epsc
Do you want to create this plot? (y/n):
```

Skrypt odpowiednio prosi o wskazanie:

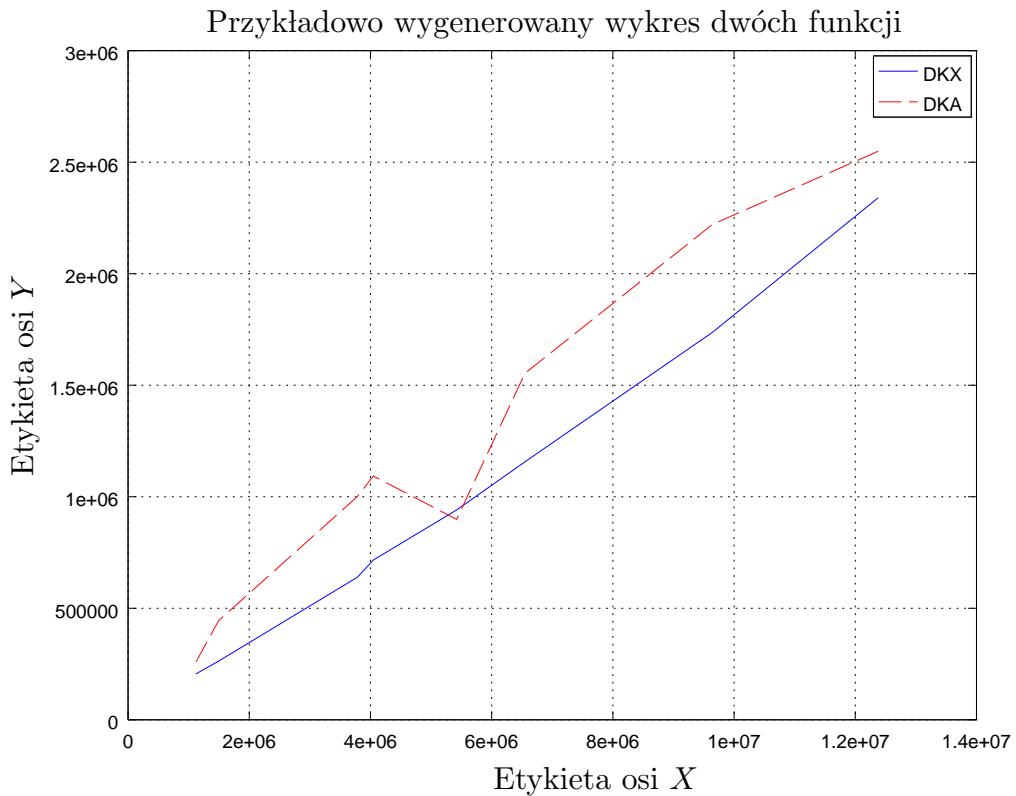
- miejsca, gdzie znajduje się wywołana w trakcie działania skryptu funkcja programu OCTAVE,
- katalogu w którym znajdują się podane w charakterze parametrów wejściowych skryptu pliki z danymi,
- ścieżki katalogu, do którego zostanie zapisany wygenerowany wykres,

- charakterystycznych dla wykresu wartości takich jak: tytuły osi X i Y oraz samego wykresu,
- nazwy oraz rozszerzenia pliku wyjściowego.

Przykładowe wywołanie skryptu:

