2012 年广东省广州市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分．在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的）

1．（3 分）实数 3 的倒数是（　　）

A．$-\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．－3　　D．3

【分析】根据乘积是 1 的两个数互为倒数解答

【答案】解：∵$3\times\frac{1}{3}=1$，

∴3 的倒数是$\frac{1}{3}$.

故选 B.

2．（3 分）将二次函数 $y=x^2$ 的图象向下平移一个单位，则平移以后的二次函数的解析式为（　　）

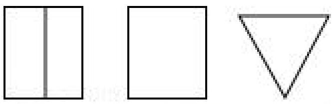
A．$y=x^2-1$　　B．$y=x^2+1$　　C．$y=(x-1)^2$　　D．$y=(x+1)^2$

【分析】直接根据上加下减的原则进行解答即可

【答案】解：由"上加下减"的原则可知，将二次函数 $y=x^2$ 的图象向下平移一个单位，则平移以后的二次函数的解析式为：$y=x^2-1$.

故选 A.

3．（3 分）一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体是（　　）



A．四棱锥　　B．四棱柱　　C．三棱锥　　D．三棱柱

【分析】主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看，所得到的图形.

【答案】解：由于主视图和左视图为长方形可得此几何体为柱体，

由俯视图为三角形，可得为棱柱体，

所以这个几何体是三棱柱；

故选 D.

4．（3 分）下面的计算正确的是（　　）

A．$6a-5a=1$　　B．$a+2a^2=3a^3$　　C．$-(a-b)=-a+b$　　D．$2(a+b)=2a+b$

【分析】根据合并同类项法则：把同类项的系数相加，所得结果作为系数，字母和字母的指数不变；去括号法则：如果括号外的因数是正数，去括号后原括号内各项的符号与原来的符号相同；如果括号外的因数是负数，去括号后原括号内各项的符号与原来的符号相反，进行计算，即可选出答案.

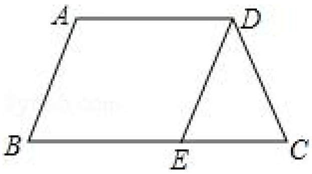
【答案】解：A、$6a-5a=a$，故此选项错误；

B、a 与 $2a^2$ 不是同类项，不能合并，故此选项错误；

C、$-(a-b)=-a+b$，故此选项正确；

D、2（a+b）=2a+2b，故此选项错误；
故选：C.

5.（3 分）如图，在等腰梯形 ABCD 中，BC∥AD，AD=5，DC=4，DE∥AB 交 BC 于点 E，且 EC=3，则梯形 ABCD 的周长是（　　）



A．26　　B．25　　C．21　　D．20

【分析】由 BC∥AD，DE∥AB，即可得四边形 ABED 是平行四边形，根据平行四边形的对边相等，即可求得 BE 的长，继而求得 BC 的长，由等腰梯形 ABCD，可求得 AB 的长，继而求得梯形 ABCD 的周长.

【答案】解：∵BC∥AD，DE∥AB，
∴四边形 ABED 是平行四边形，
∴BE=AD=5，
∵EC=3，
∴BC=BE+EC=8，
∵四边形 ABCD 是等腰梯形，
∴AB=DC=4，
∴梯形 ABCD 的周长为：AB+BC+CD+AD=4+8+4+5=21.
故选 C.

6.（3 分）已知$|a-1|+\sqrt{7+b}=0$，则 a+b=（　　）

A．－8　　B．－6　　C．6　　D．8

【分析】根据非负数的性质列式求出 a、b 的值，然后代入代数式进行计算即可得解.

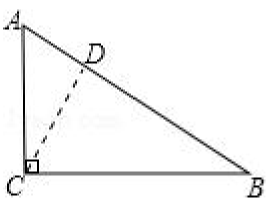
【答案】解：根据题意得，a－1=0，7+b=0，
解得 a=1，b=－7，
所以，a+b=1+（－7）=－6.
故选 B.

