

# 2013 年广东省广州市中考数学试卷

## 参考答案与试题解析

### 一、选择题：

1. (3 分) (2013•广州) 比 0 大的数是 ( )

- A. -1                      B.  $-\frac{1}{2}$                       C. 0                      D. 1

**考点：**有理数大小比较.

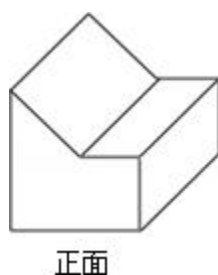
**分析：**比 0 的大的数一定是正数，结合选项即可得出答案.

**解答：**解：4 个选项中只有 D 选项大于 0.

故选 D.

**点评：**本题考查了有理数的大小比较，注意掌握大于 0 的数一定是正数.

2. (3 分) (2013•广州) 如图所示的几何体的主视图是 ( )

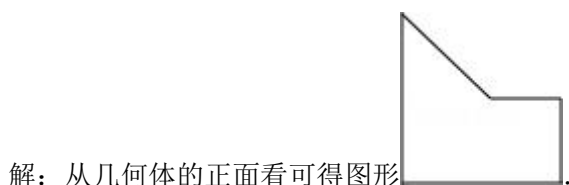


- A.                      B.                      C.                      D.

**考点：**简单组合体的三视图.

**分析：**找到从正面看所得到的图形即可，注意所有的看到的棱都应表现在主视图中.

**解答：**



解：从几何体的正面看可得图形

故选：A.

**点评：**本题考查了三视图的知识，主视图是从物体的正面看得到的视图.

3. (3 分) (2013•广州) 在  $6 \times 6$  方格中，将图 1 中的图形 N 平移后位置如图 2 所示，则图形 N 的平移方法中，正确的是 ( )

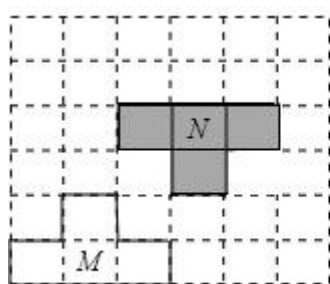


图1

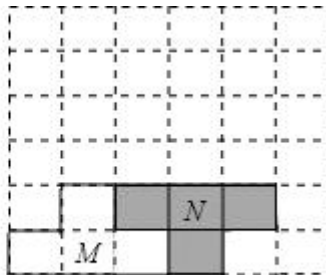


图2

- A. 向下移动 1 格      B. 向上移动 1 格      C. 向上移动 2 格      D. 向下移动 2 格

**考点：**生活中的平移现象.

**分析：**根据题意，结合图形，由平移的概念求解.

**解答：**解：观察图形可知：从图 1 到图 2，可以将图形 N 向下移动 2 格.  
故选 D.

**点评：**本题考查平移的基本概念及平移规律，是比较简单的几何图形变换. 关键是要观察比较平移前后图形的位置.

4. (3 分) (2013•广州) 计算： $(m^3n)^2$  的结果是 ( )

- A.  $m^6n$       B.  $m^6n^2$       C.  $m^5n^2$       D.  $m^3n^2$

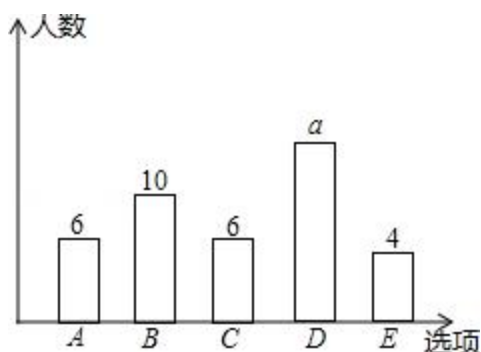
**考点：**幂的乘方与积的乘方.

**分析：**根据幂的乘方的性质和积的乘方的性质进行计算即可.

**解答：**解： $(m^3n)^2=m^6n^2$ .  
故选：B.

**点评：**此题考查了幂的乘方，积的乘方，理清指数的变化是解题的关键，是一道基础题.

5. (3 分) (2013•广州) 为了了解中学生获取资讯的主要渠道，设置“A：报纸，B：电视，C：网络，D：身边的人，E：其他”五个选项（五项中必选且只能选一项）的调查问卷，先随机抽取 50 名中学生进行该问卷调查，根据调查的结果绘制条形图如图所示，该调查的方式是 ( )，图中的 a 的值是 ( )



- A. 全面调查，26      B. 全面调查，24      C. 抽样调查，26      D. 抽样调查，24

**考点：**条形统计图；全面调查与抽样调查.

**分析：**根据关键词“先随机抽取 50 名中学生进行该问卷调查，”可得该调查方式是抽样调查，调查的样本容量为 50，故  $6+10+6+a+4=50$ ，解即可.

**解答：**解：该调查方式是抽样调查，

$$a=50-6-10-6-4=24,$$

故选：D.

