基本不等式与对勾函数

一、基本不等式

前提条件是：$a>0,b>0$

取“=”的条件是：$a=b>0$，必须验证.

练习 1 已知 $x<0$，则 $3x+\dfrac{12}{x}$ 取最______值为_______

例 1 已知 $x,y\in R$，且 $x+y=2$，则 2^x+2^y 的最小值为______

练习 2 若 $\log_3 m+\log_3 n=2$，则 $m+n$ 的最小值为________

例 2 若 $x,y\in(0,1)$，且 $xy=\dfrac{1}{9}$，则 $\log_{\frac{1}{3}}x\cdot\log_{\frac{1}{3}}y$ 的最大值为____________

例 3 设 x,y 为正，且 $2x+5y=20$，则 $\lg x+\lg y$ 的最大值为___________

例 4 已知 $x>1$，则 $x+\dfrac{1}{x-1}$ 的最小值为_______________

练习 3：已知关于 x 的不等式 $2x+\dfrac{2}{x-a}\geq 7$ 在 $x\in(a,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围

练习 4 函数 $f(x)=\sqrt{x^2+9}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$ 的最小值为_____________

例 5 函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+9}$ 的最大值为_________

例 6 函数 $f(x)=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的最小值为___________

例 7 若正数 a,b 满足 $ab=a+b+3$，求：①ab 的取值范围② $a+b$ 的取值范围

例 8 已知 $x>0,y>0$，且 $x+2y=1$，求 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值

练习 5. 已知 $a>0,b>0$，且 $2a+b=3$，则 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为___________

练习 6. 已知正数 x,y 满足 $x+y=4$，则使不等式 $4x+y\geq mxy$ 恒成立，求 m 的取值范围

练习 7 已知不等式（x＋y）（$\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{y}$）≥9 对任意正实数 x，y 恒成立，则正实数 a 的最小值为___________

例 9 若 $0<x<1$，则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}$ 的最小值为___________

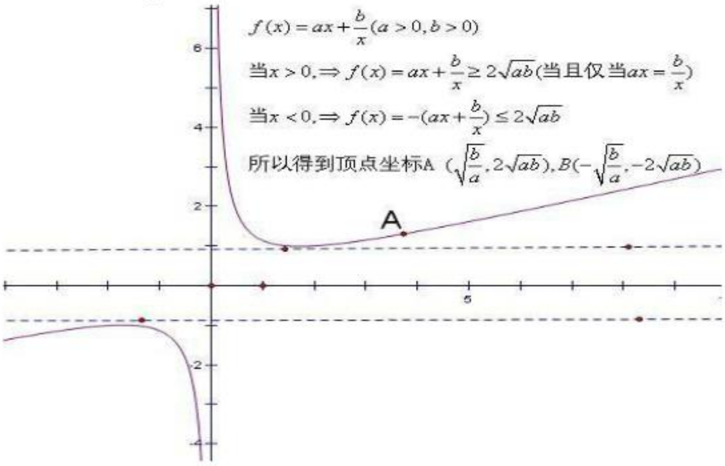
练习 8. 若$0<x<\frac{2}{3}$，则$\frac{3}{x}+\frac{1}{2-3x}$的最小值为______________

练习 9. 若$1<x<2$，则$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2-x}$的最小值为____________

例 10. 已知$0<x<2$，则$x(2-x)$的最大值为_________

练习 10：已知$a,b>0$，$a^2+\frac{b^2}{2}=1$，则$a\sqrt{1+b^2}$的最大值为___________

二、对勾函数 $y=ax+\dfrac{b}{x}\ (a>0,b>0)$ 的图像与性质



性质：

1. 定义域：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

2. 值域：$(-\infty,-2\sqrt{ab}]\cup[2\sqrt{ab},+\infty)$

3. 奇偶性：奇函数，函数图像整体呈两个“对勾”的形状，且函数图像关于原点呈中心对称，即 $f(x)+f(-x)=0$

4. 图像在一、三象限

   当 $x>0$ 时，由基本不等式知 $y=ax+\dfrac{b}{x}\geq 2\sqrt{ab}$（当且仅当 $x=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 取等号），