7.（3 分）在 Rt△ABC 中，∠C=90°，AC=9，BC=12，则点 C 到 AB 的距离是（　　）

A．$\frac{36}{5}$　　B．$\frac{12}{25}$　　C．$\frac{9}{4}$　　D．$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

【分析】根据题意画出相应的图形，如图所示，在直角三角形 ABC 中，由 AC 及 BC 的长，利用勾股定理求出 AB 的长，然后过 C 作 CD 垂直于 AB，由直角三角形的面积可以由两直角边乘积的一半来求，也可以由斜边 AB 乘以斜边上的高 CD 除以 2 来求，两者相等，将 AC，AB 及 BC 的长代入求出 CD 的长，即为 C 到 AB 的距离.

【答案】解：根据题意画出相应的图形，如图所示：



在 Rt△ABC 中，AC=9，BC=12，

根据勾股定理得：AB=$\sqrt{AC^2+BC^2}$=15，

过 C 作 CD⊥AB，交 AB 于点 D，

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\bullet BC=\frac{1}{2}AB\bullet CD$，

∴$CD=\frac{AC\bullet BC}{AB}=\frac{9\times 12}{15}=\frac{36}{5}$，

则点 C 到 AB 的距离是$\frac{36}{5}$.

故选 A

8.（3 分）已知 a＞b，若 c 是任意实数，则下列不等式中总是成立的是（　　）

A．a+c＜b+c　　B．a﹣c＞b﹣c　　C．ac＜bc　　D．ac＞bc

【分析】根据不等式的性质，分别将个选项分析求解即可求得答案；注意排除法在解选择题中的应用．

【答案】解：A、∵a＞b，c 是任意实数，∴a+c＞b+c，故本选项错误；

B、∵a＞b，c 是任意实数，∴a﹣c＞b﹣c，故本选项正确；

C、当 a＞b，c＜0 时，ac＜bc，而此题 c 是任意实数，故本选项错误；

D、当 a＞b，c＞0 时，ac＞bc，而此题 c 是任意实数，故本选项错误．

故选 B．

9.（3 分）在平面中，下列命题为真命题的是（　　）

A．四边相等的四边形是正方形

B．对角线相等的四边形是菱形

C．四个角相等的四边形是矩形

D．对角线互相垂直的四边形是平行四边形

【分析】分析是否为真命题，需要分别分析各题设是否能推出结论，从而利用排除法得出答案，不是真命题的可以举出反例．

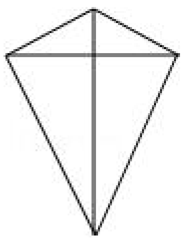
【答案】解：A、四边相等的四边形不一定是正方形，例如菱形，故此选项错误；

B、对角线相等的四边形不是菱形，例如矩形，等腰梯形，故此选项错误；

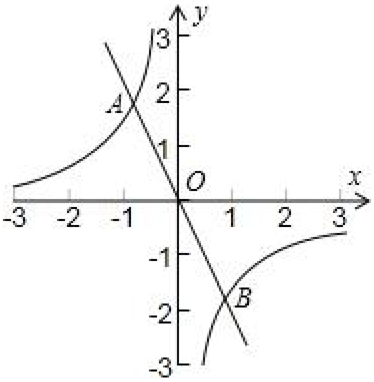
C、四个角相等的四边形是矩形，故此选项正确；

D、对角线互相垂直的四边形不一定是平行四边形，如右图所示，故此选项错误．

故选：C．



10.（3 分）如图，正比例函数 $y_1=k_1x$ 和反比例函数 $y_2=\frac{k_2}{x}$的图象交于 A（﹣1，2）、B（1，﹣2）两点，若 $y_1<y_2$，则 x 的取值范围是（　　）



A．x＜﹣1 或 x＞1　　　B．x＜﹣1 或 0＜x＜1　　C．﹣1＜x＜0 或 0＜x＜1 D．﹣1＜x＜0 或 x＞1

【分析】根据图象找出直线在双曲线下方的 x 的取值范围即可．

【答案】解：由图象可得，﹣1＜x＜0 或 x＞1 时，$y_1<y_2$．

故选 D．

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）

11.（3 分）已知∠ABC=30°，BD 是∠ABC 的平分线，则∠ABD=__15__度．

【分析】根据角平分线的定义解答．

【答案】解：∵∠ABC=30°，BD 是∠ABC 的平分线，

∴$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times30°=15°$．

故答案为：15．

12.（3 分）不等式 x﹣1≤10 的解集是__x≤11__．

【分析】首先移项，然后合并同类项即可求解．

【答案】解：移项，得：x≤10+1，

则不等式的解集是：x≤11．

故答案是：x≤11．

13.（3 分）分解因式：$a^3-8a=$__$a(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})$__．

