

# 高考冲刺一二三

考前一个月



## 数学

本册主编 段记超  
副主编 程守民 刘广友  
李存才 周海霞

中央广播电视大学出版社

# 目录

## CONTENTS



考前30天	集合与简易逻辑 .....	1
考前29天	高考论坛 集合问题的几个热点题型 .....	6
考前28天	函数的性质 .....	8
考前27天	高考论坛 函数性质的三个常用结论及应用 .....	15
考前26天	三角与平面向量 .....	21
考前25天	高考论坛 选择题的解法方法与技巧 .....	25
考前24天	数列 .....	28
考前23天	高考论坛 应用递推关系求数列通项公式的常用技巧 .....	35
考前21天	不等式 .....	38
考前20天	高考论坛 不等式的恒成立问题 .....	43
考前18天	高考论坛 填空题解题方法与技巧 .....	45
考前17天	极限(理)与导数 .....	47
考前16天	高考论坛 导数的综合运用 .....	56
考前14天	解析几何 .....	59
考前13天	高考论坛 优化解析几何运算的五大策略 .....	65
考前12天	立体几何 .....	68
考前10天	高考论坛 立体几何中的开放探索型问题 .....	74
考前9天	排列、组合、概率与统计 .....	77
考前7天	复数(理科) .....	83
考前5天	高考论坛 对高考压轴题的理性思考 .....	86
考前3天	专家支招 数学高考答题有技巧 .....	89
考前1天	考前热身 笑迎高考 .....	91
	参考答案与点拨 .....	93



# 考前30天

今天复习巩固强化—集合与简易逻辑



温馨提示易错点 高考轻松把分捡

http://www.tzdl08.com

1

1. 认识集合时,你注意到代表元素了吗?

**[典例]** 已知集合  $M = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $N = \{x | y = \sqrt{9 - x^2}\}$ , 则  $M \cap N$  等于 ( )

A.  $\{x | 1 < x \leq 3\}$  B.  $\{x | 1 \leq x < 3\}$  C.  $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$  D.  $\{x | 1 < x < 4\}$

**[解析]** 在集合运算之前,首先要识别集合,即认清集合中元素的特征, $M$ 、 $N$  是数集还是点集,是数集要化简集合,是点集要解方程组,从而使集合的特征明朗化.  $M$  是函数的值域; $N$  是函数的定义域

$$M = \{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\} = \{y | y \geq 1\},$$

$$N = \{x | y = \sqrt{9 - x^2}\} = \{x | 9 - x^2 \geq 0\} = \{x | -3 \leq x \leq 3\},$$

$\therefore M \cap N = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$ . 故选 C.

**[注意]** 集合  $\{y | y = f(x), x \in A\}$  是函数的值域,是数集,可通过求函数值域化简集合;集合  $\{(x, y) | y = f(x), x \in A\}$  是点集,表示函数  $y = f(x)$  图象上的所有点.

**[类比·鉴赏]** 设  $A = \{(x, y) | 4x + y = 6, x, y \in \mathbf{N}^*\}$ ,  $B = \{y | 3x + 2y = 7, x, y \in \mathbf{N}^*\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_.

2. 进行集合运算时,你注意到  $\emptyset$  的特殊性并验证了吗?

**[典例]** 已知集合  $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - mx + 2 = 0\}$ , 且  $A \cap B = B$ , 实数  $m$  的范围是 ( )

A.  $\{m | -2\sqrt{2} \leq m < 2\sqrt{2}\}$

B.  $\{m | -2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}\}$

C.  $\{m | -2\sqrt{2} < m \leq 2\sqrt{2}\}$

D.  $\{m | m = 3 \text{ 或 } -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}\}$

**[解析]** 化简条件得  $A = \{1, 2\}$ ,  $A \cap B = B$ ,  $B \subseteq A$ ,

根据集合  $B$  中元素个数分类讨论,  $B = \emptyset$ ,  $B = \{2\}$  或  $\{1\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ ,

(1) 当  $B = \emptyset$  时,  $\Delta = m^2 - 8 < 0$ ,  $\therefore -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ ;

(2) 当  $B = \{2\}$  或  $\{1\}$  时,  $\begin{cases} m^2 - 8 = 0 \\ m = 1 + 1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} m^2 - 8 = 0 \\ m = 2 + 2 \end{cases}$ ,  $m$  无解;

(3) 当  $B = \{1, 2\}$  时,  $m = 3$ .

综上所述,  $m = 3$  或  $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ , 故选 D.

**[注意]** 分类讨论是中学数学的重要思想方法,全面地挖掘题中隐含条件是解题的一个重要方面,如本题当  $B = \{2\}$  或  $\{1\}$  时,不能遗漏  $\Delta = 0$  的情况;注意空集的特殊性  $A \cup \emptyset = A$ ,  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;特别是遇到  $A \subseteq B$ 、 $A$  是  $B$  的真子集、 $B$  的非空等时,一定要注意空集的讨



论.

**[类比·鉴赏]** 已知集合  $A = \{x | -x^2 + 2x + 8 \geq 0\}$ ,  $B = \{x | |x - a| \leq 5\}$  且  $A \cap B = A$ , 则  $a$  的取值范围\_\_\_\_\_.

3. 充分条件、必要条件和充要条件的概念记住了吗, 如何判断?

**[典例]** “ $a = -1$ ”是方程“ $a^2x^2 + (a+2)y^2 + 2ax + a = 0$ ”表示圆的 ( )

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

**[解析]** (1) 处理充分条件、必要条件问题时, 首先要分清条件与结论, 然后才能进行推理和判断; (2) 判断命题的充要关系有三种方法: ① 定义法, ② 等价法, 即利用等价命题的方法(互为逆否命题的两命题等价), ③ 利用集合之间的关系判断,  $A \subseteq B$ , 则  $A$  是  $B$  的充分条件或  $B$  是  $A$  的必要条件;  $A = B$ , 则  $A$  是  $B$  的充要条件. 对于本题,  $a = -1$  时, 方程可化为  $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ , 即  $(x-1)^2 + y^2 = 2$ , 它是圆的方程;

若  $a^2x^2 + (a+2)y^2 + 2ax + a = 0$  表示圆, 则  $\begin{cases} a^2 = a+2 \neq 0 \\ (2a)^2 - 4a^3 > 0 \end{cases}$ , 解得  $a = -1$ .

综上所述,  $a = -1$  是方程“ $a^2x^2 + (a+2)y^2 + 2ax + a = 0$ ”表示圆的充要条件. 故选 C.

**[类比·鉴赏]** 若  $a, b, c$  是常数, 则“ $a > 0$  且  $b^2 - 4ac < 0$ ”是“对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $ax^2 + bx + c > 0$ ”的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件



### 常考题型要练熟 临场不惧胸有竹

#### 1. 命题的真假与四种命题之间的相互关系

**[例 1]** 给出下列三个命题: ①若  $a \geq b > -1$ , 则  $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$ ; ②若正整数  $m$  和  $n$  满足  $m \leq n$ , 则  $\sqrt{m(n-m)} \leq \frac{n}{2}$ ; ③设  $P(x_1, y_1)$  为圆  $O_1: x^2 + y^2 = 9$  上任一点, 圆  $O_2$  以  $Q(a, b)$  为圆心且半径为 1. 当  $(a-x_1)^2 + (b-y_1)^2 = 1$  时, 圆  $O_1$  与圆  $O_2$  相切. 其中假命题的个数为 ( )

A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3

**[分析]** 本题共给出三个命题, 要求确定假命题的个数, 涉及的知识点是不等式的性质、有关不等式的性质以及解析几何中圆的位置关系判断等.

**[解析]** 对命题①, 因  $a \geq b > -1$ ,  $\therefore a+1 \geq b+1 > 0$ ,  $\therefore \frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} = \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} \geq 0$ , 结论正确; 对命题②,  $\because$  正整数  $m, n$  满足  $m \leq n$ ,  $\therefore \sqrt{m(n-m)} \leq \frac{m+(n-m)}{2} = \frac{n}{2}$ . 当且仅当  $m = \frac{n}{2}$  时取等号, 也是正确的; 对命题③, 圆  $O_1$  上的点到圆  $O_2$  的圆心的距离为 1, 两圆不一定相切, 也可能相交, 故是假命题. 故选 B.

**[点睛]** 本题是一比较小的综合题目, 考查的知识点主要有: 不等式的性质、均值不等式及圆与圆的位置关系的判定.

**[例 2]** 把下面不完整的命题补充完整, 并使之成为真命题: 若函数  $f(x) = 3 + \log_2 x$  的



图象与  $g(x)$  的图象关于 \_\_\_\_\_ 对称, 则函数  $g(x) =$  \_\_\_\_\_ (注: 填上你认为可以成为真命题的一种情形即可, 不必考虑所有可能的情形).

**[分析]** 本题是一道开放性题目, 本题考查两函数的对称性、函数解析式的求法等, 答案不唯一; 为了解题的准确率, 我们可以考虑特殊直线做对称轴, 如:  $x$  轴、 $y$  轴、 $y=x$  等, 也可以是特殊点的对称, 如: 原点等.

**[解析]** 如 ①  $x$  轴,  $-3-\log_2 x$ ; 或 ②  $y$  轴,  $3+\log_2(-x)$ ;  
或 ③ 原点,  $-3-\log_2(-x)$ ; 或 ④ 直线  $y=x$ ,  $2^{-x}$  等.

**[点睛]** 要求补充题设条件或结论使之成为真命题, 题目的开放性比较强, 在高考注重考查能力的形势下, 这类题目越来越受到青睐, 应引起考生的重视.

## 2. 集合的性质及运算

集合的性质常在互异性上出题, 此时要注意验证所求的值是否满足互异性; 集合的运算主要是集合的交、并、补, 兼顾到空集的特殊性. 考查常与不等式、方程、圆锥曲线等结合在一起.

**[例 3]** 设集合  $M=\{x|x=3m+1, m \in \mathbf{Z}\}$ ,  $N=\{y|y=3n+2, n \in \mathbf{Z}\}$ , 若  $x_0 \in M, y_0 \in N$ , 则  $x_0 y_0$  与  $M, N$  的关系为 \_\_\_\_\_.

**[分析]** 分析集合  $M, N$  中元素的性质是解决本题的关键, 判断  $x_0 y_0$  与  $M, N$  的关系, 只需判断  $x_0 y_0$  被 3 除所得的余数.

**[解析]**  $\because (3m+1)(3n+2)=9mn+6m+3n+2=3(3mn+2m+n)+2, \therefore x_0 y_0$  被 3 除余 2,  $\therefore x_0 y_0 \in N, x_0 y_0 \notin M$ .

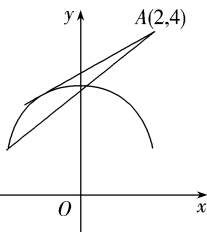
**[点睛]** 见到形如“ $an+b$ , 其中  $a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}$ ”的代数式, 就应想到利用余数分类的方法.

一个整数用 2 去除, 余数只能是 0 或 1, 利用这两个余数就把整数集分成了两类, 奇数集和偶数集, 即  $\mathbf{Z}=\{x|x=2n, n \in \mathbf{Z}\} \cup \{x|x=2n+1, n \in \mathbf{Z}\}$ . 这样任意一个整数不属于奇数集就属于偶数集. 如果一个整数用 3 去除, 余数就为 0、1 或 2, 利用这三个余数就把整数集分成了三类, 即  $\mathbf{Z}=\{x|x=3n, n \in \mathbf{Z}\} \cup \{x|x=3n+1, n \in \mathbf{Z}\} \cup \{x|x=3n+2, n \in \mathbf{Z}\}$ , 这样任何一个整数必属于三者之一, 依此类推.

**[例 4]** 若集合  $A=\{(x, y) | y=1+\sqrt{4-x^2}\}$ ,  $B=\{(x, y) | y=k(x-2)+4\}$ , 当集合  $C=A \cap B$  有且仅有四个子集, 则实数  $k$  的取值范围是 ( )

- A.  $\left[\frac{5}{12}, +\infty\right)$       B.  $\left(\frac{5}{12}, \frac{3}{4}\right]$   
C.  $\left(\frac{5}{12}, \frac{5}{4}\right]$       D.  $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right]$

**[分析]** 这是一道解析几何与集合的运算结合在一起的综合题, 由于集合  $A$  中有  $n$  个元素时, 它的子集的个数是  $2^n$ , 从而确定集合  $C$  中有 2 个元素, 即两曲线有 2 个交点.



**[解析]** 由于  $A \cap B$  有 2 个元素, 所以曲线  $y=1+\sqrt{4-x^2}$  与直线  $y=k(x-2)+4$  仅有 2 个交点, 曲线  $y=1+\sqrt{4-x^2}$  是圆  $x^2+(y-1)^2=4$  的上半部分, 且直线  $y=k(x-2)+4$  过定点  $(2, 4)$ , 斜率为  $k$ , 如上图由数形结合容易解得  $\frac{5}{12} < k \leq \frac{3}{4}$ . 选 B.



**[点睛]** 解决这类问题,若用代数的方法,比较麻烦,计算量大;用数形结合的思想可简化运算,提高正确率,省时高效.

### 3. 充要条件的判断

充要条件的判断是本节考查的又一内容,借助命题、不等式、数学概念、几何等知识命题,着重考查学生对基础知识掌握的熟练程度、思考问题是否全面等.

**[例 5]**  $0 < a \leq \frac{1}{5}$  是函数  $f(x) = ax^2 + 2(a-1)x + 3$  在  $(-\infty, 4]$  上为减函数的 ( )

A. 充分但不必要条件

B. 必要但不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

**[分析]** 利用二次函数的对称轴和单调区间的关系求解;说明必要条件或充分条件不成立时可用特殊值法.

**[解析]** 若  $0 < a \leq \frac{1}{5}$ , 则  $f(x) = ax^2 + 2(a-1)x + 3$  为开口向上的二次函数, 且对称轴为  $x = \frac{2-2a}{2a} = \frac{1}{a} - 1 \in [4, +\infty)$ , 由二次函数的图象知函数  $f(x) = ax^2 + 2(a-1)x + 3$  在  $(-\infty, 4]$  上是减函数; 所以  $0 < a \leq \frac{1}{5}$  是函数  $f(x) = ax^2 + 2(a-1)x + 3$  在  $(-\infty, 4]$  为减函数的充分条件; 反过来, 若  $a = 0$ , 函数  $f(x) = ax^2 + 2(a-1)x + 3$  为  $f(x) = -2x + 3$ , 它在  $\mathbf{R}$  上是减函数, 所以在  $(-\infty, 4]$  上也为减函数, 但  $0 \notin (0, \frac{1}{5}]$ , 所以  $0 < a \leq \frac{1}{5}$  不是函数  $f(x) = ax^2 + 2(a-1)x + 3$  在  $(-\infty, 4]$  上为减函数的必要条件, 故选 A.

**[点睛]** 这是一个函数的单调性与简易逻辑结合在一起的题目, 熟练掌握函数的单调性的判断是关键; 求解时要注意函数是几次函数的讨论, 这一点容易忽略.



### 考前猜题与押宝 热点问题再聚焦

**[聚焦]** 已知  $a > 0$ . 命题  $p$ : 曲线  $y = x^2 + (a-1)x + a^2$  与  $x$  轴无公共点. 命题  $q$ : 函数  $y = (4a^2 + 3a)^{x+1}$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数.

(1) 分别求出符合下列条件的实数  $a$  的取值范围.

①  $p \vee q$  是真命题; ②  $p, q$  有且只有一个是真命题;

(2) 判断  $p$  是  $q$  成立的什么条件.

**[分析]** 此类题目的求解一般情况是把命题化简, 然后根据题目要求再进行运算. 正面求解比较困难时可考虑补集思想在这类题目中的应用.

**[解析]**  $p$ :  $\because$  曲线  $y = x^2 + (a-1)x + a^2$  与  $x$  轴无公共点, 即方程  $x^2 + (a-1)x + a^2 = 0$  无实数根, 故  $\Delta = (a-1)^2 - 4a^2 < 0$ , 解之得,  $a > \frac{1}{3}$  或  $a < -1$ , 又  $a > 0$ , 所以  $a > \frac{1}{3}$ .

$q$ :  $\because$  函数  $y = (4a^2 + 3a)^{x+1}$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数,  $\therefore \begin{cases} a > 0 \\ 4a^2 + 3a > 1 \end{cases}$ , 解之得  $a > \frac{1}{4}$ .

(1) ① 由  $p \vee q$  是真命题, 等价于  $p$  真  $q$  真、 $p$  真  $q$  假或  $q$  真  $p$  假, 可得



$$\begin{cases} a > \frac{1}{3} \\ a > \frac{1}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a > \frac{1}{3} \\ 0 < a \leq \frac{1}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a > \frac{1}{4} \\ 0 < a \leq \frac{1}{3} \end{cases}, \text{ 故 } p \vee q \text{ 是真命题时, } a \text{ 的取值范围是 } a > \frac{1}{4}.$$

②  $p, q$  有且只有一个是真命题等价于  $p$  真  $q$  假或  $q$  真  $p$  假,

$$\text{即 } \begin{cases} a > \frac{1}{3} \\ 0 < a \leq \frac{1}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a > \frac{1}{4} \\ 0 < a \leq \frac{1}{3} \end{cases}, \text{ 解之得 } \frac{1}{4} < a \leq \frac{1}{3}.$$

(2) 由  $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$  得,  $p$  是  $q$  成立的充分不必要条件.

**[点睛]** 本题借助二次函数及一个类似于指数函数的函数,考查命题之间的关系,设计巧妙,考查知识主要有:复合命题的真假判断、二次函数的单调性、类似于指数函数的函数的单调性、不等式的解法、充要条件的判断等,是一个不错的综合题.

### 短时高效 直击高考

### 15分钟限时训练

#### 一、选择题

1. 若集合  $A, B, C$  满足  $A \cup B = A \cup C$ , 那么下列各式中一定成立的是 ( )

- A.  $A \cap B = A \cap C$                       B.  $B = C$   
C.  $A \cap (\complement_U B) = A \cap (\complement_U C)$                       D.  $B \cap (\complement_U A) = C \cap (\complement_U A)$

2. 设  $A, B$  是两个非空集合, 定义  $A \times B = \{x | x \in A \cup B \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$ , 已知  $A = \{y | y = \sqrt{4x - x^2}\}$ ,  $B = \{y | y = 2^x, x > 0\}$ , 则  $A \times B$  等于 ( )

- A.  $[0, 1] \cup (2, +\infty)$                       B.  $[0, 1) \cup (2, +\infty)$   
C.  $[0, 1]$                       D.  $[0, 2]$

3. 集合  $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$ ,  $B = \{(x, y) | (x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2, r > 0\}$ , 若  $A \cap B$  中有且仅有一个元素, 则  $r$  的值 ( )

- A. 2                      B. 3                      C. 7                      D. 3 或 7

#### 二、填空题

4. 已知集合  $M = \{x | x < 3\}$ ,  $N = \{x | \log_2 x < 1\}$ , 则  $M \cap N =$  \_\_\_\_\_.

5. 下列命题: ①命题: “若  $m > 0$ , 则关于  $x$  的方程  $x^2 + x - m = 0$  有实数根”的否命题是假命题;

②  $G^2 = ab$  是三个数  $a, G, b$  成等比数列的充要条件;

③若函数  $y = f(x)$  对任意的实数  $x$  满足  $f(x+1) = -f(x)$ , 则  $f(x)$  是周期函数;

④如果一组数据中, 每个数都加上同一个非零常数, 则这组数据的平均数和方差都改变. 其中正确命题的序号为 \_\_\_\_\_. (把你认为正确的命题序号都填上)

#### 三、解答题

6. 已知集合  $A = \{y | y^2 - (a^2 + a + 1)y + a(a^2 + 1) > 0\}$ ,  $B = \{y | y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}, 0 \leq x \leq 3\}$ .

(1) 若  $A \cap B = \emptyset$ , 求  $a$  的取值范围;

(2) 当  $a$  取使不等式  $x^2 + 1 \geq ax$  恒成立的  $a$  的最小值时, 求  $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B$ .





# 考前29天

## 高考论坛 集合问题的几个热点题型

集合是高中数学中最基本的概念,也是历年高考的必考点,下面归纳了2008年高考的集合题,对热点题型进行了分类解析.

### 一、基本型

这类题型主要考查集合的基本概念和基本运算.

**[例1]** 第29届夏季奥林匹克运动会于2008年8月8日在北京举行.若集合  $A = \{\text{参加北京奥运会比赛的运动员}\}$ ,集合  $B = \{\text{参加北京奥运会比赛的男运动员}\}$ ,集合  $C = \{\text{参加北京奥运会比赛的女运动员}\}$ ,则下列关系正确的是 ( )

- A.  $A \subseteq B$       B.  $B \subseteq C$       C.  $A \cap B = C$       D.  $B \cup C = A$

**[解析]** 参加北京奥运会比赛的男运动员和女运动员构成了参加北京奥运会比赛的所有运动员,因此  $A = B \cup C$ . 故选 D.

**[命题立意]** 本小题考查集合的运算.

### 二、综合型

这类题型主要是将集合与函数、不等式、解析几何等知识结合,形成多知识点的综合问题.

**[例2]** 设函数  $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$  ( $0 \leq x < 1$ ) 的反函数为  $f^{-1}(x)$ ,则 ( )

- A.  $f^{-1}(x)$  在其定义域上是增函数且最大值为 1  
B.  $f^{-1}(x)$  在其定义域上是减函数且最大值为 0  
C.  $f^{-1}(x)$  在其定义域上是减函数且最大值为 1  
D.  $f^{-1}(x)$  在其定义域上是增函数且最小值为 0

**[解析]**  $\because f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$  ( $0 \leq x < 1$ ), 由复合函数单调性判定方法知  $f(x)$  在定义域上是增函数.

$\therefore f^{-1}(x)$  在其定义域上是增函数,  $f^{-1}(x)$  的值域为  $[0, 1)$ .

$\therefore f^{-1}(x)$  在其定义域上有最小值为 0. 故选 D.

**[命题立意]** 本小题考查了互为反函数的两个函数之间的关系,求解本题不必求出原函数的反函数,由互为反函数具有相同的单调性结合原函数的单调性,即可判定反函数的单调性,原函数的定义域为  $[0, 1)$  也就是反函数的值域.

### 三、计数型

这类题型是指以集合为背景,求子集的个数、集合中元素的个数等.

**[例3]** 满足  $M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ , 且  $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$  的集合  $M$  的个数是 ( )





A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

**[解析]** 由题意知  $a_1, a_2$  必属于  $M$ ,  $a_3 \notin M$ ,  $a_4$  不一定, 故选 B.

**[命题立意]** 本题主要考查元素与集合之间的关系, 解答本题的关键是抓住  $a_3$  一定不属于集合  $M$ .

#### 四、信息迁移型

解答这类问题时, 必须认真阅读材料, 弄清题意, 确定解题的理论依据, 抓住信息, 透彻理解, 按新定义准确解题.

**[例 4]** 定义集合运算:  $A * B = \{z | z = xy, x \in A, y \in B\}$ . 设  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{0, 2\}$ , 则集合  $A * B$  的所有元素之和为 ( )

A. 0

B. 2

C. 3

D. 6

**[解析]**  $\because z = x \cdot y, x \in A, y \in B$ ,

$\therefore z$  的取值有:  $1 \times 0 = 0, 1 \times 2 = 2, 2 \times 0 = 0, 2 \times 2 = 4$ , 故  $A * B = \{0, 2, 4\}$ .

$\therefore$  集合  $A * B$  的所有元素之和为:  $0 + 2 + 4 = 6$ . 故选 D.

**[命题立意]** 本题主要考查了集合的基本性质: 元素的确定性.

#### 五、逆向型

这类题型是指已知集合的运算结果, 写出集合运算的可能表达式, 这类题往往具有一定的开放性.

**[例 5]** 已知集合  $M = \left\{x \mid \frac{x+3}{x-1} < 0\right\}$ ,  $N = \{x | x \leq -3\}$ , 则集合  $\{x | x \geq 1\}$  是 ( )

A.  $M \cap N$ B.  $M \cup N$ C.  $\complement_{\mathbb{R}}(M \cap N)$ D.  $\complement_{\mathbb{R}}(M \cup N)$ 

**[解析]**  $\because \frac{x+3}{x-1} < 0, \therefore -3 < x < 1$ , 即  $M = \{x | -3 < x < 1\}$ .

$\because N = \{x | x \leq -3\}, \therefore M \cup N = \{x | x < 1\}$ .

$\therefore \complement_{\mathbb{R}}(M \cup N) = \{x | x \geq 1\}$ . 故选 D.

**[命题立意]** 本小题考查了分式不等式的解法及集合的并集、补集的运算.

#### 六、运用型

这类题型是指表面上看不一定是考查集合知识, 但若灵活运用集合知识, 则能突破解题难点, 优化解题思路, 甚至能避免分类讨论.

**[例 6]** 设集合  $A = \left\{x \mid \frac{x}{x-1} < 0\right\}$ ,  $B = \{x | 0 < x < 3\}$ , 那么“ $m \in A$ ”是“ $m \in B$ ”的 ( )

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

**[解析]**  $\because A = \left\{x \mid \frac{x}{x-1} < 0\right\} = \{x | 0 < x < 1\}$ ,  $B = \{x | 0 < x < 3\}$ ,

$\therefore A \neq B$ .

当  $m \in A$  时, 必有  $m \in B$ ; 而当  $m \in B$  时,  $m \in A$  不一定成立.

$\therefore$  “ $m \in A$ ”是“ $m \in B$ ”的充分而不必要条件. 故选 A.

**[命题立意]** 本题以集合知识为载体考查了充分条件和必要条件的概念.



# 考前28天

今天复习、巩固、强化—函数的性质



温馨提示易错点 高考轻松把分捡

1. 本部分主要涉及的两种运算: 幂的运算、对数运算, 你对它们的运算法则掌握熟练了吗?

**[典例]** 命题甲:  $(\frac{1}{2})^x, 2^{1-x}, 2^x$  成等比数列. 命题乙:  $\lg x, \lg(x+1), \lg(x+3)$  成等差数列. 则甲是乙的 ( )

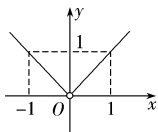
- A. 充分非必要条件  
C. 充要条件

- B. 必要非充分条件  
D. 既非充分又非必要条件

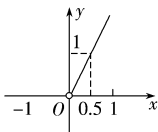
**[分析]** 由命题甲可得  $(2^{1-x})^2 = (\frac{1}{2})^x \times 2^x$  即  $2^{2-x-x} = 1$ , 所以  $x=1$  或  $x=-2$ , 当  $x=-2$  时显然不能推出命题乙. 由命题乙可得  $2\lg(x+1) = \lg x + \lg(x+3) \Rightarrow (x+1)^2 = x(x+3), (x>0) \Rightarrow x=1 \Rightarrow$  命题甲成立. 所以甲是乙的必要非充分条件. 选 B.

**[点拨]** 本题在数列的背景下, 主要利用了幂的运算性质和对数的运算性质, 在利用对数的运算性质时, 一定要注意保证真数大于零. 同时一定记住, 对数的运算性质在数学中有着广泛的应用, 一定要弄熟弄透.

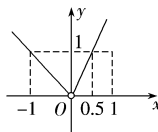
**[类比·鉴赏]** 若动点  $P$  的横坐标  $x$ 、纵坐标  $y$  使  $\lg y, \lg|x|, \lg \frac{y-x}{2}$  成等差数列, 则点  $P$  的轨迹图形是 ( )



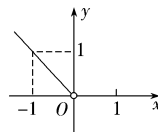
A



B



C



D

2. 函数的定义域是函数三要素中应用最广泛的一个要素, 你能熟练地求出函数的定义域吗, 你在解决问题时是否注意到了函数的定义域?

**[典例]** 函数  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$  的定义域是 ( )

- A.  $\{x | x > -1\}$       B.  $\{x | x > 1\}$       C.  $\{x | x \geq -1\}$       D.  $\{x | x \geq 1\}$

**[分析]** 要使函数  $f(x)$  有意义, 必须有

$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$ , 即  $x > 1$ , 所以函数  $f(x)$  的定义域为  $\{x | x > 1\}$ , 故选 B.



**[点拨]** 求函数的定义域就是求使函数有意义的自变量的取值范围,在列出自变量满足的条件时一定要考虑全面.

**[类比·鉴赏]** 求函数  $y = \log_2(x^2 - 2x - 3)$  的单调增区间.

3. 分段函数在近几年高考中出现的频率比较高,你对分段函数是怎样理解的?

**[典例]** 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x - 1 & x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$ , 若  $f(a) > a$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

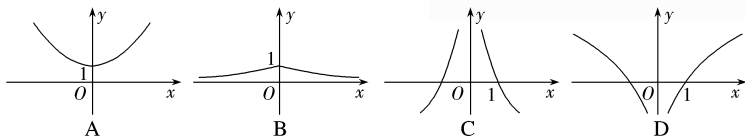
A.  $(-\infty, -3)$       B.  $(-\infty, -1)$       C.  $(1, +\infty)$       D.  $(0, 1)$

**[解析]** 当  $a \geq 0$  时,  $f(a) = \frac{2}{3}a - 1$ , 则由  $f(a) > a$  即  $a < -3$ , 所以这样的  $a$  不存在. 当  $a < 0$  时,  $f(a) = \frac{1}{a}$ , 则由  $f(a) > a$  即  $a < -1$ ,  $\therefore a < -1$ . 综上所述, 所求  $a$  的取值范围为  $(-\infty, -1)$ . 故选 B.

**[点拨]** 分段函数实质上是当自变量在不同的范围内时,函数的解析式不同,所以我们在解决有关问题时常常采取分类讨论的方法,其难度一般不大.

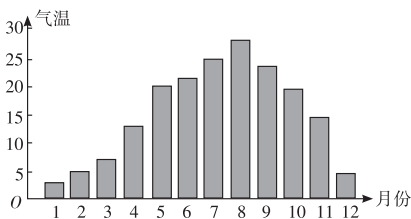
**[类比·鉴赏]** 若实数  $x, y$  满足  $|x| - \ln \frac{1}{y} = 0$ , 则  $y$  关于  $x$  的函数的图象形状大致是

( ) 9

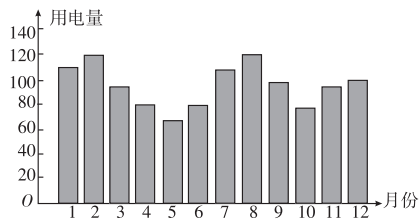


4. 函数的图象在实际生活中有着广泛的应用,在应用中应注意哪些问题呢?

**[典例]** 一般地,家庭用电量  $y$  (千瓦时)与气温  $x$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) 有函数关系  $y = f(x)$ . 图①表示某年 12 个月中每月的平均气温,图②表示某家庭在 12 个月中每月的用电量. 试在数集  $A = \{x | 5 \leq x \leq 30, x \text{ 是 } 2.5 \text{ 的整数倍}\}$  中确定一个最小值  $x_1$  和最大值  $x_2$ , 使  $y = f(x)$  是  $[x_1, x_2]$   $\cap A$  上的增函数, 则区间  $[x_1, x_2] =$  \_\_\_\_\_.



图①



图②

**[分析]** 注意到 1 月至 8 月气温逐月上升, 气温由最低值  $2.5^{\circ}\text{C}$  上升到最高值  $27.5^{\circ}\text{C}$ , 因而在图②中只需观察这 8 个月的情况.

在这 8 个月里, 用电量从 1 月到 2 月是增加的, 2 月至 5 月是逐月下降的, 5 月到 8 月是逐月上升的.

又 1, 2 月的气温不大于  $5^{\circ}\text{C}$ , 只需考虑 5 月至 8 月的情况, 在此月份里, 最低温度  $x_1 = 20^{\circ}\text{C}$ , 最高温度  $x_2 = 27.5^{\circ}\text{C}$ . 故答案为  $[20, 27.5]$ .

