

Управление перевёрнутым маятником на колесе по первому приближению

В данной статье рассматривается моделирование и построение управления для перевёрнутого маятника. При исследовании системы были использованы уравнения Эйлера-Лагранжа, моделирование проводилось в программном пакете Matlab. Для управления системой выполнено построение линейно-квадратичного регулятора.

Введение

Задача управления перевёрнутым маятником является двух-мерной задачей стабилизации. Она рассмотрена во многих публикациях, так, например, в книге И. Фантони, Р. Лозано «Нелинейное управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий» рассматривается перевёрнутый маятник на тележке, для которого синтезируется оптимальное по Ляпунову управление. В статье рассмотрена модель перевёрнутого маятника на колёсах, что представляет больший практический интерес. Сейчас реализации подобной системы используется в качестве транспорта и как платформа для автономных устройств.

Постановка задачи

1. Математическая модель

Рассмотрим систему перевёрнутый маятник на колесе, изображённую на рис 1.1. Будем считать, что система движется без трения. Маятник представляет собой массу m_p , прикреплённую на невесомом стержне длины l к колесу. Колесо считается кольцом радиуса r и массой m_w . На колесо действует момент двигателя M_k

m_p : масса маятника

m_w : масса колес

l : длина маятника

r : радиус колеса

θ : угол между маятником и вертикальной прямой

ϕ : угол поворота колеса относительно его начального положения

M_k : момент двигателя

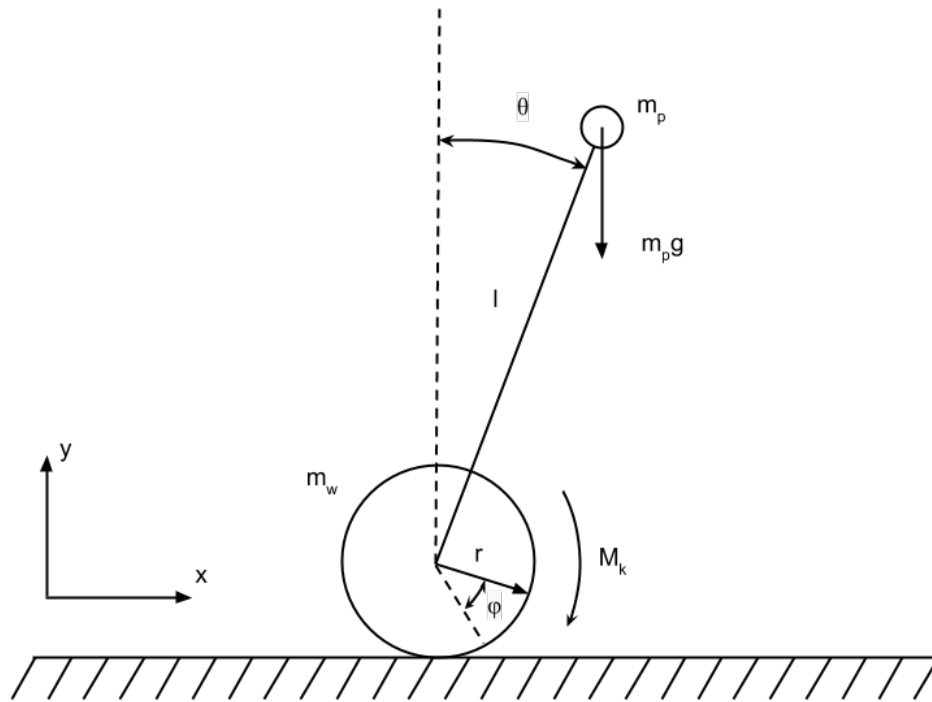


Рис. 1.1. Система перевернутый маятник на колесе

Для исследования системы воспользуемся уравнениями Эйлера-Лагранжа.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) - \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) = \tau \quad (1.1)$$