【分析】先提取公因式 a，再对余下的多项式利用平方差公式继续分解．

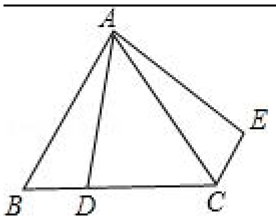
【答案】解：a^3-8a，

$=a(a^2-8)$，

$=a(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})$．

故答案为：$a(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})$．

14.（3 分）如图，在等边三角形 ABC 中，AB=6，D 是 BC 上一点，且 BC=3BD，△ABD 绕点 A 旋转后得到△ACE，则 CE 的长度为__2__．



【分析】由在等边三角形 ABC 中，AB=6，D 是 BC 上一点，且 BC=3BD，根据等边三角形的性质，即可求得 BD 的长，然后由旋转的性质，即可求得 CE 的长度.

【答案】解：∵在等边三角形 ABC 中，AB=6，

∴BC=AB=6，

∵BC=3BD，

∴BD=$\frac{1}{3}$BC=2，

∵△ABD 绕点 A 旋转后得到△ACE，

∴△ABD≌△ACE，

∴CE=BD=2.

故答案为：2.

15.（3 分）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2\sqrt{3}x-k=0$ 有两个相等的实数根，则 k 值为 <u>﹣3</u> .

【分析】因为方程有两个相等的实数根，则△=（$-2\sqrt{3}$）^{2}+4k=0，解关于 k 的方程即可.

【答案】解：∵关于 x 的一元二次方程 $x^2-2\sqrt{3}x-k=0$ 有两个相等的实数根，

∴△=0，

即（$-2\sqrt{3}$）^{2}﹣4×（﹣k）=12+4k=0，

解得 k=﹣3.

故答案为：﹣3.

16.（3 分）如图，在标有刻度的直线 l 上，从点 A 开始，

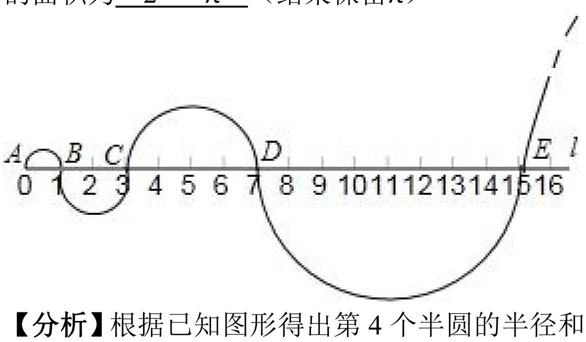
以 AB=1 为直径画半圆，记为第 1 个半圆；

以 BC=2 为直径画半圆，记为第 2 个半圆；

以 CD=4 为直径画半圆，记为第 3 个半圆；

以 DE=8 为直径画半圆，记为第 4 个半圆，

...按此规律，继续画半圆，则第 4 个半圆的面积是第 3 个半圆面积的 <u>4</u> 倍，第 n 个半圆的面积为 <u>$2^{2n-5}\pi$</u> （结果保留π）



【分析】根据已知图形得出第 4 个半圆的半径和第 3 个半圆的半径，进而得出第 4 个半圆的面积与第 3 个半圆面积的关系，得出第 n 个半圆的半径，进而得出答案.

【答案】解：∵以 AB=1 为直径画半圆，记为第 1 个半圆；

以 BC=2 为直径画半圆，记为第 2 个半圆；

以 CD=4 为直径画半圆，记为第 3 个半圆；
以 DE=8 为直径画半圆，记为第 4 个半圆，
∴第 4 个半圆的面积为：$\frac{\pi\times4^2}{2}$=8π，
第 3 个半圆面积为：$\frac{\pi\times2^2}{2}$=2π，
∴第 4 个半圆的面积是第 3 个半圆面积的$\frac{8\pi}{2\pi}$=4 倍；
根据已知可得出第 n 个半圆的直径为：2^{n-1}，
则第 n 个半圆的半径为：$\frac{2^{n-1}}{2}$=2^{n-2}，
第 n 个半圆的面积为：$\frac{\pi\times(2^{n-2})^2}{2}$=$2^{2n-5}$π．