**点评：**此题主要考查了条形统计图，以及抽样调查，关键是读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键．条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据．

6. (3分) (2013•广州) 已知两数  $x$ ,  $y$  之和是 10,  $x$  比  $y$  的 3 倍大 2, 则下面所列方程组正确的是 ( )

A.  $\begin{cases} x+y=10 \\ y=3x+2 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} x+y=10 \\ y=3x-2 \end{cases}$

C.  $\begin{cases} x+y=10 \\ x=3y+2 \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x+y=10 \\ x=3y-2 \end{cases}$

**考点：**由实际问题抽象出二元一次方程组.

**专题：**计算题.

**分析：**根据等量关系为：两数  $x$ ,  $y$  之和是 10;  $x$  比  $y$  的 3 倍大 2, 列出方程组即可.

**解答：**解：根据题意列方程组，得：

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x=3y+2 \end{cases}.$$

故选：C.

**点评：**此题主要考查了由实际问题抽象出二元一次方程组，要注意抓住题目中的一些关键性词语“ $x$  比  $y$  的 3 倍大 2”，找出等量关系，列出方程组是解题关键.

7. (3分) (2013•广州) 实数  $a$  在数轴上的位置如图所示，则  $|a-2.5| =$  ( )



A.  $a-2.5$

B.  $2.5-a$

C.  $a+2.5$

D.  $-a-2.5$

**考点：**实数与数轴.

**分析：**首先观察数轴，可得  $a < 2.5$ ，然后由绝对值的性质，可得  $|a-2.5| = -(a-2.5)$ ，则可求得答案.

**解答：**解：如图可得：  $a < 2.5$ ,

$$\text{即 } a-2.5 < 0,$$

$$\text{则 } |a-2.5| = -(a-2.5) = 2.5-a.$$

故选 B.

**点评：**此题考查了利用数轴比较实数的大小及绝对值的定义等知识．此题比较简单，注意数轴上的任意两个数，右边的数总比左边的数大.

8. (3分) (2013•广州) 若代数式  $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$  有意义，则实数  $x$  的取值范围是 ( )

A.  $x \neq 1$

B.  $x \geq 0$

C.  $x > 0$

D.  $x \geq 0$  且  $x \neq 1$

**考点：**二次根式有意义的条件；分式有意义的条件.

**分析：**根据二次根式的性质和分式的意义，被开方数大于或等于 0，分母不等于 0，可以求出  $x$  的范围.

解答：解：根据题意得： $\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}$ ,

解得： $x \geq 0$  且  $x \neq 1$ .

故选 D.

点评：本题考查的知识点为：分式有意义，分母不为 0；二次根式的被开方数是非负数.

9. (3 分) (2013•广州) 若  $5k+20 < 0$ ，则关于  $x$  的一元二次方程  $x^2+4x - k=0$  的根的情况是 ( )

A. 没有实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 有两个不相等的实数根

D. 无法判断

考点：根的判别式.

专题：计算题；压轴题.

分析：根据已知不等式求出  $k$  的范围，进而判断出根的判别式的值的正负，即可得到方程解的情况.

解答：解： $\because 5k+20 < 0$ ，即  $k < -4$ ，

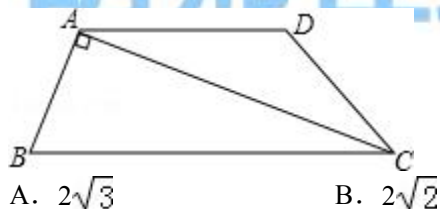
$\therefore \Delta = 16+4k < 0$ ，

则方程没有实数根.

故选 A.

点评：此题考查了一元二次方程根的判别式，根的判别式的值大于 0，方程有两个不相等的实数根；根的判别式的值等于 0，方程有两个相等的实数根；根的判别式的值小于 0，方程没有实数根.

10. (3 分) (2013•广州) 如图所示，四边形 ABCD 是梯形， $AD \parallel BC$ ，CA 是  $\angle BCD$  的平分线，且  $AB \perp AC$ ， $AB=4$ ， $AD=6$ ，则  $\tan B =$  ( )



A.  $2\sqrt{3}$

B.  $2\sqrt{2}$

C.  $\frac{11}{4}$

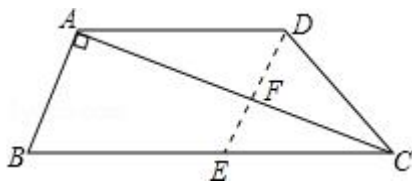
D.  $\frac{5\sqrt{5}}{4}$

考点：梯形；等腰三角形的判定与性质；勾股定理；三角形中位线定理.

专题：压轴题.

分析：先判断  $DA=DC$ ，过点 D 作  $DE \parallel AB$ ，交 AC 于点 F，交 BC 于点 E，由等腰三角形的性质，可得点 F 是 AC 中点，继而可得 EF 是  $\triangle CAB$  的中位线，继而得出 EF、DF 的长度，在  $Rt\triangle ADF$  中求出 AF，然后得出 AC， $\tan B$  的值即可计算.

解答：解：



$\because CA$  是  $\angle BCD$  的平分线，

$\therefore \angle DCA = \angle ACB$ ，

又  $\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle ACB = \angle CAD,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA,$$

$$\therefore DA = DC,$$

过点 D 作  $DE \parallel AB$ , 交 AC 于点 F, 交 BC 于点 E,

$$\because AB \perp AC,$$

$\therefore DE \perp AC$  (等腰三角形三线合一的性质),

$\therefore$  点 F 是 AC 中点,

$$\therefore AF = CF,$$

$\therefore EF$  是  $\triangle CAB$  的中位线,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AB = 2,$$

$$\because \frac{AF}{FC} = \frac{DF}{EF} = 1,$$

$$\therefore DF = EF = 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADF \text{ 中, } AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\text{则 } AC = 2AF = 8\sqrt{2},$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{8\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}.$$

故选 B.