```
pcname@user:/ Scripts$ bash generatePlot . bash
R_USATest_DKX b— DKX
R_USATest_DKA r— DKA
```

wygeneruje wykres, na którym znajdą się dwie funkcje, dla których dane zostaną odpowiednio pobrane z plików R_USATEST_DKX oraz R_USATEST_DKA (ze wskazanego wcześniej katalogu). Funkcje te będą narysowane zgodnie ze zdefiniowanym stylem linii dla każdej z nich (argumenty „B-” oraz „R-”¹ oraz będą posiadały odpowiednio przypisane etykiety (kolejno „DKX” i „DKA”). Format plików z danymi wymaga, by były to proste pliki tekstowe zawierające pary wartości wypisane w osobnych kolumnach.



Rysunek A.1: Wygenerowany wykres dwóch funkcji dla przykładowego wywołania skryptu GENERATE- PLOT.BASH.

makeGraphViz.bash

Skrypt generuje wizualizację grafu podanego mu na wejściu, wykorzystując do tego podprogram GRA- PHVIZ. Po podaniu mu jako argumentu pliku z danymi, program przekształca dane w przyjętym formacie na te odpowiadające wizualnej reprezentacji grafu, po czym przekazuje je do wspomnianej aplikacji. Ta zaś w odpowiedzi generuje plik graficzny o zadanym formacie. Przykładowe wywołanie:

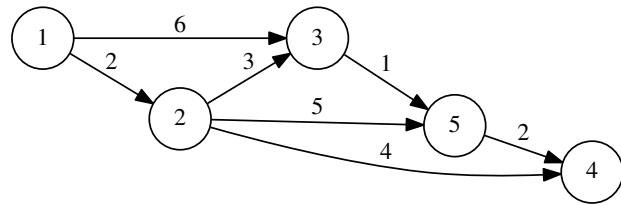
```
pcname@user:/ Scripts$ bash makeGraphViz . bash testTMH . gr testTMH eps
```

wygeneruje kod pośredni oraz rysunek w interesującym nas formacie o zadanej nazwie (zob. Rysunek A.2).

¹ Więcej o dopuszczalnych formatach można przeczytać w dokumentacji programu OCTAVE w części poświęconej rysowaniu wykresów funkcji.

```
digraph G {
    rankdir=LR;
    node [shape = circle];
    1 --> 2 [ label = "2"];
    1 --> 3 [ label = "6"];
    2 --> 3 [ label = "3"];
    2 --> 4 [ label = "4"];
    2 --> 5 [ label = "5"];
    3 --> 5 [ label = "1"];
    5 --> 4 [ label = "2"];
}
```

(a)



(b)

Rysunek A.2: Wygenerowana ilustracja grafu przez skrypt MAKEGRAPHVIZ.BASH. (a) Kod pośredni pomieędzy danymi wejściowymi w standardowym formacie DIMACS IMPLEMENTATION CHALLENGE a finalnym rysunkiem. Kod pośredni jest zapisany w języku DOT. (b) Rysunek grafu wygenerowany przez program GRAPHVIZ.

randDistance.pl

Przy pomocy tego skryptu jest możliwa szybka zmiana długości ścieżek w grafie bez ingerowania w jego strukturę. Program na wejściu oczekuje 4 parametrów, gdzie kolejno nimi są:

- minimalna waga, jaką po wykonaniu skryptu mogą mieć krawędzie w zadanym grafie,
- największa możliwa waga dla krawędzi (obie wartości muszą być liczbami naturalnymi),
- plik wejściowy, definiujący graf (w przyjętym na początku formacie),
- nazwa pliku wyjściowego.

Przykładowe wywołanie skryptu:

```
pcname@user:/ Scripts$ perl randDistance.pl 1 2 testTMH.gr out.gr
```

TMH_GraphHelper

Jest to, poza TMH_EXAMPLES i TMH_LIBRARY, trzeci projekt w obrębie całej biblioteki, mający na celu generowanie poprawnych plików wejściowych dla wszystkich wcześniej wymienionych skryptów oraz samej biblioteki. Program został napisany w języku JAVA i oferuje możliwość wygenerowania prostych, skierowanych grafów bez cykli — tak zwanych *DAG'ów* (ang. *Directed acyclic graph*) — z określona liczbą wierzchołków oraz krawędzi. Program umożliwia także wygenerowanie grafu na podstawie liczby węzłów oraz prawdopodobieństwa, z jakim wszystkie wierzchołki w grafie będą mieć krawędzie (im większe, tym graf będzie gęstszy). Program korzysta z bibliotek: STDLIB.JAR i ALGS4.JAR, napisanych przez Roberta Sedgewick'a i Kevina Wayne'a². Procesem budowania aplikacji zarządza APACHE MAVEN.

Program oczekuje następujących parametrów:

```
pcname@user:/ TMH_GraphHelper$ java -jar GraphHelper.jar
<liczba węzłów w grafie wyjściowym>
<liczba łuków/prawdopodobieństwo>
<najmniejszy koszt krawędzi>
<największy koszt krawędzi>
<nazwa pliku wyjściowego>
```

W przypadku podania drugiego parametru jako liczby zmiennoprzecinkowej, program założy, że podane zostało prawdopodobieństwo.

² Wspomniane biblioteki są zbiorem rozwiązań prezentowanych w książce [10], dostępnych do pobrania na stronie internetowej: <http://algs4.cs.princeton.edu/home/> na licencji GNU GPLv3.

A.2 API biblioteki

Główną częścią składową wyżej omawianych aspektów biblioteki TMH jest projekt TMH_LIBRARY, który stanowi całość omawianej biblioteki — reszta programów ma za zadanie ułatwiać z nią pracę. Głównej struktury projektu nie będziemy tutaj przedstawiać, gdyż biblioteka udostępnia cały jej kod źródłowy. Skupimy się za to na omówieniu kluczowej części każdej biblioteki tzn. interfejsu, który udostępnia ona użytkownikowi.

A.2.1 Konfiguracja środowiska

Przy licznych algorytmach, których implementacje znalazły się w bibliotece, udostępnia ona maksymalnie uproszczone **API** (ang. *Application Programming Interface*) by było ono przede wszystkim intuicyjne i proste w użyciu. Aby omówić wszystkie możliwości konfiguracyjne, jakie udostępnia nam biblioteka, prześledzimy krok po kroku schemat wykorzystania jednego z algorytmów wyszukiwania najkrótszych ścieżek.

Przy tak szerokim wachlarzu algorytmów, jakie udostępnia biblioteka, nie sposób jest zapewnić jednakowy dostęp do wszystkich z nich. Niektóre do poprawnego działania wymagają ręcznego podania parametrów, inne działają tylko na podstawie pliku z definicją grafu. Aby ujednolicić sposób wywołania każdej z funkcji przyjęto założenie, że dla każdego algorytmu niezbędne są następujące elementy:

- Konfiguracja algorytmu — jest to zbiór uniwersalnych wartości, jakie mogą charakteryzować problem najkrótszych ścieżek. Jedynym wymaganym parametrem do utworzenia takiej konfiguracji jest plik wejściowy zawierający informację o węzłach źródłowych, dla których chcemy wyliczyć najkrótsze ścieżki do wszystkich pozostałych wierzchołków (prawidłowy format takiego pliku omówiliśmy w rozdziale A.1.1):

```
TMHConfig* config = createTMHConfig("file.ss");
```

Interfejs biblioteki udostępnia szereg metod umożliwiających zmianę tak załadowanej konfiguracji:

- W przypadku, gdy algorytm wymaga podania parametru przez użytkownika, możemy go w takiej sytuacji albo:
 - * zdefiniować przed wywołaniem algorytmu:


```
TMHNodeData* param = malloc(sizeof(TMHNodeData));
param = 2;
setAllowInterrupt(config, false, param);
```
 - * zmusić algorytm do samodzielnego wybrania parametru (w takiej sytuacji zostanie wybrana wartość optymalna, jeżeli dla danego algorytmu łatwo jest ją obliczyć):


```
TMHNodeData* param = NULL;
setAllowInterrupt(config, false, param);
```
 - * lub podać żądanego parametru w chwili, gdy algorytm sam poprosi o jego podanie (poprzez ustawienie drugiego parametru funkcji na **TRUE**):