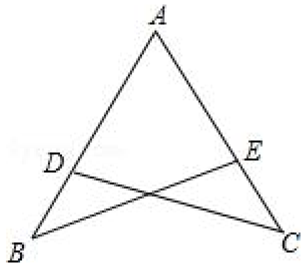
三、解答题（本大题共 9 小题，满分 102 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（9 分）解方程组$\begin{cases}x-y=8\\3x+y=12\end{cases}$．

【分析】根据 y 的系数互为相反数，利用加减消元法求解即可．

【答案】解：$\begin{cases}x-y=8①\\3x+y=12②\end{cases}$，
①+②得，4x=20，
解得 x=5，
把 x=5 代入①得，5﹣y=8，
解得 y=﹣3，
所以方程组的解是$\begin{cases}x=5\\y=-3\end{cases}$．

18．（9 分）如图，点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上，AB=AC，∠B=∠C．求证：BE=CD．



【分析】已知图形∠A=∠A，根据 ASA 证△ABE≌△ACD，根据全等三角形的性质即可求出答案．
【答案】证明：∵在△ABE 和△ACD 中

$\begin{cases}\angle A=\angle A\\ AB=AC\\ \angle B=\angle C\end{cases}$，

∴△ABE≌△ACD（ASA），

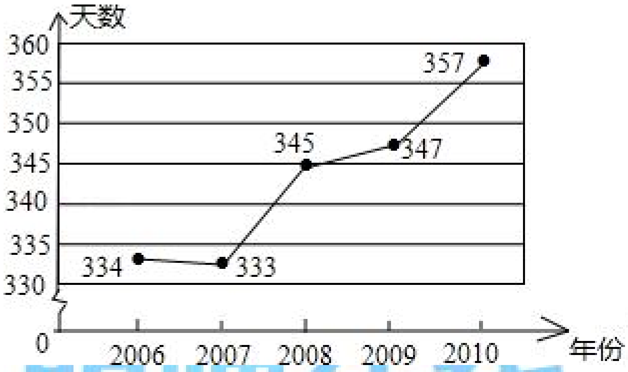
∴BE=CD．

19．（10 分）广州市努力改善空气质量，近年来空气质量明显好转，根据广州市环境保护局公布的 2006﹣2010 这五年各年的全年空气质量优良的天数，绘制折线图如图．根据图中信息回答：

（1）这五年的全年空气质量优良天数的中位数是＿345＿，极差是＿24＿．

（2）这五年的全年空气质量优良天数与它前一年相比，增加最多的是＿2008＿年（填写年份）．

（3）求这五年的全年空气质量优良天数的平均数．



【分析】(1）把这五年的全年空气质量优良天数按照从小到大排列，根据中位数的定义解答；根据极差的定义，用最大的数减去最小的数即可；

（2）分别求出相邻两年下一年比前一年多的优良天数，然后即可得解；

（3）根据平均数的求解方法列式计算即可得解．

【答案】解：（1）这五年的全年空气质量优良天数按照从小到大排列如下：

333、334、345、347、357，

所以中位数是 345；

极差是：357﹣333=24；

（2）2007 年与 2006 年相比，333﹣334=﹣1，

2008 年与 2007 年相比，345﹣333=12，

2009 年与 2008 年相比，347﹣345=2，

2010 年与 2009 年相比，357﹣347=10，

所以增加最多的是 2008 年；

（3）这五年的全年空气质量优良天数的平均数$=\frac{334+333+345+347+357}{5}=\frac{1716}{5}$=343.2 天．

20．（10 分）已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{5}$（a≠b），求$\frac{a}{b(a-b)}-\frac{b}{a(a-b)}$的值．

【分析】求出$\frac{a+b}{ab}=\sqrt{5}$，通分得出$\frac{a^2}{ab(a-b)}-\frac{b^2}{ab(a-b)}$，推出$\frac{a^2-b^2}{ab(a-b)}$，化简得出$\frac{a+b}{ab}$，代入求出即可．