**点评:** 本题考查了梯形的知识、等腰三角形的判定与性质、三角形的中位线定理, 解答本题的关键是作出辅助线, 判断点 F 是 AC 中点, 难度较大.

## 二. 填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

11. (3 分) (2013•广州) 点 P 在线段 AB 的垂直平分线上,  $PA=7$ , 则  $PB=$  7.

**考点:** 线段垂直平分线的性质.

**分析:** 根据线段垂直平分线的性质得出  $PA=PB$ , 代入即可求出答案.

**解答:** 解:  $\because$  点 P 在线段 AB 的垂直平分线上,  $PA=7$ ,

$$\therefore PB = PA = 7,$$

故答案为: 7.

**点评:** 本题考查了对线段垂直平分线性质的应用, 注意: 线段垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等.

12. (3 分) (2013•广州) 广州某慈善机构全年共募集善款 5250000 元, 将 5250000 用科学记数法表示为  $5.25 \times 10^6$ .

**考点:** 科学记数法—表示较大的数.

**分析:** 科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式, 其中  $1 \leq |a| < 10$ , n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值  $> 1$  时, n 是正数; 当原数的绝对值  $< 1$  时, n 是负数.

**解答:** 解: 将 5250000 用科学记数法表示为:  $5.25 \times 10^6$ .

故答案为:  $5.25 \times 10^6$ .

**点评:** 此题考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式, 其中  $1 \leq |a| < 10$ , n 为整

数，表示时关键要正确确定  $a$  的值以及  $n$  的值。

13. (3 分) (2013•广州) 分解因式:  $x^2+xy=$   $x(x+y)$  .

考点: 因式分解-提公因式法.

分析: 直接提取公因式  $x$  即可.

解答: 解:  $x^2+xy=x(x+y)$ .

点评: 本题考查因式分解. 因式分解的步骤为: 一提公因式; 二看公式. 一般来说, 如果可以提取公因式的要先提取公因式, 再看剩下的因式是否还能分解.

14. (3 分) (2013•广州) 一次函数  $y=(m+2)x+1$ , 若  $y$  随  $x$  的增大而增大, 则  $m$  的取值范围是  $m > -2$  .

考点: 一次函数图象与系数的关系.

分析: 根据图象的增减性来确定  $(m+2)$  的取值范围, 从而求解.

解答: 解:  $\because$  一次函数  $y=(m+2)x+1$ , 若  $y$  随  $x$  的增大而增大,  
 $\therefore m+2 > 0$ ,  
 解得,  $m > -2$ .

故答案是:  $m > -2$ .

点评: 本题考查了一次函数的图象与系数的关系.

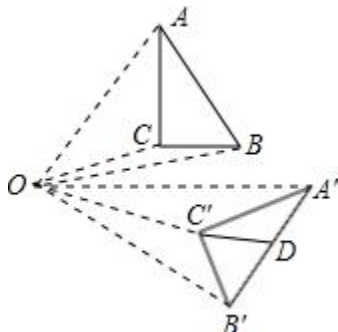
明师在线

MINGSHIEDU.COM  
伴您成长 与您进步

函数值  $y$  随  $x$  的增大而减小  $\Leftrightarrow k < 0$ ;

函数值  $y$  随  $x$  的增大而增大  $\Leftrightarrow k > 0$ .

15. (3 分) (2013•广州) 如图,  $Rt\triangle ABC$  的斜边  $AB=16$ ,  $Rt\triangle ABC$  绕点  $O$  顺时针旋转后得到  $Rt\triangle A'B'C'$ , 则  $Rt\triangle A'B'C'$  的斜边  $A'B'$  上的中线  $C'D$  的长度为 8 .



考点: 旋转的性质; 直角三角形斜边上的中线.

专题: 压轴题.

分析: 根据旋转的性质得到  $A'B'=AB=16$ , 然后根据直角三角形斜边上的中线性质的求解即可.

解答: 解:  $\because Rt\triangle ABC$  绕点  $O$  顺时针旋转后得到  $Rt\triangle A'B'C'$ ,



$$\therefore A'B' = AB = 16,$$

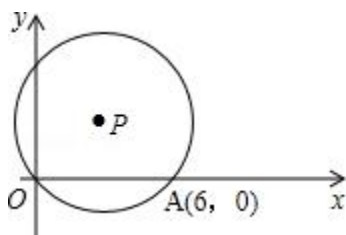
$\therefore C'D$  为  $Rt\triangle A'B'C'$  的斜边  $A'B'$  上的中线,

$$\therefore C'D = \frac{1}{2}A'B' = 8.$$

故答案为 8.

**点评:** 本题考查了旋转的性质: 旋转前后两图形全等; 对应点到旋转中心的距离相等; 对应点与旋转中心的连线段的夹角等于旋转角. 也考查了直角三角形斜边上的中线性质的.

16. (3 分) (2013•广州) 如图, 在平面直角坐标系中, 点  $O$  为坐标原点, 点  $P$  在第一象限,  $\odot P$  与  $x$  轴交于  $O, A$  两点, 点  $A$  的坐标为  $(6, 0)$ ,  $\odot P$  的半径为  $\sqrt{13}$ , 则点  $P$  的坐标为  $(3, 2)$ .