**[点拨]** 解决这类问题, 首先要理解题意, 分析问题的实质, 转化为数学问题, 再者



因  $M$  在  $y=kx+\frac{1}{2a^2+1}$  上, 故  $-\frac{b}{2a}=\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a^2+1}$ . 化简得:

$$b=-\frac{a}{2a^2+1}=-\frac{1}{2a+\frac{1}{a}}\geqslant-\frac{1}{2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{a}}}=-\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ (当 } a=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, 等号成立).}$$

即  $b\geqslant-\frac{\sqrt{2}}{4}$ .  $\therefore b\in[-\frac{\sqrt{2}}{4},+\infty)$ .

[点拨] 第(1)问是很容易的, 只要理解了“不动点”, 即  $f(x)=x$  的根, 余下的便是解方程问题; 对于  $ax^2+bx+c>0, x\in\mathbf{R}$  恒成立问题, 即是  $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ , 或  $\begin{cases} a=b=0 \\ c>0 \end{cases}$ , 可转化为解不等式(组); 第(3)问解决的切入点是线段  $AB$  的中点  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b}{2a})$  在直线  $y=kx+\frac{1}{2a^2+1}$  上. 因为要求  $b$  的范围, 故将  $b$  视为  $a$  的函数, 利用均值定理求得  $b$  的最小值.

### 短时高效 直击高考

### 30分钟限时训练

#### 一、选择题

1. 函数  $f(x)=x|x+a|+b$  是奇函数的充要条件是 ( )

A.  $a=0$  B.  $b=0$  C.  $ab=0$  D.  $a^2+b^2=0$

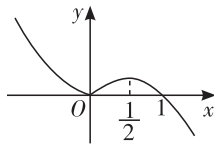
2.  $f(x)=\begin{cases} f(x+1), & x<4 \\ (\frac{1}{2})^x, & x\geq 4 \end{cases}$ , 则  $f(\log_2 3)$  等于 ( )

A.  $-\frac{23}{8}$  B.  $\frac{1}{11}$  C.  $\frac{1}{19}$  D.  $\frac{1}{24}$

3. 函数  $f(x)(x\in\mathbf{R})$  的图象如右图所示, 则函数  $g(x)=f(\log_a x)(0<a<1)$  的单调减区间是 ( )

A.  $[0, \frac{1}{2}]$  B.  $(-\infty, 0)\cup[\frac{1}{2}, +\infty)$

C.  $[\sqrt{a}, 1]$  D.  $[\sqrt{a}, \sqrt{a+1}]$



#### 二、填空题

4. 二次函数  $f(x)=x^2-2ax+2$  在  $[-1, 1]$  上的最小值为  $-5$ , 则  $a=$  \_\_\_\_\_

5. 已知函数  $f(x)=\frac{bx}{2-3x}$ , 若方程  $f(x)=-2x$  有两个相等的实根, 则函数的解析式为 \_\_\_\_\_.

#### 三、解答题

6. 已知定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x)=\frac{-2^{x-1}+b}{2^x+a}$  关于  $(1, 0)$  中心对称.

(1) 求  $a, b$  的值;

(2) 求  $f(-2\ 006)+f(-2\ 005)+\cdots+f(0)+f(1)+\cdots+f(2\ 006)+f(2\ 008)$ ;

(3) 若  $g(x)=f(x+1)$ , 且对任意的  $t\in\mathbf{R}$ , 不等式  $g(t^2-2t)+g(2t^2-k)<0$  恒成立, 求  $k$  的取值范围.



# 考前27天

## 高考论坛 函数性质的三个常用结论及应用

函数的性质是高考的必考内容,特别是函数的奇偶性、周期性、对称性的综合应用,常作为选择题的压轴题出现在高考题中,现将解决这类问题常用的三个结论总结如下:

**结论 1** 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的一个函数,①  $y=f(x)$  是奇函数;②  $y=f(x)$  的图象关于点  $A(a,0)$  ( $a \neq 0$ ) 对称;③  $y=f(x)$  是以  $2a$  为一个周期的周期函数.在①②③中任取两个作条件,另一个作结论的真命题.

**[简证]** ①② $\Rightarrow$ ③:  $f(x+2a)=f[a+(a+x)]=-f[a-(a+x)]=-f(-x)=f(x)$ .

②③ $\Rightarrow$ ①:  $f(x)=f(x+2a)=f[a+(a+x)]=-f[a-(a+x)]=-f(-x)$ .

①③ $\Rightarrow$ ②:  $f(a+x)=f[2a+(x-a)]=f(x-a)=-f(a-x)$ .

结论 1 还可以推广为:  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的一个函数,①  $y=f(x)$  的图象关于  $A(a,0)$  对称;②  $y=f(x)$  的图象关于点  $B(b,0)$  对称 ( $a \neq b$ );③  $y=f(x)$  是以  $2|b-a|$  为一个周期的周期函数,在①②③中任取两个作条件,另一个作结论均为真命题.

**结论 2**  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的一个函数,①  $y=f(x)$  是偶函数;②  $y=f(x)$  的图象关于直线  $x=a$  ( $a \neq 0$ ) 对称;③  $y=f(x)$  是以  $2a$  为一个周期的周期函数,在①②③中任取两个作条件,另一个作结论均为真命题.

**[简证]** ①② $\Rightarrow$ ③:  $f(x+2a)=f[a+(a+x)]=f[a-(a+x)]=f(-x)=f(x)$ .

②③ $\Rightarrow$ ①:  $f(x)=f(x+2a)=f[a+(a+x)]=f[a-(a+x)]=f(-x)$ .

①③ $\Rightarrow$ ②:  $f(a+x)=f(2a-a+x)=f[2a+(x-a)]=f(x-a)=f(a-x)$ .

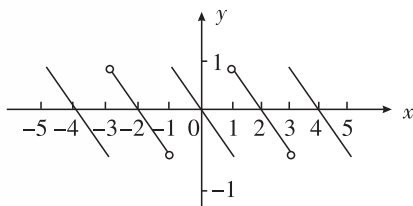
结论 2 还可以推广为:  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的一个函数,①  $y=f(x)$  的图象关于直线  $x=a$  对称;②  $y=f(x)$  的图象关于直线  $x=b$  对称 ( $b \neq a$ );③  $y=f(x)$  是以  $2|b-a|$  为一个周期的周期函数,在①②③中任取两个作条件另一个作结论均为真命题.

**结论 3**  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的一个函数.①  $y=f(x)$  是奇函数;②  $y=f(x)$  的图象关于直线  $x=a$  ( $a \neq 0$ ) 对称;③  $y=f(x)$  是以  $4a$  为一个周期的周期函数.

在上述①②③中由①②可以推出③成立,事实上:  $f(2a+x)=f[a+(a+x)]=f[a-(a+x)]=f(-x)=-f(x)$ ,从而  $f(4a+x)=f[2a+(2a+x)]=-f(2a+x)=-f(x)$ ,但要注意:由①③ $\Rightarrow$ ②和②③ $\Rightarrow$ ①均是错误的,请看下面两个反例:

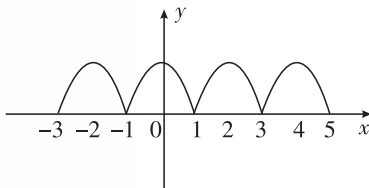
**[反例 1]**  $f(x)=\begin{cases} -(x-2k) & x \in [2k-1, 2k+1], k \text{ 为偶数} \\ -(x-2k) & x \in (2k-1, 2k+1), k \text{ 为奇数} \end{cases}$

$y=f(x)$  的图象是



显然,  $f(x) (x \in \mathbf{R})$  是以 4 为周期的奇函数, 但  $f(x)$  的图象并不是关于直线  $x=1$  对称.

**[反例 2]**  $f(x) = -(x-2k)^2 + 1, x \in [2k-1, 2k+1], k$  为整数, 函数  $y=f(x)$  的图象是



显然,  $y=f(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称, 4 是函数  $f(x)$  的一个周期, 但  $f(x)$  并不是奇函数.

16

下面是这三个结论的具体应用:

**[例 1]** 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  既是奇函数, 又是周期函数,  $T$  是它的一个正周期, 将  $f(x)=0$  在闭区间  $[-T, T]$  上的根的个数记为  $n$ , 则  $n$  可能为 ( )

- A. 0                      B. 1                      C. 3                      D. 5

**[解析]** 根据结论 1 知  $y=f(x)$  的图象关于点  $(\frac{T}{2}, 0)$  对称, 从而  $f(\frac{T}{2})=0$ , 又因为  $f(x)$  是奇函数和周期函数, 故  $f(0)=0, f(-\frac{T}{2})=0, f(-T)=0$ . 所以选 D.

**[例 2]** 定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $f(x)$  满足  $f(x+2)=-f(x)$ , 则  $f(6)$  的值为 \_\_\_\_\_.

**[解析]** 由  $f(x+2)=-f(x)$  得  $f(x+4)=f(x)$ ,  $f(x)$  是以 4 为周期的函数, 根据结论 1 知  $y=f(x)$  的图象关于点  $(2, 0)$  对称, 从而  $f(2)=0, f(6)=f(2)=0$ .

**[例 3]**  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的以 3 为周期的奇函数, 且  $f(2)=0$ , 则方程  $f(x)=0$  在区间  $(0, 6)$  内的解的个数的最小值是 ( )

- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 7

**[解析]** 用结论 1 不难发现, A、B、C 三个选项全错! 正确答案是 7, 事实上, 由结论 1 知  $y=f(x)$  的图象关于点  $(1.5, 0)$  对称, 从而  $f(1.5)=0, f(4.5)=0$ ,

又  $\because f(2)=0$ , 且  $f(x)$  的图象关于点  $(1.5, 0)$  对称,

$\therefore f(1)=0, f(4)=0$ , 又  $f(x)$  的周期为 3, 故  $f(3)=0, f(5)=0$ . 在区间  $(0, 6)$  内至少有“1, 1.5, 2, 2.5, 4, 4.5, 5”这 7 个解.

**[例 4]** 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  是偶函数又是周期函数, 且  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$ , 当  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  时,  $f(x) = \sin x$ , 则  $f(\frac{5}{3}\pi)$  等于 ( )



# 考前26天

今天复习、巩固、强化—三角与平面向量



温馨提示易错点 高考轻松把分捡

1. 你知道向量运算和实数运算有哪些不一样的地方吗?

[典例] 对于向量  $a, b, c$  和实数  $\lambda$ , 下列命题中真命题的个数为 ( )

- ①若  $a \cdot b = 0$ , 则  $a = 0$  或  $b = 0$       ②若  $\lambda a = 0$ , 则  $\lambda = 0$  或  $a = 0$   
 ③若  $a^2 = b^2$  则  $a = b$  或  $a = -b$       ④若  $a \cdot b = a \cdot c$  则  $b = c$   
 ⑤  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$       ⑥  $(a - b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$
- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

[解析] 本题主要考查向量运算中与实数运算不一样的地方. 对于(1), 当  $a \perp b$  时, 也有  $a \cdot b = 0$ . (3) 中  $a^2 = b^2$ , 只能推得  $|a| = |b|$ , 而不能推出  $a = \pm b$ . 对于(4),  $a \cdot b = a \cdot c$  可以移项整理得  $a \cdot (b - c) = 0$ , 所以有  $a = 0$  或  $b - c = 0$  或  $a \perp (b - c)$ . 对于(5), 由于  $b \cdot c$  和  $a \cdot b$  都是实数,  $a$  与  $c$  不一定共线, 故不正确.

由运算律知②⑥正确. 所以本题应选 C.

[类比·鉴赏] 设  $a, b, c$  是平面内的非零向量且互不共线, 以下四个命题:

- ①  $(a \cdot b) \cdot c - (c \cdot a) \cdot b = 0$   
 ②  $|a| + |b| > |a + b|$   
 ③  $(b \cdot c) \cdot a - (c \cdot a) \cdot b$  与  $c$  垂直  
 ④ 已知  $a, b, c$  两两夹角相等, 且  $|a| = 1, |b| = 2, |c| = 3$  则  $|a + b + c| = \sqrt{3}$
- 其中正确命题的个数是 ( )
- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

2. 你知道向量投影的概念吗? 你会计算一个向量在另一向量方向上的投影吗?

[典例] 设  $a = (4, 3)$ ,  $a$  在  $b$  方向上的投影为  $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ ,  $b$  在  $x$  轴上的投影为 2, 且  $|b| < 14$ ,

则  $b$  为 ( )

- A.  $(2, 14)$       B.  $(2, -\frac{2}{7})$       C.  $(-2, -\frac{2}{7})$       D.  $(2, 8)$

[解析] 设  $a$  与  $b$  的夹角为  $\alpha$ ,

法一:(验证排除法)  $\because b$  在  $x$  轴上的投影为 2,

$\therefore b$  的横坐标为 2, 排除 C 项.

又  $|b| < 14$ , 排除 A 项.  $\because a$  在  $b$  方向上的投影为  $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ , 即  $|a| \cos \alpha = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ .





$\therefore \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . 将 D 项代入  $\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$  进行验证, 可排除 D 项故选 B.

法二: 设向量  $\mathbf{b} = (2, y)$ , 由题意得  $\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{\frac{5}{2}\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

将  $\mathbf{a} = (4, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (2, y)$  代入上式计算得,  $y = -\frac{2}{7}$  或  $y = 14$ . 又  $|\mathbf{b}| < 14$ , 故  $y = 14$  舍去.

则  $y = -\frac{2}{7}$ , 即  $\mathbf{b} = (2, -\frac{2}{7})$ .

**[点拨]** (1) 对于选择题, 有时也可采取排除法、特殊值法来解决. 不必严格按解答题来解答.

(2) 投影是同学们较易忽视的一个概念, 也易与立体几何中的射影相混淆.

相关知识链接: 设  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的夹角为  $\alpha$ ,  $|\mathbf{a}| \cos\alpha$  叫做  $\mathbf{a}$  在  $\mathbf{b}$  方向上的投影.

**[类比·鉴赏]** 设  $A(a, 1)$ ,  $B(2, b)$ ,  $C(4, 5)$  为坐标平面上三点,  $O$  为坐标原点, 若  $\overrightarrow{OA}$  与  $\overrightarrow{OB}$  在  $\overrightarrow{OC}$  方向上的投影相同, 则  $a$  与  $b$  满足的关系式为 ( )

A.  $4a - 5b = 3$

B.  $5a - 4b = 3$

C.  $4a + 5b = 14$

D.  $5a + 4b = 14$

### 3. 你知道如何按向量平移吗?

平移公式: 设点  $P(x, y)$  按向量  $\mathbf{a} = (h, k)$  平移后得到点  $P'(x', y')$ , 则  $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \mathbf{a}$  或

$\begin{cases} x' = x + h \\ y' = y + k \end{cases}$ , 曲线  $y = f(x)$  按向量  $\mathbf{a} = (h, k)$  平移后所得的曲线的函数解析式为:  $y - k = f(x - h)$ .

**[典例]** 将二次函数  $y = x^2$  的图象按向量  $\mathbf{a}$  平移后得到的图象与一次函数  $y = 2x - 5$  的图象只有一个公共点  $(3, 1)$ , 则向量  $\mathbf{a} =$  \_\_\_\_\_.

**[解析]** 设向量  $\mathbf{a} = (h, k)$ , 则二次函数  $y = x^2$  的图象按向量  $\mathbf{a}$  平移后得到的图象的解析式为  $y - k = (x - h)^2$ , 即  $y = (x - h)^2 + k$ . 又因为  $y = x^2$  的图象按向量  $\mathbf{a}$  平移后得到的图象与一次函数  $y = 2x - 5$  的图象只有一个公共点  $(3, 1)$ , 所以  $\begin{cases} y = (x - h)^2 + k \\ y = 2x - 5 \end{cases}$ .

即  $x^2 - (2h + 2)x + k + 5 + h^2 = 0$ .  $\therefore \Delta = 4(h + 1)^2 - 4(k + 5 + h^2) = 0$ .

又因为点  $(3, 1)$  在函数  $y = (x - h)^2 + k$  的图象上, 所以  $1 = (3 - h)^2 + k$ ,

得  $h = 2, k = 0$ ,  $\therefore \mathbf{a} = (2, 0)$ .

**[点拨]** 按向量平移问题中要注意平移的方向和坐标的符号, 这里也是同学们极易出错的地方.

**[类比·鉴赏]** 将抛物线  $y = x^2 + 4x + 7$  的图象按向量  $\mathbf{a}$  平移, 使其顶点与坐标原点重合, 则  $\mathbf{a}$  等于 ( )

A.  $(2, 3)$

B.  $(-2, -3)$

C.  $(-2, 3)$

D.  $(2, -3)$

### 4. 解三角形中的三角函数问题时, 你知道三角形解的个数吗?

**[典例]** 在  $\triangle ABC$  中,  $\sin B = \frac{3}{5}$ ,  $\cos A = \frac{5}{13}$ , 求  $\cos C$  的值.

**[解析]**  $\because \cos A = \frac{5}{13}$ ,  $\therefore A$  为锐角.  $\therefore \sin A = \frac{12}{13}$ .

又  $\because \sin A = \frac{12}{13} > \frac{3}{5} = \sin B$ ,

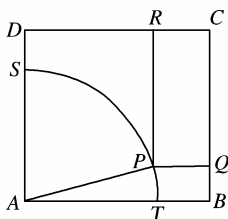


$$= -\left[\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \beta\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \beta\right)\right] = \frac{56}{65}.$$

**[点睛]** 解决本题除了要熟记三角公式, 还要注意观察角与角之间的关系, 进行三角变换的技巧常常是变角——注意角的和、差、倍、半、互余、互补关系, 根据实际情况, 对角进行“拆”或“添”变形, 这样可以大大减少运算量.

### 6. 三角函数的实际应用

**[例 6]** 已知  $ABCD$  是一块边长为 100 m 的正方形地皮, 其中弧  $AST$  是一半径为 90 m 的扇形小山, 其余部分是平地. 一开发商想在平地上建一个矩形停车场, 使矩形的一个顶点  $P$  在弧  $ST$  上, 相邻两边  $CQ$ 、 $CR$  落在正方形的边  $BC$ 、 $CD$  上, 求矩形停车场  $PQCR$  面积的最大值和最小值.



**[解]** 设  $\angle PAB = \theta$ ,  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 延长  $RP$  交  $AB$  于  $M$ , 则  $AM =$

$$90\cos\theta, MP = 90\sin\theta,$$

$$\therefore PQ = AB - AM = 100 - 90\cos\theta,$$

$$CQ = CB - QB = CB - MP = 100 - 90\sin\theta,$$

$\therefore$  停车场  $PQCR$  的面积  $S = PQ \cdot CQ = (100 - 90\cos\theta)(100 - 90\sin\theta) = 10\,000 - 9\,000(\sin\theta + \cos\theta) + 8\,100\sin\theta\cos\theta$ , 令  $\sin\theta + \cos\theta = t$ , 则  $\sin\theta\cos\theta = \frac{t^2 - 1}{2}$ .  $\therefore \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\therefore t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \in$

$$[1, \sqrt{2}].$$

$$\therefore S = 10\,000 - 9\,000t + 8\,100 \times \frac{t^2 - 1}{2} = 4\,050t^2 - 9\,000t + 5\,950 = 4\,050\left(t - \frac{10}{9}\right)^2 + 950, t$$

$$\in [1, \sqrt{2}].$$

$$\therefore t = \frac{10}{9} \in [1, \sqrt{2}], \therefore t = \frac{10}{9} \text{ 时, } S \text{ 取到最小值 } 950;$$

$$t = \sqrt{2} \text{ 时, } S \text{ 取到最大值 } 14\,050 - 9\,000\sqrt{2} \approx 1\,322.$$

$\therefore$  矩形停车场  $PQCR$  面积的最大值为  $1\,322\text{m}^2$ , 最小值为  $950\text{m}^2$ .



### 考前猜题与押宝 热点问题再聚焦

三角函数与平面向量的综合题在高考试卷中出现的频率较高, 这类题很好地体现了三角变换的灵活性和平面向量的工具性, 一般为中、低档题.

**[聚焦]** 已知  $\triangle ABC$  的面积  $S$  满足:  $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq S \leq \frac{3}{2}$ , 且向量  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 3$ ,  $\overrightarrow{AB}$  与  $\overrightarrow{BC}$  的夹角为  $\theta$ .

(1) 求  $\theta$  的取值范围;

(2) 求函数  $f(\theta) = 3\sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$  的最大值及最小值.

**[解]** (1)  $\because \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 3$ , 且  $\overrightarrow{AB}$  与  $\overrightarrow{BC}$  的夹角为  $\theta$ ,  $\therefore |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}| \cos\theta = 3$

$$\therefore S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}| \sin(\pi - \theta) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{BC}| \sin\theta, \text{ 又 } \frac{\sqrt{3}}{2} \leq S \leq \frac{3}{2},$$



$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{3}{2} \tan \theta \leq \frac{3}{2}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan \theta \leq 1, \therefore \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) f(\theta) = 2\sin^2 \theta + \sqrt{3} \sin 2\theta + 1 = \sqrt{3} \sin 2\theta - \cos 2\theta + 2 = 2\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) + 2.$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \therefore \frac{\pi}{6} \leq 2\theta - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3}, \text{ 从而当 } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ 时, } f(\theta)_{\min} = 3.$$

$$\text{当 } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ 时, } f(\theta)_{\max} = \sqrt{3} + 2.$$

**[点评]** 本题属于三角函数与向量的综合性题目,用向量表述条件,转化为求三角函数的最值问题.

### 短时高效 直击高考

### 30分钟限时训练

#### 一、选择题

1. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $D$ 是 $AB$ 边上一点,若 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$ ,  $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \lambda\overrightarrow{CB}$ ,则 $\lambda$ 等于 ( )

- A.  $\frac{2}{3}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $-\frac{1}{3}$       D.  $-\frac{2}{3}$

2. 已知函数  $y = -\cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 2$  按向量  $\mathbf{a}$  平移所得图象的解析式为  $y = f(x)$ , 当  $y = f(x)$  为奇函数时, 向量  $\mathbf{a}$  可以是

- A.  $(-\frac{\pi}{6}, -2)$       B.  $(-\frac{\pi}{12}, -2)$       C.  $(\frac{\pi}{6}, 2)$       D.  $(-\frac{\pi}{12}, 2)$

3. 曲线  $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4})$  与直线  $y = \frac{1}{2}$  在  $y$  轴右侧的交点按横坐标从小到大依次记为  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , 则  $|P_2 P_4|$  等于 ( )

- A.  $\pi$       B.  $2\pi$       C.  $3\pi$       D.  $4\pi$

#### 二、填空题

4. 设点  $P$  分有向线段  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  所成的比为  $\frac{3}{4}$ , 则点  $P_1$  分  $\overrightarrow{P_2 P}$  所成的比为 \_\_\_\_\_.

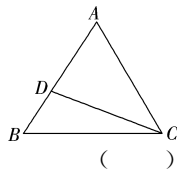
5. 已知函数  $f(x) = 2\sin x$ ,  $g(x) = 2\sin(\frac{\pi}{2} - x)$ , 直线  $x = m$  与  $f(x)$ ,  $g(x)$  的图象分别交于  $M, N$  两点, 则  $|MN|$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

#### 三、解答题

6. 在 $\triangle ABC$ 中,角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ ,且满足 $(2a - c)\cos B = b\cos C$ .

(1)求角 $B$ 的大小;

(2)设  $\mathbf{m} = (\sin A, \cos 2A)$ ,  $\mathbf{n} = (4k, 1)$  ( $k > 0$ ),  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$  的最大值为 5, 求  $k$  的值.





# 考前25天

## 高考论坛 选择题的解题方法与技巧

选择题注重考查基础知识、基本技能、基本方法、逻辑思维与直觉思维能力以及观察、分析、比较、选择简捷运算方法的能力. 解选择题要注意选择题的特殊性, 充分利用题干和选择支两方面提供的信息, 灵活、巧妙、快速求解.

### 一、直接法

根据题设所给条件直接推理、运算得出答案的方法.

[例1] 银行计划将某资金给项目  $M$  和  $N$  投资一年, 其中 40% 的资金给项目  $M$ , 60% 的资金给项目  $N$ , 项目  $M$  能获得 10% 的年利润, 项目  $N$  能获得 35% 的年利润, 年终银行必须回笼资金, 同时按一定的回扣率支付给储户. 为了使银行年利润不小于给  $M$ 、 $N$  总投资的 10% 而不大于总投资的 15%, 则给储户回扣率最小值为 ( )

- A. 5%                      B. 10%                      C. 15%                      D. 20%

[解析] 设共有资金为  $a$ , 储户回扣率为  $x$ , 由题意得

$$0.1a \leq 0.1 \cdot 0.4a + 0.35 \cdot 0.6a - xa \leq 0.15a, \text{ 解得 } 0.1 \leq x \leq 0.15, \text{ 故应选 B.}$$

### 二、图象法(数形结合法)

图象法也叫图解法, 它体现了数形结合的思想. 它是将函数、方程、不等式, 甚至某些“式子”以图形表示后, 再设法解决的基本方法. 其思维形象直观、生动活泼. 图解法要求我们不但能由“数”到“形”, 而且还必须自觉地将“形”转化到“数”.

[例2] 已知  $E = \{(x, y) | y \geq x^2\}$ ,  $F = \{(x, y) | x^2 + (y-a)^2 \leq 1\}$ , 那么使  $E \cap F = F$  成立的充要条件是 ( )

- A.  $a \geq \frac{5}{4}$                       B.  $a = \frac{5}{4}$                       C.  $a \geq 1$                       D.  $a > 0$

[解析]  $\because E$  为抛物线  $y = x^2$  的内部(包括周界),  $F$  为动圆  $x^2 + (y-a)^2 = 1$  的内部(包括周界). 该题的几何意义是  $a$  为何值时, 动圆进入区域  $E$ , 并被  $E$  所覆盖. (图略)

$\because a$  是动圆圆心的纵坐标, 显然结论应是  $a \geq c (c \in \mathbf{R}^+)$ , 故可排除 B、D, 而当  $a = 1$  时,  $E \cap F \neq F$  (可验证点  $(0, 1)$  到抛物线上点的最小距离为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ). 选 A.

### 三、特例法

运用满足题设条件的某些特殊数值、特殊位置、特殊关系、特殊图形、特殊数列、特殊函数等对各选择支进行检验或推理, 利用问题在某一特殊情况下不真, 则它在一般情况下也不真的原理, 判断选项真伪的方法. 用特例法解选择题时, 特例取得愈简单、愈特殊愈好.

(1) 特殊值



[例 3] 如果函数  $y = \sin 2x + a \cos 2x$  的图象关于  $x = -\frac{\pi}{8}$  对称, 则  $a$  等于 ( )

- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $-\sqrt{2}$                       C. 1                      D. -1

[解析] 因为点  $(0, 0)$  与点  $(-\frac{\pi}{4}, 0)$  关于直线  $x = -\frac{\pi}{8}$  对称, 所以  $a$  必满足:

$\sin 0 + a \cos 0 = \sin(-\frac{\pi}{2}) + a \cos(-\frac{\pi}{2})$ , 解得  $a = -1$ , 从而可以排除 A, B, C, 故应选 D.

(2) 特殊函数

[例 4] 定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $f(x)$  为减函数, 设  $a+b \leq 0$ , 给出下列不等式:

- ①  $f(a)f(-a) \leq 0$     ②  $f(b)f(-b) \geq 0$     ③  $f(a)+f(b) \leq f(-a)+f(-b)$ ;  
④  $f(a)+f(b) \geq f(-a)+f(-b)$ .

其中正确的不等式序号是 ( )

- A. ①②④                      B. ①④                      C. ②④                      D. ①③

[解析] 取  $f(x) = -x$ , 逐项检查可知①④正确. 故选 B.

(3) 特殊位置

[例 5] 过  $y = ax^2 (a > 0)$  的焦点  $F$  作直线交抛物线于  $P, Q$  两点, 若  $PF$  与  $FQ$  的长分别是  $p, q$ , 则  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  等于 ( )

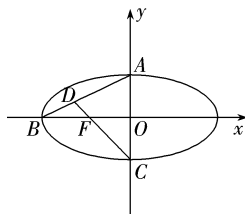
- A.  $2a$                       B.  $\frac{1}{2a}$                       C.  $4a$                       D.  $\frac{4}{a}$

[解析] 考虑特殊位置  $PQ \perp OF$  时,  $|PF| = |FQ| = \frac{1}{2a}$ , 所以  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 2a + 2a = 4a$ , 故选 C.

(4) 特殊方程

[例 6] 如图, 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率  $e = \frac{1}{2}$ , 左焦点为  $F, A, B, C$  为其三个顶点, 直线  $CF$  与  $AB$  交于点  $D$ , 则  $\tan \angle BDC$  的值等于 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{5}$                       B.  $-\frac{\sqrt{3}}{5}$   
C.  $-3\sqrt{3}$                       D.  $3\sqrt{3}$



[解析] 本题可用特殊方程来考查, 取  $a^2 = 4, b^2 = 3$ ,

则不难得出  $A(0, \sqrt{3}), B(-2, 0), F(-1, 0), C(0, -\sqrt{3})$ , 所以  $k_{AB} = \frac{\sqrt{3}-0}{0-(-2)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$$k_{FC} = \frac{0-(-\sqrt{3})}{-1-0} = -\sqrt{3}, \therefore \tan(\angle DBF + \angle DFB) = \frac{\tan \angle DBF + \tan \angle DFB}{1 - \tan \angle DBF \tan \angle DFB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}}$$

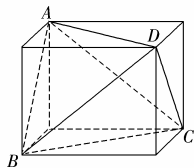
$= -3\sqrt{3}, \tan \angle BDC = 3\sqrt{3}$ , 故选 D.

(5) 特殊模型

[例 7] 一个四面体的所有棱长都为  $\sqrt{2}$ , 四个顶点都在同一个球面上, 则此球的表面积为 ( )

A.  $3\pi$ B.  $4\pi$ C.  $3\sqrt{3}\pi$ D.  $6\pi$ 

**[解析]** 将四面体放入一个棱长为 1 的正方体中,则四面体和正方体有共同的外接球,其外接球的直径是正方体的体对角线,故  $2R = \sqrt{3}$ ,  $S_{\text{球面}} = 4\pi R^2 = 3\pi$  故选 A.



#### 四、代入验证法

将选择支中给出的答案或其特殊值,代入题干逐一验证,然后选择符合题设条件的选择支的一种方法.

**[例 8]** 已知二次函数  $f(x) = x^2 + 2(p-2)x + p$ ,若  $f(x)$  在区间  $[0,1]$  内至少存在一个实数  $c$ ,使  $f(c) > 0$ ,则实数  $p$  的取值范围是 ( )

A.  $(1,4)$ B.  $(1,+\infty)$ C.  $(0,+\infty)$ D.  $(0,1)$ 

**[解析]** 取  $p=1$  代入检验,显然  $x^2 - 2x + 1 > 0 \Rightarrow (x-1)^2 > 0$  在  $[0,1]$  内有解,满足题意,从而排除 A、B、D,故应选 C.

#### 五、估算法

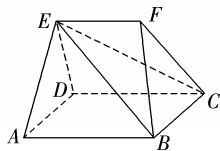
所谓估算法就是一种粗略的计算方法,利用“式”的放大或缩小或“变量”的极端情况(如:端点、相等、极值点和极限状态),对运算结果确定出一个范围或作出一个估计的方法.

**[例 9]** 如图,在多面体  $ABCDEF$  中,已知面  $ABCD$  是边长为 3 的正方形,  $EF \parallel AB$ ,  $EF$  与面  $AC$  的距离为 2,则该多面体的体积为 ( )

A.  $\frac{9}{2}$ 

B. 5

C. 6

D.  $\frac{15}{2}$ 

**[解析]** 本题的图形是非常规的多面体,需要对其进行必要的分割.连  $EB, EC$ ,得四棱锥  $E-ABCD$  和三棱锥  $E-BCF$ ,其中,四棱锥  $E-ABCD$  的体积易求得  $V_{E-ABCD} = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 \times 2 = 6$ ,又因为一个几何体的体积应大于它的部分体积,所以不必计算三棱锥  $E-BCF$  的体积,就可排除 A、B、C,故应选 D.