【答案】解：$\because \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{5}$，

$\therefore \frac{a+b}{ab}=\sqrt{5}$，

$\therefore \frac{a}{b(a-b)}-\frac{b}{a(a-b)}$，

$=\frac{a^2}{ab(a-b)}-\frac{b^2}{ab(a-b)}$，

$=\frac{a^2-b^2}{ab(a-b)}$，

$=\frac{(a+b)(a-b)}{ab(a-b)}$，

$=\frac{a+b}{ab}$，

$=\sqrt{5}$．

21．（12 分）甲、乙两个袋中均装有三张除所标数值外完全相同的卡片，甲袋中的三张卡片上所标有的三个数值为﹣7，﹣1，3．乙袋中的三张卡片所标的数值为﹣2，1，6．先从甲袋中随机取出一张卡片，用 x 表示取出的卡片上的数值，再从乙袋中随机取出一张卡片，用 y 表示取出卡片上的数值，把 x、y 分别作为点 A 的横坐标和纵坐标．

（1）用适当的方法写出点 A（x，y）的所有情况．

（2）求点 A 落在第三象限的概率．

【分析】（1）直接利用表格列举即可解答；

（2）利用（1）中的表格求出点 A 落在第三象限共有两种情况，再除以点 A 的所有情况即可．

【答案】解：（1）如下表，

	﹣7	﹣1	3
﹣2	（﹣7，﹣2）	（﹣1，﹣2）	（3，﹣2）
1	（﹣7，1）	（﹣1，1）	（3，1）
6	（﹣7，6）	（﹣1，6）	（3，6）

点 A（x，y）共 9 种情况；

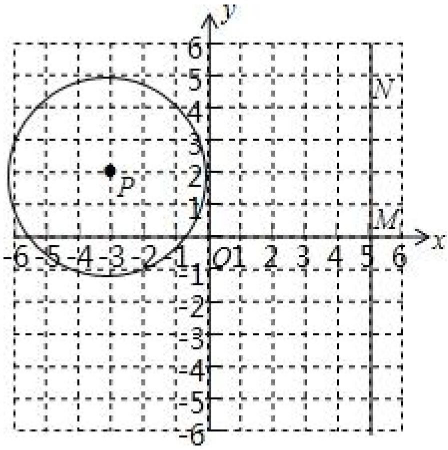
（2）∵点 A 落在第三象限共有（﹣7，﹣2）（﹣1，﹣2）两种情况，

∴点 A 落在第三象限的概率是$\frac{2}{9}$．

22.（12 分）如图，⊙P 的圆心为 P（－3，2），半径为 3，直线 MN 过点 M（5，0）且平行于 y 轴，点 N 在点 M 的上方．

（1）在图中作出⊙P 关于 y 轴对称的⊙P′．根据作图直接写出⊙P′与直线 MN 的位置关系．

（2）若点 N 在（1）中的⊙P′上，求 PN 的长．



【分析】（1）根据关于 y 轴对称的点的横坐标互为相反数，纵坐标相等找出点 P′的位置，然后以 3 为半径画圆即可；再根据直线与圆的位置关系解答；

（2）设直线 PP′与 MN 相交于点 A，在 Rt△AP′N 中，利用勾股定理求出 AN 的长度，在 Rt△APN 中，利用勾股定理列式计算即可求出 PN 的长度．

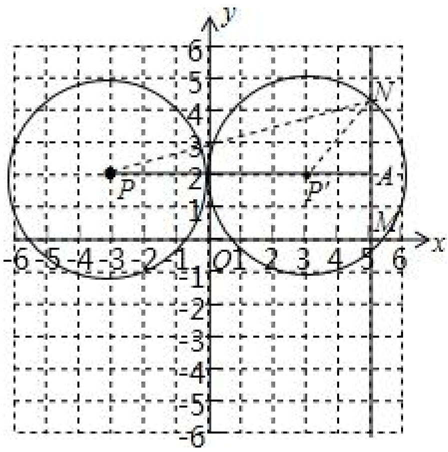
【答案】解：（1）如图所示，⊙P′即为所求作的圆，⊙P′与直线 MN 相交；

（2）连结 PN，P′N．

设直线 PP′与 MN 相交于点 A，

在 Rt△AP′N 中，AN=$\sqrt{P'N^2-AP'^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$，