**考点:** 垂径定理; 坐标与图形性质; 勾股定理.

**专题:** 压轴题; 探究型.

**分析:** 过点  $P$  作  $PD \perp x$  轴于点  $D$ , 连接  $OP$ , 先由垂径定理求出  $OD$  的长, 再根据勾股定理求出  $PD$  的长, 故可得出答案.

**解答:** 解: 过点  $P$  作  $PD \perp x$  轴于点  $D$ , 连接  $OP$ ,

$$\because A(6, 0), PD \perp OA,$$

$$\therefore OD = \frac{1}{2}OA = 3,$$

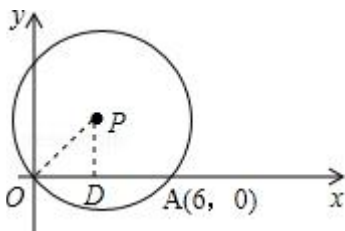
在  $Rt\triangle OPD$  中,

$$\because OP = \sqrt{13}, OD = 3,$$

$$\therefore PD = \sqrt{OP^2 - OD^2} = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 3^2} = 2,$$

$$\therefore P(3, 2).$$

故答案为:  $(3, 2)$ .



**点评:** 本题考查的是垂径定理, 根据题意作出辅助线, 构造出直角三角形是解答此题的关键.

三. 解答题 (本大题共 9 小题, 满分 102 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (9 分) (2013•广州) 解方程:  $x^2 - 10x + 9 = 0$ .

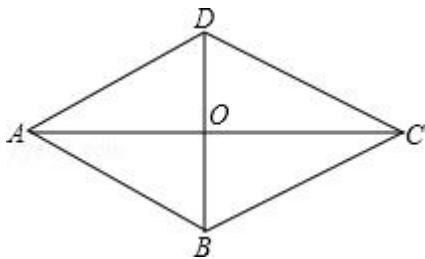
**考点:** 解一元二次方程-因式分解法.

**分析：** 分解因式后得出两个一元一次方程，求出方程的解即可．

**解答：** 解：  $x^2 - 10x + 9 = 0$ ，  
 $(x - 1)(x - 9) = 0$ ，  
 $x - 1 = 0$ ，  $x - 9 = 0$ ，  
 $x_1 = 1$ ，  $x_2 = 9$ ．

**点评：** 本题啊扣除了解一元一次方程和解一元二次方程的应用，关键是能把解一元二次方程转化成解一元一次方程．

18. (9 分) (2013•广州) 如图，四边形 ABCD 是菱形，对角线 AC 与 BD 相交于 O，AB=5，AO=4，求 BD 的长．



**考点：** 菱形的性质；勾股定理．

**分析：** 根据菱形的性质得出  $AC \perp BD$ ，再利用勾股定理求出 BO 的长，即可得出答案．

**解答：** 解：  $\because$  四边形 ABCD 是菱形，对角线 AC 与 BD 相交于 O，

$$\therefore AC \perp BD, DO = BO,$$

$$\therefore AB = 5, AO = 4,$$

$$\therefore BO = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\therefore BD = 2BO = 2 \times 3 = 6.$$

**点评：** 此题主要考查了菱形的性质以及勾股定理，根据已知得出 BO 的长是解题关键．

19. (10 分) (2013•广州) 先化简，再求值：  $\frac{x^2}{x-y} - \frac{y^2}{x-y}$ ，其中  $x = 1 + 2\sqrt{3}$ ，  $y = 1 - 2\sqrt{3}$ ．

**考点：** 分式的化简求值；二次根式的化简求值．

**专题：** 计算题．

**分析：** 分母不变，分子相减，化简后再代入求值．

**解答：**

$$\text{解：原式} = \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x - y)(x + y)}{x - y} = x + y = 1 + 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{3} = 2.$$

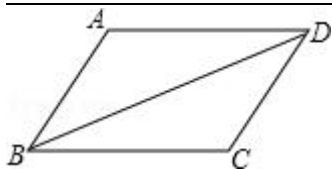
**点评：** 本题考查了分式的化简求值和二次根式的加减，会因式分解是解题的关键．

20. (10 分) (2013•广州) 已知四边形 ABCD 是平行四边形 (如图)，把  $\triangle ABD$  沿对角线 BD 翻折  $180^\circ$  得到  $\triangle A'BD$ ．

(1) 利用尺规作出  $\triangle A'BD$ ． (要求保留作图痕迹，不写作法)；

(2) 设  $DA'$  与  $BC$  交于点 E，求证：  $\triangle BA'E \cong \triangle DCE$ ．





**考点：** 平行四边形的性质；全等三角形的判定；作图-轴对称变换；翻折变换（折叠问题）.

**分析：** （1）首先作  $\angle A'BD = \angle ABD$ ，然后以 B 为圆心，AB 长为半径画弧，交  $BA'$  于点  $A'$ ，连接  $BA'$ ， $DA'$ ，即可作出  $\triangle A'BD$ .

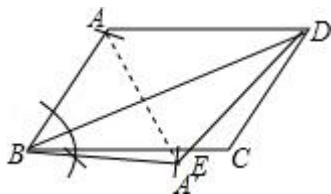
（2）由四边形 ABCD 是平行四边形与折叠的性质，易证得：  $\angle BA'D = \angle C$ ， $A'B = CD$ ，然后由 AAS 即可判定：  $\triangle BA'E \cong \triangle DCE$ .