#### 六、筛选法

就是充分利用数学选择题是单选题的特征,从选择支入手,根据题设条件与各选择支之间的关系,通过分析、推理、计算、判断,对选择支进行筛选,将其中与题设相矛盾的干扰支逐一排除,从而获得正确结论的方法.

**[例 10]**  $\triangle ABC$  的三边  $a, b, c$  满足等式  $a \cos A + b \cos B = c \cos C$ ,则此三角形必是 ( )

A. 以  $a$  为斜边的直角三角形B. 以  $b$  为斜边的直角三角形

C. 等边三角形

D. 其他三角形

**[解析]** 在题设条件中的等式是关于  $a, A; c, C$  与  $b, B$  的对称式,因此选项 A、B 为等价命题都被淘汰,若选项 C 正确,则有  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ,即  $1 = \frac{1}{2}$ ,从而 C 被淘汰,故选 D.

**[总结提炼]** 解答选择题时既要看到其常规的解法,更应该挖掘题目的个性,充分利用选择支的暗示作用,化常规为特殊,做到准确和快速,为后续解题节省时间.



# 考前24天

今天复习、巩固、强化一数列



温馨提示易错点 高考轻松把分捡

1. 在由数列的前  $n$  项和公式  $S_n$  求通项  $a_n$  时,你注意验证  $n=1$  的情况了吗?

[典例] 已知  $b_n = 3^{n-1}$ , 设数列  $\{c_n\}$  对任意自然数均有  $\frac{c_1}{b_1} + \frac{c_2}{b_2} + \cdots + \frac{c_n}{b_n} = 2n+1$  成立, 则  $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{2008} =$  \_\_\_\_\_.

[分析] 可把  $\frac{c_n}{b_n}$  看做一个整体, 求出  $\frac{c_n}{b_n}$ , 再求  $c_n$ , 进而求  $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{2008}$ .

[解] 当  $n=1$  时,  $c_1=3$ , 当  $n \geq 2$ , 由  $\frac{c_1}{b_1} + \frac{c_2}{b_2} + \cdots + \frac{c_n}{b_n} = 2n+1$ ,

$$\therefore \frac{c_1}{b_1} + \frac{c_2}{b_2} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{b_{n-1}} = 2n-1.$$

$$\therefore c_n = 2 \times 3^{n-1}. \text{ 因为 } c_1 = 3 \text{ 不符合左式, } \therefore c_n = \begin{cases} 3(n=1) \\ 2 \times 3^{n-1}(n \geq 2) \end{cases}$$

$$\therefore c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{2008} = 3 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + \cdots + 2 \times 3^{2007} = 3^{2008}.$$

[点评] 本题求  $\frac{c_n}{b_n}$  时, 易忽视验证  $n=1$  时  $c_1$  是否适合当  $n \geq 2$  时的表达式, 得到错误的解答.

[类比·鉴赏] 已知  $a_1=1, a_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} (n \geq 2)$ , 则  $a_n =$  \_\_\_\_\_.

2. 数列的项与项数之间构成特殊的函数关系, 在用函数的有关知识解决数列问题时, 要注意到函数的定义域为正整数集.

[典例] 已知数列  $\{a_n\}$  是递增数列, 且对  $n \in \mathbf{N}^*$  都有  $a_n = n^2 + \lambda n$ , 则实数  $\lambda$  的取值范围是 ( )

A.  $(-\frac{7}{2}, +\infty)$       B.  $[0, +\infty)$       C.  $[-2, +\infty)$       D.  $(-3, +\infty)$

[解析]  $\because a_n = n^2 + \lambda n = (n + \frac{\lambda}{2})^2 - \frac{\lambda^2}{4}$ ,  $\therefore$  要使  $\{a_n\}$  是递增数列, 即  $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ .

$$\text{则 } -\frac{\lambda}{2} < \frac{3}{2}, \therefore \lambda > -3.$$

[点拨] 本题很易忽略  $n \in \mathbf{N}^*$  这一条件, 以致于  $-\frac{\lambda}{2} \leq 1$ , 或  $-\frac{\lambda}{2} \leq 0$ .

[类比·鉴赏] 已知数列  $\{a_n\}$ ,  $a_n = \frac{n}{n-3.5}$ ,  $S_n$  是其前  $n$  项和, 则  $S_6$  的值为 ( )





A. 4

B. 6

C. 8

D. 10

3. 在解决等比数列的有关问题时,你注意到各项及公比都不等于0了吗?

[典例] 设等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 前  $n$  项和  $S_n > 0 (n=1, 2, \dots)$ , 则  $q$  的取值范围为

[分析] 由  $S_n > 0$  可知  $a_1 > 0$ , 利用等比数列前  $n$  项和公式, 求  $q$  的取值范围.

[解析] 因为  $\{a_n\}$  为等比数列, 且  $S_n > 0$ , 可知  $a_1 > 0, q \neq 0$ .

当  $q=1$  时,  $S_n = na_1 > 0$ , 当  $q \neq 1$  时,  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} > 0$  即  $\frac{1-q^n}{1-q} > 0$

上式等价于不等式组  $\begin{cases} 1-q^n > 0 \\ 1-q > 0 \end{cases}$  ① 或  $\begin{cases} 1-q^n < 0 \\ 1-q < 0 \end{cases}$  ②

解不等式组①, 由于  $n$  可为奇数, 可为偶数, 得  $-1 < q < 1$ , 解不等式组②得  $q > 1$ ,

综上  $q$  的取值范围为  $-1 < q < 0$  或  $q > 0$ .

[点拨] 本题易忽略  $q \neq 0$ , 得到  $q > -1$  的结果.

[类比·鉴赏] 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $s_n$  且对任意的正整数  $n$  都有  $s_n = \frac{a_n + n^2}{2}$ ,

则  $a_n =$  \_\_\_\_\_.

4. 在利用等比数列的求和公式  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$  时你注意到  $q \neq 1$  了吗?

[典例] 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = p, a_2 = q$ , 并且  $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} (n \geq 2)$ ; 其中  $q, p$  为非零常数), 那么数列的前 10 项之和是 \_\_\_\_\_.

[分析] 等比数列的前  $n$  项和与公比  $q$  有关, 当  $q=1$  时,  $S_n = na_1$ , 当  $q \neq 1$  时,  $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ .

[解析] 由  $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} (n \geq 2)$ , 得  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$ ,  $\therefore \{a_n\}$  是等比数列且公比为  $\frac{q}{p}$ .

$\therefore$  当  $\frac{q}{p} \neq 1$ , 即  $p \neq q$  时,  $S_{10} = \frac{p^2[1-(\frac{q}{p})^{10}]}{p-q}$ . 当  $\frac{q}{p} = 1$ , 即  $p = q$  时,  $S_{10} = 10p$ .

[点拨] 本题易忽视  $q=1$  的情况.

[类比·鉴赏] 设等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_{n+1}, S_n, S_{n+2}$  成等差数列, 则  $q$  的值为 \_\_\_\_\_.

5. 利用裂项求和法求数列的前  $n$  项和时, 裂项后的式子应该与原式相等, 你注意到并应用到解题过程中了吗?

[典例] 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = \frac{3}{5}, a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^+)$ , 数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = \frac{2}{a_n - 1} (n \in \mathbf{N}^+)$ , 若  $S_n = (a_1 - 1) \cdot (a_2 - 1) + (a_2 - 1) \cdot (a_3 - 1) + \dots + (a_n - 1) \cdot (a_{n+1} - 1)$ , 则  $S_n =$  \_\_\_\_\_.

[解析]  $\because b_{n-1} = \frac{2}{a_{n-1} - 1}, \therefore b_n - b_{n-1} = \frac{2a_{n-1}}{a_{n-1} - 1} - \frac{2}{a_{n-1} - 1} = 2. (n \in \mathbf{N}^+)$

$\therefore \{b_n\}$  是首项为  $b_1 = \frac{2}{a_1 - 1} = -5$ , 公差为 2 的等差数列.

$\therefore b_n = -5 + 2(n-1) = 2n - 7.$

$\therefore (a_n - 1)(a_{n+1} - 1) = \frac{4}{(2n-7)(2n-5)} = 2\left(\frac{1}{2n-7} - \frac{1}{2n-5}\right),$



$$\therefore S_n = (a_1 - 1) \cdot (a_2 - 1) + (a_2 - 1) \cdot (a_3 - 1) + \cdots + (a_n - 1) \cdot (a_{n+1} - 1) = \cdots = 2 \left( -\frac{1}{5} - \frac{1}{2n-5} \right).$$

[点拨] 本题易出现  $\frac{1}{(2n-7)(2n-5)} = \frac{1}{2n-7} - \frac{1}{2n-5}$ , 导致出现错误的答案.

[类比·鉴赏] 若数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ , 该数列的前  $n$  项和  $S_n = 5$ , 则  $n = \underline{\hspace{2cm}}$ .



### 常考题型要练熟 临场不惧胸有竹

#### 1. 求数列的通项公式

求数列通项的方法大致分两类:一类是根据前几项的特点归纳猜想出  $a_n$  的表达式,然后用数学归纳法证明;另一类是将已知递推关系式整理变形,然后采用累加法,累乘法,迭代法,换元法,转化为基本数列(等差或等比数列)等方法求得通项.

[例1] 数列  $\{a_n\}$  中  $a_1 = 1$ , 对于  $n > 1 (n \in \mathbb{N}^+)$  有  $S_n = S_{n-1} + 3a_{n-1} + 2$ , 则  $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ .

[分析] 解决本题的关键是找到数列中相邻两项之间的关系.

[解析]  $\because S_n = S_{n-1} + 3a_{n-1} + 2, \therefore a_n = 3a_{n-1} + 2$ .

解法一:由递推式得  $a_{n+1} = 3a_n + 2, a_n = 3a_{n-1} + 2$ ,

两式相减得  $a_{n+1} - a_n = 3(a_n - a_{n-1})$  (这是手段之一),

因此数列  $\{a_{n+1} - a_n\}$  是公比为 3 的等比数列, 其首项为  $a_2 - a_1 = (3 \times 1 + 2) - 1 = 4$ ,

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 4 \times 3^{n-1},$$

$$\because a_{n+1} = 3a_n + 2, \therefore 3a_n + 2 - a_n = 4 \times 3^{n-1},$$

$$\text{即 } a_n = 2 \times 3^{n-1} - 1.$$

解法二:由解法一得  $\{a_{n+1} - a_n\}$  是公比为 3 的等比数列, 于是有:

$$a_2 - a_1 = 4, a_3 - a_2 = 4 \times 3^2, \cdots, a_n - a_{n-1} = 4 \times 3^{n-1},$$

把  $n-1$  个等式累计相加得

$$a_n - a_1 = 4(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-2}) = \frac{4(1 - 3^{n-1})}{1 - 3},$$

$$\therefore a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1.$$

解法三:由递推式  $a_n = 3a_{n-1} + 2$ , 可以化为  $a_{n+1} - t = 3(a_n - t)$ , 即是  $a_{n+1} = 3a_n - 2t$ .

$$\therefore 2 = -2t, \therefore t = -1, \text{于是得 } a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1) \text{ (这是手段之二),}$$

数列  $\{a_{n+1} + 1\}$  是公比为 3 的等比数列, 其首项为  $a_1 + 1 = 2$ ,

$$\therefore a_n + 1 = 2 \times 3^{n-1}, \therefore a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1.$$

解法四:  $a_n = 3a_{n-1} + 2$ ,

$$= 3(3a_{n-2} + 2) + 2 = 3^2 a_{n-2} + 3 \times 2 + 2$$

$$= 3^2 (3a_{n-3} + 2) + 3 \times 2 + 2$$

$$= 3^3 a_{n-3} + 3^2 \times 2 + 3 \times 2 + 2$$

$$= \cdots = 3^{n-1} a_1 + (3^{n-2} + 3^{n-3} + \cdots + 1) \times 2$$

$$= 3^{n-1} + 2 \times \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} = 2 \times 3^{n-1} - 1.$$

[点睛] 把一个数列问题转化为基本数列求解, 主要是利用基本数列的公式及其研究



方法. 本题的解法一和解法三, 通过变换得  $b_n = a_n + 1$ , 或  $b_n = a_{n+1} - a_n$ , 将原数列转化为等比数列求解; 本题解法二应用了迭加法, 解法四应用了递推法.

## 2. 等差数列、等比数列的性质及前 $n$ 项和公式

等差数列和等比数列是两个特殊的数列, 命题人对这两个数列的概念、通项公式、性质、前  $n$  项和公式的考查始终没有放松. 一方面考查学生对知识的掌握情况, 另一方面考查学生灵活运用这两种数列及分析问题、解决问题的能力.

[例 2] 设数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 且  $a_2 = -6, a_8 = 6, S_n$  是数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则 ( )

A.  $S_4 < S_5$

B.  $S_4 = S_5$

C.  $S_6 < S_5$

D.  $S_6 = S_5$

[分析] 解决本题的关键是熟练运用等差数列的通项公式和性质.

[解析] (通解) 由  $a_2 = -6, a_8 = 6$ , 得  $a_1 + d = -6, a_1 + 7d = 6$ . 解得

$$a_1 = -8, d = 2. \therefore S_4 = S_5 = -20, S_6 = -18.$$

(优解) 由  $a_2 = -6, a_8 = 6$  知  $a_2 + a_8 = 0, \therefore a_5 = 0$  又  $a_2 < a_8, \therefore d > 0$ , 故  $S_4 = S_5 < S_6$ .

[点睛] 本小题主要考查等差数列的通项和求和公式以及等差数列的性质等基本知识 with 运算技能.

[例 3] 若干个唯一确定一个数列的量称为该数列的基本量, 设  $\{a_n\}$  是公比为  $q$  的无穷等比数列, 下列  $\{a_n\}$  的四组量中, 一定能成为该数列“基本量”的是第 \_\_\_\_\_ 组. (写出所有符合要求的组号)

①  $S_1$  与  $S_2$     ②  $a_2$  与  $S_3$     ③  $a_1$  与  $a_n$     ④  $q$  与  $a_n$ , 其中  $n$  为大于 1 的整数,  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和

[分析] 解决本题的关键是正确理解等比数列的概念及确定等比数列的条件.

[解析] ①  $\because a_1 = S_1, a_2 = S_2 - S_1, q$  确定,  $\therefore$  等比数列  $\{a_n\}$  确定.

② 由  $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{a_2}{q} + a_2 + a_2 q, q + \frac{1}{q} + 1 - \frac{S_3}{a_2} = 0$  即  $q^2 + 1 + (1 - \frac{S_3}{a_2})q = 0$ , 不能唯一确定  $q$ . 从而该数列不能被唯一确定.

③  $q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1}$ , 当  $n$  为奇数,  $(n-1)$  为偶数时,  $q$  不唯一.

④  $a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}$  唯一确定,  $\therefore$  等比数列  $\{a_n\}$  确定.

故①④满足题意.

[点睛] 本题主要考查等比数列的基本性质和基本概念, 特别是对于题目给出新定义的“基本量”, 一定要认真阅读和体会.

## 3. 数列求和

数列求和的常见方法有公式法, 错位相减法, 倒序相加法, 裂项求和法, 分组求和法, 运用时应注意各种方法的使用条件.

[例 4] 已知  $S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n^2$ , 则  $S_n =$  \_\_\_\_\_.

[分析]  $S_n$  与项数的奇偶性有关系, 应分开来求.

[解析] 当  $n$  为偶数时,

$$S_n = (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \cdots + [(n-1)^2 - n^2] = -[3 + 7 + 11 + \cdots + (2n-1)]$$

$$= -\frac{\frac{n}{2}(3+2n-1)}{2} = -\frac{n(n+1)}{2}.$$

当  $n$  为奇数时,



$$S_n = 1^2 + (-2^2 + 3^2) + (-4^2 + 5^2) + \cdots + [-(n-1)^2 + n^2] = 1 + [5 + 9 + 13 + \cdots (2n-1)] = 1 + \frac{\frac{n-1}{2}(5+2n-1)}{2} = 1 + \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{综上, } S_n = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

**[点睛]** 解决本题的关键是并项,转化为等差数列求和.

#### 4. 数列与数学归纳法、导数、不等式等知识的结合

**[例 5]** 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ .

(1) 写出  $a_2, a_3, a_4$ , 猜测数列  $\{a_n\}$  的通项公式, 并用数学归纳法加以证明;

(2) 证明:  $a_n < 1 + \ln a_{n+1}$ ;

(3) 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 证明:  $S_n < n - \ln(1 + \frac{n}{2})$ .

**[分析]** (1) 通项公式的解决, 只要按照已知条件去做, 不难处理; (2) 不等式  $a_n < 1 + \ln a_{n+1} \Leftrightarrow a_n < 1 + \ln \frac{1}{2-a_n} \Leftrightarrow \ln(2-a_n) < 1-a_n$ , 通过简单的换元  $x = 1-a_n$ , 转化为证明不等式  $\ln(1+x) < x$ , 再利用导数解决; (3) 根据 (2) 所证明的结论寻找解决问题的方法.

**[解析]** (1)  $a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{4}, a_4 = \frac{4}{5}$ , 猜测  $a_n = \frac{n}{n+1}$ .

下面用数学归纳法进行证明.

① 当  $n=1$  时, 由题目知  $a_1 = \frac{1}{2}$ , 命题成立;

② 假设当  $n=k (k \geq 1, k \in \mathbf{N})$  时成立, 即  $a_k = \frac{k}{k+1}$ , 那么

$$\text{当 } n=k+1 \text{ 时, } a_{k+1} = \frac{1}{2-a_k} = \frac{1}{2-\frac{k}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2},$$

也就是说, 当  $n=k+1$  时命题也成立.

综上所述, 数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = \frac{n}{n+1}$ .

(2) 不等式  $a_n < 1 + \ln a_{n+1}$ , 即不等式  $\ln(2-a_n) < 1-a_n$ ,

令  $1-a_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} = x$ , 所证的不等式即  $\ln(1+x) < x (x > 0)$ .

设  $F(x) = \ln(x+1) - x (x > 0)$ , 则  $F'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} < 0 (x > 0)$ ,

故函数  $F(x)$  为  $(0, +\infty)$  上的减函数, 所以  $F(x) < F(0) = 0$ ,

即  $\ln(x+1) < x (x > 0)$ , 故所证不等式成立.

(3) 由 (2) 知  $a_n < 1 - \ln(2-a_n) = 1 - \ln \frac{n+2}{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} S_n &< (1 - \ln \frac{3}{2}) + (1 - \ln \frac{4}{3}) + \cdots + (1 - \ln \frac{n+2}{n+1}) = n - \ln(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{n+2}{n+1}) \\ &= n - \ln \frac{n+2}{2} = n - \ln(1 + \frac{n}{2}). \end{aligned}$$

**[点拨]** 本题给出的是一个非线性递推数列, 其通项公式的求解就是在一个基本问题



的铺设下解决的,考生在复习时要把握这个基本原则;在用导数证明与数列有关的不等式时,由于数列中的变量是离散的,它的导数不存在,所以要把离散的量连续化,如本题中的  $x > 0$ ,这一点要引起考生的注意;在用导数研究数列问题时,不等式  $\ln(1+x) < x (x > 0)$  具有重要的地位,要仔细体会这个不等式的用途.



### 考前猜题与押宝 热点问题再聚焦

等差数列和等比数列的概念、通项公式、性质、前  $n$  项和公式经常融在各种类型的题目中,可单独考查等差、等比数列的性质及前  $n$  项和公式,也可以是考查等差、等比数列的综合题,或可转化为等差、等比数列的综合问题.

**[聚焦]** 在直角坐标平面上有一点列  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n), \dots$  对每个正整数  $n$ , 点  $P_n$  位于函数  $y = 3x + \frac{13}{4}$  的图象上, 且  $P_n$  的横坐标构成以  $-\frac{5}{2}$  为首项,  $-1$  为公差的等差数列  $\{x_n\}$ .

(1) 求点  $P_n$  的坐标;

(2) 设抛物线列  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$  中的每一条的对称轴都垂直于  $x$  轴, 第  $n$  条抛物线  $C_n$  的顶点为  $P_n$  且过点  $D_n(0, n^2 + 1)$ , 记过点  $D_n$  且与抛物线  $C_n$  相切的直线的斜率为  $k_n$ , 求证:  $\frac{1}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_2 k_3} + \dots + \frac{1}{k_n k_{n+1}} < \frac{1}{10}$ .

**[解]** (1)  $\because P_n$  的横坐标构成以  $-\frac{5}{2}$  为首项,  $-1$  为公差的等差数列  $\{x_n\}$ ,

$$\therefore x_n = x_1 + (n-1)d = -\frac{5}{2} - (n-1) = -n - \frac{3}{2}.$$

$\because P_n(x_n, y_n)$  位于函数  $y = 3x + \frac{13}{4}$  的图象上,

$$\therefore y_n = 3x_n + \frac{13}{4} = 3(-n - \frac{3}{2}) + \frac{13}{4} = -3n - \frac{5}{4}.$$

$\therefore$  点  $P_n$  的坐标为  $P_n(-n - \frac{3}{2}, -3n - \frac{5}{4})$ .

(2) 据题意可设抛物线  $C_n$  的方程为:  $y = a(x - x_n)^2 + y_n$ , 即  $y = a(x + n + \frac{3}{2})^2 - 3n - \frac{5}{4}$ .

$\because$  抛物线  $C_n$  过点  $D_n(0, n^2 + 1)$ ,

$$\therefore n^2 + 1 = a(n + \frac{3}{2})^2 - 3n - \frac{5}{4} = an^2 + (3a - 3)n + \frac{9a}{4} - \frac{5}{4},$$

$$\therefore a = 1, \therefore y = (x + n + \frac{3}{2})^2 - 3n - \frac{5}{4}.$$

$\because$  过点  $D_n$  且与抛物线  $C_n$  相切的直线的斜率为  $k_n$ , 又  $y' = 2x + 2n + 3$ ,



$$\therefore k_n = y'|_{x=0} = 2n+3, \therefore \frac{1}{k_n k_{n+1}} = \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right).$$

$$\begin{aligned} & \therefore \frac{1}{k_1 k_2} + \frac{1}{k_2 k_3} + \cdots + \frac{1}{k_n k_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+5} \right) < \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

【点评】 本题将数列问题与圆锥曲线结合在一起，考查了数列的通项及和的求法，题目新颖，考查的知识点较多，但又不失基础、灵活。

## 短时效效 直击高考

### 30分钟限时训练

#### 一、选择题

1. 数列  $\{a_n\}$  按下列条件给出： $a_1=2$ ，当  $n$  为奇数时， $a_{n+1}=a_n+2$ ，当  $n$  为偶数时， $a_{n+1}=2a_n$ ，则  $a_{2004}$  等于 ( )

- A.  $3 \times 2^{1001} - 2$       B.  $3 \times 2^{1002}$       C.  $3 \times 2^{1003} - 2$       D.  $3 \times 2^{1002} - 2$

2. 已知  $a_i (i=1, 2, \dots, 25)$  的可能取值为 0 或 2，则  $x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots + \frac{a_{25}}{3^{25}}$  的值满足 ( )

- A.  $\frac{2}{3} \leq x < 1$       B.  $x < \frac{1}{3}$  或  $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$   
C.  $0 \leq x < \frac{2}{3}$       D.  $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$  或  $\frac{2}{3} \leq x < 1$

3. 在数列  $\{a_n\}$  中，对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ ，都有  $\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = k$  ( $k$  为常数)，则称  $\{a_n\}$  为“等差比数列”。下面对“等差比数列”的判断正确的是 ( )

- ①  $k$  不可能为 0； ② 等差数列一定是等差比数列； ③ 等比数列一定是等差比数列；  
④ 通项公式为  $a_n = a \cdot b^n + c$  ( $a \neq 0, b \neq 0, 1$ ) 的数列一定是等差比数列。

其中正确的判断为 ( )

- A. ①②      B. ②③      C. ③④      D. ①④

#### 二、填空题

4. 已知数列  $\{a_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$  满足： $a_n = \begin{cases} n (n=1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ -a_{n-6} (n \geq 7 \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$  则  $a_{2007} =$  \_\_\_\_\_.

5. 已知等比数列  $\{a_n\}$ ， $a_1 > 0$ ，公比  $q > 0$  且  $q \neq 1$ ，若  $a_7$  是  $a_5, a_9$  的等差中项，则  $\frac{a_1 + a_3}{a_2 + a_4}$  的值是 \_\_\_\_\_.

#### 三、解答题

6. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且  $S_n = 2a_n - 2$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )，数列  $\{b_n\}$  中， $b_1=1$ ，点  $(b_n, b_{n+1})$  在直线  $x - y + 2 = 0$  上。

① 求数列  $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$  的通项公式。

② 若  $T_n$  为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和，证明：当  $n \geq 2$  时， $2S_n > T_n + 3n$ 。



# 考前23天

## 高考论坛 应用递推关系求数列通项公式的常用技巧

http://www.tzdl08.com

35

根据递推关系求数列的通项公式是数列的基本题型,也是高考中的常见题型,下面是解决这类题型的常用技巧.

### 1. 可变形为“ $a_{n+1}=a_n+f(n)$ ”的数列

通常用迭加法或迭代法求通项.

(1)迭加法是利用: $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$  ( $n\geq 2$ ),将问题转化为基本数列(等比或等差)求和,从而得到所求数列的通项.

(2)迭代法是利用递推关系得出: $a_n=f(n-1)+f(n-2)+\cdots+f(2)+f(1)+a_1$  ( $n\geq 2$ ),然后得出所求数列的通项.

[例 1] 若正项数列 $\{a_n\}$ 满足  $a_1=1, a_2=2$  且  $a_{n+1}^2-a_n^2-n(S_{n+1}-S_{n-1})=0$ , 求  $a_n$ .

[解]  $\because a_{n+1}^2-a_n^2-n(S_{n+1}-S_{n-1})=(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)-n(a_{n+1}+a_n)(n\geq 2)$ ,

$\therefore (a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-n)=0$ . 又  $\because a_n>0, \therefore a_{n+1}-a_n-n=0$ ,

$\therefore a_{n+1}-a_n=n(n\geq 2), \therefore a_3-a_2=2, a_4-a_3=3, a_5-a_4=4, \cdots$

$a_n-a_{n-1}=n-1$ , 相加得  $a_n-a_2=2+3+\cdots+n-1=\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ .

$\therefore a_n=2+\frac{(n-2)(n+1)}{2}$  ( $n\geq 2$ ). 又  $\because a_1=1=2+\frac{(1-2)(1+1)}{2}$ ,

$\therefore$  当  $n\in\mathbf{N}^*$  时,  $a_n=\frac{n^2-n+2}{2}$ .

### 2. 可变形为“ $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ ( $p\neq 1$ 且为常数)”的数列

(1)当  $f(n)=q$ , 且  $q$  为常数时, 常用方法:

①将  $a_{n+1}=pa_n+q$  化为  $a_{n+1}+\frac{q}{p-1}=p\left(a_n+\frac{q}{p-1}\right)$ , 从而得到等比数列

$\left\{a_n+\frac{q}{p-1}\right\}$ , 进而求出  $a_n$ ;

②由  $a_{n+1}=pa_n+q$  得  $a_n=pa_{n-1}+q$ , 两式相减得  $a_{n+1}-a_n=p(a_n-a_{n-1})$ ; 再利用  $\{a_{n+1}-a_n\}$  是等比数列求出  $a_n-a_{n-1}$ , 然后利用迭加法或迭代法求出  $a_n$ ;

(2)当  $f(n)=q^n$  时, 即  $a_{n+1}=pa_n+q^n$ , 则可化为  $\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{a_n}{q^n}+\frac{1}{q}$  求解.

[例 2] 已知数列 $\{a_n\}$ 中,  $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1$  ( $n\leq \mathbf{N}^*$ ), 求  $a_n$ .

[解法一]  $\because a_n=2a_{n-1}+1, \therefore a_n+1=2(a_{n-1}+1)$ ,

$\therefore \{a_n+1\}$  是首项为  $a_1+1=2$ , 公比为 2 的等比数列.

$\therefore a_n+1=2^n$ , 即  $a_n=2^n-1$ ;





〔解法二〕 由已知条件知:  $\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+1 \\ a_n=2a_{n-1}+1 \end{cases} \Rightarrow a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1}) (n \geq 2)$ .

$\therefore \{a_n - a_{n-1}\}$  是首项为  $a_2 - a_1 = 2$ , 公比为 2 的等比数列,  $\therefore a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$ ,  
令  $n$  分别取  $2, 3, 4, \dots, n$ , 代入并迭加得:

$$a_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1 (n \geq 2); \text{又} \because a_1 = 1, \therefore a_n = 2^n - 1.$$

〔例 3〕 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ , 且  $8a_{n+1}a_n - 16a_{n+1} + 2a_n + 5 = 0 (n \geq 1)$ .

$$\text{记 } b_n = \frac{1}{a_n - \frac{1}{2}} (n \geq 1).$$

(1) 求  $b_1, b_2, b_3, b_4$  的值;

(2) 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式.

〔解析〕 (1) 由  $b_n = \frac{1}{a_n - \frac{1}{2}}$ , 得  $a_n = \frac{1}{b_n} + \frac{1}{2}$ .

代入递推关系  $8a_{n+1}a_n - 16a_{n+1} + 2a_n + 5 = 0$ , 整理得  $\frac{4}{b_{n+1}b_n} - \frac{6}{b_{n+1}} + \frac{3}{b_n} = 0$ ,

即  $b_{n+1} = 2b_n - \frac{4}{3}$ , 由  $a_1 = 1$ , 有  $b_1 = 2$ ,  $\therefore$  依次得  $b_2 = \frac{8}{4} = 2, b_3 = 4, b_4 = \frac{20}{3}$ .

(2)  $\because b_{n+1} = 2b_n - \frac{4}{3}$ ,  $\therefore$  利用例 2 中的 3 种解法均可求出  $b_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n + \frac{4}{3}$ .

### 3. 可变形为“ $a_{n+1} = a_n f(n)$ ”的数列

利用迭乘或迭代可得:  $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} (n \geq 2)$  或  $a_n = f(n-1) \cdot f(n-2) \cdot \dots \cdot f(1) \cdot a_1 (n \geq 2)$ , 从而求出  $a_n$ .

〔例 4〕 设  $\{a_n\}$  是首项为 1 的正项数列, 且满足  $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1} \cdot a_n = 0 (n = 1, 2, \dots)$ , 则它的通项公式  $a_n =$  \_\_\_\_\_.

〔解析〕 法一 (迭乘法)

$$\because (n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1} \cdot a_n = 0, \therefore (a_{n+1} + a_n)[(n+1) \cdot a_{n+1} - na_n] = 0,$$

$$\text{由 } a_n > 0, \text{ 知 } a_{n+1} + a_n \neq 0, \therefore a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n, \text{ 即 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1},$$

$$\therefore a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{n};$$

法二 (迭代法)

$$\because (n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1} \cdot a_n = 0, \therefore (a_{n+1} + a_n)[(n+1) \cdot a_{n+1} - na_n] = 0,$$

$$\text{由 } a > 0, \text{ 知 } (a_{n+1} + a_n) \neq 0, \therefore a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n,$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \frac{n-1}{n}a_{n-1} = \frac{n-1}{n} \left( \frac{n-2}{n-1}a_{n-2} \right) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot a_{n-2} = \dots \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}a_1, \end{aligned}$$



$$\text{即 } a_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} a_1, \therefore a_n = \frac{1}{n}.$$

注:例2也可以用迭加法:

$$\because a_n = 2a_{n-1} + 1,$$

$$\therefore \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}, \text{ 令 } n \text{ 分别取 } 2, 3, 4, \dots, n, \text{ 代入并迭加得:}$$

$$\frac{a_n}{2^n} - \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}, \therefore \frac{a_n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}, \therefore a_n = 2^n - 1.$$

4. 可变形为“ $pa_{n+1} - qa_n = a_{n+1}a_n$  ( $p, q \neq 0$  且  $p, q$  均为常数)”的数列

(1) 当  $p = q$  时, 可化为  $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = -\frac{1}{p}$ , 先求出  $\frac{1}{a_n}$ , 然后求  $a_n$ .