在 Rt△APN 中，PN=$\sqrt{AP^2+AN^2}=\sqrt{8^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{69}$．



23.（12 分）某城市居民用水实行阶梯收费，每户每月用水量如果未超过 20 吨，按每吨 1.9 元收费．如果超过 20 吨，未超过的部分按每吨 1.9 元收费，超过的部分按每吨 2.8 元收费．设某户每月用水量为 x 吨，应收水费为 y 元．

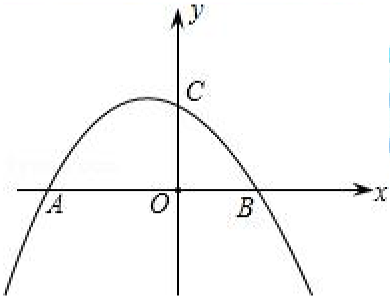
（1）分别写出每月用水量未超过 20 吨和超过 20 吨，y 与 x 间的函数关系式．

（2）若该城市某户 5 月份水费平均为每吨 2.2 元，求该户 5 月份用水多少吨？

【分析】（1）未超过 20 吨时，水费 y=1.9×相应吨数；
超过 20 吨时，水费 y=1.9×20+超过 20 吨的吨数×2.8；
（2）该户的水费超过了 20 吨，关系式为：1.9×20+超过 20 吨的吨数×2.8=用水吨数×2.2．
【答案】解：（1）当 $0\le x\le 20$ 时，$y=1.9x$；
当 $x>20$ 时，$y=1.9\times 20+(x-20)\times 2.8=2.8x-18$；

（2）∵5 月份水费平均为每吨 2.2 元，用水量如果未超过 20 吨，按每吨 1.9 元收费．
∴用水量超过了 20 吨．
$2.8x-18=2.2x$，
解得 $x=30$．
答：该户 5 月份用水 30 吨．

24．（14 分）如图，抛物线 $y=-\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x+3$ 与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C．
（1）求点 A、B 的坐标；
（2）设 D 为已知抛物线的对称轴上的任意一点，当△ACD 的面积等于△ACB 的面积时，求点 D 的坐标；
（3）若直线 l 过点 E（4，0），M 为直线 l 上的动点，当以 A、B、M 为顶点所作的直角三角形有且只有三个时，求直线 l 的解析式．



【分析】（1）A、B 点为抛物线与 x 轴交点，令 y=0，解一元二次方程即可．
（2）根据题意求出△ACD 中 AC 边上的高，设为 h．在坐标平面内，作 AC 的平行线，平行线之间的距离等于 h．根据等底等高面积相等，可知平行线与坐标轴的交点即为所求的 D 点．
从一次函数的观点来看，这样的平行线可以看做是直线 AC 向上或向下平移而形成．因此先求出直线 AC 的解析式，再求出平移距离，即可求得所作平行线的解析式，从而求得 D 点坐标．
注意：这样的平行线有两条，如答图 1 所示．
（3）本问关键是理解"以 A、B、M 为顶点所作的直角三角形有且只有三个"的含义．
因为过 A、B 点作 x 轴的垂线，其与直线 l 的两个交点均可以与 A、B 点构成直角三角形，这样已经有符合题意的两个直角三角形；第三个直角三角形从直线与圆的位置关系方面考虑，以 AB 为直径作圆，当直线与圆相切时，根据圆周角定理，切点与 A、B 点构成直角三角形．从而问题得解．
注意：这样的切线有两条，如答图 2 所示．
【答案】解：（1）令 y=0，即 $-\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x+3=0$，
解得 $x_1=-4$，$x_2=2$，

∴A、B 点的坐标为 A（﹣4，0）、B（2，0）.

（2）抛物线 $y=-\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x+3$的对称轴是直线 $x=-\frac{-\frac{3}{4}}{2\times(-\frac{3}{8})}=-1$，

即 D 点的横坐标是﹣1，

$S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}AB\bullet OC=9$，

在 Rt△AOC 中，$AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

设△ACD 中 AC 边上的高为 h，则有$\frac{1}{2}AC\bullet h=9$，解得 $h=\frac{18}{5}$.