   即 $f(x)$ 在 x=$\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 时，取最小值 $2\sqrt{ab}$

   由奇函数性质知：

   当 x<0 时，$f(x)$ 在 x=$-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 时，取最大值 $-2\sqrt{ab}$

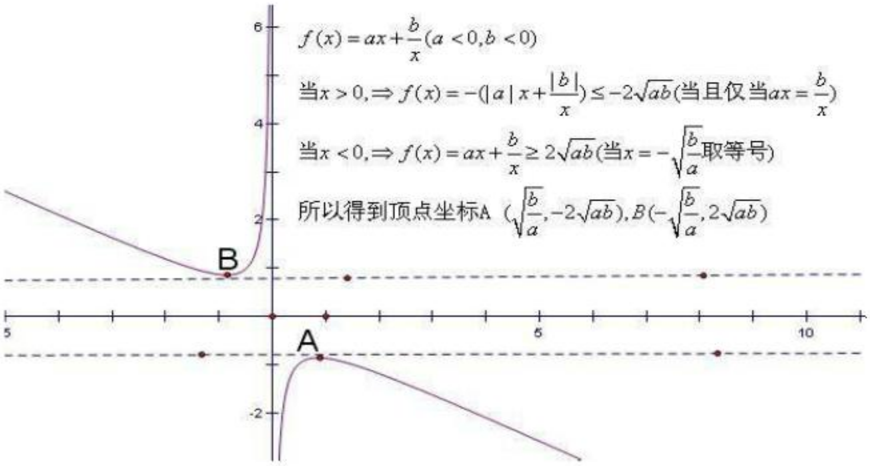
5. 单调性：增区间为（$\sqrt{\dfrac{b}{a}},+\infty$），（$-\infty,-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$）

   减区间是（0，$\sqrt{\dfrac{b}{a}}$），（$-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$,0）

三、对勾函数的变形形式

类型一：函数 $y = ax + \dfrac{b}{x}$ $(a<0, b<0)$ 的图像与性质

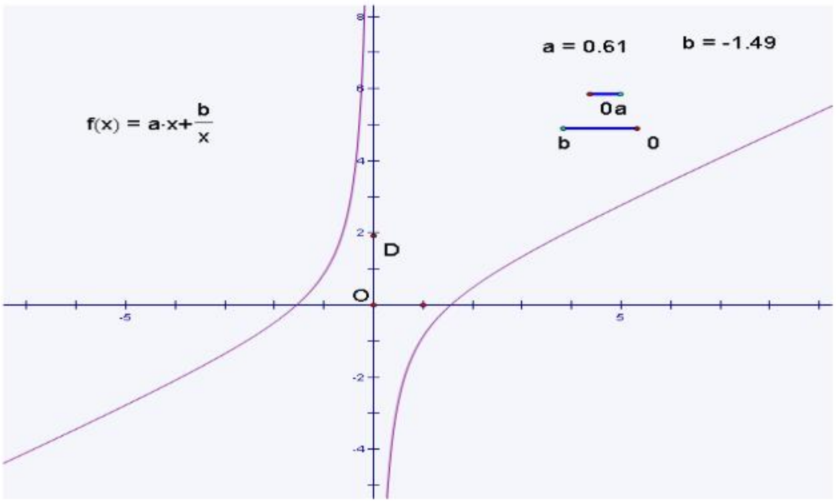
此函数与对勾函数 $y = (-a)x + \dfrac{(-b)}{x}$ 关于 y 轴对称，故函数图像为