**解答：** 解：（1）如图：①作  $\angle A'BD = \angle ABD$ ，  
②以 B 为圆心，AB 长为半径画弧，交  $BA'$  于点  $A'$ ，  
③连接  $BA'$ ， $DA'$ ，  
则  $\triangle A'BD$  即为所求；

（2） $\because$  四边形 ABCD 是平行四边形，  
 $\therefore AB = CD$ ， $\angle BAD = \angle C$ ，  
由折叠的性质可得：  $\angle BA'D = \angle BAD$ ， $A'B = AB$ ，  
 $\therefore \angle BA'D = \angle C$ ， $A'B = CD$ ，  
在  $\triangle BA'E$  和  $\triangle DCE$  中，

$$\begin{cases} \angle BA'E = \angle C \\ \angle BEA' = \angle DEC, \\ A'B = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BA'E \cong \triangle DCE$  (AAS).



**点评：** 此题考查了平行四边形的性质、折叠的性质以及全等三角形的判定与性质．此题难度适中，注意掌握折叠前后图形的对应关系，注意掌握数形结合思想的应用．

21. (12 分) (2013•广州) 在某项针对 18~35 岁的青年人每天发微博数量的调查中，设一个人的“日均发微博条数”为  $m$ ，规定：当  $m \geq 10$  时为 A 级，当  $5 \leq m < 10$  时为 B 级，当  $0 \leq m < 5$  时为 C 级．现随机抽取 30 个符合年龄条件的青年人开展每人“日均发微博条数”的调查，所抽青年人的“日均发微博条数”的数据如下表：

11	10	6	15	9	16	13	12	0	8
2	8	10	17	6	13	7	5	7	3
12	10	7	11	3	6	8	14	15	12

- 求样本数据中为 A 级的频率；
- 试估计 1000 个 18~35 岁的青年人中“日均发微博条数”为 A 级的人数；
- 从样本数据为 C 级的人中随机抽取 2 人，用列举法求抽得 2 个人的“日均发微博条数”都是 3 的概率．

**考点：**列表法与树状图法；用样本估计总体；频数与频率。

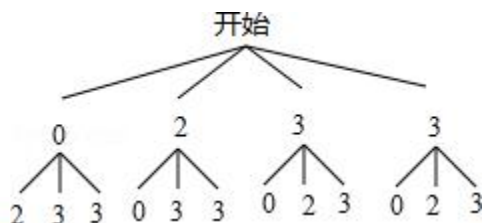
**分析：**（1）由抽取 30 个符合年龄条件的青年人中 A 级的有 15 人，即可求得样本数据中为 A 级的频率；  
（2）根据题意得：1000 个 18~35 岁的青年人中“日均发微博条数”为 A 级的人数为： $1000 \times \frac{1}{2} = 500$ ；  
（3）首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与抽得 2 个人的“日均发微博条数”都是 3 的情况，再利用概率公式求解即可求得答案。

**解答：**解：（1） $\because$ 抽取 30 个符合年龄条件的青年人中 A 级的有 15 人，

$\therefore$ 样本数据中为 A 级的频率为： $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ ；

（2）1000 个 18~35 岁的青年人中“日均发微博条数”为 A 级的人数为： $1000 \times \frac{1}{2} = 500$ ；

（3）C 级的有：0，2，3，3 四人，  
画树状图得：



$\therefore$ 共有 12 种等可能的结果，抽得 2 个人的“日均发微博条数”都是 3 的有 2 种情况，

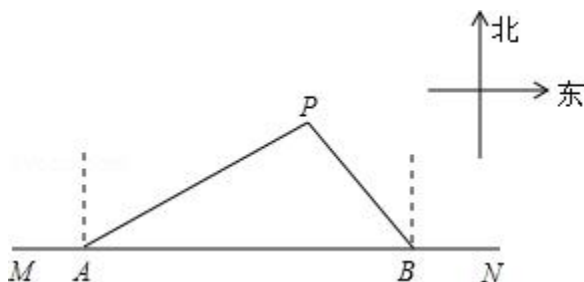
$\therefore$ 抽得 2 个人的“日均发微博条数”都是 3 的概率为： $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

**点评：**本题考查的是用列表法或画树状图法求概率、频数与频率的知识。列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件。注意概率=所求情况数与总情况数之比。

22. (12 分) (2013•广州) 如图，在东西方向的海岸线 MN 上有 A、B 两艘船，均收到已触礁搁浅的船 P 的求救信号，已知船 P 在船 A 的北偏东  $58^\circ$  方向，船 P 在船 B 的北偏西  $35^\circ$  方向，AP 的距离为 30 海里。

(1) 求船 P 到海岸线 MN 的距离（精确到 0.1 海里）；

(2) 若船 A、船 B 分别以 20 海里/小时、15 海里/小时的速度同时出发，匀速直线前往救援，试通过计算判断哪艘船先到达船 P 处。

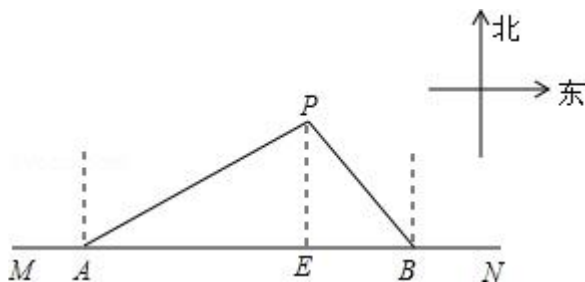


**考点：**解直角三角形的应用-方向角问题。

**分析：**（1）过点 P 作  $PE \perp AB$  于点 E，在  $Rt\triangle APE$  中解出 PE 即可；

(2) 在  $\text{Rt}\triangle BPF$  中, 求出  $BP$ , 分别计算出两艘船需要的时间, 即可作出判断.