[例5] 数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ , 当  $n \geq 2$  时, 其前  $n$  项和  $S_n$  满足  $S_n^2 = a_n \left(S_n - \frac{1}{2}\right)$ , 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

$$[\text{解}] \because \text{当 } n \geq 2 \text{ 时}, S_n^2 = (S_n - S_{n-1}) \left(S_n - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2S_n S_{n-1} = S_{n-1} - S_n,$$

$$\because S_1 = a_1 \neq 0, \therefore S_n \neq 0, \therefore \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2,$$

数列  $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$  是以  $\frac{1}{S_1} = 1$  为首项, 2 为公差的等差数列,

$$\therefore \frac{1}{S_n} = 2n - 1, \therefore S_n = \frac{1}{2n - 1}, \therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时}, a_n = S_n - S_{n-1}.$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n - 3} = -\frac{2}{(2n - 1)(2n - 3)},$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1, & (n = 1), \\ -\frac{2}{(2n - 1)(2n - 3)}, & (n \geq 2). \end{cases}$$

$$(2) \text{ 当 } p \neq q \text{ 时, 可化为 } \frac{1}{a_n} = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{q},$$

令  $b_n = \frac{1}{a_n}$ , 则  $b_n = \frac{p}{q} \cdot b_{n-1} - \frac{1}{q}$ , 从而利用例2中的法一, 法二, 法三均可得出  $b_n$ , 再

求  $a_n$ .

以上是常用的递推关系求通项的方法, 还有“待定系数法”, “换元法”, “分类讨论法”, “数学归纳法”等求通项的方法, 请同学们自己系统总结.



# 考前21天

今天复习巩固强化—不等式



温馨提示易错点 高考轻松把分捡

1. 你对“ $\geq$ ”符号的含义能正确理解并应用于解题吗?

[典例] 若  $(x-2)\lg(x^2+1) \geq 0$ , 则实数  $x$  的取值范围是 ( )

A.  $[2, +\infty)$       B.  $[1, +\infty)$       C.  $(0, 2]$       D.  $\{0\} \cup [2, +\infty)$

[解析] “ $\geq$ ”的含义是“ $>$ ”或“ $=$ ”, 二者有一个成立即可.

$(x-2)\lg(x^2+1) \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)\lg(x^2+1) > 0$  或  $(x-2)\lg(x^2+1) = 0$

$\Leftrightarrow x-2 > 0$  或  $x=2$  或  $x=0$ , 即  $x \in \{0\} \cup [2, +\infty)$ .

[类·比·鉴·赏] 不等式  $(x + \frac{4}{x} - 4)\lg x \leq 0$  的解集是\_\_\_\_\_.

2. 应用解不等式解题时, 你注意到定义域了吗?

[典例] 函数  $f(x) = \ln x - x^2$  的增区间为\_\_\_\_\_.

[解析]  $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1-2x^2}{x} > 0, \therefore x > 0, \therefore 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 即增区间为  $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

[点拨] 本题很容易忽略定义域  $(0, +\infty)$  这一隐含条件, 而得到错误解答.

[类·比·鉴·赏] 已知函数  $f(x) = -x^3 + \sin x, x \in (-1, 1)$ , 如果  $f(1-a) + f(1-a^2) < 0$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

A.  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

B.  $(-1, 2)$

C.  $(1, \sqrt{2})$

D.  $(-\infty, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

3. 你能熟练使用不等式  $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$  解决一些简单问题吗? 取等号需满足什么条件?

[典例] 函数  $f(x) = |x-2| + |x+2|, x \in [1, +\infty)$  的最小值是 ( )

A. 0

B. 1

C. 3

D. 4

[解析] 法一:  $\therefore f(x) = |x-2| + |x+2| = \begin{cases} 4, & 1 \leq x \leq 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$

$\therefore$  当  $x > 2$  时,  $f(x) > 2 \times 2 = 4$ ; 当  $1 \leq x \leq 2$  时,  $f(x) = 4$ ,  $f(x)$  有最小值 4.

法二:  $|x-2| + |x+2|$  表示数轴上  $x$  所对应的点与 2 以及 -2 对应的点间的距离之和, 距离之和显然大于或等于 4. 当  $x \in [1, 2]$  时  $x$  所对应的点介于 2 以及 -2 对应的点之间时, 距离之和最小, 为 4, 即  $|x-2| + |x+2|$  的最小值为 4.

[点拨] 利用绝对值不等式的性质进行放缩求函数最值时, 一定要注意能否取到等号, 如果不能, 要及时转换思路, 从其他的角度入手. 注意体会以下充要条件:



(1)  $|a| + |b| = |a+b| \Leftrightarrow ab \geq 0$ , 即  $a, b$  同号.

(2)  $|a| - |b| = |a+b| \Leftrightarrow (a+b)b \leq 0$ , 即  $a+b$  与  $b$  异号. 此处认为“0”亦正亦负.

本题容易出现下面的错误:

$$f(x) = |x-2| + |x+2| \geq |x-2+x+2| = 2|x| \geq 2 (\because x \in [1, +\infty)),$$

所以当  $x=1$  时, 函数  $f(x)$  的最小值为  $f(x)_{\min} = 2$ .

出错原因:

因为  $|a| + |b| = |a+b| \Leftrightarrow ab \geq 0$ ,  $\therefore$  当  $(x-2)(x+2) \geq 0$ , 即  $x \leq -2$  或  $x \geq 2$  时,

$f(x) = |x-2| + |x+2| \geq |x-2+x+2| = 2|x|$  才能取到等号, 所以当  $x=1$  时,

函数  $f(x) \neq 2|x|$ , 即  $f(x)$  取不到 2,  $f(x) > 2$ .

4. 你理解存在性问题和恒成立性问题的区别与联系吗? 在解题时切不可把二者混为一谈.

[典例] 已知函数  $f(x) = x^2 - x + a, x \in [0, 1]$

(1) 若关于  $x$  的不等式  $f(x) > 0$  有解, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

(2) 若关于  $x$  的不等式  $f(x) > 0$  恒成立, 实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

[解析]  $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = a - \frac{1}{4}, f(x)_{\max} = f(0) = a,$

(1) 若关于  $x$  的不等式  $f(x) > 0$  有解, 则  $f(x)_{\max} = a > 0$ ;

(2)  $\because$  关于  $x$  的不等式  $f(x) > 0$  恒成立等价于  $f(x)_{\min} = a - \frac{1}{4} > 0, \therefore a > \frac{1}{4}$ .

39

[点拨] 关于  $x$  的不等式  $f(x) > 0$  有解, 即存在  $x$  使  $f(x) > 0$ , 是存在性问题, 所以  $f(x) > 0$  有解, 即  $f(x)$  的最大值大于零; 关于  $x$  的不等式  $f(x) > 0$  恒成立, 即对于任意  $x$  都有  $f(x) > 0$ , 所以  $f(x) > 0$  恒成立, 即  $f(x)$  的最小值大于零. 二者绝对不能混淆. 存在性问题或恒成立性问题一般都转化为最大值或最小值问题来解决.

[类题·鉴赏] 已知关于  $x$  的不等式  $\lg(|x+3| + |x-7|) > a$  的解集为  $\mathbf{R}$ , 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

5. 在应用导数研究函数的单调性时, 往往需要解含有参数的二次不等式, 其中讨论时, 你考虑全面吗? 注意到特殊情况了吗? 你是否注意到二次项系数可能为零的情形?

[典例] 求函数  $f(x) = \frac{ax^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$  的增区间.

[解析] 令  $f'(x) > 0$  得  $ax^2 + x + 1 > 0$ .

(1) 当  $a=0$  时,  $x > -1$ .

(2) 当  $a > 0$  时,  $\Delta = 1 - 4a$ ,

$\therefore$  ① 当  $a > \frac{1}{4}$  时,  $\Delta < 0, f'(x) = ax^2 + x + 1 > 0$  恒成立,  $\therefore x \in \mathbf{R}$ .

② 当  $a = \frac{1}{4}$  时,  $\Delta = 0, f'(x) = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 \geq 0$  恒成立.  $\therefore x \in \mathbf{R}$ .

③ 当  $0 < a < \frac{1}{4}$  时, 原不等式对应的方程的根为  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2a}$ ,

$$x \in \left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{1-4a}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{1-4a}}{2a}, +\infty\right).$$

(3) 当  $a < 0$  时,  $\therefore a < 0, \therefore \Delta > 0$ .

$$\text{又 } \frac{-1 - \sqrt{1-4a}}{2a} > \frac{-1 + \sqrt{1-4a}}{2a},$$



$\therefore x \in (\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}, \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a})$ . 综上所述: ①当  $a=0$  时, 增区间为  $(-1, +\infty)$ .

②当  $a \geq \frac{1}{4}$  时, 增区间为  $(-\infty, +\infty)$ .

③当  $0 < a < \frac{1}{4}$  时, 增区间为  $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a})$ ,  $(\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}, +\infty)$ .

④当  $a < 0$  时, 增区间为:  $(\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a}, \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a})$ .

**[点拨]** 当一元二次不等式的  $x^2$  项含有参数时, 要按以下几个层次进行讨论, 首先讨论  $x^2$  的系数的正负; 再讨论  $\Delta$  的符号, 即不等式对应的方程是否有解; 最后讨论不等式的端点(方程的根)的大小关系. 解答过程中容易出现的错误是: (1) 忽略对  $x^2$  系数的符号的讨论; (2) 忽略对  $\Delta$  的符号(方程是否有解)的讨论; (3) 不能准确判断不等式端点的大小关系(如本题中, 不少同学错误的认为: 当  $a < 0$  时,  $\frac{-1+\sqrt{1-4a}}{2a} > \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}$ ).

**[类比·鉴赏]** (1) 如曲线  $y=kx^3+kx^2-x=0$  上的任何一点切线的斜率大于 0, 则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

(2) 已知函数  $f(x) = |2x-3| + |x+1|$ ,  $x \in (-\infty, 0]$ , 则  $f(x)$  的最小值是\_\_\_\_\_.



### 常考题型要练熟 临场不惧胸有竹

#### 1. 不等关系与不等式

不等关系与不等式是学习不等式的关键, 也是学习不等式的基础, 在解题时注意灵活转化.

**[例 1]** 已知:  $m < 0, n > 0$ , 且  $m+n > 0$ , 则下列各式中正确的是 ( )

A.  $-n < m < -m < n$

B.  $-n < m < n < -m$

C.  $m < -n < -m < n$

D.  $m < -n < n < -m$

**[分析]** 解决本题的关键并不是推导, 特值检验对于本题是最好的方法.

**[解析]**  $\because m < 0, n > 0, m+n > 0 \Rightarrow 0 > m > -n, n > -m > 0$ ,

$\therefore n > -m > m > -n$ . 也可以利用特殊值法, 如令  $m = -2, n = 3$ . 故选 A.

**[点睛]** 解选择题时一定注意解题方法, 特值检验对有些选择题是正确快捷的方法.

#### 2. 一元二次不等式

**[例 2]** 函数  $f(x) = \sqrt{x^2-2x} + 2\sqrt{x^2-5x+4}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

**[分析]** 解决本题的关键是正确的求出函数的定义域, 即正确的解出两个一元二次不等式的交集.

**[解析]** 要使  $f(x) = \sqrt{x^2-2x} + 2\sqrt{x^2-5x+4}$  有意义, 需  $x^2-2x \geq 0$  且  $x^2-5x+4 \geq 0$ , 解得  $\{x|x \geq 2 \text{ 或 } x \leq 0\}$  且  $\{x|x \geq 4 \text{ 或 } x \leq 1\}$ . 所以  $f(x) = \sqrt{x^2-2x} + 2\sqrt{x^2-5x+4}$  的定义域是  $\{x|x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 4\}$ . 当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = \sqrt{x^2-2x} + 2\sqrt{x^2-5x+4}$  是单调递减函数, 在  $x=0$  处取最小值为 4; 当  $x \geq 4$  时,  $f(x) = \sqrt{x^2-2x} + 2\sqrt{x^2-5x+4}$  是单调递增函数, 在  $x=4$  处取最小值为  $1+2\sqrt{2}$ , 比较得最小值为  $1+2\sqrt{2}$ .

**[点睛]** 本题体现了分类讨论的思想, 考查了不等式的解法以及复合函数的单调性.



### 3. 二元一次不等式组与线性规划

线性规划在现实生活中有着广泛的应用,也是应用二元一次不等式知识解决实际问题的经典范例,在2007年的高考中屡有考查,该部分既能考查同学们的应用意识,又能考查同学们综合应用知识解决问题的能力.

**[例3]** 设  $m$  为实数,若  $\left\{ (x, y) \left| \begin{cases} x-2y+5 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ mx+y \geq 0 \end{cases} \right. \right\} \subseteq \{ (x, y) \mid x^2+y^2 \leq 25 \}$ , 则  $m$  的取值

范围是\_\_\_\_\_.

**[分析]** 解决本题的关键是审清题意,二元一次不等式组所表示的区域内的点在圆面内.

**[解析]** 由于  $mx+y=0$  是过原点的直线,斜率是  $-m$ ,所以直线过  $A(-5,0)$  点时,  $-m$  最大,  $m$  最小为 0,当直线过  $B(3,-4)$  点时,  $-m$  最小,  $m$  最大为  $\frac{4}{3}$ ,故  $m$  的取值范围是  $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$ .

**[点睛]** 本题以集合为载体考查二元一次不等式组的区域问题,角度新颖.

### 4. 基本不等式

基本不等式是历年高考重点考查的知识点之一,其应用范围广,所以出题灵活,可以单独命题,也可以在与其它章节的知识交汇处命题.

**[例4]** 如果正数  $a, b, c, d$  满足  $a+b=cd=4$ , 那么 ( )

- A.  $ab \leq c+d$ , 且等号成立时  $a, b, c, d$  的取值唯一
- B.  $ab \geq c+d$ , 且等号成立时  $a, b, c, d$  的取值唯一
- C.  $ab \leq c+d$ , 且等号成立时  $a, b, c, d$  的取值不唯一
- D.  $ab \geq c+d$ , 且等号成立时  $a, b, c, d$  的取值不唯一

**[分析]** 本题入手点在于  $a+b=cd=4$  这一定值,同学们很自然的可以想到利用基本不等式.

**[解析]** 由  $a+b=cd=4$ , 且  $a, b, c, d$  为正数, 所以  $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 4$ , 当且仅当  $a=b=2$  时取等号;  $\left(\frac{c+d}{2}\right)^2 \geq cd$  可得  $c+d \geq 2\sqrt{cd} = 4$ , 当且仅当  $c=d=2$  时取等号, 故  $ab \leq c+d$ , 且等号成立时  $a, b, c, d$  的取值唯一, 都是 2. 故选 A.

**[点睛]** 本题主要考查基本不等式,从定值这一信息给学生提供了思路,命题的“度”把握得很好.



### 考前猜题与押宝 热点问题再聚焦

不等式是解决数学问题的工具,在高考中常与函数、数列、数学归纳法等知识结合在一起考查.

**[聚焦]** 设  $a, b \in \mathbf{R}^+$ ,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ , 求证: 当  $n \in \mathbf{N}^+$  时,  $(a+b)^n - a^n - b^n \geq 2^{2n} - 2^{n+1}$ .

**[证明]** (1) 当  $n=1$  时, 容易验证命题成立.



(2) 假设当  $n=k$  时,  $(a+b)^k - a^k - b^k > 2^{2k} - 2^{k+1}$ , 那么当  $n=k+1$  时, 由  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ , 有  $a$

$+b=ab$ , 故  $ab=a+b \geq 2\sqrt{ab}$ , 即  $ab=a+b \geq 4$ ,

从而  $(a+b)^{k+1} - a^{k+1} - b^{k+1} = (a+b)[(a+b)^k - a^k - b^k] + a^k b + ab^k \geq 4(2^{2k} - 2^{k+1}) + 2\sqrt{a^{k+1}b^{k+1}} \geq 2^{2k+2} - 2^{k+3} + 2 \cdot 2^{k+1} = 2^{2(k+1)} - 2^{(k+1)+1}$ .

即当  $n=k+1$  时,  $(a+b)^n - a^n - b^n \geq 2^{2n} - 2^{n+1}$ .

综上所述, 当  $n \in \mathbf{N}^+$  时,  $(a+b)^n - a^n - b^n \geq 2^{2n} - 2^{n+1}$ .

[点评] 所证的命题是与自然数  $n$  有关的命题, 应用不等式直接难以证明, 故考虑到应用数学归纳法, 应用时, 一是应用假设进行放缩, 二是注意综合应用不等式的性质、定理进行变形、放缩.

### 短时高效 直击高考

### 30分钟限时训练

#### 一、选择题

1. 已知  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$ , 则下列结论不正确的是 ( )

A.  $a^2 < b^2$       B.  $ab < b^2$       C.  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$       D.  $|a| + |b| > |a+b|$

2. 定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $f(x)$  为增函数, 偶函数  $g(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上的图象与  $f(x)$  的图象重合, 设  $a > b > 0$ , 给出下列不等式, 其中正确不等式的序号是 ( )

①  $f(b) - f(-a) > g(a) - g(-b)$       ②  $f(b) - f(-a) < g(a) - g(-b)$   
③  $f(a) - f(-b) > g(b) - g(-a)$       ④  $f(a) - f(-b) < g(b) - g(-a)$   
A. ①③      B. ②④      C. ①④      D. ②③

3. 设  $M = (\frac{1}{a} - 1)(\frac{1}{b} - 1)(\frac{1}{c} - 1)$ , 且  $a+b+c=1$  ( $a, b, c$  是正数), 则  $M$  的取值范围是 ( )

A.  $[0, \frac{1}{8}]$       B.  $(\frac{1}{8}, 1)$       C.  $[\frac{1}{8}, 1]$       D.  $[8, +\infty)$

#### 二、填空题

4. 已知正数  $a, b$  满足  $ab=1$ , 则使  $\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} \leq \lambda$  恒成立的实数  $\lambda$  的取值范围是 \_\_\_\_.

5. 若函数  $f(x) = |x-t| + |5-x|$  的最小值是 3, 则实数  $t =$  \_\_\_\_.

#### 三、解答题

6. 某段城铁线路上依次有 A、B、C 三站, A、B 两站间路程为 5km, B、C 两站间路程为 3km, 在列车运行时刻表上, 规定列车 8 时整从 A 站发车, 8 时 07 分到达 B 站并停车 1 分钟, 8 时 12 分到达 C 站. 在实际运行中, 假设列车从 A 站正点发车, 在 B 站停留 1 分钟, 并在行驶时保持同一速度  $v$  km/h, 列车从 A 站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差.

(1) 分别写出列车在 B、C 两站的运行误差;

(2) 若要求列车在 B、C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟, 求  $v$  的取值范围.





# 考前20天

## 高考论坛 不等式的恒成立问题

不等式  $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$  在实数集  $\mathbf{R}$  上恒成立的充要条件是  $a>0$  且  $\Delta=b^2-4ac<0$ . 如果把结论稍加扩展: 不等式左边的表达式不一定是关于  $x$  的二次三项式, 给定区间不是实数集  $\mathbf{R}$  而是实数集  $\mathbf{R}$  的子集, 依然讨论使不等式恒成立的条件, 内容就丰富得多了. 但近年不等式恒成立的问题转向了与函数、导数的整合.

[例 1] 设函数  $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$ .

(1) 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 如果对任何  $x\geq 0$ , 都有  $f(x)\leq ax$ , 求  $a$  的取值范围.

[解] (1)  $f'(x)=\frac{(2+\cos x)\cos x-\sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$ .

当  $2k\pi-\frac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$  时,  $\cos x>-\frac{1}{2}$ , 即  $f'(x)>0$ ;

当  $2k\pi+\frac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{4\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$  时,  $\cos x<-\frac{1}{2}$ , 即  $f'(x)<0$ .

因此  $f(x)$  的单调递增区间为  $(2k\pi-\frac{2\pi}{3}, 2k\pi+\frac{2\pi}{3})(k\in\mathbf{Z})$ .

$f(x)$  的单调递减区间为  $(2k\pi+\frac{2\pi}{3}, 2k\pi+\frac{4\pi}{3})(k\in\mathbf{Z})$ .

(2) 令  $g(x)=ax-f(x)$ ,

则  $g'(x)=a-\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}=a-\frac{2}{2+\cos x}+\frac{3}{(2+\cos x)^2}=3(\frac{1}{2+\cos x}-\frac{1}{3})^2+a-\frac{1}{3}$ .

故当  $a\geq \frac{1}{3}$  时,  $g'(x)\geq 0$ , 又  $g(0)=0$ , 故当  $x\geq 0$  时,  $g(x)\geq g(0)=0$ , 即  $f(x)\leq ax$ .

当  $0<a<\frac{1}{3}$  时, 令  $h(x)=\sin x-3ax$ , 则  $h'(x)=\cos x-3a$ .

故当  $x\in(0, \arccos 3a)$  时,  $h'(x)>0$ . 因此  $h(x)$  在  $(0, \arccos 3a)$  上单调递增,

故当  $x\in(0, \arccos 3a)$  时,  $h(x)>h(0)=0$ , 即  $\sin x>3ax$ .

于是, 当  $x\in(0, \arccos 3a)$  时,  $f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}>\frac{\sin x}{3}>ax$ .

当  $a\leq 0$  时, 有  $f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}>0\geq a\cdot\frac{\pi}{2}$ . 因此,  $a$  的取值范围是  $[\frac{1}{3}, +\infty)$ .

[命题立意] 本题主要考查函数的商的导数的运算法则、三角不等式的解法、函数的单调性与导数符号之间的关系以及恒成立问题, 求解时要注意结合题目要求进行综合分析.



**[例 2]** 已知函数  $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^{|x|}}$ .

(1) 若  $f(x) = 2$ , 求  $x$  的值;

(2) 若  $2^t f(2t) + m f(t) \geq 0$  对于  $t \in [1, 2]$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围.

**[解]** (1) 当  $x < 0$  时,  $f(x) = 0$ ; 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x}$ .

由条件可知  $2^x - \frac{1}{2^x} = 2$ , 即  $2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 1 = 0$ , 解得  $2^x = 1 \pm \sqrt{2}$ .

$\because 2^x > 0, \therefore x = \log_2(1 + \sqrt{2})$ .

(2) 当  $t \in [1, 2]$  时,  $2^t \left( 2^{2t} - \frac{1}{2^{2t}} \right) + m \left( 2^t - \frac{1}{2^t} \right) \geq 0$ . 即  $m(2^{2t} - 1) \geq -(2^{4t} - 1)$ .

$\because 2^{2t} - 1 > 0, \therefore m \geq -(2^{2t} + 1)$ .  $\because t \in [1, 2], \therefore -(1 + 2^{2t}) \in [-17, -5]$ ,

故  $m$  的取值范围是  $[-5, +\infty)$ .

**[命题立意]** 本题主要考查解函数方程的方法和用函数最值知识证明恒不等式的思想, 解(2)问的关键是把恒成立问题转化为求函数最值问题.

**[例 3]** 已知函数  $f(x) = \frac{a}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + (a+1)x + 1$ , 其中  $a$  为实数.

(1) 已知函数  $f(x)$  在  $x=1$  处取得极值, 求  $a$  的值;

(2) 已知不等式  $f'(x) > x^2 - x - a + 1$  对任意  $a \in (0, +\infty)$  都成立, 求实数  $x$  的取值范围.

**[解]** (1)  $f'(x) = ax^2 - 3x + a + 1$ , 由于函数  $f(x)$  在  $x=1$  处取得极值, 所以  $f'(1) = 0$ , 即  $a - 3 + a + 1 = 0, \therefore a = 1$ .

(2) 法 1: 由题设知:  $ax^2 - 3x + a + 1 > x^2 - x - a + 1$  对任意  $a \in (0, +\infty)$  都成立.

即  $a(x^2 + x) - x^2 - 2x > 0$  对任意  $a \in (0, +\infty)$  都成立.

设  $g(a) = a(x^2 + x) - x^2 - 2x (a \in \mathbf{R})$ , 则对任意  $x \in \mathbf{R}, g(a)$  为单调递增函数 ( $a \in \mathbf{R}$ ),

$\therefore$  对任意  $a \in (0, +\infty), g(a) > 0$  恒成立的充要条件是  $g(0) \geq 0$ , 即  $-x^2 - 2x \geq 0$ ,

$\therefore -2 \leq x \leq 0$ . 于是  $x$  的取值范围是  $\{x | -2 \leq x \leq 0\}$ .

法 2: 由题设知:  $ax^2 - 3x + a + 1 > x^2 - x - a + 1$  对任意  $a \in (0, +\infty)$  都成立,

即  $a(x^2 + x) - x^2 - 2x > 0$  对任意  $a \in (0, +\infty)$  都成立.

于是  $a > \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x}$  对任意  $a \in (0, +\infty)$  都成立, 即  $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + x} \leq 0, \therefore -2 \leq x \leq 0$ .

$\therefore x$  的取值范围是  $\{x | -2 \leq x \leq 0\}$ .

**[命题立意]** 本题主要考查函数求导的概念与计算、导数与函数极值的关系、不等式的性质和综合运用有关知识解决问题的能力.

**[例 4]** 已知不等式  $x + |x + a| > |a + 1|$ , 对任意  $x \in \mathbf{R}$  都成立, 求实数  $a$  的取值范围.

**[解]** 设  $f(x) = x + |x + a|$ , 则  $f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x \geq -a \\ -a, & x < -a \end{cases}$

由此可知,  $f(x)$  的最小值为  $-a$ .  $\therefore -a > |a + 1|$ , 解得  $a < -\frac{1}{2}$ .

因此  $a$  的取值范围为  $(-\infty, -\frac{1}{2})$ .

**[命题立意]** 求函数的最值与解绝对值不等式相结合, 考查知识的综合运用能力.



# 考前18天

## 高考论坛 填空题解题方法与技巧

一、直接法:直接从题设条件出发,准确计算,讲究技巧,得出结论.

[例1]  $\triangle ABC$  的三内角  $A, B, C$  所对边的长分别为  $a, b, c$ , 设向量  $p = (a+c, b)$ ,  $q = (b-a, c-a)$ , 若  $p \parallel q$ , 则角  $C$  的大小为 \_\_\_\_\_.

[解析] 直接利用条件  $p \parallel q$ , 可得  $(a+c) \cdot (c-a) - b \cdot (b-a) = 0$ ,

$$\text{即 } a^2 + b^2 - c^2 = ab. \quad \therefore \cos C = \frac{1}{2}, \text{ 即 } C = \frac{\pi}{3}.$$

[例2] 已知  $m, l$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面, 给出下列命题, 其中正确的命题的序号是 \_\_\_\_\_.

①若  $l$  垂直于  $\alpha$  内的两条相交直线, 则  $l \perp \alpha$     ②若  $l \parallel \alpha$ , 则  $l$  平行于  $\alpha$  内的所有直线

③若  $m \parallel \alpha, l \parallel \beta$ , 且  $l \perp m$ , 则  $\alpha \perp \beta$

④若  $l \subset \beta$  且  $l \perp \alpha$ , 则  $\alpha \perp \beta$

⑤若  $m \parallel \alpha, l \parallel \beta$  且  $\alpha \parallel \beta$ , 则  $m \parallel l$

分析: 这是一道“多重选择填空题”, 反映了高考命题组在探索多重选择题的使用, 应视为高考命题改革的一种新动向. 运用分析、推理可判定①、④正确.

二、特例法: 当题目暗示结论唯一或其值为定值时, 可取特例求解. 构造特殊的图形, 赋予特殊数值, 结果巧妙求出, 会有事半功倍之效.

[例3] 已知  $A+B = \frac{\pi}{3}$ , 则  $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A \cos A - \sin B \cos B}$  的值为 \_\_\_\_\_.

[解析] 题目暗示不论  $A, B$  为何值, 只要  $A+B = \frac{\pi}{3}$ , 结果应该唯一. 所以给  $A, B$  赋以特殊值, 令  $A = \frac{\pi}{3}, B = 0$ , 代入原式得  $\sqrt{3}$ .

[例4] 设  $a, b, c$  为实数, 且  $\cos 2x = a \cos^2 x + b \cos x + c$  恒成立, 则  $a^2 + b^2 + c^2 =$  \_\_\_\_\_.

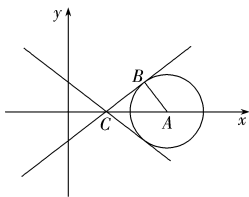
[解析] 由于题设为恒等式, 所以可取  $x$  的特殊值代入, 如  $x=0, \frac{\pi}{2}, \pi$  代入得,

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ c=-1 \\ a-b+c=1 \end{cases}, \text{ 解得 } a=2, b=0, c=-1, \text{ 故 } a^2+b^2+c^2=5$$

三、数形结合法: 借助于图形进行直观分析, 并辅之以简单计算得出结论.

[例5] 如果实数  $x, y$  满足等式  $(x-3)^2 + y^2 = 3$  那么  $\frac{y}{x-1}$  的最大值是 \_\_\_\_\_.

[解析] 结论为过点  $(x, y)$  与  $(1, 0)$  的直线斜率, 可如图所示, 知圆





上点  $B(x, y)$  与点  $C(1, 0)$  的连线处于圆的切线位置时, 斜率  $\frac{y}{x-1}$  最大, 这时  $|CA| = 2, |AB| =$

$$\sqrt{3}, |CB| = 1, \frac{y}{x-1} = \tan \angle ACB = \frac{|AB|}{|CB|} = \sqrt{3}.$$

**四、结论法:** 记住课本习题中或平时经常用的一些小结论会加快填空题的计算速度. 但应注意这些结论不能应用于解答题, 不过能加快解答题的解题思路.

**[例 6]** 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $\overrightarrow{OB} = a_1 \overrightarrow{OA} + a_{2007} \overrightarrow{OC}$ , 且  $A, B, C$  三点共线 ( $O$  为该直线外一点), 则  $S_{2007} =$  \_\_\_\_\_

**[解析]** 课本中以例题形式出现过 “ $A, B, C$  三点共线,  $O$  是线外一点, 若  $\overrightarrow{OB} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OC}$ , 则  $\alpha + \beta = 1$ ”.

因为  $\overrightarrow{OB} = a_1 \overrightarrow{OA} + a_{2007} \overrightarrow{OC}$ , 所以:  $a_1 + a_{2007} = 1$ .  $S_{2007} = \frac{a_1 + a_{2007}}{2} \cdot 2007 = \frac{1}{2} \cdot 2007 = \frac{2007}{2}$  故应填  $\frac{2007}{2}$ .

**[例 7]** 等差数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的前  $n$  项和分别为  $S_n, T_n$ , 且  $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+45}{n-3}$ , 则使得  $\frac{a_n}{b_n}$  为整数的正整数  $n$  的个数是 \_\_\_\_\_.

**[解析]** 等差数列的前  $n$  项和公式  $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$  可变形为  $S_{2n-1} = a_n \cdot (2n-1)$ , 所

以  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{7(2n-1)+45}{(2n-1)-3} = \frac{14n+38}{2n-4} = 7 + \frac{33}{n-2}$ , 当  $n-2=1, n-2=3, n-2=11, n-2=$

33, 即  $n=3, n=5, n=13, n=35$  时,  $\frac{a_n}{b_n}$  为整数, 故答案为 4.

**五、找规律:** 发现题目中暗含的规律, 是快速解决这类填空题的关键, 考查同学们的观察能力和思维的灵活性.

**[例 8]** 如果函数  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ , 那么  $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) =$  \_\_\_\_\_.

**[解析]** 经计算发现  $f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) = 1$ , 这就是我们找出的有用的规律, 于是原式子中  $f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = 1, f\left(\frac{1}{3}\right) + f(3) = 1, f\left(\frac{1}{4}\right) + f(4) = 1, f(1) = \frac{1}{2}$ . 原式  $= f(1) + 3 = \frac{7}{2}$ , 应填  $\frac{7}{2}$ .



# 考前17天

今天复习巩固强化—极限(理)与导数



温馨提示易错点 高考轻松把分捡

1. (理)你能正确理解数列 $\{a_n\}$ 的极限的概念并应用于解题吗?