性质：

类型二：斜勾函数 $y = ax + \dfrac{b}{x}$ $(ab<0)$

①$a>0, b<0$ 作图如下



性质：

②$a<0, b>0$ 作图如下：

类型三： 函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x}(ac>0)$

此类函数可变形为 $f(x)=ax+\dfrac{c}{x}+b$，则 $f(x)$ 可由对勾函数 $y=ax+\dfrac{c}{x}$ 上下平移得到

例 1 作函数 $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$ 的草图

解：$f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}\Rightarrow f(x)=x+\dfrac{1}{x}+1$ 作图如下：

类型四： 函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x+k}(a>0,k\neq 0)$

此类函数可变形为 $f(x)=(x+k+\dfrac{a}{x+k})-k$，则 $f(x)$ 可由对勾函数 $y=x+\dfrac{a}{x}$ 左右平移，上下平移得到

例 2 作函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x-2}$ 的草图

解：$f(x)=x+\dfrac{1}{x-2}\Rightarrow f(x)=x-2+\dfrac{1}{x-2}+2$ 作图如下：

例 3 作函数 $f(x)=\dfrac{x+3}{x+2}+x$ 的作图：

解：$f(x)=\dfrac{x+3}{x+2}+x\Rightarrow f(x)=\dfrac{x+2+1}{x+2}+x=1+\dfrac{1}{x+2}+x=x+2+\dfrac{1}{x+2}-1$

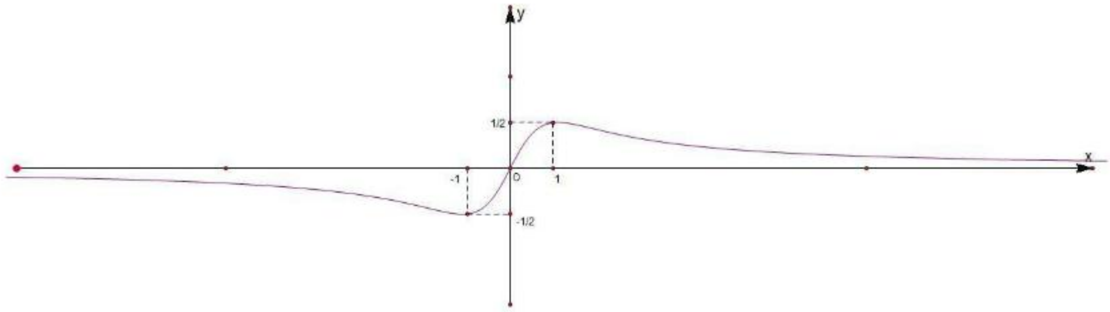
练习： 1. 求函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{2x-4}$ 在 $(2,+\infty)$ 上的最低点坐标

2. 求函数 $f(x)=x+\dfrac{x}{x-1}$ 的单调区间及对称中心

类型五： 函数 $f(x)=\dfrac{ax}{x^2+b}(a\neq 0,b>0)$

此类函数定义域为 R，且可变形为 $f(x)=\dfrac{a}{\dfrac{x^2+b}{x}}=\dfrac{a}{x+\dfrac{b}{x}}$

a. 若 $a>0$，则 $f(x)$ 的单调性和对勾函数 $y=x+\dfrac{b}{x}$ 的单调性相反，图像如下：



性质：

1．定义域：$(-\infty,+\infty)$

2. 值域：$[-a\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{b}},a\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{b}}]$

3. 奇偶性：奇函数，函数图像整体呈两个倒着的“对勾”的形状，且函数图像关于原点呈中心对称，即 $f(x)+f(-x)=0$

4. 图像在一、三象限

当 $x>0$ 时，由基本不等式知 $f(x)\leq\dfrac{a}{2\sqrt{x\cdot\dfrac{b}{x}}}=\dfrac{a}{2\sqrt{b}}$（当且仅当 $x=\sqrt{b}$ 取等号），