解答: 解: (1) 过点  $P$  作  $PE \perp AB$  于点  $E$ ,



由题意得,  $\angle PAE = 32^\circ$ ,  $AP = 30$  海里,

在  $\text{Rt}\triangle APE$  中,  $PE = AP \sin \angle PAE = AP \sin 32^\circ \approx 15.9$  海里;

(2) 在  $\text{Rt}\triangle PBE$  中,  $PE = 15.9$  海里,  $\angle PBE = 55^\circ$ ,

则  $BP = \frac{PE}{\sin \angle PBE} \approx 19.4$  海里,

A 船需要的时间为:  $\frac{30}{20} = 1.5$  小时, B 船需要的时间为:  $\frac{19.4}{15} = 1.3$  小时,

$\because 1.5 > 1.3$ ,

$\therefore$  B 船先到达.

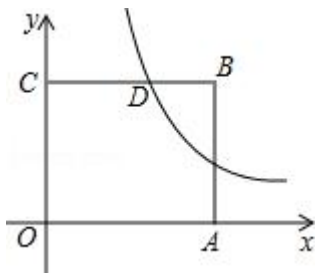
点评: 本题考查了解直角三角形的应用, 解答本题的关键是理解仰角的定义, 能利用三角函数值计算有关线段, 难度一般.

23. (12 分) (2013·广州) 如图, 在平面直角坐标系中, 点  $O$  为坐标原点, 正方形  $OABC$  的边  $OA$ 、 $OC$  分别在  $x$  轴、 $y$  轴上, 点  $B$  的坐标为  $(2, 2)$ , 反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $x > 0$ ,  $k \neq 0$ )

的图象经过线段  $BC$  的中点  $D$ .

(1) 求  $k$  的值;

(2) 若点  $P(x, y)$  在该反比例函数的图象上运动 (不与点  $D$  重合), 过点  $P$  作  $PR \perp y$  轴于点  $R$ , 作  $PQ \perp BC$  所在直线于点  $Q$ , 记四边形  $CQPR$  的面积为  $S$ , 求  $S$  关于  $x$  的解析式并写出  $x$  的取值范围.



考点: 反比例函数综合题.

分析: (1) 首先根据题意求出  $C$  点的坐标, 然后根据中点坐标公式求出  $D$  点坐标, 由反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $x > 0$ ,  $k \neq 0$ ) 的图象经过线段  $BC$  的中点  $D$ ,  $D$  点坐标代入解析式求出  $k$  即可;

(2) 分两步进行解答, ①当  $P$  在直线  $BC$  的上方时, 即  $0 < x < 1$ , 如图 1, 根据  $S_{\text{四边形 } CQPR} = CQ \cdot PD$  列出  $S$  关于  $x$  的解析式, ②当  $P$  在直线  $BC$  的下方时, 即  $x > 1$ , 如图 2, 依然根据  $S_{\text{四边形 } CQPR} = CQ \cdot PG$

列出  $S$  关于  $x$  的解析式.

解答: 解: (1)  $\because$  正方形  $OABC$  的边  $OA$ 、 $OC$  分别在  $x$  轴、 $y$  轴上, 点  $B$  的坐标为  $(2, 2)$ ,

$\therefore C(0, 2)$ ,

$\because D$  是  $BC$  的中点,

$\therefore D(1, 2)$ ,

$\because$  反比例函数  $y = \frac{k}{x} (x > 0, k \neq 0)$  的图象经过点  $D$ ,

$\therefore k = 2$ ;

(2) 当  $P$  在直线  $BC$  的上方时, 即  $0 < x < 1$ ,

如图 1,  $\because$  点  $P(x, y)$  在该反比例函数的图象上运动,

$\therefore y = \frac{2}{x}$ ,

$\therefore S_{\text{四边形} CQPR} = CQ \cdot PQ = x \cdot \left(\frac{2}{x} - 2\right) = 2 - 2x (0 < x < 1)$ ,

当  $P$  在直线  $BC$  的下方时, 即  $x > 1$  如图 2, 同理求出  $S_{\text{四边形} CQPR} = CQ \cdot CR = x \cdot \left(2 - \frac{2}{x}\right) = 2x - 2 (x > 1)$ ,

综上  $S = \begin{cases} 2x - 2 & (x > 1) \\ 2 - 2x & (0 < x < 1) \end{cases}$ .