[典例] 已知数列 $\{a_n\}$ ,  $a_n = \begin{cases} n & n \leq 1000 \\ \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} & n > 1000 \end{cases}$ , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  等于 ( )

A. -1

B. 1

C. 0

D. 不存在

[解析]  $\because \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} = \frac{(\frac{2}{3})^n - 1}{(\frac{2}{3})^n + 1} \rightarrow -1, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ . 故选 A.

[点拨] 数列 $\{a_n\}$ 的极限揭示的是, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,  $a_n$ 的变化趋势, 其极限值与数列的有限项没有关系.

[类比·鉴赏] 已知数列 $\{a_n\}$ ,  $a_n = \begin{cases} \frac{1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n}{2^{n+1}}, & n \text{ 为奇数时} \\ \frac{1+3+\cdots+(2n-1)}{2+4+\cdots+2n}, & n \text{ 为偶数时} \end{cases}$ , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ( )

A. 等于-1

B. 等于1

C. 等于0

D. 不存在

2. 你知道数列极限的运算法则适用的前提条件吗?

[典例]  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{n^2+1} + \frac{3}{n^2+1} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2+1}) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

[解析]  $\because \frac{1}{n^2+1} + \frac{3}{n^2+1} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+1} (1+3+\cdots+2n-1) = \frac{n^2}{n^2+1} \rightarrow 1$ ,

$\therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{n^2+1} + \frac{3}{n^2+1} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2+1}) = 1$ .

[点拨] 数列极限的运算法则适用的前提条件是极限存在并且为有限项的运算, 当含有无限项时, 应该首先求出和, 再求极限. 有的同学认为 $\frac{1}{n^2+1} + \frac{3}{n^2+1} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2+1}$ 中的每一项的极限为0, 而得到 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{n^2+1} + \frac{3}{n^2+1} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2+1}) = 0$ 这一错误结果.

[类比·鉴赏] 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \frac{1}{3}$ , 且对于任意的正整数 $m, n$ 都有 $a_{m+n} = a_m \cdot a_n$ , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$  等于 ( )



- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       D.  $\frac{3}{2}$                       D. 2

3. (理)应用导数求函数的单调区间时,你注意函数的定义域了吗? 知道求单调区间时,区间不能用“ $\cup$ ”连接吗?

[典例] 函数  $y = -\frac{1}{2x^2} - \ln x$  的递增区间是\_\_\_\_\_.

[解析]  $\because y' = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} = \frac{1-x^2}{x^3}$ , 定义域为  $(0, +\infty)$ , 当  $x \in (0, 1)$ ,  $y' > 0$ .

$\therefore$  函数的增区间为  $(0, 1)$ .

[点拨] (1)在解  $y' > 0$  时,易忽略定义域为  $(0, +\infty)$  这一条件,而得出增区间为  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  这一错误结果;(2)单调区间之间不能用“ $\cup$ ”连接,可用逗号或分号隔开,如函数  $y = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$  的增区间为  $(-\infty, -\frac{2}{3})$ ,  $(1, +\infty)$ , 不能写为“ $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (1, +\infty)$ ”.

[类比·鉴赏] 若函数  $y = 2x^2 - \ln x$  在  $(a, \frac{1}{2})$  上是减函数,则实数  $a$  的取值范围是

( )

- A.  $[0, \frac{1}{2})$                       B.  $(0, \frac{1}{2}]$                       C.  $(\frac{1}{2}, +\infty)$                       D.  $[\frac{1}{2}, +\infty)$

4. (理)对于复合函数导数的求法,你能掌握吗? 这是正确应用导数的前提呀!

复合函数的求导,其关键在于分清函数的复合关系,选好中间变量,逐次应用复合函数的求导法则,由表及里,逐步求导.

[典例] 直线  $l$  为曲线  $y = e^{2-2x} + x$  在  $x = 1$  处的切线,则直线  $l$  与坐标轴围成的三角形的面积为\_\_\_\_\_.

[解析] 如  $y' = e^{2-2x} \times (2-2x)' + 1 = -2e^{2-2x} + 1$ ,  $\therefore k_l = -2 + 1 = -1$ , 又因为直线  $l$  过点  $(1, 2)$ , 所以直线  $l$  的方程为  $y = -1 \times (x-1) + 2$ , 即  $y = -x + 3$ , 直线  $l$  与坐标轴围成的三角形的面积为  $\frac{9}{2}$ .

[点拨] 复合函数的求导,其关键在于分清函数的复合关系,选好中间变量,逐次应用复合函数的求导法则,由表及里,逐步求导. 函数  $y = e^{2-2x}$  是由  $y = e^u$  和  $u = 2-2x$  复合而成,

$y' = e^{2-2x} \times (2-2x)' = -2e^{2-2x}$ , 这是同学们容易出现错误的地方. 再如  $y = \ln \tan \frac{x}{2}$  是由  $y = \ln u$ ,  $u = \tan v$  和  $v = \frac{x}{2}$  复合而成的,应分三个层次求导,求导应本着由外到内的原则进行.

[类比·鉴赏] 在第一象限,曲线  $y = \sqrt{x^2 + 1}$  的切线的斜率随切点的横坐标的增大而\_\_\_\_\_

- A. 增大                      B. 减小                      C. 先增大后减小                      D. 先减小后增大

5. 对于可导函数,  $f'(x_0) = 0$  是  $f(x_0)$  为极值的必要但不充分条件,在解决问题时,你注意到这一点了吗?

[典例] 函数  $y = (x^2 - 2)^3 + 3$

( )

- A. 在  $x = -\sqrt{2}$  处有极值                      B. 在  $x = 0$  处有极值  
C. 在  $x = \sqrt{2}$  处有极值                      D. 在  $x = \pm\sqrt{2}$ ,  $0$  处都有极值

[解析] 显然  $y = (x^2 - 2)^3 + 3$  是偶函数.



$\because y' = 6x(x^2 - 2)^2$ ,  $\therefore$  当  $x \geq 0$  时,  $y' \geq 0$ ; 当  $x \leq 0$  时,  $y' \leq 0$ . 即函数  $y = (x^2 - 2)^3 + 3$  在  $[0, +\infty)$  上递增, 在  $(-\infty, 0]$  上递减.  $\therefore x = 0$  是唯一极值点. 选 B.

**[点拨]** 本题若直接解方程  $6x(x^2 - 2)^2 = 0$ , 得  $x = 0, \pm\sqrt{2}$ . 据此选答 D 就错了. 这是因为方程  $y' = 0$  的解只是该点成为极值点的必要条件. 只有曲线在该点存在平行于  $x$  轴的切线, 才能称为极值点.

**[类比·鉴赏]** 函数  $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}$  的极值点的个数为\_\_\_\_\_.

6. 求过某点的切线时, 你是否注意到该点在曲线上吗? 该点是否一定是切点呢?

**[典例]** 求过原点且与曲线  $y = x^3 - x^2 - x$  相切的直线的方程.

**[解析]** (1) 当  $(0, 0)$  为切点时,  $\because y' = 3x^2 - 2x - 1$ , 切线的斜率为  $-1$ , 直线方程为  $y = -x$ . (2) 当  $(0, 0)$  不为切点时, 设切点为  $(x_0, x_0^3 - x_0^2 - x_0)$  ( $x_0 \neq 0$ ), 则  $k = 3x_0^2 - 2x_0 - 1 = \frac{x_0^3 - x_0^2 - x_0 - 0}{x_0 - 0} = x_0^2 - x_0 - 1$ , 解得  $x_0 = \frac{1}{2}$ , 所以切线的斜率为  $-\frac{5}{4}$ , 直线方程为  $y = -\frac{5}{4}x$ . 所以由 (1)(2) 得直线方程为  $y = -x$  或  $y = -\frac{5}{4}x$ .

**[点拨]** (1) 求过某点的切线时, 要注意该点是否在曲线上以及该点是否一定是切点. (2) 根据条件列方程或方程组是解决该问题的主要方法, 灵活运用  $x = x_0$  处的导数就是该点处的切线的斜率是解决有关切线问题的关键.

**[类比·鉴赏]** 已知函数  $f(x) = x^3 + x - 16$ , 直线  $l$  为曲线  $y = f(x)$  的切线, 且经过原点, 求直线  $l$  的方程及切点坐标.

7. 应用导数求参数的范围时, 你注意到端点的取舍了吗? 讨论时遗漏特殊情况了吗?

**[典例]** (理) 已知函数  $f(x) = ax - \frac{b}{x} - 2\ln x$ ,  $f(1) = 0$ , 若函数  $f(x)$  在其定义域内为单调函数, 求  $a$  的取值范围.

**[解析]** (1)  $f(1) = a - b = 0 \Rightarrow a = b$ ,  $\therefore f(x) = ax - \frac{a}{x} - 2\ln x$ .

$$\therefore f'(x) = a + \frac{a}{x^2} - \frac{2}{x}.$$

要使函数  $f(x)$  在定义域  $(0, +\infty)$  内为单调函数, 则在  $(0, +\infty)$  内  $f'(x)$  恒大于 0 或恒小于 0,

当  $a = 0$  时,  $f'(x) = -\frac{2}{x} < 0$  在  $(0, +\infty)$  内恒成立;

当  $a > 0$  时, 要使  $f'(x) = a(\frac{1}{x} - \frac{1}{a})^2 + a - \frac{1}{a} \geq 0$  恒成立, 则  $a - \frac{1}{a} \geq 0$ , 解得  $a \geq 1$ ;

当  $a < 0$  时, 要使  $f'(x) = a(\frac{1}{x} - \frac{1}{a})^2 + a - \frac{1}{a} \leq 0$  恒成立, 则  $a - \frac{1}{a} \leq 0$ , 解得  $a \leq -1$ .

所以  $a$  的取值范围为  $a \geq 1$  或  $a \leq -1$  或  $a = 0$ .

**[点拨]** 当问题中涉及参数时, 要注意对参数进行讨论, 讨论时要全面, 特别是特殊情况, 如二次项系数  $a = 0$  的情况、判别式  $\Delta = 0$  的情况、端点的值能否取到等.

**[典例]** (文) 已知  $f(x) = ax^3 + 3x^2 - x + 1$  在  $\mathbf{R}$  上是减函数, 求  $a$  的取值范围.



**[解析]** 函数  $f(x)$  的导数:  $f'(x) = 3ax^2 + 6x - 1$ .

(1) 当  $f'(x) < 0 (x \in \mathbf{R})$  时,  $f(x)$  是减函数.

$$3ax^2 + 6x - 1 < 0 (x \in \mathbf{R}) \Leftrightarrow a < 0 \text{ 且 } \Delta = 36 + 12a < 0 \Leftrightarrow a < -3.$$

所以, 当  $a < -3$  时, 由  $f'(x) < 0$ , 知  $f(x) (x \in \mathbf{R})$  是减函数;

$$(2) \text{ 当 } a = -3 \text{ 时, } f(x) = -3x^3 + 3x^2 - x + 1 = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 + \frac{8}{9},$$

由函数  $y = x^3$  在  $\mathbf{R}$  上的单调性, 可知

当  $a = -3$  时,  $f(x) (x \in \mathbf{R})$  是减函数;

(3) 当  $a > -3$  时, 在  $\mathbf{R}$  上存在一个区间, 其上有  $f'(x) > 0$ ,

所以, 当  $a > -3$  时, 函数  $f(x) (x \in \mathbf{R})$  不是减函数.

综上, 所求  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -3]$ .

**[点拨]**  $f(x) = ax^3 + 3x^2 - x + 1$  在  $\mathbf{R}$  上是减函数可以转化为  $f'(x) < 0$  恒成立, 同时注意验证端点的取值情况.

**[类比·鉴别]** (理) 已知函数  $f(x) = x^2 e^{ax}$ , 其中  $a \leq 0$ ,  $e$  为自然对数的底数. 讨论函数  $f(x)$  的单调性.

(文) 已知函数  $f(x) = mx^3 + mx^2 + 3x$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数, 求实数  $m$  的取值范围.



**常考题型要练熟 临场不惧胸有竹**

## 1. (理) 数列知识与数列极限的求法的考查相结合

高考中数列极限的求法与数列知识经常相结合考查, 一般为中档的选择或填空题.

**[例 1]** 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$  \_\_\_\_\_.

**[分析]** 由  $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$  求出  $a_n$ , 再求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**[解析]** 由  $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$ , 得  $2a_n + a_{n-1} = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ ,  $\therefore \{2a_n + a_{n-1}\}$  是常数列.

$$\therefore 2a_2 + a_1 = 2, \therefore 2a_n + a_{n-1} = 2.$$

$$\therefore a_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} \left( a_{n-1} - \frac{2}{3} \right).$$

$\therefore \{a_n - \frac{2}{3}\}$  是公比为  $-\frac{1}{2}$ , 首项为  $-\frac{2}{3}$  的等比数列.

$$\therefore a_n - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \therefore a_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}.$$

**[点睛]** 由递推关系  $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$  构造等比数列  $\{a_n - \frac{2}{3}\}$  是解决问题的关键.

## 2. (理) 函数的极限与连续性的考查相结合

由于函数的连续性是定义在函数的极限的基础上的, 所以在高考中函数的极限与连续性经常结合在一起考查.

**[例 2]** 已知  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}, & x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \\ a, & x = 1 \end{cases}$  为  $(0, +\infty)$  上的连续函数, 则

实数  $a$  的值为 \_\_\_\_\_.





**[分析]** 如果函数  $y=f(x)$  在点  $x=x_0$  处及其附近有定义, 而且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 就说函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续.

$$\text{[解析]} \quad \because \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x-1} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore f(1) = a = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

**[点睛]** 理解函数的连续性的定义是解决这类问题的前提.

3. 对导数概念以及导数概念的某些实际背景: 瞬时速度, 加速度, 光滑曲线的切线的斜率的考查.

**[例 3]** (理) 某日中午 12 时整, 甲船自 A 处以 16km/h 的速度向正东行驶, 乙船自 A 的正北 18km/h 处以 24km/h 的速度向正南行驶, 则当日 12 时 30 分时两船之间的距离对时间的变化率是\_\_\_\_\_.

**[分析]** 距离对时间的变化率即瞬时速度. 即此时距离函数对时间变量的导数, 将物理学概念与数学中的导数概念迁移到实际问题中来.

$$\text{[解析]} \quad \text{易求得从 12 点开始, } x \text{ 小时时甲、乙两船的距离 } d = \sqrt{(16x)^2 + (18-24x)^2},$$

$$d' = \frac{1}{2} [(16x)^2 + (18-24x)^2]^{-\frac{1}{2}} + [2 \times 16x \times 16 + 2 \times (18-24x)(-24)], \text{ 当 } x = 0.5 \text{ 时, } d' = -1.6.$$

(文) 一物体在某一受力状态下的位移  $s(t)$  (单位: m) 与运动时间  $t$  (单位: s) 的关系为:  $s(t) = t^3 (t > 0)$ . 该物体在  $t = 2$  秒时的瞬时速度  $v(2) =$ \_\_\_\_\_.

**[分析]** 该物体在 2 秒时的瞬时速度就是  $s(t)$  在  $t = 2$  处的导数,

$$\therefore v(2) = s'(2) = 3 \times 2^2 = 12 (\text{m/s}).$$

**[点睛]** 注意导数的意义的应用, 如导数的几何意义是切线的斜率; 位移关于时间  $t$  的导数为瞬时速度; 速度  $v(t)$  关于时间  $t$  的导数为加速度.

4. 利用导数的几何意义, 研究曲线的切线斜率是导数的一个重要应用, 也是高考考查的重点内容之一. 常与函数问题结合考查, 有时也与圆锥曲线结合考查.

**[例 4]** (理) 已知函数  $f(x) = \frac{ax-6}{x^2+b}$  的图象在点  $M(-1, f(-1))$  处的切线方程为  $x + 2y + 5 = 0$ , 则实数  $a, b$  的值分别为 ( )

A. 1; 2

B. -1; -2

C. 2; 3

D. 2; -1

**[分析]** 根据导数的几何意义及点满足方程建立关于  $x, y$  的方程.

**[解析]** (1) 由函数  $f(x)$  的图象在点  $M(-1, f(-1))$  处的切线方程为  $x + 2y + 5 = 0$ , 知  $-1 + 2f(-1) + 5 = 0$ , 即  $f(-1) = -2, f'(-1) = -\frac{1}{2}$ .

$$\therefore f'(x) = \frac{a(x^2+b) - 2x(ax-6)}{(x^2+b)^2},$$

$$\therefore f'(-1) = \frac{a(1+b) + 2(-a-6)}{(1+b)^2} = -\frac{1}{2}.$$

且  $f(-1) = \frac{-a-6}{1+b} = -2$ , 解得  $a = 2, b = 3$  ( $\because b+1 \neq 0, b = -1$  舍去). 选 C.

**[点睛]** 点  $(x_0, f(x_0))$  处的切线方程为  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ . 灵活运用  $x = x_0$  处的导数就是该点处的切线的斜率是解决有关切线问题的关键.



(文)已知两抛物线  $C_1: y=x^2+2x$ ,  $C_2: y=-x^2+a$ , 且  $C_1$  与  $C_2$  有且只有一条公切线, 则该公切线的方程为\_\_\_\_\_.

**[分析]** 先对  $C_1: y=x^2+2x$ ,  $C_2: y=-x^2+a$  求导数.

**[解析]** 函数  $y=x^2+2x$  的导数为  $y'=2x+2$ , 曲线  $C_1$  在点  $P(x_1, x_1^2+2x_1)$  处的切线方程为  $y-(x_1^2+2x_1)=2(x_1+2)(x-x_1)$ , 即  $y=2(x_1+1)x-x_1^2$  ①

曲线  $C_1$  在点  $Q(x_2, -x_2^2+a)$  的切线方程是  $y-(-x_2^2+a)=-2x_2(x-x_2)$  即

$$y=-2x_2x+x_2^2+a \quad \text{②}$$

若直线  $l$  是过点  $P$  点和  $Q$  点的公切线, 则①式和②式都是  $l$  的方程, 故得

$$x_1+1=-x_2, -x_1^2=x_2^2+1, \text{ 消去 } x_2 \text{ 得方程, } 2x_1^2+2x_1+1+a=0.$$

若  $\Delta=4-4\times 2(1+a)=0$ , 即  $a=-\frac{1}{2}$  时, 解得  $x_1=-\frac{1}{2}$ , 此时点  $P$ 、 $Q$  重合.

$\therefore$  当  $a=-\frac{1}{2}$  时,  $C_1$  和  $C_2$  有且只有一条公切线, 由①式得公切线方程为  $y=x-\frac{1}{4}$ .

**[点睛]** 注意理解方程(组)思想在解题中的应用.

### 5. 应用导数研究函数的单调性或极值、最值

运用导数的有关知识研究函数的单调性和最值问题, 一直是高考常考不衰的热点内容.

**[例 5]** (理)已知  $a>0$ , 函数  $f(x)=\ln(2-x)+ax$ .

(1)求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2)求函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上的最小值.

**[分析]** 通过导数的符号研究函数的单调性, 进而研究函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上的最小值.

$$\text{[解析]} \quad (1) f'(x) = \frac{ax-2a+1}{x-2} = a \left[ x - \left( 2 - \frac{1}{a} \right) \right] \frac{1}{x-2}$$

当  $a>0$  时,  $2-\frac{1}{a}<2$ , 令  $f'(x)>0$ , 解得  $x<2-\frac{1}{a}$ , 令  $f'(x)<0$ , 解得  $2-\frac{1}{a}<x<2$

所以,  $(-\infty, 2-\frac{1}{a})$  是  $f(x)$  的增区间;  $(2-\frac{1}{a}, 2)$  是  $f(x)$  的减区间,

(2) 当  $2-\frac{1}{a}\leq 0$ , 即  $0<a\leq \frac{1}{2}$  时,  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上是减函数,

所以,  $f(x)$  的最小值为  $f(1)=a$ ,

当  $0<2-\frac{1}{a}<1$ , 即  $\frac{1}{2}<a<1$  时,  $f(x)$  在  $(0, 2-\frac{1}{a})$  上是增函数, 在  $(2-\frac{1}{a}, 1)$  上是减函数,

所以, 需比较  $f(0)=\ln 2$  和  $f(1)=a$  两个值的大小,

因为  $e^+<3^+<2<e$ , 所以  $\frac{1}{2}=\ln\sqrt{e}<\ln 2<\ln e=1$ ,

所以, 当  $\frac{1}{2}<a<\ln 2$  时, 最小值为  $a$ , 当  $\ln 2\leq a<1$  时, 最小值为  $\ln 2$ .

当  $2-\frac{1}{a}\geq 1$ , 即  $a\geq 1$  时,  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上是增函数, 所以最小值为  $f(0)=\ln 2$ .

综上, 当  $0<a<\ln 2$  时,  $f(x)$  的最小值为  $a$ , 当  $a\geq \ln 2$  时,  $f(x)$  的最小值为  $\ln 2$ .

(文)函数  $y=x^4-2x^2+5$  在区间  $[-2, 2]$  上的最大值与最小值.

**[分析]** 先求导数, 得  $y'=4x^3-4x$ .

令  $y'=0$  即  $4x^3-4x=0$ , 解得  $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$ .

导数  $y'$  的正负以及  $f(-2), f(2)$  如下表



$x$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2
$y'$		-	0	+	0	-	0	+	
$y$	13	↘	4	↗	5	↘	4	↗	13

从上表知,当  $x=\pm 2$  时,函数有最大值 13,当  $x=\pm 1$  时,函数有最小值 4

**[点睛]** 求导数→解不等式或讨论导数的符号→确定函数的单调性,是求解三次函数或较复杂函数的单调性以及最值问题的基本思路.



### 考前猜题与押宝 热点问题再聚焦

运用导数的有关知识研究函数的单调性和最值问题,一直是高考常考不衰的热点内容.常涉及不等式的解法、性质等知识,并与数列、函数等结合考查同学们的综合应用数学方法解决问题的能力,在解题过程中要注意分类讨论、数形结合思想的应用.

**[聚焦]** (理) 已知函数  $f(x) = -x^2 + ax + 1 - \ln x$ .

(1) 若  $f(x)$  是在  $(0, \frac{1}{2})$  上的减函数,求  $a$  的取值范围;

(2) 函数  $f(x)$  是否既有极大值又有极小值,若不存在,请说明理由;若存在,求  $a$  的取值范围.

**[解析]** (1)  $f'(x) = -2x + a - \frac{1}{x}$

$\because f(x)$  在  $(0, \frac{1}{2})$  上为减函数,  $\therefore x \in (0, \frac{1}{2})$  时  $-2x + a - \frac{1}{x} < 0$  恒成立.

即  $a < 2x + \frac{1}{x}$  恒成立. 设  $g(x) = 2x + \frac{1}{x}$ , 则  $g'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

$\because x \in (0, \frac{1}{2})$  时,  $\frac{1}{x^2} > 4$ ,  $\therefore g'(x) < 0$ ,  $\therefore g(x)$  在  $(0, \frac{1}{2})$  上递减.

$\therefore g(x) > g(\frac{1}{2}) = 3$ ,  $\therefore a \leq 3$ .

(2) 若  $f(x)$  既有极大值又有极小值,则首先必须  $f'(x) = 0$  有两个不同正根  $x_1, x_2$ ,

即  $2x^2 - ax + 1 = 0$  有两个不同正根.

$$\text{令 } \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{a}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 8 > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow a > 2\sqrt{2},$$

$\therefore$  当  $a > 2\sqrt{2}$  时,  $f'(x) = 0$  有两个不等的正根.

不妨设  $x_1 < x_2$ , 由  $f'(x) = -\frac{1}{x}(2x^2 - ax + 1) = -\frac{2}{x}(x - x_1)(x - x_2)$  知:

$0 < x < x_1$  时,  $f'(x) < 0$ ;  $x_1 < x < x_2$  时,  $f'(x) > 0$ ;  $x > x_2$  时,  $f'(x) < 0$ .

$\therefore$  当  $a > 2\sqrt{2}$  时  $f(x)$  既有极大值  $f(x_2)$  又有极小值  $f(x_1)$ .

**[点评]** 应用导数研究问题常转化为“三个二次”的问题,所以要多练习并熟练掌握“三个二次”有关问题的解思路.



〔聚焦〕 (文) 已知函数  $f(x) = x^3 - x + a, x \in \mathbf{R}$ .

(1) 求函数  $f(x)$  在区间  $[-1, 1]$  上的最大值与最小值;

(2) 求证: 对于区间  $[-1, 1]$  上任意两个自变量的值  $x_1, x_2$ , 都有  $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$ ;

(3) 若曲线  $y = f(x)$  上两点  $A, B$  处的切线都与  $y$  轴垂直, 且线段  $AB$  与  $x$  轴有公共点, 求  $a$  的取值范围.

〔解析〕 (1)  $f'(x) = 3x^2 - 1$ , 令  $f'(x) = 0$ , 即  $3x^2 - 1 = 0$ , 解得  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

当  $x$  变化时,  $f'(x), f(x)$  的变化情况如下表:

$x$	-1	$(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$	1
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$a$	↗	极大值	↘	极小值	↗	$a$

$\therefore f(x)$  的极大值是  $f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9} + a > a$ , 极小值是  $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} + a < a$ ,

$\therefore$  函数  $f(x)$  在区间  $[-1, 1]$  上的最大值是  $f(x)_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9} + a$ ,

最小值是  $f(x)_{\min} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} + a$ .

(2)  $\therefore$  对于区间  $[-1, 1]$  上任意两个自变量的值  $x_1, x_2$ , 都有

$|f(x_1) - f(x_2)| < |f(x)_{\max} - f(x)_{\min}|$ , 由(1)知函数  $f(x)$  在区间  $[-1, 1]$  上的最大值是

$f(x)_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9} + a$ , 最小值是  $f(x)_{\min} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} + a$ .

$\therefore |f(x_1) - f(x_2)| < \left| \left( \frac{2\sqrt{3}}{9} + a \right) - \left( -\frac{2\sqrt{3}}{9} + a \right) \right| = \frac{4\sqrt{3}}{9} < 1$ .

(3) 依题设条件知,  $A, B$  为函数  $y = f(x)$  的两个极值点,

由(1)知函数  $y = f(x)$  的极大值为  $\frac{2\sqrt{3}}{9} + a$ , 极小值为  $-\frac{2\sqrt{3}}{9} + a$ .

$\therefore$  线段  $AB$  与  $x$  轴有公共点,  $\therefore \left( \frac{2\sqrt{3}}{9} + a \right) \left( -\frac{2\sqrt{3}}{9} + a \right) \leq 0$ .

解得  $-\frac{2\sqrt{3}}{9} \leq a \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$ , 故所求  $a$  的范围是  $-\frac{2\sqrt{3}}{9} \leq a \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$ .

〔点评〕 第(2)问将问题转化为最值问题, 体现了转化的数学思想; 第(3)问结合图形解决问题, 体现了数形结合的数学思想.



## 短时高效 直击高考

## 30分钟限时训练

## 一、选择题

1. 若可导函数  $f(x)$  满足:  $xf'(x) > -f(x)$ , 则下列关系式一定正确的是 ( )

- A.  $2f(1) > f(2)$       B.  $2f(2) > f(1)$       C.  $f(1) > f(2)$       D.  $f(1) < f(2)$

2. (理) 若  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , 则  $2x$  与  $3\sin x$  的大小关系 ( )

- A.  $2x > 3\sin x$       B.  $2x < 3\sin x$       C.  $2x = 3\sin x$       D. 与  $x$  的取值有关

(文) 与直线  $4x - y + 3 = 0$  平行的抛物线  $y = 2x^2$  的切线方程是 ( )

- A.  $4x - y + 1 = 0$       B.  $4x - y - 1 = 0$       C.  $4x - y - 2 = 0$       D.  $4x - y + 2 = 0$

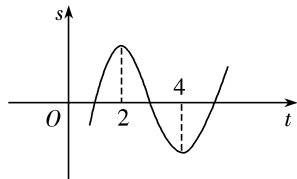
3. 若函数  $f(x) = k^2 x^4 - \frac{2}{3} x^3 - kx^2 + 2x + \frac{1}{2}$  在  $(1, 2)$  上递减, 在  $(2, +\infty)$  上递增, 则  $k$  的值为 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $-\frac{3}{8}$       C.  $\frac{1}{2}$  或  $-\frac{3}{8}$       D. 不存在

## 二、填空题

4. (理) 若函数  $f(x) = \ln(1 + e^x) + mx$  为偶函数, 则其增区间为 \_\_\_\_\_.

(文) 已知某质点的运动方程为  $s(t) = t^3 + bt^2 + ct + d$ , 如右图是方程曲线的一部分. 若  $t \in [1, 5]$  时,  $s(t) > d^2$  恒成立, 则  $d$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.



5. (理) 设函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  是一个偶函数, 且  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3$ , 则函数  $f(x)$  最大值为 \_\_\_\_\_.

(文) 设  $y = f(x)$  为三次函数, 且图象关于原点对称, 当  $x = \frac{1}{2}$  时,  $f(x)$  的极小值为  $-1$ , 则函数  $f(x)$  的解析式为 \_\_\_\_\_.

## 三、解答题

6. (理) 已知  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + mx + \frac{7}{2}$  ( $m < 0$ ), 直线  $l$  与函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  的图象的切点的横坐标为 1.

(1) 求直线  $l$  的方程及  $m$  的值;

(2) 若  $h(x) = f(x+1) - g'(x)$  (其中  $g'(x)$  是  $g(x)$  的导函数), 求函数  $h(x)$  的最大值.

(文) 已知函数  $g(x) = x^3 - 3tx^2 - 3t^2 + t$  ( $t > 0$ )

(1) 求函数  $g(x)$  的单调区间;

(2) 函数  $y = g(x)$  在点  $M(a, g(a))$  和  $N(b, g(b))$  ( $a < b$ ) 处的切线都与  $y$  轴垂直, 若方程  $g(x) = 0$  在区间  $[a, b]$  上有解, 求实数  $t$  的取值范围.



# 考前16天

## 高考论坛 导数的综合运用

导数由于其应用的广泛性,除了解决函数问题,更要注意其“交汇性”,它体现了高考的命题趋向,即在知识的交汇点命题.

### 1. 与函数的交汇

**[例 1]** 已知函数  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + cx$  有三个极值点.

(1) 证明:  $-27 < c < 5$ ;

(2) 若存在  $c$ , 使函数  $f(x)$  在区间  $[a, a+2]$  上单调递减, 求  $a$  的取值范围.

**[证明]** (1) 因为函数  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + cx$  有三个极值点, 所以  $f'(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c = 0$  有三个互异的实根.

设  $g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$ , 则  $g'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$ .

当  $x < -3$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  在  $(-\infty, -3)$  上为增函数;

当  $-3 < x < 1$  时,  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  在  $(-3, 1)$  上为减函数;

当  $x > 1$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  在  $(1, +\infty)$  上为增函数.

所以函数  $g(x)$  在  $x = -3$  时取极大值, 在  $x = 1$  时取极小值.

当  $g(-3) \leq 0$  或  $g(1) \geq 0$  时,  $g(x) = 0$  最多只有两个不同实根.

因为  $g(x) = 0$  有三个不同实根, 所以  $g(-3) > 0$ , 且  $g(1) < 0$ , 即  $-27 + 27 + 27 + c > 0$ , 且  $1 + 3 - 9 + c < 0$ , 解得  $c > -27$ , 且  $c < 5$ . 故  $-27 < c < 5$ .

**[解]** (2) 由(1)的证明可知, 当  $-27 < c < 5$  时,  $f(x)$  有三个极值点, 不妨设为  $x_1, x_2, x_3$  ( $x_1 < x_2 < x_3$ ), 则  $f'(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ .

所以  $f(x)$  的单调递减区间是  $(-\infty, x_1), [x_2, x_3]$ .

若  $f(x)$  在区间  $[a, a+2]$  上单调递减, 则  $[a, a+2] \subset (-\infty, x_1)$  或  $[a, a+2] \subset [x_2, x_3]$ .

若  $[a, a+2] \subset (-\infty, x_1)$ , 则  $a+2 \leq x_1$ . 由(1)知,  $x_1 < -3$ , 于是  $a < -5$ .