```
TMHNodeData* param = NULL;
setAllowInterrupt(config, true, param);
```
 - jeśli algorytm nie wymaga podawania parametrów, to ten zapis jest ignorowany.
- Możemy dodatkowo wymusić validację konfiguracji (zostanie sprawdzona poprawność wczytanych danych z pliku, który został podany na wejście):


```
setCheckConfig(config, true);
```
- zmienić sposób organizacji grafu (np. spróbować posortować go topologicznie):


```
setGraphOrder(config, NONE);
```
- wybrać sposób reprezentacji grafu wejściowego:

-
- ```
 setGraphStruct(config, ADJACENCY_LIST);

• określić, który algorytm ma zostać wywołany do rozwiązania tak zdefiniowanego problemu:
```

- ```
    setAlgorithm(config, alg);
```
- Ścieżka do pliku z definicją grafu (PATH) — format pliku musi być zgodny z przyjętym (DIMACS IMPLEMENTATION CHALLENGE)

Szczegóły, dotyczące możliwych wartości parametrów przyjmowanych dla każdej z wymienionych funkcji można znaleźć w dokumentacji technicznej biblioteki i tutaj nie będą omawiane. Wywołania wszystkich algorytmów które zostały zaimplementowane, można dodatkowo znaleźć w projekcie TMH_EXAMPLES. Po spełnieniu powyższych wymagań, algorytm tworzyinstancję problemu:

```
ins = createTMHAlgorithmInstance(config, path);
```

Mając tę strukturę, możemy wykonać na niej następujące operacje:

- Rozpocząć wykonywanie właściwego algorytmu, który w wyniku zwróci graf o wierzchołkach mających ustalone najkrótsze ścieżki do zdefiniowanego źródła.

```
runTMHAlgorithm(algorithm, ins);
```

Interpretacja wyników zależy już od użytkownika końcowego. Biblioteka zapewnia możliwość odtworzenia najkrótszej ścieżki do źródła z dowolnego węzła w grafie, zaś reszta leży w rękach programisty, który będzie wykorzystywał omawianą bibliotekę.

- Zniszczyćinstancję problemu poleceniem:

```
destroyTMHAlgorithmInstance(config->algorithm, ins, false);
```

gdzie wartość ostatniego parametru decyduje także, czy wraz z nią ma zostać usunięta informacja o przechowywanej konfiguracji (w przypadku ustawienia parametru na **FALSE** będziemy mogli wykorzystać ją do uruchomienia kolejnych algorytmów dla tej samej konfiguracji).

- Zniszczyć konfigurację:

```
destroyTMHConfigInstance(config);
```

A.2.2 Dziennik zdarzeń

Dziennik zdarzeń jest to mechanizm pozwalający użytkownikowi na śledzenie działań każdego z algorytmów i dostosowanie liczby wyświetlanych informacji o takim działaniu. Do obsługi dziennika zdarzeń interfejs biblioteki udostępnia trzy metody:

```
enableLog(TRACE, false);
disableLog();
enableSaveLog("logFile", true);
```

Pierwsza z nich uruchamia zapisywanie zdarzeń, które mają miejsce podczas działania algorytmu. Umożliwia ona także dostosowanie poziomu ich szczegółowości (np. TRACE, DEBUG, INFO, itd.) oraz zdecydowania, czy wybrany poziom ma być jedynym, który będzie wyświetlany (wtedy drugi parametr powinien być ustawiony na wartość **TRUE**). W przeciwnym przypadku będą wyświetlane wszystkie wydarzenia, których priorytet jest wyższy bądź równy aktualnie wybranemu. Ostatnia metoda przekierowuje wszystkie tak powstałe zapisy do wskazanego przez użytkownika pliku. Jednocześnie umożliwia wybór, czy ma w nich być również zamieszczana informacja o czasie zajścia danego zdarzenia. Jeżeli zapisywanie takich zdarzeń pozostanie włączone, a nie zdecydujemy się na przekierowanie ich do pliku, to będą one wyświetlane na standardowe wyjście terminala razem z innymi informacjami, które zdefiniuje użytkownik (z poziomu API nie ma możliwości samodzielnie definiowania zdarzeń). W kolejnym rozdziale został przedstawiony pełen zapis wydarzeń, jakie miały miejsce podczas pracy jednego z podstawowych algorytmów wyszukujących najkrótsze ścieżki).

A.3 Przykładowa sesja