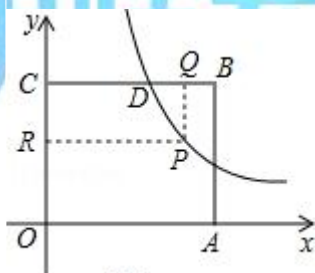


图2

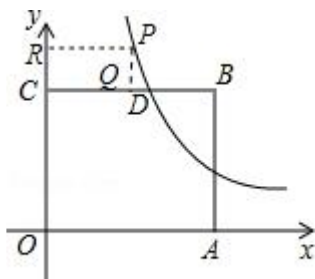


图1

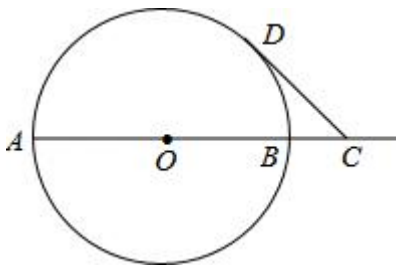
点评: 本题主要考查反比例函数的综合题的知识, 解答本题的关键是熟练掌握反比例函数的性质, 解答(2)问的函数解析式需要分段求, 此题难度不大.

24. (14分) (2013•广州) 已知  $AB$  是  $\odot O$  的直径,  $AB = 4$ , 点  $C$  在线段  $AB$  的延长线上运动, 点  $D$  在  $\odot O$  上运动 (不与点  $B$  重合), 连接  $CD$ , 且  $CD = OA$ .

(1) 当  $OC = 2\sqrt{2}$  时 (如图), 求证:  $CD$  是  $\odot O$  的切线;

(2) 当  $OC > 2\sqrt{2}$  时,  $CD$  所在直线于  $\odot O$  相交, 设另一交点为  $E$ , 连接  $AE$ .

- ①当D为CE中点时，求 $\triangle ACE$ 的周长；  
②连接OD，是否存在四边形AODE为梯形？若存在，请说明梯形个数并求此时 $AE \cdot ED$ 的值；若不存在，请说明理由。



考点：圆的综合题.

专题：压轴题.

分析：（1）关键利用勾股定理的逆定理，判定 $\triangle OCD$ 为直角三角形，如答图①所示；  
（2）①如答图②所示，关键是判定 $\triangle EOC$ 是含 $30^\circ$ 角的直角三角形，从而解直角三角形求出 $\triangle ACE$ 的周长；  
②符合题意的梯形有2个，答图③展示了其中一种情形. 在求 $AE \cdot ED$ 值的时候，巧妙地利用了相似三角形，简单得出了结论，避免了复杂的运算.

解答：（1）证明：连接OD，如答图①所示.

由题意可知， $CD=OD=OA=\frac{1}{2}AB=2$ ， $OC=2\sqrt{2}$ ，

$$\therefore OD^2 + CD^2 = OC^2$$

由勾股定理的逆定理可知， $\triangle OCD$ 为直角三角形，则 $OD \perp CD$ ，

又 $\because$ 点D在 $\odot O$ 上，

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线.

（2）解：①如答图②所示，连接OE，OD，则有 $CD=DE=OD=OE$ ，

$\therefore \triangle ODE$ 为等边三角形， $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 60^\circ$ ；

$\because OD=CD$ ， $\therefore \angle 4 = \angle 5$ ，

$\because \angle 3 = \angle 4 + \angle 5$ ， $\therefore \angle 4 = \angle 5 = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle EOC = \angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$ ，

因此 $\triangle EOC$ 是含 $30^\circ$ 角的直角三角形， $\triangle AOE$ 是等腰直角三角形.

在 $Rt\triangle EOC$ 中， $CE=2OA=4$ ， $OC=4\cos 30^\circ=2\sqrt{3}$ ，

在等腰直角三角形AOE中， $AE=\sqrt{2}OA=2\sqrt{2}$ ，

$\therefore \triangle ACE$ 的周长为： $AE+CE+AC=AE+CE+(OA+OC)=2\sqrt{2}+4+(2+2\sqrt{3})=6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ .

②存在，这样的梯形有2个.

答图③是D点位于AB上方的情形，同理在AB下方还有一个梯形，它们关于直线AB成轴对称.

$\because OA=OE$ ， $\therefore \angle 1 = \angle 2$ ，

$\because CD=OA=OD$ ， $\therefore \angle 4 = \angle 5$ ，

$\because$ 四边形AODE为梯形， $\therefore OD \parallel AE$ ， $\therefore \angle 4 = \angle 1$ ， $\angle 3 = \angle 2$ ，

$\therefore \angle 3 = \angle 5 = \angle 1$ ，

在 $\triangle ODE$ 与 $\triangle COE$ 中，

$$\begin{cases} \angle OED = \angle OEC \\ \angle 3 = \angle 5 \end{cases}$$

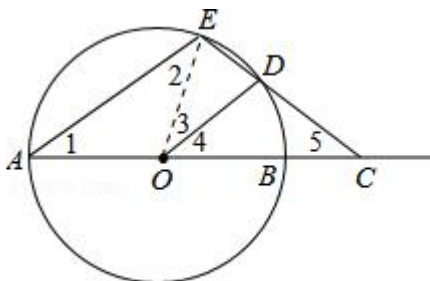
$\therefore \triangle ODE \sim \triangle COE$ ,

则有  $\frac{OE}{CE} = \frac{DE}{OE}$ ,  $\therefore CE \cdot DE = OE^2 = 2^2 = 4$ .