如答图 1，在坐标平面内作直线平行于 AC，且到 AC 的距离$=h=\frac{18}{5}$，这样的直线有 2 条，分别是 l_1 和 l_2，则直线与对称轴 x=﹣1 的两个交点即为所求的点 D.

设 l_1 交 y 轴于 E，过 C 作 $CF\perp l_1$ 于 F，则 $CF=h=\frac{18}{5}$，

$\therefore CE=\frac{CF}{\sin\angle CEF}=\frac{CF}{\sin\angle OCA}=\frac{\frac{18}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{9}{2}$.

设直线 AC 的解析式为 y=kx+b，将 A（﹣4，0），C（0，3）坐标代入，

得到$\begin{cases}-4k+b=0\\ b=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=\frac{3}{4},\\ b=3\end{cases}$

∴直线 AC 解析式为 $y=\frac{3}{4}x+3$.

直线 l_1 可以看做直线 AC 向下平移 CE 长度单位（$\frac{9}{2}$个长度单位）而形成的，

∴直线 l_1 的解析式为 $y=\frac{3}{4}x+3-\frac{9}{2}=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$.

则 D_1 的纵坐标为$\frac{3}{4}\times(-1)-\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}$，∴$D_1(-1,\ -\frac{9}{4})$.

同理，直线 AC 向上平移$\frac{9}{2}$个长度单位得到 l_2，可求得 $D_2(-1,\frac{27}{4})$

综上所述，D 点坐标为：$D_1(-1,\ -\frac{9}{4})$，$D_2(-1,\frac{27}{4})$.

（3）如答图 2，以 AB 为直径作⊙F，圆心为 F．过 E 点作⊙F 的切线，这样的切线有 2 条．
连接 FM，过 M 作 MN⊥x 轴于点 N.
∵A（﹣4，0），B（2，0），
∴F（﹣1，0），⊙F 半径 FM=FB=3.
又 FE=5，则在 Rt△MEF 中，

$ME=\sqrt{5^2-3^2}=4$，$\sin\angle MFE=\frac{4}{5}$，$\cos\angle MFE=\frac{3}{5}$.

在 Rt△FMN 中，$MN=MF\bullet\sin\angle MFE=3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$，

$FN=MF\bullet\cos\angle MFE=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$，则 $ON=\frac{4}{5}$，

∴M 点坐标为（$\frac{4}{5}$，$\frac{12}{5}$）

直线 l 过 M（$\frac{4}{5}$，$\frac{12}{5}$），E（4，0），

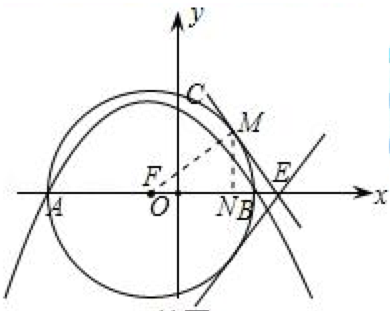
设直线 l 的解析式为 y=kx+b，则有

$\begin{cases}\frac{4}{5}k+b=\frac{12}{5}\\ 4k+b=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-\frac{3}{4}\\ b=3\end{cases}$，

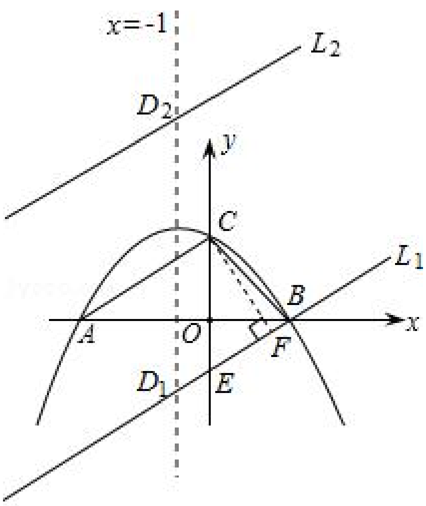
所以直线 l 的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$.

同理，可以求得另一条切线的解析式为 $y=\frac{3}{4}x-3$.

综上所述，直线 l 的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 或 $y=\frac{3}{4}x-3$.