Выразим положение центра колеса через угол поворота:

$$x = r \varphi \quad (1.2)$$

Заметим, что координаты центра масс маятника находятся по следующим соотношениям:

$$x_g = x + l \sin(\theta) \quad (1.3)$$

$$y_g = l \cos(\theta) \quad (1.4)$$

Сначала вычислим представление для кинетической энергии системы. Кинетическая энергия маятника равна

$$T_p = \frac{1}{2} [m_p \dot{y}_g^2(t) + m_p \dot{x}_g^2(t)] \quad (1.5)$$

Кинетическая энергия колеса равна

$$T_w = \frac{1}{2} [m_w \dot{x}^2 + m_w r^2 \dot{\varphi}^2] \quad (1.6)$$

Подставляя (1.2), (1.3), (1.4) в (1.5) и (1.6) получим полную кинетическую энергию

$$T = \frac{1}{2} m_p l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) + \frac{1}{2} m_p r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_p l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) + m_w r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_p l^2 \dot{\theta}^2 \quad (1.7)$$

Полная потенциальная энергия равна

$$\Pi = m_p g l \cos(\theta) \quad (1.8)$$

Функция Лагранжа задаётся по формуле $L = T - \Pi$.

В итоге

$$L = \frac{1}{2} m_p l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2(\theta) + \frac{1}{2} m_p r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_p l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2(\theta) + m_w r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_p l^2 \dot{\theta}^2 - m_p g l \cos(\theta) \quad (1.9)$$

Уравнения движения выведем с помощью уравнений Лагранжа второго рода (1.1).

В качестве обобщённых координат возьмём углы поворота колеса и маятника. Тогда вектор обобщённых координат представляется в виде

$$q = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} .$$

Вектор обобщённых сил выглядит следующим образом:

$$\tau = \begin{pmatrix} M_k \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Таким образом

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_p r^2 \dot{\varphi} + m_p r l^2 \dot{\theta}^2 \cos(\theta) + 2 m_w r^2 \dot{\varphi} \quad ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m_p l^2 \sin(\theta) \dot{\theta}^2 \cos(\theta) - m_p r \dot{\varphi} \dot{\theta} l \sin(\theta) + m_p l^2 \cos(\theta) \dot{\theta}^2 l \sin(\theta) + m_p g l \sin(\theta) \quad ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_p l^2 \sin(\theta)^2 \dot{\theta} + m_p r l \dot{\varphi} \cos(\theta) + m_p l^2 \cos(\theta)^2 \dot{\theta} + m_p l^2 \dot{\theta} \quad .$$

Подставив в уравнения Лагранжа(1.1) полученные производные, выводим уравнения движения:

$$r \cos(\theta) l m_p \ddot{\theta} + r^2 (m_p + 2m_w) \ddot{\varphi} - r \sin(\theta) \theta^2 l m_p = M_k \quad , \quad (1.5)$$

$$\ddot{\varphi} \cos(\theta) l m_p r - m_p g l \sin(\theta) + 2m_p l^2 \ddot{\theta} = 0 \quad . \quad (1.6)$$

Системе можно придать стандартный вид:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau \quad , \quad \text{где}$$

$$q = \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \quad , \quad M(q) = \begin{bmatrix} r^2 (m_p + 2m_w) & r \cos(\theta) l m_p \\ r \cos(\theta) l m_p & 2m_p l^2 \end{bmatrix} \quad ,$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -r \dot{\theta} \sin(\theta) l m_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad G(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_p g l \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tau = \begin{pmatrix} M_k \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Мы для управления полученной системой построим линейно-квадратичный регулятор. Для этого проведём линеаризацию полученных уравнений движения (1.5) и (1.6) в окрестности нулевого положения маятника:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = AX + BM_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-m_p g}{r(m_p + 4m_w)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g(m_p + 2m_w)}{l(m_p + 4m_w)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{r^2(m_p + 4m_w)} \\ 0 \\ \frac{1}{l r(m_p + 4m_w)} \end{bmatrix} M_k \quad . \quad (1.7)$$

Необходимо проверить систему на управляемость.