即 $f(x)$ 在 $x=\sqrt{b}$ 时，取最大值 $\dfrac{a}{2\sqrt{b}}$

由奇函数性质知：

当 x<0 时，$f(x)$ 在 x=$-\sqrt{b}$ 时，取最小值 $-\dfrac{a}{2\sqrt{b}}$

5. 单调性：减区间为（$\sqrt{b},+\infty$），（$-\infty,-\sqrt{b}$）

增区间是 $[-\sqrt{b},\sqrt{b}]$

例 4 作函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 的草图

解：$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{\dfrac{x^2+1}{x}}=\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}$

b. 若 $a<0$，作出函数图像：

例 5 作函数 $f(x)=-\dfrac{2x}{x^2+4}$ 的草图

类型六：函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+m}(a\neq 0)$

此类函数可变形为 $f(x)=\dfrac{a(x+m)^2+s(x+m)+t}{x+m}=a(x+m)+\dfrac{t}{x+m}+s(at>0)$，

则 $f(x)$ 可由对勾函数 $y=ax+\dfrac{t}{x}$ 左右平移，上下平移得到

例 6 说明函数 $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ 由对勾函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 如何变换而来

解：$f(x)=\dfrac{(x+1)^2-(x+1)+1}{x+1}=x+1+\dfrac{1}{x+1}-1$

故 此函数 $f(x)$ 可由对勾函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 向______（填“左”、“右”）平移________单位，向______（填“上”、“下”）平移________单位. 草图如下：

练习：1. 已知 $x>-1$ ，求函数 $f(x)=\dfrac{x^2+7x+10}{x+1}$ 的最小值

2. 已知 $x<1$ ，求函数 $f(x)=\dfrac{x^2+9x-9}{x-1}$ 的最大值

类型七： 函数 $f(x)=\dfrac{x+m}{ax^2+bx+c}(a\neq 0)$

例 7 求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+2}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上的最大值

解：当 $x=1$ 时，$f(1)=0$

当 $x\neq 1$ 时，$f(x)=\dfrac{x-1}{(x-1)^2+3(x-1)+4}=\dfrac{1}{\dfrac{(x-1)^2+3(x-1)+4}{x-1}}=\dfrac{1}{x-1+\dfrac{4}{x-1}+3}$

问：若区间改为 $[4,+\infty)$ 则 $f(x)$ 的最大值为_______

练习：1. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+x+2}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的最大值

类型八： 函数 $f(x)=\dfrac{x+b}{\sqrt{x+a}}$

此类函数可变形为标准形式：$f(x)=\dfrac{x+a+b-a}{\sqrt{x+a}}=\sqrt{x+a}+\dfrac{b-a}{\sqrt{x+a}}(b-a>0)$

例 8 求函数 $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}$ 的最小值

解：$f(x)=\dfrac{x-1+4}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}+\dfrac{4}{\sqrt{x-1}}$

练习： 1．求函数 $f(x)=\dfrac{x+5}{\sqrt{x+1}}$ 的值域

2. 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+3}$ 的值域

类型九：函数 $f(x)=\dfrac{x^2+b}{\sqrt{x^2+a}}(a>0)$

此类函数可变形为标准形式：

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+a})^2+b-a}{\sqrt{x^2+a}}=\sqrt{x^2+a}+\frac{b-a}{\sqrt{x^2+a}}(b-a>o)$$

例 9 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值

解：$f(x)=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}\Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2+4+1}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

练习：1. 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+17}$ 的值域

例 10 已知 $a>0$, 求函数 y= $\dfrac{x^2+a+1}{\sqrt{x^2+a}}$ 的最小值。

解：y= $\dfrac{x^2+a+1}{\sqrt{x^2+a}}=\sqrt{x^2+a}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

令 t= $\sqrt{x^2+a}$ ($t\geq\sqrt{a}$),则 y= $t+\dfrac{1}{t}$

当 $\sqrt{a}\geq1$ 即 $a\geq1$ 时， $y_{min}=\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

当 $\sqrt{a}<1$ 即 $0<a<1$ 时， $y_{min}=2$