若  $[a, a+2] \subset [x_2, x_3]$ , 则  $a \geq x_2$ , 且  $a+2 \leq x_3$ . 由(1)知,  $-3 < x_2 < 1$ .

又  $f'(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$ , 当  $c = -27$  时,  $f'(x) = (x-3)(x+3)^2$ ;

当  $c = 5$  时,  $f'(x) = (x+5)(x-1)^2$ .

因此, 当  $-27 < c < 5$  时,  $1 < x_3 < 3$ , 所以  $a > -3$ , 且  $a+2 < 3$ , 即  $-3 < a < 1$ ,

故  $a < -5$  或  $-3 < a < 1$ .

反之, 当  $a < -5$  或  $-3 < a < 1$  时, 总可找到  $c \in (-27, 5)$ , 使  $f(x)$  在区间  $[a, a+2]$  上单调递减. 综上所述,  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -5) \cup (-3, 1)$ .

**[命题立意]** 考查函数的单调性、极值、导数、不等式等基本知识, 运用导数研究函数性质的方法, 分类讨论和化归的数学思想方法, 还考查分析问题、解决问题的能力.

### 2. 与数列交汇

**[例 2]** 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$ .



(1) 设  $\{a_n\}$  是正数组成的数列, 前  $n$  项和为  $S_n$ , 其中  $a_1 = 3$ . 若点  $(a_n, a_{n+1}^2 - 2a_{n+1})$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 在函数  $y = f'(x)$  的图象上, 求证: 点  $(n, S_n)$  也在  $y = f'(x)$  的图象上;

(2) 求函数  $f(x)$  在区间  $(a-1, a)$  内的极值.

**[证明]** (1) 因为  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$ , 所以  $f'(x) = x^2 + 2x$ , 由点  $(a_n, a_{n+1}^2 - 2a_{n+1})$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 在函数  $y = f'(x)$  的图象上, 得  $a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$ , 即  $(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 2) = 0$ . 又  $a_n > 0$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 所以  $a_{n+1} - a_n = 2$ .

又因为  $a_1 = 3$ , 所以数列  $\{a_n\}$  是以 3 为首项, 以 2 为公差的等差数列, 所以  $S_n = 3n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 + 2n$ . 又因为  $f'(n) = n^2 + 2n$ , 所以  $S_n = f'(n)$ , 故点  $(n, S_n)$  也在函数  $y = f'(x)$  的图象上.

**[解]** (2)  $f'(x) = x^2 + 2x = x(x+2)$ , 由  $f'(x) = 0$ , 得  $x = 0$  或  $x = -2$ , 当  $x$  变化时,  $f'(x)$ 、 $f(x)$  的变化情况如下表:

$x$	$(-\infty, -2)$	$-2$	$(-2, 0)$	$0$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

注意到  $|(a-1) - a| = 1 < 2$ , 从而①当  $a-1 < -2 < a$ , 即  $-2 < a < -1$  时,  $f(x)$  的极大值为  $f(-2) = -\frac{2}{3}$ , 此时  $f(x)$  无极小值; ②当  $a-1 < 0 < a$ , 即  $0 < a < 1$  时,  $f(x)$  的极小值为  $f(0) = -2$ , 此时  $f(x)$  无极大值; ③当  $a \leq -2$  或  $-1 \leq a \leq 0$  或  $a \geq 1$  时,  $f(x)$  既无极大值又无极小值.

**[命题立意]** 本题主要考查函数极值、等差数列等基本知识, 考查分类与整合、转化与归纳等数学思想方法, 考查分析问题和解决问题的能力, 解答(2)的同时, 应注意到区间  $(a-1, a)$  的长度为 1.

### 3. (理)与三角的交汇

**[例 3]** 设函数  $f(x) = \cos(\sqrt{3}x + \varphi)$  ( $0 < \varphi < \pi$ ). 若  $f(x) + f'(x)$  是奇函数, 则  $\varphi =$  \_\_\_\_\_.

**[分析]** 本题是导数与三角的交汇, 首先要求出  $f'(x)$ , 再用三角知识解决.

**[解]**  $\because f'(x) = -\sin(\sqrt{3}x + \varphi)$   $(\sqrt{3}x + \varphi)' = \sqrt{3}$   $\therefore f'(x) = -\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x + \varphi)$ .

$\therefore f(x) + f'(x) = \cos(\sqrt{3}x + \varphi) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x + \varphi) = -2\sin(\sqrt{3}x + \varphi - \frac{\pi}{6})$ , 又  $f(x)$

$+ f'(x)$  是奇函数, 则有  $\varphi - \frac{\pi}{6} = k\pi$ , 即  $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{6}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , 又  $0 < \varphi < \pi$ , 故  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ .

**[点评]** 对于函数  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  的奇偶性, 这里用到如下结论:

(1) 当  $\varphi$  是终边在  $x$  轴上角时, 即  $\omega = k\pi$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ), 为奇函数(名不变).

(2) 当  $\varphi$  是终边在  $y$  轴上角时, 即  $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ), 为偶函数(名变余).

(3) 当  $\varphi$  是终边在四个象限内时, 即  $\varphi \neq \frac{k\pi}{2}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ), 为非奇非偶函数.

### 4. (理)与不等式的交汇

**[例 4]** 已知函数  $f(x) = \ln(1+x) - x$ .

(1) 求  $f(x)$  的单调区间.



(2) 记  $f(x)$  在区间  $[0, n]$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 上的最小值为  $b_n$ , 令  $a_n = \ln(1+n) - b_n$ .

① 如果对一切  $n$ , 不等式  $\sqrt{a_n} < \sqrt{a_{n+2}} - \frac{c}{\sqrt{a_{n+2}}}$  恒成立, 求实数  $c$  的取值范围;

② 求证:  $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1 a_3}{a_2 a_4} + \dots + \frac{a_1 a_3 \dots a_{2n-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2n}} < \sqrt{2a_n + 1} - 1$ .

【解】 (1) 因为  $f(x) = \ln(1+x) - x$ , 所以函数定义域为  $(-1, +\infty)$ , 且  $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ .

由  $f'(x) > 0$  得  $-1 < x < 0$ ,  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-1, 0)$ ;

由  $f'(x) < 0$  得  $x > 0$ ,  $f(x)$  的单调递减区间为  $(0, +\infty)$ .

(2) 因为  $f(x)$  在区间  $[0, n]$  上是减函数, 所以  $b_n = f(n) = \ln(1+n) - n$ , 则  $a_n = \ln(1+n) - b_n = \ln(1+n) - \ln(1+n) + n = n$ .

$$\begin{aligned} \text{① } \sqrt{a_{n+2}} (\sqrt{a_{n+2}} - \sqrt{a_n}) &= \sqrt{n+2} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+2} \cdot \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} > \\ \frac{2\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+2}} &= 1. \text{ 又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{n+2}}} = 1, \end{aligned}$$

因此  $c \leq 1$ , 即实数  $c$  的取值范围是  $(-\infty, 1]$ .

② 由①知  $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$ .

$$\begin{aligned} \text{因为 } \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right]^2 &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6^2} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \cdot \\ \frac{1}{2n+1} &< \frac{1}{2n+1}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1} \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} &< \sqrt{3} - \sqrt{1} + \sqrt{5} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2n+1} - \\ \sqrt{2n-1} &= \sqrt{2n+1} - 1, \end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1 a_3}{a_2 a_4} + \dots + \frac{a_1 a_3 \dots a_{2n-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2n}} < \sqrt{2a_n + 1} - 1 \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

【命题立意】 本题主要考查函数的单调性、最值、不等式、数列等基本知识, 考查运用导数研究函数性质的方法, 考查分析问题和解决问题的能力.

## 5. 与解析几何的交汇

【例 5】 若曲线  $y = x^4$  的一条切线  $l$  与直线  $x + 4y - 8 = 0$  垂直, 则  $l$  的方程为

( )

A.  $4x - y - 3 = 0$

B.  $x + 4y - 5 = 0$

C.  $4x - y + 3 = 0$

D.  $x + 4y + 3 = 0$

【分析】 本题是导数的应用(求切线方程)与解析几何的交汇, 主要是涉及两直线垂直的条件.

【解】 与直线  $x + 4y - 8 = 0$  垂直的直线  $l$  为  $4x - y + m = 0$ , 即  $y = x^4$  某一点的导数为 4, 而  $y' = 4x^3$ , 所以  $y = x^4$  在  $(1, 1)$  处导数为 4, 此点的切线为  $4x - y - 3 = 0$ , 故选 A.





# 考前14天

今天复习、巩固、强化—解析几何



温馨提示易错点 高考轻松把分捡

http://www.tzdl08.com

59

1. 任何直线都有倾斜角,倾斜角的范围是什么?在解决某些问题时,你考虑到有时斜率不存在了吗?

[典例] 直线  $l_1: ax+by+c=0$ , 直线  $l_2: mx+ny+d=0$ , 则  $\frac{am}{bn} = -1$  是  $l_1 \perp l_2$  的 ( )

A. 充要条件

B. 既不充分也不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 充分不必要条件

[分析] 由题意知,当  $l_1, l_2$  的斜率存在时,由  $\frac{am}{bn} = -1$  可得  $l_1 \perp l_2$ . 反过来,由  $l_1 \perp l_2$  不一定有  $\frac{am}{bn} = -1$ , 因为  $b, n$  有可能为 0, 故选 D.

[点拨] 只要涉及直线的位置关系时,首先要考虑斜率不存在的情况,这样才不至于出现失误.

[类比·鉴赏] 直线  $x+(a-2)y=0$  和  $(a-2)x+y-3=0$  能互相垂直吗?

2. 直线的斜率和倾斜角是本部分的重要概念,你掌握住了吗?

[典例] (2008·扬州调研)已知两点  $A(-1, -5), B(3, -2)$ , 直线  $l$  的倾斜角是直线  $AB$  倾斜角的一半,求  $l$  的斜率.

[解析] 设直线  $l$  的倾斜角为  $\alpha$ , 则直线  $AB$  的倾斜角是  $2\alpha$ ,

由题意可知:  $\tan 2\alpha = \frac{-2-(-5)}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$ ,  $\therefore \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{3}{4}$ ,

整理得:  $3\tan^2\alpha + 8\tan\alpha - 3 = 0$ , 解得:  $\tan\alpha = \frac{1}{3}$  或  $\tan\alpha = -3$ ,

$\therefore \tan 2\alpha = \frac{3}{4}$ ,  $\therefore 0^\circ < 2\alpha < 90^\circ$ ,  $\therefore 0^\circ < \alpha < 45^\circ$ ,  $\tan\alpha > 0$ , 故  $l$  的斜率为  $\frac{1}{3}$ .

[点拨] 已知倾斜角  $\alpha$  或  $\alpha$  的三角函数值,根据  $k = \tan\alpha$  来求斜率,此类问题常与三角函数知识联系在一起,要注意正确、灵活地运用三角函数公式.

[类比·鉴赏] 已知一条直线的方向向量为  $\mathbf{a} = (-\sin 75^\circ, \sin 15^\circ)$ , 求该直线的倾斜角.

3. 在解决解析几何问题时,你善于画图吗?你经常利用数形结合思想吗?

[典例] 若直线  $y=kx+1$  与圆  $x^2+y^2=1$  相交于  $P, Q$  两点,且  $\angle POQ = 120^\circ$  ( $O$  为原



点), 则  $k$  的值为

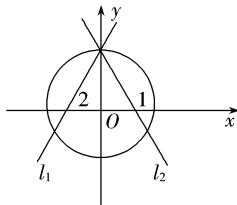
- A.  $-\sqrt{3}$  或  $\sqrt{3}$       B.  $\sqrt{3}$       C.  $-\sqrt{2}$  或  $\sqrt{2}$       D.  $\sqrt{2}$

**[解析]** 如图, 直线过定点  $(0, 1)$ ,  $l_1, l_2$  分别为直线  $y = kx + 1$  的两种情况.

$\because \angle OPQ = 30^\circ, \therefore \angle 1 = 120^\circ, \angle 2 = 60^\circ. \therefore k = \pm\sqrt{3}$ , 故选 A.

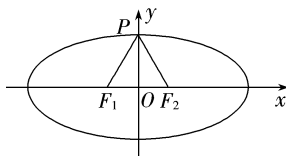
**[点拨]** 本题利用数形结合思想, 考查了过定点的直线系的问题. 根据圆的几何特征, 得到图中的三角形为等腰三角形. 同时也考查了知识间的横向联系.

**[类·比·鉴·赏]** 过  $P(-1, 2)$  的直线  $l$  与线段  $AB$  相交, 若  $A(-2, -3), B(3, 0)$  求直线  $l$  的斜率  $k$  的取值范围.



4. 椭圆、双曲线的标准方程各有两种形式, 抛物线的标准方程有四种形式, 对各种标准方程你运用自如吗?

**[典例]**  $F_1, F_2$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1$  的两个焦点,  $P$  为椭圆的一个顶点, 若  $\triangle PF_1F_2$  是等边三角形, 则  $a^2 =$  \_\_\_\_\_.



**[解析]** 当  $a^2 > 9$  时, 如图, 椭圆的焦点在  $x$  轴上. 由椭圆的几何性质可知  $|PF_2|^2 = a^2$ , 又因为  $\triangle PF_1F_2$  是等边三角形, 所以  $c = |OF_2| = \frac{a}{2}$ , 由  $a^2 - c^2 = b^2$ ,

$$\text{得 } a^2 - \frac{a^2}{4} = 9, \therefore a^2 = 12.$$

当  $0 < a^2 < 9$  时, 椭圆的焦点在  $y$  轴上. 如图,

$\therefore |PF_2|^2 = 9, |OP|^2 = a^2$ , 因为  $\triangle PF_1F_2$  是等边三角形,

$$\text{所以 } |OF_2| = \frac{|PF_2|}{2}, \therefore a^2 = 9 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}.$$

**[点拨]** 该题的关键在于认清楚椭圆的方程是哪一种形式的标准方程, 进一步搞清楚在标准方程中  $a, b, c$  三者之间的关系. 由此也可以看出, 要想对此类题目做得既熟练又准确, 就必须对圆锥曲线各种形式的标准方程运用自如.

**[类·比·鉴·赏]** 已知抛物线的方程为  $x^2 = ay$ , 则其焦点坐标为 ( )

- A.  $(0, \frac{a}{4})$  或  $(0, -\frac{a}{4})$       B.  $(0, -\frac{a}{4})$       C.  $(0, \frac{a}{4})$       D.  $(0, \frac{a}{2})$

5. 圆锥曲线的定义是高考的重点, 你对椭圆和抛物线的定义掌握熟练了吗? 会应用吗?

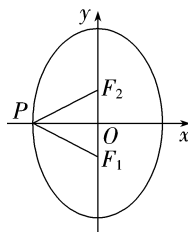
**[典例]** 已知椭圆方程  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ , 椭圆上一点  $M$  到该椭圆一个焦点  $F_1$  的距离为 2,  $N$  为  $MF_1$  的中点,  $O$  为椭圆的中心, 则  $ON$  的长度为 ( )

- A. 2      B. 4      C. 8      D.  $\frac{3}{2}$

**[解析]** 设另一焦点为  $F_2$ ,  $|MF_2| = 10 - |MF_1| = 8$ , 又  $\because ON$  是  $\triangle MF_1F_2$  的中位线,

$$\therefore |ON| = \frac{1}{2} |MF_2| = 4, \text{ 故选 B.}$$

**[点拨]** 考查对椭圆的定义及对称性的应用, 在涉及到椭圆的焦半径时要特别注意能否利用椭圆上任意一点  $M$  到两焦点  $F_1, F_2$  的距离之和是常数. 即  $|MF_1| + |MF_2| = 2a$ .





**[类比·鉴赏]** 已知  $A(-\frac{1}{2}, 0)$ ,  $B$  是圆  $F: (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = 4$  ( $F$  为圆心) 上一动点, 线段  $AB$  的垂直平分线交  $BF$  于  $P$ , 则动点  $P$  的轨迹方程为\_\_\_\_\_.

6. 在解决与圆有关的问题时, 你是否充分利用了圆的平面几何性质? 利用圆的平面几何性质可以大大地减少运算量.

**[典例]** 一个圆与  $y$  轴相切, 圆心在直线  $x - 3y = 0$  上, 且该圆在直线  $y = x$  上截得的弦长为  $2\sqrt{7}$ , 求此圆的方程.

**[解析]**  $\because$  所求圆的圆心在直线  $x - 3y = 0$  上, 且与  $y$  轴相切,

$\therefore$  可设所求圆的圆心为  $C(3a, a)$ , 半径为  $r = 3|a|$ , 又圆在直线  $y = x$  上截得的弦长为  $2\sqrt{7}$ , 而  $C(3a, a)$  到直线  $y = x$  的距离为  $d = \frac{|3a - a|}{\sqrt{2}}$ ,

$\therefore$  有  $d^2 + (\sqrt{7})^2 = r^2$ , 即  $2a^2 + 7 = 9a^2$ ,  $\therefore a = \pm 1$ .

所求圆的方程为  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$  或  $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$ .

**[点拨]** 在解答该题时, 充分利用了平面几何中圆的弦心距、半径和弦长之间的关系.

**[类比·鉴赏]** 圆心在抛物线  $y^2 = 2x$  上, 且与  $x$  轴和该抛物线的准线都相切的一个圆的方程是 ( )

A.  $x^2 + y^2 - x - 2y + \frac{1}{4} = 0$

B.  $x^2 + y^2 + x - 2y + 1 = 0$

C.  $x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0$

D.  $x^2 + y^2 - x - 2y - \frac{1}{4} = 0$



### 常考题型要练熟 临场不惧胸有竹

#### 1. 直线和圆的位置关系的有关问题

**[例 1]** 设直线  $ax - y + 3 = 0$  与圆  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$  相交于  $A, B$  两点, 且弦  $AB$  的长为  $2\sqrt{3}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

**[解析]** 圆心到直线的距离为  $d = \frac{|a - 2 + 3|}{\sqrt{a^2 + 1}}$ , 圆的半径为  $r = 2$ , 由  $r^2 = d^2 + (\frac{|AB|}{2})^2$  得  $4 = \frac{(a + 1)^2}{a^2 + 1} + 3$ , 解得  $a = 0$ .

**[点睛]** 本题主要使用了圆的平面几何性质. 在解决有关直线和圆的位置关系问题时, 很多情况下都要使用圆的这些性质.

#### 2. 求直线、圆的方程

求直线、圆及三种圆锥曲线的方程是高考出现频率非常高的题型, 主要考查有关曲线的定义、基本性质以及考生的基本运算能力.

**[例 2]** 已知两点  $A(0, 1), B(2, m)$ , 如果经过点  $A, B$  且与  $x$  轴相切的圆有且只有一个, 求  $m$  的值及圆的方程.

**[解析]** 因为所求的圆与  $x$  轴相切, 可设圆心的坐标为  $(x_0, y_0)$ , 半径为  $|y_0|$ .

又圆经过点  $A, B$ , 所以  $x_0^2 + (y_0 - 1)^2 = y_0^2$ , 即  $x_0^2 - 2y_0 + 1 = 0$ , ①

又  $(x_0 - 2)^2 + (y_0 - m)^2 = y_0^2$ , 即  $(x_0 - 2)^2 - 2my_0 + m^2 = 0$ . ②



由①②消去可得  $(1-m)x_0^2 - 4x_0 + m^2 - m + 4 = 0$ .

③

当  $m=1$  时, 方程③有唯一的解, 满足题意, 此时  $x_0=1, y_0=1$ .

圆的方程为  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ .

当  $m \neq 1$  时,  $\Delta = 16 - 4(1-m)(m^2 - m + 4) = m^3 - 2m^2 + 5m = 0$ ,

可得  $m=0$ , 此时  $x_0=2, y_0=\frac{5}{2}$ , 圆的方程为  $(x-2)^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = (\frac{5}{2})^2$ .

综上所述, 所求圆的方程为  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$  或  $(x-2)^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = (\frac{5}{2})^2$ .

**[点睛]** 本题除了考查圆的方程外, 对运算能力和式子变形能力要求较高.

### 3. 求三种圆锥曲线的方程

**[例 3]** 已知点  $P$  在以坐标轴为对称轴, 长轴在  $x$  轴上的椭圆上, 点  $P$  到两个焦点的距离分别是  $4\sqrt{3}$  和  $2\sqrt{3}$ , 且点  $P$  与两个焦点连线所张的角的平分线交  $x$  轴于点  $Q(1, 0)$  处, 求该椭圆的方程.

**[解析]** 依题意, 设所求的椭圆方程是  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 因为  $|PF_1| + |PF_2| = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} = 2a$ , 所以  $a = 3\sqrt{3}$ , 又由三角形的内角平分线的性质得,  $|PF_1| : |PF_2| = |F_1Q| : |QF_2| = 2 : 1$ , 即  $c+1 = 2(c-1)$ , 所以  $c=3$ , 从而  $b=3\sqrt{2}$ ,

所求椭圆方程是  $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1$ .

**[点睛]** 在求圆锥曲线的标准方程时, 常用定义法和待定系数法. 在求解的过程中应特别注意椭圆和双曲线方程中的三个元素  $a, b, c$  之间的关系, 在抛物线的方程中应特别注意  $p > 0$  及  $p$  的几何意义.

### 4. 两种圆锥曲线相结合的综合性问题

**[例 4]** 已知椭圆  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一条通径(过焦点且与对称轴垂直的弦)与抛物线  $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$  的通径重合, 则椭圆的离心率为 ( )

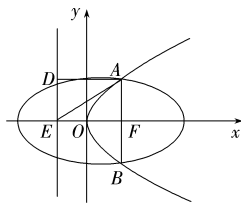
- A.  $\sqrt{2}-1$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       C.  $\sqrt{3}-1$       D.  $\frac{1}{2}$

**[解析]** 由抛物线的性质可知,  $|AF| = |AD| = p$ ,

$$\therefore |AE| = \sqrt{|EF|^2 + |AF|^2} = \sqrt{p^2 + p^2} = \sqrt{2}p,$$

所以椭圆的长半轴长为  $\frac{|AE| + |AF|}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}p$ .

又其半焦距为  $\frac{p}{2}$ , 所以椭圆的离心率为  $e = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$ . 故选 A.



**[点睛]** 在本题中, 点  $A$  是椭圆和抛物线的公共点, 则点  $A$  就具有两种圆锥曲线上点的性质, 即按抛物线的定义有  $|AF| = |AD|$ , 按椭圆的定义有  $|AE| + |AF| = 2a$ .

### 5. 直线与圆锥曲线的综合性问题

直线与圆锥曲线的综合性问题可以说是每年必考, 难度较高, 运算量大, 在某种程度上可以说是把关题. 但其解法并非无章可循, 做这种题型一定要有耐性, 有信心.

**[例 5]** 直线  $y=kx-2$  交抛物线  $y^2=8x$  于  $A, B$  两点, 若  $AB$  中点的横坐标为 2, 求  $|AB|$ .

**[解析]** 联立直线  $y=kx-2$  和抛物线方程  $y^2=8x$ , 得:  $k^2x^2 - (4k+8)x + 4 = 0$  (\*)



设  $A(x_1, y_2), B(x_2, y_2)$ ,  $\therefore AB$  的中点的横坐标为 2,  $\therefore x_1 + x_2 = \frac{4k+8}{k^2} = 4$ ,

解得:  $k=2$  或  $k=-1$ .

经检验,  $k=-1$  时,  $\Delta=0$ , 不符合题意, 舍去,

$\therefore k=2$ , 直线方程为  $y=2x-2$ . 此时, 方程(\*)为  $4x^2-16x+4=0$  即  $x^2-4x+1=0$ ,

由弦长公式可得  $|AB| = \sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2} = \sqrt{5[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$ , 代入  $x_1+x_2=4, x_1x_2=1$ , 可得  $|AB|=2\sqrt{15}$ .

[点睛] (1) 此题中条件没有交代直线过焦点, 如果使用焦点弦的公式  $|AB|=x_1+x_2+p$  来求弦长, 就会得到错误的结果. (2) 凡是利用韦达定理求解得出的值, 必须代入判别式, 检验是否满足  $\Delta>0$ .

#### 6. 圆锥曲线的简单几何性质是高考客观题中经常考察的知识点

[例 6] 已知  $F_1, F_2$  是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$  的两焦点, 以线段  $F_1F_2$  为边作正三角形  $MF_1F_2$ , 若边  $MF_1$  的中点在双曲线上, 则双曲线的离心率是 ( )

- A.  $4+2\sqrt{3}$       B.  $\sqrt{3}-1$       C.  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$       D.  $\sqrt{3}+1$

[解析]  $\because \triangle MF_1F_2$  是正三角形, 且边  $MF_1$  的中点在双曲线上, 设边  $MF_1$  的中点为  $P$ , 有  $\angle F_1PF_2=90^\circ, \angle PF_1F_2=60^\circ$ , 从而  $|PF_2|=\sqrt{3}c, |PF_1|=c$ .  $\therefore$  根据双曲线的定义可知  $2a=|PF_2|-|PF_1|=(\sqrt{3}-1)c$ , 解得  $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$ , 故选 D.

[点睛] 当已知圆锥曲线的种类及其与两焦点的关系时, 可直接利用定义求解, 以达到简缩思路、简化运算的目的.



#### 考前猜题与押宝 热点问题再聚焦

圆锥曲线高考必考, 既有客观题又有主观题, 是重中之重. 解答题最大可能出的是直线、圆与椭圆、抛物线组合而成的综合性问题, 是考试中不易突破的一关. 但考查的实质, 不过是两个方面, 一是二次曲线的性质, 二是方程等各种式子的变形与计算, 并且还可以借助图形来帮助分析问题. 所以, 只要我们增强信心, 选好方法, 认真运算, 闯关不难.

[聚焦] 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>b>0)$  过点  $M(\sqrt{2}, 1)$ , 且左焦点为  $F_1(-\sqrt{2}, 0)$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 当过点  $P(4, 1)$  的动直线  $l$  与椭圆  $C$  相交于两不同点  $A, B$  时, 在线段  $AB$  上取点  $Q$ , 满足  $|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{AQ}| \cdot |\overrightarrow{PB}|$ . 证明: 点  $Q$  总在某定直线上.

[解] (1) 由题意得  $\begin{cases} c^2=2 \\ \frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \text{解得 } a^2=4, b^2=2. \text{ 所以所求椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1. \\ c^2=a^2-b^2 \end{cases}$

(2) 设点  $Q, A, B$  的坐标分别为  $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , 由题设知  $|\overrightarrow{AP}|, |\overrightarrow{PB}|, |\overrightarrow{AQ}|$ ,



$|\overrightarrow{QB}|$  均不为零, 记  $\lambda = \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$ , 则  $\lambda > 0$ , 且  $\lambda \neq 1$ .

又  $A, P, B, Q$  四点共线, 从而  $\overrightarrow{AP} = -\lambda \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{QB}$ .

于是  $4 = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, 1 = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ , 从而  $\frac{x_1^2 - \lambda x_2^2}{1 - \lambda^2} = 4x$ , ①

$\frac{y_1^2 - \lambda^2 y_2^2}{1 - \lambda^2} = y$ . ② 又点  $A, B$  在椭圆  $C$  上, 即  $x_1^2 + 2y_1^2 = 4$ , ③  $x_2^2 + 2y_2^2 = 4$ , ④

① + 2 × ② 并结合 ③ ④, 得  $4x + 2y = 4$ . 即点  $Q(x, y)$  总在定直线  $2x + y - 2 = 0$  上.

[点评] 本题主要考查直线、椭圆的方程及几何性质、线段的定比分点公式等基础知识、基本方法和分析问题、解决问题的能力.

### 短时高效 直击高考

### 30分钟限时训练

#### 一、选择题

1. 过点  $M(3, 0)$  的直线交圆  $x^2 + y^2 - 4x = 0$  于  $A, B$  两点,  $C$  为圆心, 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  的最小值等于 ( )

- A. 2                      B. 4                      C. 6                      D. 8

2. 已知  $\theta$  是三角形的一个内角, 且  $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ , 则方程  $x^2 \sin\theta - y^2 \cos\theta = 1$  表示 ( )

- A. 焦点在  $x$  轴上的椭圆                      B. 焦点在  $y$  轴上的椭圆  
C. 焦点在  $x$  轴上的双曲线                      D. 焦点在  $y$  轴上的双曲线

3. 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的半焦距为  $c$ , 若直线  $y = 2x$  与椭圆的一个交点的横坐标恰为  $c$ , 则椭圆的离心率为 ( )

- A.  $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$                       B.  $\frac{2\sqrt{2} - 1}{2}$                       C.  $\sqrt{2} - 1$                       D.  $\sqrt{3} - 1$

#### 二、填空题

4. 椭圆  $\frac{x^2}{1} + \frac{ky^2}{5} = 1$  的一个焦点为  $(0, 2)$ , 则  $k$  的值为\_\_\_\_\_.

5.  $M$  是椭圆  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$  上一点,  $F_1, F_2$  为焦点, 且  $\angle F_1 M F_2 = 60^\circ$ , 则  $\triangle F_1 M F_2$  的面积为\_\_\_\_\_.

#### 三、解答题

6. 已知抛物线  $y = x^2$  和三个点  $M(x_0, y_0), P(0, y_0), N(-x_0, y_0) (y_0 \neq x_0^2, y_0 > 0)$ , 过点  $M$  的一条直线交抛物线于  $A, B$  两点,  $AP, BP$  的延长线分别交抛物线于点  $E, F$ .

(1) 证明  $E, F, N$  三点共线;

(2) 如果  $A, B, M, N$  四点共线, 问: 是否存在  $y_0$ , 使以线段  $AB$  为直径的圆与抛物线有异于  $A, B$  的交点? 如果存在, 求出  $y_0$  的取值范围, 并求出该交点到直线  $AB$  的距离; 若不存在, 请说明理由.



# 考前13天

## 高考论坛 优化解析几何运算的五大策略

运算量大是解析几何问题的难点,所以掌握运算方法,优化运算过程,提高运算速度,是解决解析几何问题的关键.

### 策略1 回归定义

**[例1]** 在椭圆  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  上求一点  $P$ , 使点  $P$  到右焦点的距离等于它到左焦点距离的4倍.

**[分析]** 设  $P(x_1, y_1)$ , 根据题设条件, 点  $P$  满足方程组

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{25} + \frac{y_1^2}{9} = 1, \\ \sqrt{(x_1-4)^2 + y_1^2} = 4\sqrt{(x_1+4)^2 + y_1^2}. \end{cases}$$

这是一个复杂的运算, 如何简化呢? 根据椭圆的第二定义, 可以得到焦半径公式, 这样求解起来就简单很多.

**[解]** 由椭圆方程知  $F_1(-4, 0)$ ,  $F_2(4, 0)$ ,  $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ . 设所求点  $P(x_1, y_1)$ , 依题意

点  $P$  在  $y$  轴的左侧, 则  $x_1 < 0$ , 焦半径  $|PF_1| = a + ex_1 = 5 + \frac{4}{5}x_1$ ,

$$|PF_2| = a - ex_1 = 5 - \frac{4}{5}x_1.$$

$$\text{由题意有 } 4\left(5 + \frac{4}{5}x_1\right) = 5 - \frac{4}{5}x_1,$$

$$\therefore x_1 = -\frac{15}{4}, \text{ 从而 } y_1 = \pm \frac{3\sqrt{7}}{4}.$$

故所求点  $P$  的坐标为  $\left(-\frac{15}{4}, -\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)$  或  $\left(-\frac{15}{4}, \frac{3\sqrt{7}}{4}\right)$ .

**[点评]** 凡涉及焦点坐标、离心率、准线、焦准距、焦半径等问题, 往往与定义有关, 求解时采用回归定义策略是优化解题运算的重要途径.

### 策略2 借助平面几何知识

**[例2]** 小河(直线型)一侧有两个村庄  $A$ 、 $B$ , 两村计划在河上共建一水电站发电供两村使用, 已知  $A$ 、 $B$  两村到河边垂直距离分别为 300 m 和 700 m, 且两村相距 500 m, 问水电站建于何处, 送电到两村电线用料最省?