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ \hline r^2(m_p + 4m_w) \\ 0 \\ 1 \\ \hline l r(m_p + 4m_w) \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 2 \\ \hline r^2(m_p + 4m_w) \\ 0 \\ -1 \\ \hline r l(m_p + 4m_w) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 B = \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g \\ \hline r^2 l(m_p + 4m_w)^2 \\ 0 \\ -g(m_p + 2m_w) \\ \hline r l^2(m_p + 4m_w)^2 \end{bmatrix},$$

$$A^3 B = \begin{bmatrix} m_p g \\ \hline l r^2(m_p + 4m_w)^2 \\ 0 \\ -g(m_p + 2m_w) \\ \hline l^2 r(m_p + 4m_w)^2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(B|AB|A^2B|A^3B) = \frac{g^2}{l^4 r^6 (m_p + 4m_w)^4} > 0. \quad (1.8)$$

Таким образом линеаризованная система является управляемой.

2. Задача оптимального управления

Данная задача подробно разобрана в книге профессора В.Н. Афанасьева «Оптимальные системы управления. Аналитическое конструирование».

Рассмотрим линейную управляемую динамическую систему вида

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}, \quad (2.1)$$

а так же функционал

$$J(x, u) = \frac{1}{2} x^T(T) F x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \left[x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t) \right] dt, \quad (2.2)$$

где матрицы Q и R положительно определены.

Матрица Q определяет цену отклонения системы от нуля.

Матрица R определяет цену расхода энергии на управление.

Матрица F определяет стоимость конечного состояния. Его цель – гарантировать «малость» ошибки в конечный момент времени переходного процесса.

Время T задано, матрицы $Q(t)$ и F положительно полуопределены, матрица $R(t)$ положительно определена. Заметим, что все члены функционала положительно определены.

Закон управления должен минимизировать данный функционал, при этом на управление не накладываются ограничения.

Предположим, что для любых начальных условий $x(t_0)$ оптимальное управление существует. Построим гамильтониан

$$H(x, u, \lambda, t) = \frac{1}{2} x^T(t) Q(t) x(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R(t) u(t) + \lambda^T(t) [A(t)x(t) + B(t)u(t)] . \quad (2.3)$$

Дополнительный вектор $\lambda(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} \lambda(t) = - \left\{ \frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial x(t)} \right\}^T = -Q(t)x(t) - A^T(t)\lambda(t) , \quad (2.4)$$

$$\lambda(T) = Fx(T) . \quad (2.5)$$

Вдоль оптимальной траектории должно быть

$$\left\{ \frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial u(t)} \right\}^T = R(t)u(t) + B^T(t)\lambda(t) = 0 , \quad (2.6)$$

$$\text{откуда } u(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) \lambda(t) . \quad (2.7)$$

$R^{-1}(t)$ существует в силу положительной определённости $R^{-1}(t)$ при $t \in [t_0, T]$.

матрица $\partial^2 H(x, u, \lambda, t) / \partial u^2(t)$ размера $m \times m$ должна быть положительно определена.

Нетрудно заметить, что для рассматриваемой задачи

$$\partial^2 H(x, u, \lambda, t) / \partial u^2(t) = R(t) \quad (2.8)$$

Можно показать, что

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x(t), \quad (2.9)$$

где $K(t)$ – симметричная матрица, являющаяся решением дифференциального уравнения типа Риккати:

$$\frac{d}{dt} K(t) + K(t)A(t) + A^T(t)K(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) + Q(t) = 0 \quad (2.10)$$

с граничным условием $K(T) = F$ (2.11).

Данное управление минимизирует критерий качества, по крайней мере локально. Для этого необходимо, чтобы матрица

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H(x, u, \lambda, t)}{\partial x^2(t)} & \frac{\partial^2 H(x, u, \lambda, t)}{\partial x(t)\partial u(t)} \\ \frac{\partial^2 H(x, u, \lambda, t)}{\partial u(t)\partial x(t)} & \frac{\partial^2 H(x, u, \lambda, t)}{\partial u^2(t)} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

была положительно определена.