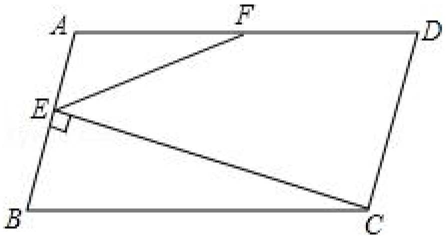
答图2



答图1

25．（14 分）（2012•广州）如图，在平行四边形 ABCD 中，AB=5，BC=10，F 为 AD 的中点，CE⊥AB 于 E，设∠ABC=α（60°≤α＜90°）.

（1）当$\alpha=60°$时，求 CE 的长；
（2）当 $60°<\alpha<90°$时，
①是否存在正整数 k，使得∠EFD=k∠AEF？若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由．
②连接 CF，当 CE^2-CF^2 取最大值时，求 tan∠DCF 的值．



【分析】（1）利用 60°角的正弦值列式计算即可得解；
（2）①连接 CF 并延长交 BA 的延长线于点 G，利用“角边角”证明△AFG 和△DFC 全等，根据全等三角形对应边相等可得 CF=GF，AG=CD，再利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 EF=GF，再根据 AB、BC 的长度可得 AG=AF，然后利用等边对等角的性质可得∠AEF=∠G=∠AFG，根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和可得∠EFC=2∠G，然后推出∠EFD=3∠AEF，从而得解；
②设 BE=x，在 Rt△BCE 中，利用勾股定理表示出 CE^2，表示出 EG 的长度，在 Rt△CEG 中，利用勾股定理表示出 CG^2，从而得到 CF^2，然后相减并整理，再根据二次函数的最值问题解答．

【答案】解：（1）∵$\alpha=60°$，BC=10，

∴$\sin\alpha=\frac{CE}{BC}$，

即 $\sin60°=\frac{CE}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

解得 $CE=5\sqrt{3}$；

（2）①存在 k=3，使得∠EFD=k∠AEF．
理由如下：连接 CF 并延长交 BA 的延长线于点 G，
∵F 为 AD 的中点，
∴AF=FD，
在平行四边形 ABCD 中，AB∥CD，
∴∠G=∠DCF，

在△AFG 和△DFC 中，$\begin{cases}\angle G=\angle DCF\\ \angle AFG=\angle DFC（对顶角相等）\\ AF=FD\end{cases}$，

∴△AFG≌△DFC（AAS），
∴CF=GF，AG=CD，
∵CE⊥AB，
∴EF=GF（直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半），
∴∠AEF=∠G，
∵AB=5，BC=10，点 F 是 AD 的中点，

∴AG=5，$AF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=5$，

∴AG=AF，

∴∠AFG=∠G，

在△EFG 中，∠EFC=∠AEF+∠G=2∠AEF，

又∵∠CFD=∠AFG（对顶角相等），

∴∠CFD=∠AEF，

∴∠EFD=∠EFC+∠CFD=2∠AEF+∠AEF=3∠AEF，

因此，存在正整数 k=3，使得∠EFD=3∠AEF；

②设 BE=x，∵AG=CD=AB=5，

∴EG=AE+AG=5﹣x+5=10﹣x，

在 Rt△BCE 中，$CE^2=BC^2-BE^2=100-x^2$，

在 Rt△CEG 中，$CG^2=EG^2+CE^2=(10-x)^2+100-x^2=200-20x$，

∵由①知 CF=GF，

∴$CF^2=\left(\frac{1}{2}CG\right)^2=\frac{1}{4}CG^2=\frac{1}{4}(200-20x)=50-5x$，

∴$CE^2-CF^2=100-x^2-50+5x=-x^2+5x+50=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+50+\frac{25}{4}$，

∴当 $x=\frac{5}{2}$，即点 E 是 AB 的中点时，CE^2-CF^2 取最大值，

此时，$EG=10-x=10-\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$，

$CE=\sqrt{100-x^2}=\sqrt{100-\frac{25}{4}}=\frac{5\sqrt{15}}{2}$，

所以，$\tan\angle DCF=\tan\angle G=\frac{CE}{EG}=\frac{\frac{5\sqrt{15}}{2}}{\frac{15}{2}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$.