**[解析]** 以小河  $l$  所在直线为  $x$  轴, 过  $A$  点与  $l$  垂直的直线为  $y$  轴建立平面直角坐标系,



如图,作  $A$  关于  $x$  轴的对称点  $A'$ ,  $AA'$  交  $x$  轴于  $O$ , 连  $A'B$  交  $x$  轴于  $P$  点, 则由平面几何知识知  $P$  即为所求.

令  $A(0, 300)$ ,  $A'(0, -300)$ , 过  $B$  作  $BC \perp x$  轴于点  $C$ ,

过  $A$  作  $AH \perp BC$  于  $H$ .

$\because |AO| = 300, |BC| = 700, \therefore |BH| = 400,$

又  $|AB| = 500, \therefore |AH| = 300, \therefore B(300, 700),$

$\therefore$  直线  $A'B$  的方程为  $\frac{y-700}{-300-700} = \frac{x-300}{0-300}$ , 即  $y = \frac{10}{3}x - 300.$

$P$  点坐标即为直线  $A'B$  与  $x$  轴交点的坐标  $(90, 0)$ , 即  $|OP| = 90(\text{m}).$

故水电站应建在河边距  $A$  到小河最近点的  $90 \text{ m}$  ( $OC$  之间的  $P$  点) 处用料最省.

**[点拨]** 这是一个实际应用题, 我们根据题意画出草图, 设直线  $l$  代表小河, 则本题的题意即在  $l$  上找一点  $P$ , 使得  $|PA| + |PB|$  最小, 根据平面几何知识, 容易想到找点  $A$  关于  $l$  的对称点  $A'$ , 连  $A'B$  交  $l$  于  $P$ , 则  $P$  即为所求.

**[点评]** 恰当地利用平面几何知识对解题能起到事半功倍的效果.

### 策略3 设而不求

解析几何中有些问题, 若把所涉及的数量全部计算出来再加以解决, 有时反而显得多余而低效. 设而不求, 尽显方法之绝妙, 是优化运算、提高解题效率的重要策略.

**[例3]** 已知直线  $l$  交双曲线  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$  的右支于  $M, N$  两点, 定点  $B(0, 4)$ . 若  $\triangle BMN$  的重心为双曲线的右焦点, 求直线  $l$  的方程.

**[解]** 双曲线的右焦点  $F(3, 0)$ , 设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 则由  $F$  为  $\triangle BMN$  的重心得  $\frac{x_1 + x_2}{3} = 3, \frac{y_1 + y_2 + 4}{3} = 0$ . 于是  $x_1 + x_2 = 9, y_1 + y_2 = -4$ .

$\therefore$  线段  $MN$  中点  $P$  的坐标为  $\left(\frac{9}{2}, -2\right)$ .

又  $M, N$  在双曲线上,

$$\therefore \frac{x_1^2}{5} - \frac{y_1^2}{4} = 1, \quad \frac{x_2^2}{5} - \frac{y_2^2}{4} = 1, \quad (2)$$

$$(1) - (2) \text{ 得 } k_{MN} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4(x_1 + x_2)}{5(y_1 + y_2)} = \frac{4 \times 9}{5 \times (-4)} = -\frac{9}{5}.$$

故直线  $l$  的方程为  $y + 2 = -\frac{9}{5}\left(x - \frac{9}{2}\right)$ ,

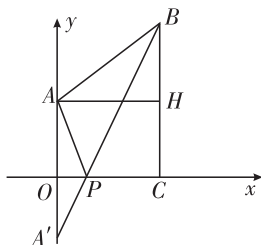
即  $18x + 10y - 61 = 0$ .

**[点评]** 上述解法中涉及  $M, N$  两个点坐标的 4 个参数, 但本题目标是求直线  $l$  的方程, 故只需求出  $MN$  中点  $P$  的坐标和  $l$  的斜率. 故设而不求, 在解题中只让这些参数体现其桥梁和纽带作用.

### 策略4 合理引参

**[例4]** 已知椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ,  $A, B$  是椭圆上的两点, 线段  $AB$  的垂直平分线与  $x$  轴相交于  $P(x_0, 0)$ . 试求  $x_0$  的取值范围.

**[分析]** 若用常规方法求解, 涉及  $A, B$  两点和线段  $AB$  的中点  $M$  的坐标共 6 个参







变量,头绪繁多,需不断进行思维转换.如引入参数,则不但可以减少变量个数,同时也能优化问题的结构关系,从而便于化简运算.

**[解]** 设  $A(3\cos\theta_1, 2\sin\theta_1), B(3\cos\theta_2, 2\sin\theta_2)$ , 由  $|PA|^2 = |PB|^2$  可得

$$(x_0 - 3\cos\theta_1)^2 + (2\sin\theta_1)^2 = (x_0 - 3\cos\theta_2)^2 + (2\sin\theta_2)^2,$$

$$\text{即 } 5(\cos^2\theta_1 - \cos^2\theta_2) = 6x_0(\cos\theta_1 - \cos\theta_2).$$

$\because AB$  的垂直平分线与  $x$  轴相交,故  $AB$  与  $y$  轴不平行,即  $\cos\theta_1 \neq \cos\theta_2$ ,

所以有  $\cos\theta_1 + \cos\theta_2 \in (-2, 2)$ .

$$\text{从而, } x_0 = \frac{5}{6}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \in \left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

**[点评]** 凡涉及曲线上点的坐标问题,采用合理引参,这是解析几何中求取值范围或最值时的重要策略,其优点是能使解题思路清晰,加之三角知识的合理运用,使运算简捷流畅,对问题的顺利解决起到出奇制胜的效果.

### 策略五 整体代换

**[例 5]** 已知圆  $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ , 是否存在斜率为 1 的直线  $l$ , 使以  $l$  被圆  $C$  截得的弦  $AB$  为直径的圆过原点? 若存在, 求出直线  $l$  的方程; 若不存在, 说明理由.

**[分析]** 常规解法是设所求直线  $l$  存在, 方程为  $y = x + b$ , 将其与圆的方程联立, 用  $l$  的斜率  $k$  表示出  $x_1x_2$  和  $y_1y_2$ , 然后代入  $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ , 求得  $k$  值, 再检验所求得的  $k$  是否适合题意, 从而确定  $l$  存在与否? 相对而言, 运算量较大. 如果设出以  $AB$  为直径的圆的方程, 结合已知圆的方程, 用整体代换表示出它们相交弦所在直线  $l$  的方程, 再根据条件求出相关的参数, 则运算过程必然简捷得多.

**[解]** 由题意, 可设以弦  $AB$  为直径经过原点的圆方程为

$$C': x^2 + y^2 + Dx + Ey = 0, \quad ①$$

$$\because \text{圆 } C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0, \quad ②$$

$$① - ② \text{ 得: } (D+2)x + (E-4)y + 4 = 0,$$

此即直线  $l$  的方程.

$$\text{由 } l \text{ 的斜率为 } 1 \text{ 可知 } D+2 = -(E-4), \quad ③$$

$$\text{又圆心 } C' \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) \text{ 在直线 } l \text{ 上,}$$

$$\text{故 } (D+2) \left(-\frac{D}{2}\right) + (E-4) \left(-\frac{E}{2}\right) + 4 = 0. \quad ④$$

$$\text{由 } ③④ \text{ 解得 } \begin{cases} D=2, \\ E=0, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} D=-3, \\ E=5. \end{cases}$$

故存在满足题意的直线  $l$ , 其方程为  $x - y + 1 = 0$  或  $x - y - 4 = 0$ .

**[点评]** 本题从两个圆的方程作差得  $l$  的方程框架, 是解题的关键. 在解析几何中, 当涉及直线系、曲线系等问题时经常采用整体代换方法来寻求解题途径, 这也是优化解析几何运算的有效策略.

在解析几何中, 审清题意, 明确目标是解题的基础, 而选择合理的运算方法, 掌握恰当的运算策略, 对问题的顺利获解至关重要.



# 考前12天

今天复习、巩固、强化一立体几何



温馨提示易错点 高考轻松把分捡

## 一、空间直观图中各线段的长度变化理解不到位

**[典例]** 如果一个水平放置的图形的斜二测直观图是一个底角为  $45^\circ$ , 腰和一底均为 1 的等腰梯形, 那么原平面图形的面积是\_\_\_\_\_.

**[分析]** 把直观图还原为平面图形, 再求面积.

**[解析]** 由直观图可知, 原图形是一个直角梯形, 高为 2, 上底长为 1, 下底长为  $\sqrt{2} + 1$ ,

68 因此其面积为  $2 + \sqrt{2}$ .

**[点评]** 注意高和下底边长的计算, 这是易错点.

**[类比·鉴赏]** 有一个长为 5 cm, 宽为 4 cm 的矩形, 则其斜二测直观图的面积为\_\_\_\_\_.

## 二、不会画与球有关的组合体的截面图

**[典例]** 有一棱长为  $a$  的正方体骨架, 其内放置一气球, 使其充气且尽可能地大 (仍保持为球的形状), 则气球表面积的最大值为\_\_\_\_\_.

**[分析]** 球最大时与正方体的各棱相切, 直径应为  $\sqrt{2}a$ .

**[解析]** 由于球的直径  $2R = \sqrt{2}a$ ,  $\therefore S_{球} = 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 = 2\pi a^2$ .

**[点评]** 本题易认为球最大时为正方体的内切球, 所以球的直径为  $a$ , 球的表面积为  $\pi a^2$ . 这里学生未能弄清正方体骨架是一个空架子.

**[类比·鉴赏]** 若点  $A, B, C$  是半径为 2 的球面上的三点, 且  $AB = 2$ , 则球心到平面  $ABC$  的距离的最大值为\_\_\_\_\_.

## 三、异面直线成的角的范围是 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 在利用“平移法”进行求解时, 要注意角的准确选择

**[典例]** 如图所示, 在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = BC = CC_1 = 1$ ,  $M$  为  $AB$  的中点,  $A_1D = 3DB_1$ . 求  $MD$  与  $B_1C_1$  所成角的余弦值.

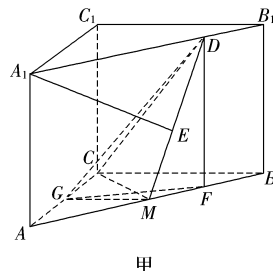
**[分析]** 利用“平移法”找出两异面直线所成角.

**[解析]** 取  $AC$  中点  $G$ , 连结  $GM, GD$ .

$$\because GM \parallel \frac{1}{2}BC \parallel \frac{1}{2}B_1C_1, \therefore GM = \frac{1}{2}.$$

$\therefore \angle GMD$  或其补角即为异面直线  $MD$  与  $B_1C_1$  所成的角.

取  $MB$  中的点  $F$  连结  $GF, DF$ , 则  $DF \parallel BB_1$ ,





$\therefore DF \perp \text{面 } ABC, \therefore DF \perp GF$ , 在  $\triangle GAF$  中,

$$GF^2 = AG^2 + AF^2 - 2 \cdot |AG| \cdot |AF| \cdot \cos \angle GAF \\ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{5}{8},$$

$$\therefore DG^2 = GF^2 + FD^2 = \frac{13}{8},$$

$$\therefore \cos \angle GMD = \frac{GM^2 + DM^2 - DG^2}{2 \cdot GM \cdot DM} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{18}{16} - \frac{13}{8}}{2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$\therefore$  异面直线  $MD$  与  $B_1C_1$  所成的角的余弦值为  $\frac{\sqrt{2}}{6}$ .

[点评] 本题易忽视异面直线成的角的范围是  $(0, \frac{\pi}{2}]$ , 得到余弦值为  $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

四、求解折叠问题时, 应注意折叠前后在同一面内点、线的位置不变

[典例] 如图, 在正三角形  $ABC$  中,  $D, E, F$  分别为各边的中点,  $G, H, I, J$  分别为  $AF, AD, BE, DE$  的中点, 将  $\triangle ABC$  沿  $DE, EF, DF$  折成三棱锥后,  $GH$  与  $IJ$  所成角的度数为 ( )

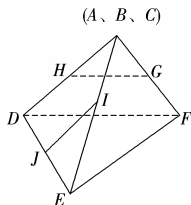
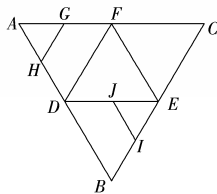
A.  $90^\circ$       B.  $60^\circ$       C.  $45^\circ$       D.  $0^\circ$

[分析] 画出折叠后的图形, 可看出  $GH, IJ$  是一对异面直线, 即求异面直线所成角.

[解析] 过点  $D$  分别作  $IJ$  和  $GH$  的平行线, 即  $AD$  与  $DF$ , 所以  $\angle ADF$  即为所求.

因此  $GH$  与  $IJ$  所成角为  $60^\circ$ , 故选 B.

[点评] 本题易因不知折叠后  $IJ$  与  $BD, HG$  与  $DF$  仍然平行而出现错误的答案.



常考题型要练熟 临场不惧胸有竹

一、空间几何体的结构及体积和表面积的计算

[例1] 如图所示, 在多面体  $ABCDEF$  中, 已知  $ABCD$  是边长为 1 的正方形, 且  $\triangle ADE, \triangle BCF$  均为正三角形,  $EF \parallel AB, EF=2$ , 则该多面体的体积为 ( )

A.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       C.  $\frac{3}{4}$       D.  $\frac{3}{2}$

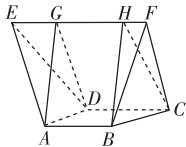
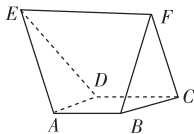
[解析] 使用分割的方法, 将几何体转化为规则几何体.

如图所示, 分别过  $A, B$  作  $EF$  的垂线, 垂足分别为  $G, H$ , 连结  $DG, CH$ , 容易求得  $EG=HF=\frac{1}{2}$ . 而  $AG=GD=BH=HC=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$$S_{\triangle AGD} = S_{\triangle BHC} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{4}, V = V_{E-ADG} + V_{F-BHC} + V_{AGD-BHC}$$

$$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \times 2 + \frac{\sqrt{2}}{4} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{3}, \text{ 故选 A.}$$

[点睛] 本题考查三棱柱的体积公式及学生的画图、识图能力.





## 二、线面、面面的平行与垂直

[例 2] 在正四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$ ,  $M$  是  $BC$  的中点,  $G$  是三角形  $PAD$  的重心, 则在平面  $PAD$  中经过  $G$  点且与直线  $PM$  垂直的直线有 \_\_\_\_\_ 条.

[分析] 可以通过研究直线  $PM$  与平面  $PAD$  的位置来研究直线  $PM$  与平面  $PAD$  内的直线的位置关系.

[解析] 如图所示, 若设正四棱锥的底面边为  $a$ , 则侧棱为  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ , 由于  $PM \perp BC$ , 所以  $PM = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ , 连接  $PG$  并延长与  $AD$  相交于  $N$  点, 则  $PN = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ , 又  $MN = AB = a$ , 所以  $PM^2 + PN^2 = MN^2$ , 于是  $PM \perp PN$ , 又  $PM \perp AD$ , 所以  $PM \perp$  平面  $PAD$ , 因此在平面  $PAD$  中经过  $G$  点的任意一条直线都与  $PM$  垂直. 即在平面  $PAD$  中经过  $G$  点且与直线  $PM$  垂直的直线有无数条.

[点睛] 在研究一条直线与某个平面内的直线的位置关系时, 可以先研究直线与该平面的位置关系, 如果能够推得直线与该平面垂直, 那么它就垂直于该平面内的所有直线.

## 三、立体几何中的定值与最值

[例 3] 直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = AC = 1$ ,  $M, N$  分别是棱  $A_1B, B_1C_1$  上的点, 且  $BM = 2A_1M, C_1N = 2B_1N, MN \perp A_1B$ .

(1) 求直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中的高  $a$  及  $MN$  的长;

(2) 动点  $P$  在  $B_1C_1$  上移动, 问  $P$  在何位置时,  $\triangle PA_1B$  的面积才能取得最小值.

[分析] 解决本题的关键是把立体问题转化为平面问题, 用三角形的有关知识来解决.

[解析] (1) 在  $\triangle A_1C_1N$  中,  $A_1C_1 = 1, C_1N = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ , 由余弦定理知

$$A_1N^2 = A_1C_1^2 + C_1N^2 - 2A_1C_1 \cdot C_1N \cos \angle A_1C_1N = 1 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \cos 45^\circ = \frac{5}{9},$$

在  $\text{Rt}\triangle BB_1N$  和  $\text{Rt}\triangle AA_1B$  中,

$$BN^2 = BB_1^2 + B_1N^2 = a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = a^2 + \frac{2}{9}, A_1B^2 = AA_1^2 + AB^2 = 1 + a^2.$$

在  $\text{Rt}\triangle A_1MN$  和  $\text{Rt}\triangle BMN$  中,  $MN^2 = A_1N^2 - A_1M^2 = BN^2 - BM^2$ ,

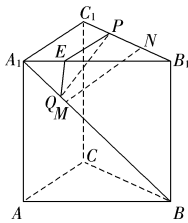
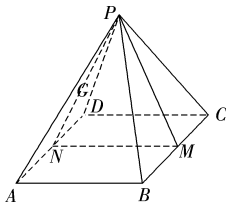
$$\text{即 } MN^2 = \frac{5}{9} - \frac{1}{9} \cdot (1 + a^2) = a^2 + \frac{2}{9} - \frac{4}{9} \cdot (1 + a^2), \text{ 故有 } a = 1, MN = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

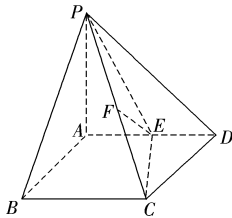
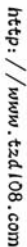
(2) 法一: 利用构造代数函数的办法来解答.

过  $P$  作  $PE \perp A_1B_1$  交  $A_1B_1$  于  $E$ , 过  $E$  作  $QE \perp A_1B$  交  $A_1B$  于  $Q$ , 则  $PE \perp$  面  $A_1B_1B$ , 所以  $PE \perp BA_1$ , 于是有  $BA_1 \perp$  面  $PQE$ . 所以  $PQ \perp AB$

$$\text{设 } PE = x, \text{ 则 } EA_1 = 1 - x, QE = \frac{\sqrt{2}}{2}EA_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - x).$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle PQE \text{ 中, } PQ^2 = EP^2 + EQ^2 = x^2 + \frac{1}{2}(1 - x)^2 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}.$$







$\therefore AM \perp PB$ , 即  $\angle AMB = 90^\circ$ ,

所以异面直线  $EF$  和  $PB$  所成的角的大小为  $90^\circ$ .

(2) 由(1)可知,  $EF \perp PB$ ,  $\because PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $\therefore PA \perp BC$ ,

又  $\because$  底面  $ABCD$  为正方形,  $\therefore AB \perp BC$ ,  $\therefore BC \perp$  平面  $PAB$ .

$\therefore BC \perp AM$ ,  $\because AM \parallel EF$ ,  $\therefore BC \perp EF$ ,

$\therefore EF \perp$  平面  $PBC$ , 又  $\because EF \subset$  平面  $PCE$ ,

$\therefore$  平面  $PCE \perp$  平面  $PBC$ .

(3)  $\because PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $\therefore PA \perp CD$ ,

又  $\because$  底面  $ABCD$  为正方形,  $\therefore AD \perp CD$ ,  $\therefore CD \perp$  平面  $PAD$ .  $\therefore$

平面  $PCD \perp$  平面  $PAD$

过点  $E$  作  $EN \perp PD$ , 连接  $NF$ , 则  $EN \perp$  平面  $PCD$ ,  $\because EF \perp$  平面  $PBC$ ,  $\therefore EF \perp PC$ ,  $\therefore NF \perp PC$  (三垂线定理),  $\therefore \angle NFE$  即是二面角  $E-PC-D$  的平面角,

$$\text{在 } Rt\triangle NFE \text{ 中, } EF = AM = \sqrt{2}, NE = \frac{\sqrt{2}}{2} ED = \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore \tan \angle NFE = \frac{NE}{EF} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \angle NFE = 30^\circ$  即二面角  $E-PC-D$  的大小为  $30^\circ$ .

**[解析]** 向量法: 以直线  $AB$  为  $x$  轴, 直线  $AD$  为  $y$  轴, 直线  $AP$  为  $z$  轴建立空间直角坐标系, 如图, 则  $A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0), D(0,2,0), P(0,0,2)$ ,

(1)  $\because E$  为  $AD$  中点,  $\therefore E(0,1,0)$ .

又  $F$  为  $PC$  中点,  $\therefore F(1,1,1)$ ,

$\therefore \overrightarrow{EF} = (1,0,1)$ , 又  $\overrightarrow{PB} = (2,0,-2)$ ,

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{PB} \rangle = \frac{1 \times 2 + 1 \times (-2)}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{4+4}} = 0,$$

$\therefore \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{PB} \rangle = 90^\circ$ ,

$\therefore$  异面直线  $EF$  和  $PB$  所成角的大小为  $90^\circ$ .

(2) 由(1)知  $EF \perp PB$ ,

又  $\because \overrightarrow{BC} = (0,2,0), \overrightarrow{EF} = (1,0,1)$ ,

$\therefore \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \therefore EF \perp BC$ .  $\therefore EF \perp$  平面  $PBC$ .

又  $EF \subset$  平面  $PCE$   $\therefore$  平面  $PCE \perp$  平面  $PBC$ .

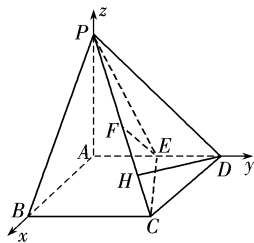
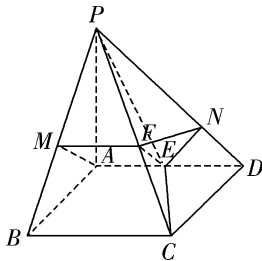
(3) 法一: 过点  $D$  作  $DH \perp PC$  于  $H$ , 在  $Rt\triangle PDC$  中,  $PD = 2\sqrt{2}, DC = 2, PC = 2\sqrt{3}$ , 则  $CH = \frac{2\sqrt{3}}{3}, PH : HC = 2 : 1$ , 又  $P(0,0,2), C(2,2,0)$ ,

$\therefore H(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}), \therefore \overrightarrow{DH} = (\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ , 又  $\overrightarrow{EF} = (1,0,1)$ ,

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{EF} \rangle = \frac{2}{\frac{2\sqrt{6}}{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore \langle \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{EF} \rangle = 30^\circ$ ,  $\therefore$  二面角  $E-PC-D$  的大小为  $30^\circ$

法二: 设平面  $PCE$ 、平面  $PCD$  的一个法向量分别是  $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1), \vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$





$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{PE} \cdot \vec{m} = 0 \\ \overrightarrow{EF} \cdot \vec{m} = 0 \\ \overrightarrow{PD} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{DC} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} = \therefore \begin{cases} \overrightarrow{PE} = (0, 1, -2) \\ \overrightarrow{PD} = (0, 2, -2) = (2, 0, 0) \\ \overrightarrow{DC} \end{cases} \therefore \begin{cases} y_1 - 2z_1 = 0 \\ x_1 + z_1 = 0 \\ 2y_2 - 2z_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$$

取  $\vec{m} = (-1, 2, 1), \vec{n} = (0, 1, 1)$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{2+1}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = 30^\circ$$

$\therefore$  二面角  $E-PC-D$  的大小为  $30^\circ$

[点评] 本题全方位地考查了立体几何中的主要内容, 如线面与线线的位置关系、二面角问题等.

### 短时高效 直击高考

### 30分钟限时训练

#### 一、选择题

1. 将正方形  $ABCD$  沿对角线  $AC$  折起, 使点  $D$  在平面  $ABC$  外, 则  $DB$  与平面  $ABC$  所成的角一定不等于 ( )

- A.  $30^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $60^\circ$       D.  $90^\circ$

2. 对于任意的直线  $l$  与平面  $\alpha$ , 在平面  $\alpha$  内必有直线  $m$ , 使  $m$  与  $l$  ( )

- A. 平行      B. 相交      C. 垂直      D. 互为异面直线

3. 已知平面  $\alpha$  的一条斜线段  $AB$  的端点  $A$  在平面  $\alpha$  内, 且  $AB=1$ , 点  $C$  是平面  $\alpha$  内的一个动点, 且  $S_{\triangle ABC}=1$ , 则动点  $C$  的轨迹为 ( )

- A. 线段      B. 椭圆      C. 双曲线      D. 抛物线

4. 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA=PB=PC=\sqrt{17}$ ,  $AB=1$ ,  $AC=2$ ,  $\angle BAC=60^\circ$ , 则点  $P$  到平面  $ABC$  的距离为 \_\_\_\_\_.

#### 二、填空题

5. 设  $\alpha, \beta, \gamma$  为平面,  $a, b$  为直线, 给出下列条件:

- ①  $a \subset \alpha, b \subset \beta, a \parallel \beta, b \parallel \alpha$       ②  $a \parallel \gamma, \beta \parallel \gamma$   
③  $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$       ④  $a \perp \alpha, b \perp \beta, a \parallel b$

其中能使  $\alpha \parallel \beta$  成立的条件是 \_\_\_\_\_.

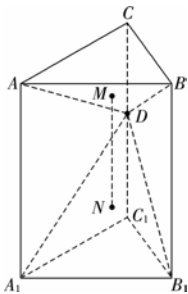
#### 三、解答题

6. 直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $\angle ACB=90^\circ$ ,  $BC=AC=2$ ,  $AA_1=4$ ,  $D$  为棱  $CC_1$  上的一动点,  $M, N$  分别为  $\triangle ABD, \triangle A_1B_1D$  的重心.

(1) 求证:  $MN \perp AB$ ;

(2) 若二面角  $C-AB-D$  的正切值为  $\sqrt{2}$ , 求两半平面  $ABD, A_1B_1D$  所成锐二面角的余弦值;

(3) 若点  $C_1$  在平面  $A_1B_1D$  上的射影正好为  $N$ , 试判断  $C$  在平面  $ABD$  上的射影是否为  $M$ ? 并说明理由.



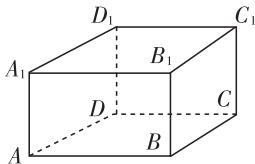


# 考前10天

## 高考论坛 立体几何中的开放探索型问题

### 一、规律探索型

[例1]  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  是单位正方体,黑白两个蚂蚁从点  $A$  出发沿棱向前爬行,每走完一条棱称为“走完一段”.白蚂蚁的爬行路线是  $AA_1 \rightarrow A_1D_1 \rightarrow \dots$ ,黑蚂蚁的爬行路线是  $AB \rightarrow BB_1 \rightarrow \dots$ ,它们都依照如下规则:所爬行的第  $n+2$  段与第  $n$  段所在直线必须是异面直线,设黑白两个蚂蚁都走完 2009 段后各停止在正方体的某个顶点处,这时黑白两个蚂蚁的距离是多少?

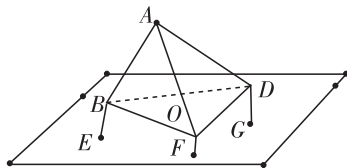


[解] 本题黑白两个蚂蚁都走完 2009 段,步数比较大,因此肯定要探索出一个周期性出来.依照规则黑蚂蚁的爬行路线是  $AB \rightarrow BB_1 \rightarrow B_1C_1 \rightarrow C_1D_1 \rightarrow D_1D \rightarrow DA$ ,走 6 段又回到出发点  $A$ .故它们的周期为 6.  $2009 = 334 \times 6 + 5$ ,所以黑蚂蚁走完 2009 段后停止在正方体的  $D$  顶点处;白蚂蚁走完 2009 段后停止在正方体的  $B$  顶点处.故这时黑白两个蚂蚁的距离是  $\sqrt{2}$ .

### 二、情景研究型

[例2] 把 4 个半径为 1 的小球放在桌面上,使下层 3 个,上层 1 个,两两相切,求上层小球最高处离桌面的距离.

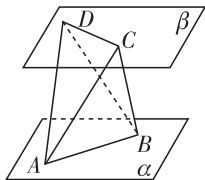
[解] 4 个球心组成一个边长为 2 的正四面体,此四面体的高为  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ,第 4 个球的球心到最高点的距离为 1,下层 3 个球的球心到桌面的距离为 1,所以第 4 个球的最高点与桌面距离为  $2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$ .



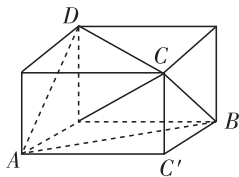
### 三、数学建模型

[例3] 如图所示,线段  $AB \subset$  平面  $\alpha$ ,线段  $CD \subset$  平面  $\beta$ ,且平面  $\alpha \parallel$  平面  $\beta$ ,  $AB \perp CD$ ,  $AB = CD = a$ ,  $\alpha, \beta$  的距离为  $h$ ,求四面体  $ABCD$  的体积.

[解] 依题意可构造一个底面对角线长为  $a$ ,高为  $h$  的正四棱柱(如右图).



显然,正四棱柱的底面边长为  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ,其体积为  $V_{\text{柱}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 h = \frac{1}{2}a^2 h$ ,而三棱锥  $C-AC'B$  的体积为  $V_{\text{锥}} = \frac{1}{6}V_{\text{柱}}$ .







故四面体  $ABCD$  的体积为  $V = V_{\text{柱}} - 4V_{\text{锥}} = V_{\text{柱}} - \frac{4}{6}V_{\text{柱}} = \frac{1}{3}V_{\text{柱}} = \frac{1}{6}a^2h$ .

#### 四、解题策略开放型

[例 4] 四面体的 4 个顶点到平面  $M$  的距离之比为  $1:1:1:3$ , 则平面  $M$  的个数应有多少个?

[解] 这样的平面应分 4 种情况讨论:

(1) 4 个顶点都在平面  $M$  的同侧, 则有  $C_4^1 \cdot 1 = 4$  个(平面);

(2) 距离比为 3 的顶点与其他 3 个顶点不同侧, 则有  $C_4^1 \cdot 1 = 4$  个(平面);

(3) 距离比为 3 的顶点与其他 3 个顶点中的 1 个同侧, 则有  $C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot 1 = 12$  个(平面);

(4) 距离比为 3 的顶点与其他 3 个顶点中的 2 个同侧, 则有  $C_3^2 \cdot C_4^1 \cdot 1 = 12$  个(平面);

$\therefore$  一共应有  $4+4+12+12=32$  个(平面).

#### 五、条件开放型

[例 5] 已知  $\triangle BCD$  中,  $\angle BCD = 90^\circ$ ,  $BC = CD = 1$ ,  $AB \perp$  平面  $BCD$ ,  $\angle ADB = 60^\circ$ ,  $E, F$  分别是  $AC, AD$  上的动点, 且  $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AD} = \lambda (0 < \lambda < 1)$ .

(1) 求证: 不论  $\lambda$  为何值, 总有平面  $BEF \perp$  平面  $ABC$ ;

(2) 当  $\lambda$  为何值时, 平面  $BEF \perp$  平面  $ACD$ .

[证明] (1)  $\because AB \perp$  平面  $BCD, \therefore AB \perp CD$ .

$\because CD \perp BC$  且  $AB \cap BC = B, \therefore CD \perp$  平面  $ABC$ .

又  $\because \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AD} = \lambda (0 < \lambda < 1)$ ,

$\therefore$  不论  $\lambda$  为何值, 恒有  $EF \parallel CD$ ,

$\therefore EF \perp$  平面  $ABC$ , 又  $EF \subset$  平面  $BEF$ ,

$\therefore$  不论  $\lambda$  为何值, 恒有平面  $BEF \perp$  平面  $ABC$ .

[解] (2) 由(1)知,  $BE \perp EF$ , 又平面  $BEF \perp$  平面  $ACD$ .

$\therefore BE \perp$  平面  $ACD, \therefore BE \perp AC$ .

$\because BC = CD = 1, \angle BCD = 90^\circ, \angle ADB = 60^\circ$ ,

$\therefore BD = \sqrt{2}, AB = \sqrt{2} \tan 60^\circ = \sqrt{6}, \therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{7}$ . 由  $AB^2 = AE \cdot AC$  得

$$AE = \frac{6}{\sqrt{7}}, \therefore \lambda = \frac{AE}{AC} = \frac{6}{7}.$$

故当  $\lambda = \frac{6}{7}$  时, 平面  $BEF \perp$  平面  $ACD$ .