В самом деле, из уравнения Гамильтониана (2.3) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial x(t)} &= Q(t)x(t) + \lambda^T(t)A(t); & \frac{\partial^2 H(x, u, \lambda, t)}{\partial x^2(t)} &= Q(t); \\ \frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial u(t)} &= R(t)u(t) + \lambda^T(t)B(t); & \frac{\partial^2 H(x, u, \lambda, t)}{\partial u^2(t)} &= R(t); \\ \frac{\partial^2 H(x, u, \lambda, t)}{\partial x(t)\partial u(t)} &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подставляя (2.13) в (2.12), получим матрицу

$$\begin{bmatrix} Q(t) & 0 \\ 0 & R(t) \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Матрица (2.14) положительно полуопределена в силу положительной определенности матрицы $R(t)$ и положительной полуопределенности матрицы $Q(t)$. Так как высшие производные $H(x, u, \lambda, t)$ по $u(t)$ равны нулю, то для данной задачи предположение о положительной полуопределенности матрицы (2.14) является достаточно сильным, чтобы гарантировать, что управление (2.9) минимизирует критерий качества, по крайней мере локально.

Заметим, что данное управление оптимально и в случае, когда матрицы $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ не зависят от времени, а интервал $[t_0, T]$ конечен.

Предположим, что указанные матрицы не зависят от времени, матрица $F=0$ и интервал управления $T = \infty$. Таким образом, задача формулируется в следующем виде.

Дана линейная динамическая система:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

и задан функционал качества

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)\} dt, \quad (2.16)$$

где матрицы Q и R положительно определены.

Требуется построить управление, минимизирующее функционал (2.16) на объекте (2.15) при условии, что на управление не наложены ограничения.

Очевидно, что матрица $K(t)$ будет являться решением уравнения Риккати (2.10), которое должно удовлетворять граничному условию $K(T)=0$.

Оптимальное управление существует, единственно и определяется уравнением

$$u(t) = -R^{-1} B^T \hat{K} x(t), \quad (2.17)$$

где \hat{K} - постоянная положительно определённая матрица размера $n \times n$, являющаяся решением нелинейного матричного алгебраического уравнения:

$$\hat{K} A + A^T \hat{K} - \hat{K} B R^{-1} B^T \hat{K} + Q = 0. \quad (2.18)$$

Можно показать, что из предположения об управляемости системы (2.15) и из $F=0$ следует существование $\lim_{T \rightarrow \infty} K(T)$, его единственность, а также равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} K(T) = \tilde{K},$$

где \tilde{K} - положительно определённая матрица, являющаяся решением алгебраического уравнения (5.39).

Отметим, что собственные значения матрицы $G = A - BR^{-1}B^T\tilde{K}$ должны иметь отрицательные действительные части и поэтому оптимальная система (2.15) устойчива. Это есть необходимое условие конечности функционала качества (2.16).

3. Управление

Построим линейно-квадратичный регулятор для конкретной системы, описывающей перевёрнутый маятник.

Были выбраны следующие параметры системы:

$$g = 9.804 \text{ м/с}^2, m_p = 1 \text{ кг}, m_w = 0.04 \text{ кг}, l = 0.5 \text{ м}, r = 0.09 \text{ м}.$$

Таким образом объект описывается системой (2.15) с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -93.90804597 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 18.25572414 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 212.8565347 \\ 0 \\ -19.15708812 \end{bmatrix}.$$

В процессе подбора коэффициентов матриц Q и R были выбраны следующие значения:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad R = 1.$$

Решаем нелинейное матричное алгебраическое уравнение:

$$\hat{K} A + A^T \hat{K} - \hat{K} B R^{-1} B^T \hat{K} + Q = 0.$$

Его решением является:

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 0.641228255832672 & 0.311173676078032 & 10.9441222815927 & 3.49439626428041 \\ 0.311173676078032 & 0.298595856783837 & 10.5409646201983 & 3.3650684614986 \\ 10.9441222815927 & 10.5409646201983 & 375.364538190224 & 119.673812514263 \\ 3.49439626428041 & 3.3650684614986 & 119.673812514263 & 38.1975660036661 \end{bmatrix}.$$

Оптимальное управление данной системой находится по формуле (2.17):

$$u(t) = [-0.7071 - 0.9068 - 48.9036 - 15.4827] \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}.$$

4. Моделирование

Моделирование системы производилось в программном пакете MATLAB с использованием SIMULINK. Был ограничен максимальный момент двигателя: 0.8Н*м. Начальное отклонение принимается за 23 градуса, начальные угловые скорости равны нулю.