```

22:16:21 | INFO | [TMHIOHelper] Open data file: '/home/tomasz/workspace/TMH_Tests/ss/test.ss'.
22:16:21 | INFO | [TMHIOHelper] Loading auxiliary data for problem: 'Shortest Path Problem'.
    Targeted algorithm mode : ss
    Number of definitions to read : 1
22:16:21 | INFO | [TMHIOHelper] Auxiliary definition added:
    Find all paths from node: 1
22:16:21 | INFO | [TMHIOHelper] Open data file: '/home/tomasz/workspace/TMH_Tests/gr/testTMH1.gr'.
22:16:21 | INFO | [TMHIOHelper] Loading data for problem: 'Shortest Path Problem'.
    Number of nodes : 5
    Number of arcs : 7
22:16:21 | INFO | [TMHIOHelper] Arc definition read:
    1 ---(6)---> 2
    ..... .
22:16:21 | INFO | [TMHIOHelper] Arc definition read:
    5 ---(6)---> 4
22:16:21 | INFO | [DKQD] PreExecution summary:
    Running algorithm : Dijkstra's Naive Implementation with double-linked lists
    Selected mode : Single Source
    Source node's ID : 1
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Initializing graph with 5 nodes.
Set node with ID: 1 as a source node with distanceLabel = 0.
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Initialize double-linked list with source node with ID: 1 (distance: 0).
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Query for next element from queue.
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Queried node details:
    Node ID : 1
    Distance : 0
    Parent's ID : no parent
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Checking arc: 1 ---(6)---> 3
    Target's distance labels:
        Old : ∞
        New : 6
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Executing relaxation. Changing nodes' linkage from:
    No parents found for node with ID: 3 (∞)
to:
    1 (0) ---(6)---> 3 (6)
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Checking arc: 1 ---(6)---> 2
    Target's distance labels:
        Old : ∞
        New : 6
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Executing relaxation. Changing nodes' linkage from:
    No parents found for node with ID: 2 (∞)
to:
    1 (0) ---(6)---> 2 (6)
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Query for next element from queue.
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Queried node details:
    Node ID : 2
    Distance : 6
    Parent's ID : 1
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Checking arc: 2 ---(5)---> 5
    Target's distance labels:
        Old : ∞
        New : 11
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Executing relaxation. Changing nodes' linkage from:
    No parents found for node with ID: 5 (∞)
to:
    2 (6) ---(5)---> 5 (11)
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Checking arc: 2 ---(6)---> 4
    Target's distance labels:
        Old : ∞
        New : 12
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Executing relaxation. Changing nodes' linkage from:
    No parents found for node with ID: 4 (∞)
to:
    2 (6) ---(6)---> 4 (12)
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Checking arc: 2 ---(6)---> 3
    Target's distance labels:
        Old : 6
        New : 12
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Query for next element from queue.
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Queried node details:
    Node ID : 3
    Distance : 6
    Parent's ID : 1
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Checking arc: 3 ---(6)---> 5
    Target's distance labels:
        Old : 11
        New : 12
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Query for next element from queue.
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Queried node details:
    Node ID : 5
    Distance : 11
    Parent's ID : 2
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Checking arc: 5 ---(6)---> 4
    Target's distance labels:
        Old : 12
        New : 17
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Query for next element from queue.
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Queried node details:
    Node ID : 4
    Distance : 12
    Parent's ID : 2
22:16:21 | TRACE | [DKQD] Queried node with ID: 4 has no outgoing arcs.

```