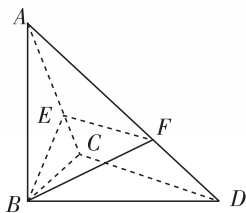
#### 六、结论开放型

[例 6] 若四面体各棱长是 1 或 2, 且该四面体不是正四面体, 则其体积的值是 \_\_\_\_\_. (只须写出一个可能的值)

[解] 首先考虑每个面的三条棱是如何构成的, 排除  $\{1, 1, 2\}$ , 可得  $\{1, 1, 1\}, \{1, 2, 2\}, \{2, 2, 2\}$ , 然后由这三类面在空间构造满足条件的一个四面体, 再求其体积.

由平时所见的题目, 至少可构造出两类满足条件的四面体, 五条边为 2, 另一边为 1, 对棱相等的四面体.

对于五条边为 2, 另一边为 1 的四面体, 见右图所示, 设  $AD = 1$ , 取  $AD$  的中点  $M$ ,





平面  $BCM$  把三棱锥分成两个三棱锥,由对称性可知  $AD \perp$  面  $BCM$ , 且  $V_{A-BCM} = V_{D-BCM}$ , 所以  $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCM} \cdot AD$ .

$$CM = \sqrt{CD^2 - DM^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

设  $N$  是  $BC$  的中点, 则  $MN \perp BC$ ,

$$MN = \sqrt{CM^2 - CN^2} = \sqrt{\frac{15}{4} - 1} = \frac{\sqrt{11}}{2},$$

$$\text{从而 } S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{\sqrt{11}}{2},$$

$$\text{故 } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{11}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{11}}{6}.$$

对于对棱相等的四面体, 可参见右图. 其体积的计算可先将其置于一个长方体之中, 再用长方体的体积减去 4 个小三棱锥的体积来进行, 亦可套用公式

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}.$$

不妨令  $a = b = 2, c = 1$ , 则

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \sqrt{(4 + 4 - 1)(4 + 1 - 4)(1 + 4 - 4)} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \sqrt{7} = \frac{\sqrt{14}}{12}.$$

## 七、条件和结论都发散型

【例 7】有 3 个几何事实 ( $a, b$  表示直线,  $\alpha$  表示平面):

①  $a \parallel b$ , ②  $a \parallel \alpha$ , ③  $b \parallel \alpha$ , 其中,  $a, b$  在面  $\alpha$  外.

用其中两个事实作为条件, 另一个事实作为结论, 可以构造几个命题? 请用文字语言叙述这些命题, 并判断真伪. 正确的给出证明, 错误的举出反例.

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad (1) \left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ a \parallel \alpha \\ b \not\subset \alpha \end{array} \right\} &\Rightarrow b \parallel \alpha. \quad (2) \left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ b \parallel \alpha \\ a \not\subset \alpha \end{array} \right\} &\Rightarrow a \parallel \alpha. \end{aligned}$$

(1)(2) 是同一个命题: 两条平行直线都在一个平面外, 若其中一条与平面平行, 则另一条也与该平面平行.

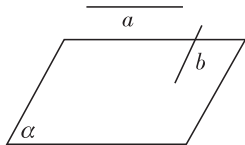
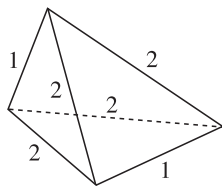
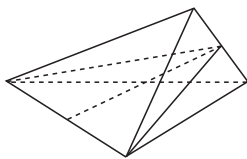
【证明】过  $a$  作平面  $\beta$  与  $\alpha$  交于  $a'$ .

$\because a \parallel \alpha, a \parallel a', \text{ 而 } a \parallel b,$

$\therefore b \parallel a', \text{ 且 } b \text{ 在 } \alpha \text{ 外, } a' \text{ 在 } \alpha \text{ 内, } \therefore b \parallel \alpha.$

$$(3) \left. \begin{array}{l} a \parallel \alpha \\ b \parallel \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b.$$

平行于同一个平面的两条直线平行, 但这是错的, 如右图.





# 考前 9 天

今天复习巩固强化—排列、组合、概率与统计



温馨提示易错点 高考轻松把分捡

http://www.tzdl08.com

77

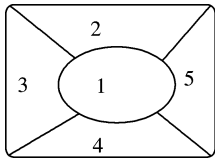
## 1. 两个计数原理理解的怎么样？在做题时会选择吗？

〔典例〕 某外语组 9 人，每人至少会英语和日语中的一门，其中 7 人会英语，3 人会日语，从中选出会英语和日语的各一人，有多少种不同的选法？

〔解析〕 共分三类：第 1 类，当既会英语又会日语的参加英语时，只选会日语的一人即可，有 2 种选法；第 2 类，当参加日语时只选会英语的一人即可，有 6 种选法；第 3 类，既不参加英语又不参加日语，则需从英语和日语中各选一人，有  $2 \times 6 = 12$  种方法，故共有  $2 + 6 + 2 \times 6 = 20$  种选法。

〔注意〕 用计数原理解决问题时，首先要明确所完成的是什么事，事情的完成是分步还是分类，一个比较复杂的问题，一般是先分类再分步完成，分类可以使问题简单明了，分类时要做到标准统一，不重不漏并且要考虑每一类中是否需要分步。

〔类比·鉴赏〕 如图，一个地区分 5 个行政区，现给地图着色，要求相邻地区不得使用同一颜色，现有 4 种颜色可供选择，则不同的着色方法共有 \_\_\_\_\_ 种。



〔点拨〕 合理分类与分步是解决这类问题的关键。

2. 你还记得解排列组合问题的依据是什么吗？（分类相加，分步相乘，有序排列，无序合），解排列组合问题的规律是什么？（相邻问题捆绑法；不邻问题插空法；多排问题单排法；定位问题优先法；多元问题分类法；有序分配问题法；选取问题先组合后排法；至多至少问题间接法）。

〔典例〕 某省 2008 年高考模式为“3+x+1”，其中“1”指的是“基本能力”。为激发同学们对这一内容的学习兴趣，某班举行了“新课程基本能力”知识竞赛，全班 4 个组，每组 1 个赛台，每个组选出 2 人参加，假设每组的赛台事先未指定，每组 2 人的坐序也未指定，则有多少种不同的排法。

〔解析〕 分两步，第一步，排列赛台，共有  $A_4^4$  种排法，第二步，对每一组的两个人排序，根据分步乘法原理，共有  $2^4$  种排法。所以，这 8 名同学共有  $A_4^4 \times 2^4 = 384$  种排法。

〔注意〕 对于这类问题，首先要清楚问题的实质是排列问题还是组合问题，然后借助分步乘法原理或分类加法原理解决问题。

〔类比·鉴赏〕 记者要为 5 名志愿者和他们帮助的 2 位老人拍照，要求排成一排，2 位老人相邻但不排在两端，不同的排法共有 \_\_\_\_\_ （ ）

A. 1440 种      B. 960 种      C. 720 种      D. 480 种

〔注意〕 有限制条件的排列问题，一般是特殊元素（位置）优先法。

3. 二项式定理的展开式还记得吗？ $a$  和  $b$  能否交换位置？展开式的通式是什么？会用通式求解有关问题吗？



**[典例]** 如果  $\left(3x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^n$  的展开式中含有非零常数项,则正整数  $n$  的最小值为 ( )

A. 3

B. 5

C. 6

D. 10

**[解析]** 法一:  $T_{r+1} = C_n^r 3^{n-r} (-2)^r x^{2n-5r}$ , 所以  $2n-5r=0$ , 所以  $r = \frac{2n}{5}$  又  $r$  是整数所以  $n=5$  选 B.

法二:  $\left(3x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^n$  的含义是指就是  $n$  个  $\left(3x^2 - \frac{2}{x^3}\right)$  相乘, 根据多项式的乘法法则, 就是从每一个取出一项, 乘在一起就是展开式中的项, 由此得到展开的通项只需在  $n$  个多项式中有  $r$  个取  $3x^2$  项, 有  $C_n^r$  种取法, 其余的取  $\left(-\frac{2}{x^3}\right)$  即可; 所以展开项是  $C_n^r (3x^2)^r C_n^{n-r} \left(-\frac{2}{x^3}\right)^{n-r} = C_n^r C_n^{n-r} 3^r (-2)^{n-r} x^{5r-3n}$ , 令  $5r-3n=0$  即  $r = \frac{3n}{5}$ , 有  $r$  是整数, 所以  $n$  的最小值是 5. 故选 B.

**[点拨]** 本题考查二项展开式的应用, 题目比较简单. 方法二的实质是二项式定理的推导方式之一, 此处显得麻烦, 但在三项式中则比较简单, 如:  $\left(x^2 + \frac{2}{x^3} + 2\right)^7$  展开式中的常数项是  $2^2 C_7^3 (x^2)^3 C_4^2 \left(\frac{2}{x^3}\right)^2 + 2^7 = 3488$ .

**[类·鉴赏]** 设  $(x-1)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$  ( $n \geq 3$ , 且  $n \in \mathbf{Z}$ ), 若  $a_3 + 3a_2 = 0$ , 则  $n$  的值为 7.

**[点拨]** 解这类题时要注意二项式系数与项的系数的区别, 二项式展开式是考查的重点.

4. 你能区分随机事件、互斥事件、相互独立事件吗? 你会计算随机事件、互斥事件、相互独立事件发生的概率吗?

**[典例]** 甲、乙、丙三名应届大学生参加某著名公司组织的大学生招聘会, 已知甲能被聘用的概率是  $\frac{3}{4}$ , 甲、丙两人都不能被聘用的概率是  $\frac{1}{12}$ , 乙、丙两人都能被聘用的概率是  $\frac{1}{4}$ .

(1) 求乙、丙两人各自能被聘用的概率;

(2) 求甲、乙、丙三人中至少有两人能被聘用的概率.

**[解析]** (1) 记甲、乙、丙各自能被聘用的事件分别为  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ,

依题意可得:

$$\begin{cases} P(A) = \frac{3}{4} \\ P(\bar{A} \cdot \bar{C}) = [1 - P(A)][1 - P(C)] = \frac{1}{12} \\ P(B \cdot C) = P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A) = \frac{3}{4} \\ P(B) = \frac{3}{8} \\ P(C) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

故乙、丙两人各自能被聘用的概率分别为  $\frac{3}{8}, \frac{2}{3}$ .

(2) 法一: 甲、乙、丙三人中恰好有两人能被聘用的概率为:

$$P(AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{5}{8} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{32} + \frac{10}{32} + \frac{2}{32} = \frac{15}{32}.$$

$$\text{甲、乙、丙都能被聘用的概率为 } P(ABC) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{32}.$$

故甲、乙、丙三人中至少有两人能被聘用的概率为  $\frac{21}{32}$ .



法二:三人中恰好有一人被聘用的概率为:

$$P(A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C) = P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) \\ = \frac{3}{4} \times \frac{5}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{5}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{32},$$

三人都未被聘用的概率为:

$$P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = [1 - P(A)][1 - P(B)][1 - P(C)] \\ = (1 - \frac{3}{4})(1 - \frac{3}{8})(1 - \frac{2}{3}) = \frac{5}{96},$$

故甲、乙、丙三人中至少有两人能被聘用的概率为  $1 - \frac{7}{24} - \frac{5}{96} = \frac{21}{32}$ .

**[点拨]** 解题时要注意区分等可能事件的概率,独立重复试验的概率,相互独立事件的概率,选择合适的运算公式.

**[类比·鉴赏]** 假设一架飞机每一引擎在飞行中的故障率为  $(1-p)$ ,且各引擎是否发生故障是独立的,如果至少有 50% 的引擎能正常运行,飞机就可成功地飞行,要使 4 引擎飞机比 2 引擎飞机更安全,  $p$  的取值是 ( )

- A.  $(\frac{1}{3}, 1)$       B.  $(0, \frac{2}{3})$       C.  $(\frac{2}{3}, 1)$       D.  $(0, \frac{1}{4})$

**[分析]** 该题考查的是独立重复试验恰好发生  $k$  次的概率,4 引擎飞机正常运行的概率是:  $C_4^4 p^4 + C_4^3 p^3(1-p) + C_4^2 p^2(1-p)^2 = p^4 + 4p^3(1-p) + 6p^2(1-p)^2$ ; 2 引擎正常运行的概率是:  $C_2^2 p^2 + C_2^1 p(1-p) = p^2 + 2p(1-p)$ .

**[点拨]** 注意分类,分清每一类中有几个基本事件,它们之间的关系是什么.理科同学可用独立重复试验恰好发生  $K$  次的概率公式求解.



### 常考题型要练熟 临场不惧胸有竹

#### 1. 排列组合

排列组合在高考中考查经常是以应用题的形式出现,在一些较为复杂的题目中,可考虑分类与分步,将问题分成若干简单问题,然后分别解决.

**[例 1]** 某通讯公司推出一组手机卡号码,卡号的前七位数字固定,从“ $\times \times \times \times \times \times \times 0000$ ”到“ $\times \times \times \times \times \times \times 9999$ ”共 10000 个号码.公司规定:凡卡号的后四位带有数字“4”或“7”的一律作为“优惠卡”,则这组号码中“优惠卡”的个数为 ( )

- A. 2000      B. 4096      C. 5904      D. 8320

**[分析]** 解决本题的关键是要注意到限制条件,利用分步计数原理或排列知识解决.后四位总数为  $10^4$ ,其中不含 4 和 7 的有  $8^4$ ,所以“优惠卡”数为:  $10^4 - 8^4 = 5904$ ,故选 C.

**[点睛]** 本题将数学问题与生活实际联系在一起,注意分步计数原理、排除法的应用.

#### 2. 二项式定理的应用

二项式定理是高考中的重点,考查展开式中的指定项是对展开式的特定项、二项式系数的性质、二项式定理的应用等,经常和排列组合、不等式、数列等知识联系在一起出题.

**[例 2]** (2008·山东德州)已知在  $(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x})^n$  的展开式中,只有第 6 项的二项式系数最大.

(1)求  $n$ ;

(2)求展开式中系数绝对值最大的项和系数最大的项.

**[解析]** (1)因为展开式中只有第 6 项的二项式系数最大,所以  $n$  是偶数,第 6 项即为中间项,  $\therefore \frac{n}{2} + 1 = 6$ ,得  $n = 10$ .



(2) 展开式的通项是  $T_{r+1} = C_{10}^r \cdot (-1)^r \cdot (\frac{1}{2})^r \cdot x^{\frac{30-r}{2}}$ , 系数的绝对值是  $C_{10}^r \cdot 2^{-r}$ , 若它

$$\text{最大, 则 } \begin{cases} C_{10}^r \cdot 2^{-r} \geq C_{10}^{r+1} \cdot 2^{-(r+1)} \\ C_{10}^r \cdot 2^{-r} \geq C_{10}^{r-1} \cdot 2^{-(r-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{r+1}{10-r} \geq \frac{1}{2} \\ \frac{11-r}{r} \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{3} \leq r \leq \frac{11}{3},$$

$\because r \in \mathbb{N}, \therefore r=3, \therefore$  即系数绝对值最大的项是第 4 项  $C_{10}^3 \cdot 2^{-3} \cdot x^{\frac{21}{2}} = -15x^{\frac{21}{2}}$ .

系数最大的项应在项数为奇数的项之内, 即  $r$  取偶数 0, 2, 4, 6, 8 时, 各项系数分别为:

$$C_{10}^0 = 1, C_{10}^2 \cdot 2^{-2} = \frac{45}{4}, C_{10}^4 \cdot 2^{-4} = \frac{105}{8}, C_{10}^6 \cdot 2^{-6} = \frac{105}{32}, C_{10}^8 \cdot 2^{-8} = \frac{45}{256}.$$

因此系数最大的项是第 5 项, 即  $\frac{105}{8}x^{\frac{13}{2}}$ .

**[点睛]** 本题是二项式展开式的应用, 与不等式联系在一起, 知识的跨度也比较大, 是一道小型的综合题.

### 3. 抽样方法、随机事件的概率

抽样方法、随机事件的概率及分布列是高考考查的重要内容之一, 文科主要侧重抽样方法的考查, 理科侧重对随机变量的分布列、期望、方差的考查, 以计算类型为主, 有时和概率联系在一起.

**[例 3]** 把一个骰子投掷 2 次, 观察出现的点数, 并记第一次出现的点数为  $a$ , 第二次出

80 现的点数为  $b$ , 试就方程组  $\begin{cases} ax+by=3, \\ x+2y=2 \end{cases}$  解决下列问题:

(1) 求方程组只有一组解的概率;

(2) 求方程组只有正整数解的概率.

**[解析]** 将骰子抛掷 2 次, 共有  $6 \times 6 = 36$  种等可能结果.

(1) 当  $a:b \neq 1:2$  时, 方程组只有一组解;

若  $a:b = 1:2$ , 共有  $(1,2), (2,4), (3,6)$  三种结果.

所以满足  $a:b \neq 1:2$  的解有 33 组.

$$\text{所求概率 } P_1 = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}.$$

(2) 若方程组只有正整数解, 则  $x+2y \geq 3$ .

于是,  $x+2y \neq 2$ . 所以方程组只有正整数解为不可能事件. 所求概率为 0.

**[点睛]** 随机事件的概率问题与方程组联系在一起, 加大了题目综合性, 也为以后的命题提供了思路.

**[例 4]** 从 2007 名学生中选取 50 名学生参加全国数学联赛, 若采用下面的方法选取: 先用简单随机抽样从 2007 人中剔除 7 人, 剩下的 2000 人再按系统抽样的方法抽取, 则每人入选的概率 ( )

- A. 不全相等      B. 均不相等      C. 都相等, 且为  $\frac{50}{2007}$       D. 都相等, 且为  $\frac{1}{40}$

**[分析]** 有三种抽样方法的共同特点就可以选出答案应是 C.

**[点睛]** 紧扣概念, 角度新但难度不大, 很好的考查了学生的基础知识.



### 考前猜题与押宝 热点问题再聚焦

**[聚焦]** 1. (理科) 某城市有甲、乙、丙 3 个旅游景点, 一位客人游览这三个景点概率分别是 0.4, 0.5, 0.6, 且客人是否游览哪个景点互不影响, 设  $\xi$  表示客人离开该城市时游览的



景点数与没有游览的景点数之差的绝对值.

(1)求  $\xi$  的分布列及数学期望;

(2)记“函数  $f(x)=x^2-3\xi x+1$  在区间  $[2,+\infty)$  上单调递增”为事件  $A$ ,求事件  $A$  的概率.

**[解析]** (1)分别记“客人游览甲景点”,“客人游览乙景点”,“客人游览丙景点”

为事件  $A_1, A_2, A_3$  由已知  $A_1, A_2, A_3$  相互独立,  $P(A_1)=0.4, P(A_2)=0.5, P(A_3)=0.6$ .

客人游览的景点数的可能取值为  $0, 1, 2, 3$ . 相应地,客人没有游览的景点数的可能取值为  $3, 2, 1, 0$ . 所以  $\xi$  的可能取值为  $1, 3$ .

$$\begin{aligned} P(\xi=3) &= P(A_1 A_2 A_3) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) \\ &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) \\ &= 2 \times 0.4 \times 0.5 \times 0.6 = 0.24, \end{aligned}$$

$\xi$	1	3
$P$	0.76	0.24

$$P(\xi=1) = 1 - 0.24 = 0.76.$$

$$\text{所以 } \xi \text{ 的分布列为 } E\xi = 1 \times 0.76 + 3 \times 0.24 = 1.48$$

$$(2) \text{法一: 因为 } f(x) = (x - \frac{3}{2}\xi)^2 + 1 - \frac{9}{4}\xi^2,$$

所以函数  $f(x) = x^2 - 3\xi x + 1$  在区间  $[\frac{3}{2}\xi, +\infty)$  上单调递增,

要使  $f(x)$  在  $[2, +\infty)$  上单调递增, 当且仅当  $\frac{3}{2}\xi \leq 2$ , 即  $\xi \leq \frac{4}{3}$ .

$$\text{从而 } P(A) = P(\xi \leq \frac{4}{3}) = P(\xi=1) = 0.76.$$

法二:  $\xi$  的可能取值为  $1, 3$ .

当  $\xi=1$  时, 函数  $f(x) = x^2 - 3x + 1$  在区间  $[2, +\infty)$  上单调递增,

当  $\xi=3$  时, 函数  $f(x) = x^2 - 9x + 1$  在区间  $[2, +\infty)$  上不单调递增,

所以  $P(A) = P(\xi=1) = 0.76$ .

**[点睛]** 本题将概率知识与函数结合在一起考查, 凸显命题角度之新, 是一道好题.

2. 袋中装有 35 个球, 球上分别记有从 1 到 35 的一个号码, 设号码为  $n$  的球重  $\frac{n^2}{3} - 5n + 15$  (克), 这些球以等可能性 (不受重量、号码影响) 从袋中取出, 如果同时任取两球, 试求它们重量相同的概率.

**[解析]** 如图所示, 由  $f(x) = \frac{x^2}{3} - 5x + 15$  的图象及性质, 以及根与系数的关系得,  $f(x) > 0$  时,  $x$  的解集为:

$$\{x | x < \frac{15-3\sqrt{5}}{2}, \text{ 或 } x > \frac{15+3\sqrt{5}}{2}\}.$$

设任取的两球的号码为  $m, n$ , 又  $\because f(m) > 0, f(n) > 0$ ,

$\therefore n, m \in [1, 4] \cup [11, 15]$ , 且  $n, m \in \mathbf{N}^+$ .

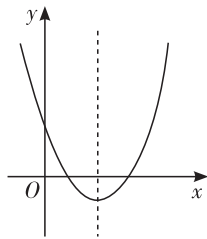
又  $\because f(x) = \frac{1}{3}(x - \frac{15}{2})^2 - \frac{15}{4}$ ,  $\therefore f(x)$  在  $(0, \frac{15}{2})$  上单调递减, 对称轴为  $x = \frac{15}{2}$ .

故  $f(x_1) = f(x_2)$ .  $\therefore x_1 + x_2 = 15$ , 即  $n + m = 15$ .

$\therefore (n, m)$  可能是  $(1, 14), (2, 13), (3, 12), (4, 11)$  共 4 对.

又从这 35 个球中任取两个球的取法有  $C_{35}^2 = 35 \times 34 \div 2 = 595$  种, 所求概率为  $P = \frac{4}{595}$ .

**[点睛]** 该题属古典概型的题目. 解答时首先要弄清总的情况有多少种, 符合题意的又有多少, 第 2 问考查的是对立事件的有关知识. 本题将概率与几何图形联系在一块, 是一道好题.





短时高效 直击高考

30分钟限时训练

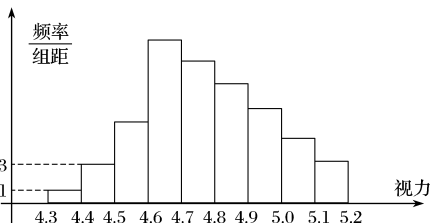
一、选择题

1. 某中学开学后从高一年级的学生中随机抽取 90 名学生进行家庭情况调查, 经过一段时间后再次从这个年级随机抽取 100 名学生进行学情调查, 发现有 20 名同学上次被抽到过, 估计这个学校高一年级的学生人数为 ( )

- A. 180 B. 450 C. 400 D. 2 000

2. 为了解某校高三学生的视力情况, 随机地抽查了该校 100 名高三学生的视力情况, 得到频率分布直方图, 如图, 由于不慎将部分数据丢失, 但知道前 4 组的频数成等比数列, 后 6 组的频数成等差数列, 设最大频率为  $a$ , 视力在 4.6 到 5.0 之间的学生数为  $b$ , 则  $a, b$  的值分别为 ( )

- A. 0.27, 78 B. 0.27, 83  
C. 2.7, 78 D. 2.7, 83



3. 某体育彩票规定: 从 01 到 36 共 36 个号中抽出 7 个号为一注, 每注 2 元. 某人想从 01 至 10 中选 3 个连续的号, 从 11 至 20 中选 2 个连续的号, 从 21 至 30 中选 1 个号, 从 31 至 36 中选 1 个号, 组成一注, 则这人把这种特征的号买全, 至少要花 ( )

- A. 3360 元 B. 6720 元 C. 4320 元 D. 8640 元

4.  $(1-2x)^n$  展开式中第 6 项与第 7 项的系数的绝对值相等, 展开式中二项式系数最大的项和系数绝对值最大的项分别是 \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.

5. 左口袋里装有 3 个红球, 2 个白球, 右口袋里装有 1 个红球, 4 个白球. 若从左口袋里取出 1 个球装进右口袋里, 掺混好后, 再从右口袋里取出 1 个球, 这个球是红球的概率为 \_\_\_\_\_.

6. (理) 为宣传 2008 年北京奥运会, 某校准备成立由 4 名同学组成的奥运宣传队, 经过初选确定 5 男 4 女共 9 名同学成为候选人, 每位候选人当选奥运会宣传队队员的机会是相同的.

(1) 记  $\xi$  为女同学当选人数, 求  $\xi$  的分布列并求  $E\xi$ ;

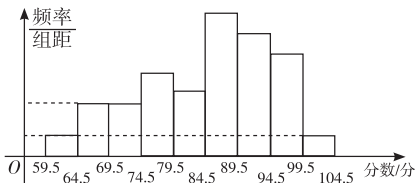
(2) 设至少有  $n$  名男同学当选的概率为  $P_n$ , 求  $P_n \geq \frac{1}{2}$  时  $n$  的最大值.

(文) 为了了解某校毕业班数学考试情况, 抽取了若干名学生的数学成绩, 将所得的数据经过整理后, 画出频率分布直方图 (如图所示). 已知从左到右第一组的频率是 0.03, 第二组的频率是 0.06, 第四组的频率是 0.12, 第五组的频率是 0.10, 第六组的频率是 0.27, 且第四组的频数是 12, 则:

(1) 所抽取的学生人数是多少?

(2) 那些组出现的学生人数一样多? 出现人数最多的组有多少人?

(3) 若分数在 85 分以上 (含 85 分) 的为优秀, 试估计数学成绩的优秀率是多少?







# 考前7天

今天复习巩固强化—复数(理)



温馨提示易错点 高考轻松把分捡

1. 你知道纯虚数的概念并能灵活解题吗?

[典例] 若复数  $z = a^2 + a + (a+1)i$  为纯虚数, 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_.

[分析] 由纯虚数的定义得  $\begin{cases} a+1 \neq 0 \\ a^2 + a = 0 \end{cases}$ , 解得  $a=0$ , 故填 0.

[点拨] 复数  $a+bi (a, b \in \mathbb{R})$  的充要条件,  $a=0, b \neq 0$ , 解题时不要忽视  $b \neq 0$ .

[类比·鉴赏] 已知  $i$  是虚数单位, 复数  $z = m^2(1+i) - m(2+3i) - 4(2+i)$ . 当  $m$  取什么实数时,  $z$  是纯虚数?

2. 你会利用复数相等的条件来解系数是复数的一元二次方程吗?

[典例] 已知关于  $x$  的方程  $x^2 + (1-2i)x + 3m-i = 0$  有实根, 则实数  $m$  满足 ( )

A.  $m \leq -\frac{1}{4}$       B.  $m \geq -\frac{1}{4}$       C.  $m = -\frac{1}{12}$       D.  $m = \frac{1}{12}$

[分析] 设实根为  $x_0$ , 则  $x_0^2 + (1-2i)x_0 + 3m-i = 0$

即  $(x_0^2 + x_0 + 3m) - (2x_0 + 1)i = 0$

$\therefore \begin{cases} x_0^2 + x_0 + 3m = 0 \\ 2x_0 + 1 = 0 \end{cases}$ , 解得:  $\begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \\ m = \frac{1}{12} \end{cases}$ . 故选 D.

[点拨] 方程中含有虚数系数时, 不能再利用判别式来判断方程是否有解, 而应设出此实根, 然后利用复数相等的条件来解决问题. 不过这种情况下仍可利用根与系数的关系.

[类比·鉴赏] 已知  $a, b \in \mathbb{R}$  且  $2+ai, b+3i$  ( $i$  是虚数单位) 是一个实系数一元二次方程的两个根, 那么  $a, b$  的值是 ( )

A.  $a=-3, b=2$       B.  $a=3, b=-2$       C.  $a=-3, b=-2$       D.  $a=3, b=2$



常考题型要练熟 临场不惧胸有竹

1. 复数的概念

复数的概念是学习复数的基础, 要注意掌握.

[例 1] 复数  $z = \frac{1}{1-i}$  的共轭复数是 ( )

A.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$       B.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$       C.  $1-i$       D.  $1+i$

[解析]  $z = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i) \cdot (1+i)} = \frac{1+i}{2}$ ,  $\therefore \bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ , 故选 B.



$$= \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}).$$

$$\because x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{8}], \therefore 2x - \frac{\pi}{4} \in [\frac{3\pi}{4}, 2\pi],$$

$$\therefore \sin(2x - \frac{\pi}{4}) \in [-1, \frac{\sqrt{2}}{2}]. \text{ 当 } 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, \text{ 即 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } f(x)_{\max} = 1.$$

10. 解: (1)  $\xi$  的所有可能取值为 3 400, 2 400, 1 400, 400

$$(2) P(\xi = 3\ 400) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125} \quad P(\xi = 2\ 400) = C_3^1 \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125}$$

$$P(\xi = 1\ 400) = C_3^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{12}{125}$$

$$P(\xi = 400) = C_3^3 \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$$

$\xi$  的分布列为

$\xi$	3 400	2 400	1 400	400
$P$	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

$$(III) (理) E\xi = 3\ 400 \times \frac{64}{125} + 2\ 400 \times \frac{48}{125} + 1\ 400 \times \frac{12}{125} + 400 \times \frac{1}{125} = 2\ 800.$$

$$(或 E\xi = 3\ 400 - 1\ 000 E\eta = 3\ 400 - 1\ 000 \times \frac{3}{5} = 2\ 800)$$

11. [解析] 建立如

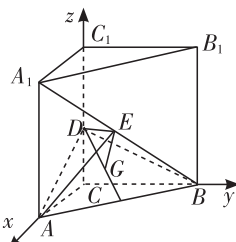
图所示的空间直角坐标系, 设  $CA = 2a$ , 则

$$A(2a, 0, 0), B(0, 2a, 0),$$

$$D(0, 0, 1), A_1(2a, 0, 2),$$

$$E(a, a, 1),$$

$$G(\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}, \frac{1}{3}).$$



$$\text{从而 } \overrightarrow{GE} = (\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{2}{3}), \overrightarrow{BD} = (0, -2a, 1),$$

$$\overrightarrow{DA} = (2a, 0, -1), \overrightarrow{DE} = (a, a, 0).$$

由  $GE \perp BD$ , 所以  $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ , 得  $a = 1$ .

设  $n = (1, y, z)$  为平面  $AED$  的一个法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{DA} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2 - z = 0, \\ 1 + y = 0, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} z = 2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

得  $n = (1, -1, 2)$ .

又由于  $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 2)$ , 于是点  $A_1$  到平面

$$AED \text{ 的距离为 } d = \frac{|n \cdot \overrightarrow{AA_1}|}{|n|} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

为使本书品质再次大幅提升,更好地服务于高考师生。本公司决定即日起面向全国征招 2010 年全国版、课标版、省市地方版本书主编每科各一名。主编负责组织 2010 年本人负责版本科目的一切修改事宜,公司除最后把关质量外,不干预主编的一切修改设计和其它工作。该主编亦为本书项目负责人。公司将拿出该书利润的 10% 做为回报,稿费等有关修改费用由该项目负责人(主编)负担。有关该书赢利情况,完全向主编公开,主编可以使用所能想到的一切办法,跟踪了解该书市场发行利润情况,公司都给与全力支持。请您修改方案考虑成熟时及时我们。您也许从此一发而不可收。试试您的能力吧! 截止日期:2009 年五月三十日。

联系地址:北京市海淀区北洼路 29 号 0511 天智达(收)

邮编:100010 电话:01051345839 13582338788

邮箱:3vbk@163.com QQ:214331886