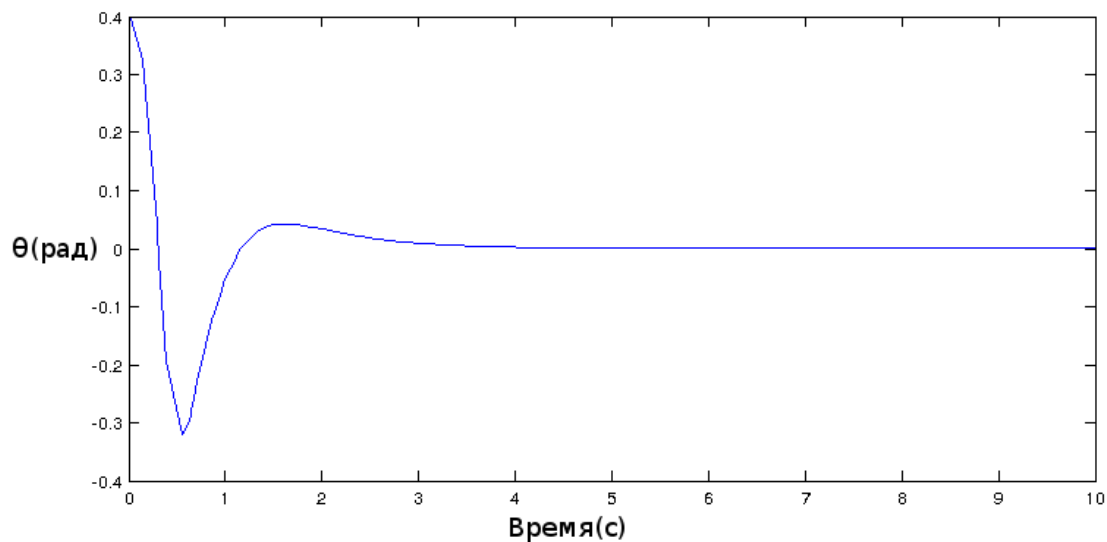


Рис. 4.1. График отклонения маятника от нулевого положения

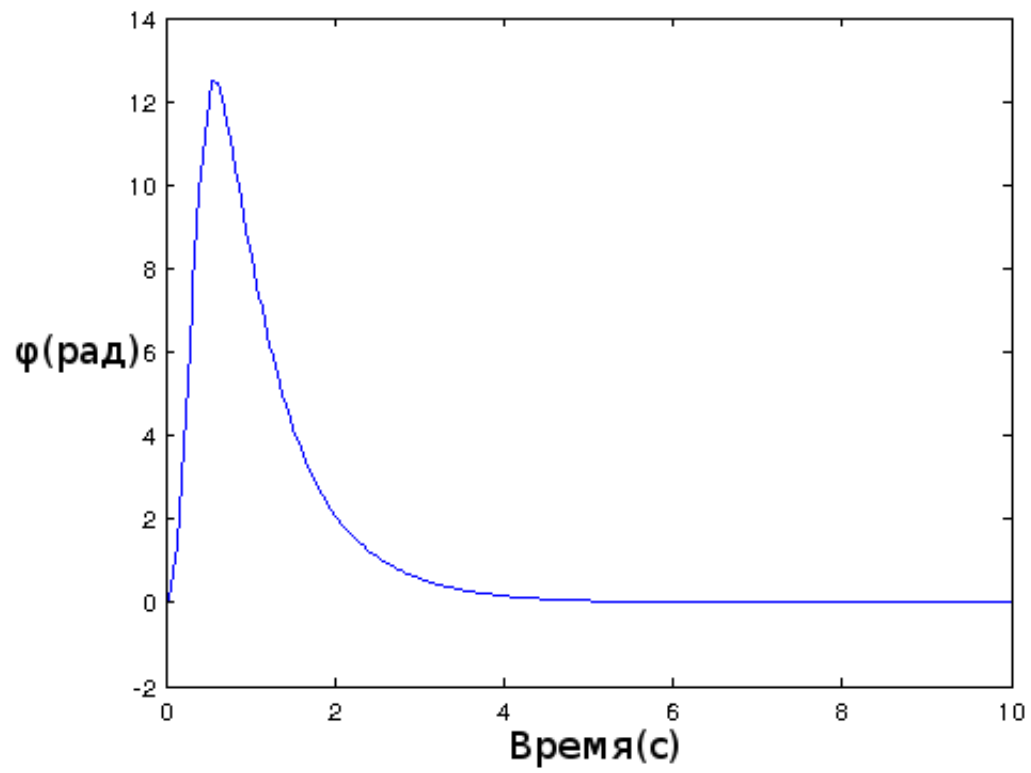


Рис. 4.2. График угла поворота колес маятника

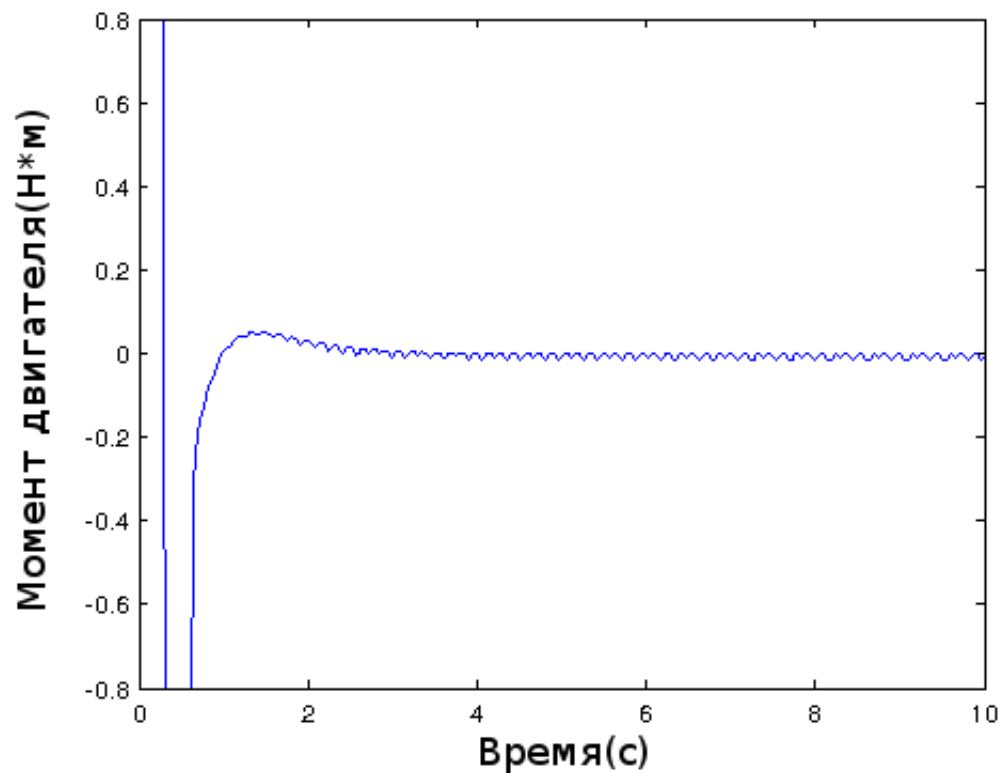


Рис. 4.3. График момента двигателя

Система способна стабилизироваться в окрестности нуля, что соответствует расчётам.

Заключение

Моделируемая система хорошо стабилизируется в окрестности своего неустойчивого положения равновесия благодаря линейно-квадратичному регулятору. Однако данные результаты необходимо проверить практически, построив соответствующую моделируемой системе платформу.

Литература

- И. Фантони, Р. Лозано Нелинейное управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий, К-динамика, 2012
- Афанасьев В.Н. Оптимальные системы управления. Аналитическое конструирование: – М.:, 2006. ISBN 5-94506-090-9