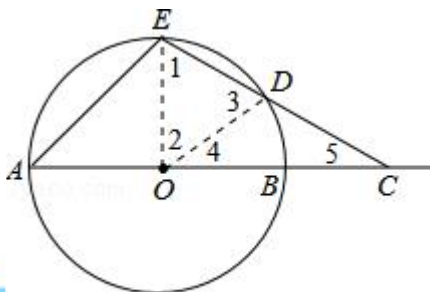
$\because \angle 1 = \angle 5$ ,  $\therefore AE = CE$ ,

$\therefore AE \cdot DE = CE \cdot DE = 4$ .

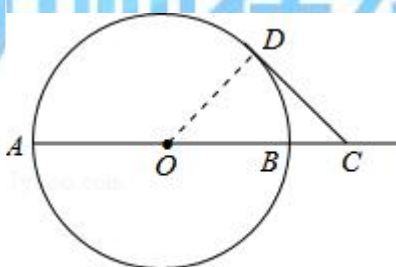
综上所述, 存在四边形 AODE 为梯形, 这样的梯形有 2 个, 此时  $AE \cdot DE = 4$ .



答图③



答图②



答图①

**点评:** 本题是几何综合题, 考查了圆、含 30 度角的直角三角形、等腰直角三角形、等边三角形、梯形等几何图形的性质, 涉及切线的判定、解直角三角形、相似三角形的判定与性质等多个知识点, 难度较大.

25. (14 分) (2013·广州) 已知抛物线  $y_1 = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ,  $a \neq c$ ) 过点 A (1, 0), 顶点为 B, 且抛物线不经过第三象限.

(1) 使用 a、c 表示 b;

(2) 判断点 B 所在象限, 并说明理由;

(3) 若直线  $y_2 = 2x + m$  经过点 B, 且于该抛物线交于另一点 C ( $\frac{c}{a}$ ,  $b+8$ ), 求当  $x \geq 1$  时  $y_1$  的取值范围.

**考点:** 二次函数综合题.

**专题:** 压轴题.



分析: (1) 抛物线经过 A (1, 0), 把点代入函数即可得到  $b = -a - c$ ;

(2) 判断点在哪个象限, 需要根据题意画图, 由条件: 图象不经过第三象限就可以推出开口向上,  $a > 0$ , 只需要知道抛物线与 x 轴有几个交点即可解决, 判断与 x 轴有两个交点, 一个可以考虑  $\Delta$ , 由  $\Delta$  就可以判断出与 x 轴有两个交点, 所以在第四象限; 或者直接用公式法 (或十字相乘法) 算出, 由两个不同的解  $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}, (a \neq c)$ , 进而得出点 B 所在象限;

(3) 当  $x \geq 1$  时,  $y_1$  的取值范围, 只要把图象画出来就清晰了, 难点在于要观察出  $C(\frac{c}{a}, b+8)$  是

抛物线与 x 轴的另一个交点, 理由是  $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}, (a \neq c)$ , 由这里可以发现,  $b+8=0, b = -8$ ,

$a+c=8$ , 还可以发现 C 在 A 的右侧; 可以确定直线经过 B、C 两点, 看图象可以得到,  $x \geq 1$  时,  $y_1$

大于等于最小值, 此时算出二次函数最小值即可, 即求出  $\frac{4ac - b^2}{4a}$  即可, 已经知道  $b = -8, a+c=8$ ,

算出 a, c 即可, 即可得出  $y_1$  的取值范围.

解答: 解: (1)  $\because$  抛物线  $y_1 = ax^2 + bx + c (a \neq 0, a \neq c)$ , 经过 A (1, 0),  
把点代入函数即可得到:  $b = -a - c$ ;

(2) B 在第四象限.

理由如下:

$\because$  抛物线  $y_1 = ax^2 + bx + c (a \neq 0, a \neq c)$  过点 A (1, 0),

$$\therefore x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},$$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}, a \neq c,$$

所以抛物线与 x 轴有两个交点,

又  $\because$  抛物线不经过第三象限,

$\therefore a > 0$ , 且顶点在第四象限;

(3)  $\because C(\frac{c}{a}, b+8)$ , 且在抛物线上,

当  $b+8=0$  时, 解得  $b = -8$ ,

$$\therefore a+c = -b,$$

$$\therefore a+c = 8,$$

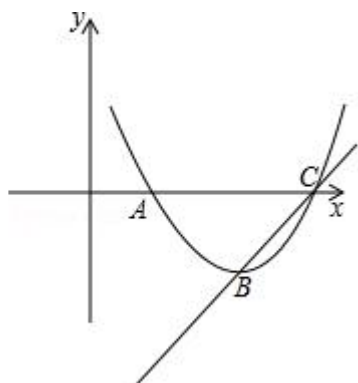
把  $B(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ 、 $C(\frac{c}{a}, b+8)$  两点代入直线解析式得:

$$\begin{cases} b+8 = 2 \times \frac{c}{a} + m \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = 2 \times (-\frac{b}{2a}) + m \\ b = -a - c = -8 \end{cases}$$

解得:  $\begin{cases} a=2 \\ b=-8 \\ c=6 \\ m=-6 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a=4 \\ b=-8 \\ c=4 \\ m=-2 \end{cases}$  ( $a \neq c$ , 舍去)

如图所示, C 在 A 的右侧,

$\therefore$  当  $x \geq 1$  时,  $y_1 \geq \frac{4ac - b^2}{4a} = -2$ .



点评: 此题主要考查了二次函数的综合应用以及根与系数的关系和一次函数与二次函数交点问题等知识, 根据数形结合得出是解题关键.