100 بحث

مقدمة في بحوث العمليات

Introduction to Operations Research

أستاذ المقرر

د. أحمد الشمراني

مكتب: أ ب 26

ahmadm@ksu.edu.sa

هاتف مكتب: 4676330

الكتاب المقرر

الكتاب المقرر: مقدمة في بحوث العمليات

تأليف: د. زيد البلخي

مطابع الجامعة

مرجع ممتاز باللغة الإنجليزية:

OPERATIONS RESEARCH

APPLICATIONS AND ALGORITHMS

FOURTH EDITION

Wayne L. Winston

توزيع الدرجات

الاختبار الأول	25
الاختبار الثاني	25
المعيد	10
الاختبار النهائي	40

إدارة الكلية هي من تحدد مواعيد الاختبارات الشهرية
(الاختبار موحد لجميع الشعب)

المقـــدمـــة

- نشأة علم بحوث العمليات (Operations Research)
- طبيعة وتعريف علم بحوث العمليات
- تطبيقات علم بحوث العمليات

نشأة علم بحوث العمليات

- **العمليات العسكرية خلال الحرب العالمية الثانية**
  - فريق بحوث العمليات العسكرية في الجيش البريطاني (1941م)
  - فريق بحوث العمليات العسكرية في الجيش الأمريكي

بعد نهاية الحرب العالمية الثانية، بدأ انتشار بحوث العمليات بشكل سريع في المجالات غير العسكرية.

طبيعة وتعريف علم بحوث العمليات

ما هو علم بحوث العمليات؟

هو تطبيق الطرق العلمية لإيجاد أفضل الحلول للمشاكل المعقدة التي تنشأ عند تشغيل وإدارة النظم الصناعية أو التجارية أو المدنية أو العسكرية والمشتملة على الإنسان والآلات والمواد الخام والأموال.

طبيعة وتعريف علم بحوث العمليات

ما هو علم بحوث العمليات؟

تعريف معهد بحوث العمليات والعلوم الإدارية الأمريكي:

تطبيق الأساليب التحليلية المتقدمة للمساعدة في اتخاذ قرارات أفضل

تعريف سريع للتذكر: استخدام الرياضيات في الإدارة

طبيعة وتعريف علم بحوث العمليات

بحوث
Research

العمليات
Operations

إيجاد طريقة علمية

مجالات التطبيق
إدارية ، صناعية ،
اقتصادية ، عسكرية

طبيعة وتعريف علم بحوث العمليات

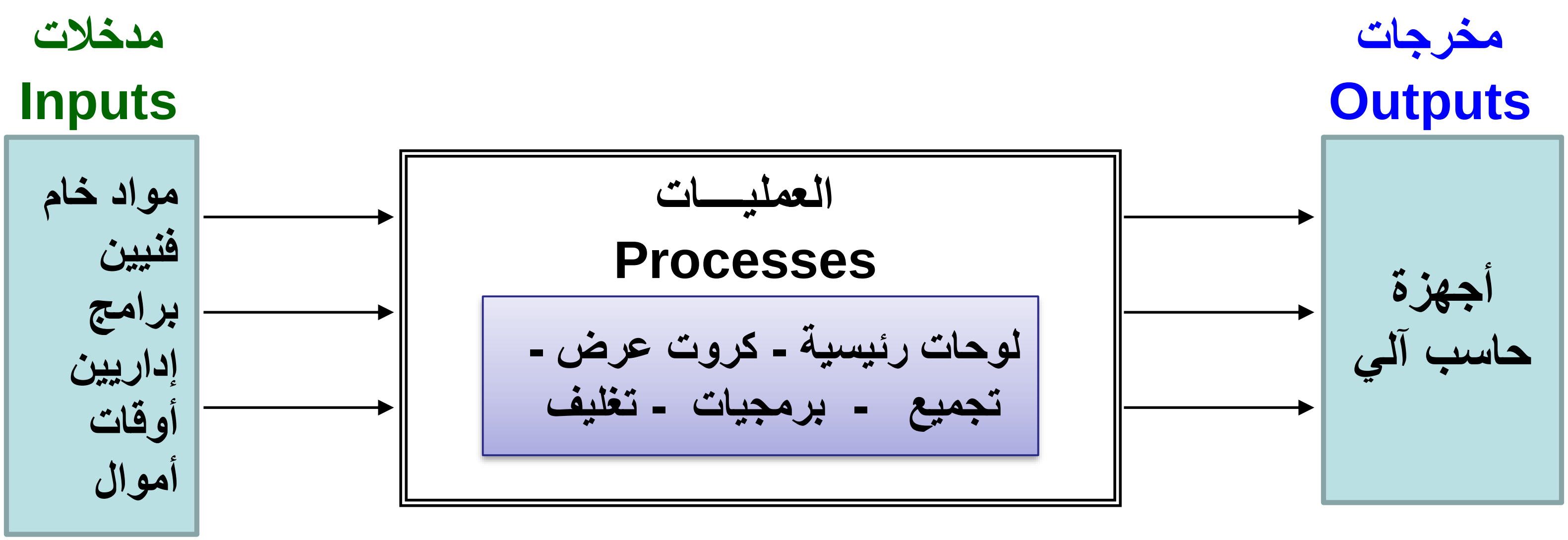
- قد تجد أحياناً مسميات مختلفة لتخصص علم بحوث العمليات في بعض الدول أو الجامعات أو الكتب، مثل:
  - علم اتخاذ القرار (Decision Science)
  - علم الإدارة (Management Science)
  - بحوث العمليات في الجامعات البريطانية يسمى: (Operational Research)
- يعتبر تخصص فرعي من الرياضيات.
- يتداخل علم بحوث العمليات مع علوم أخرى، لا سيما الهندسة الصناعية وإدارة العمليات.

مثال: نموذج نظام إنتاجي

الهدف: كيفية إدارة العمليات للحصول على أفضل المخرجات

مثال: نموذج نظام إنتاجي

مصنع أجهزة حاسب آلي



الهدف: كيفية إدارة العمليات للحصول على أعلى الأرباح

بعض تطبيقات علم بحوث العمليات

- مراقبة وضبط المخزون لضمان تأمين الطلب
- جدولة الآلات والأشخاص والمشاريع
- مسائل النقل والتخصيص والتوزيع
- دراسة الشبكات
- نظرية المباريات والتنافس

بعض تطبيقات علم بحوث العمليات

- قرارات الاستثمار المثلى
- نظرية الصفوف
- التنبؤ
- المحاكاة

وهناك تطبيقات أخرى في المجالات الإدارية والاقتصادية والعسكرية

بناء النماذج في بحوث العمليات
(Model Building in Operations Research)

النمذجة (Modeling)

هي مجموعة إجراءات تتضمن عمليات معقدة مرتبطة ببعضها لإنشاء نموذج ممثل لمشكلة حقيقية. أي تمثيل المشكلة الحقيقية بشيء أبسط منها نسميه النموذج. ويمكن أن نصنف النماذج وفق ما يأتي:

نماذج فيزيائية : وهي تمثل أنظمة فيزيائية تكون تكلفة تصميمها كبيرة أو تأخذ وقتاً طويلاً. فيكون النموذج تبسيطاً لعرض هذا النظام الفيزيائي الحقيقي. و يكون الهدف من النمذجة هو تحليل سلوك النظام لمعرفة ميزاته (إذا كان النظام موجوداً) أو من أجل إيجاد أفضل تصميم له في المستقبل (إذا كان النظام فكرة تنتظر التنفيذ).

النمـذجـة

نماذج ذهنية : يوجد هذا النوع من النماذج في عقل الإنسان فقط. ويتكون نتيجة لتراكم خبرات الإنسان وتجاربه. وهذه النماذج غالباً ما تكون غير واضحة وغير محددة، ولا يمكن التعبير عنها بعلاقات من أي نوع، ولكنها تساعد الإنسان على اتخاذ القرارات ورسم المخططات الضرورية لمسيرة حياته.

نماذج رمزية : وتتكون من نماذج رياضية وأخرى غير رياضية. نقصد بالنماذج غير الرياضية: نماذج لغوية (كلامية)، نماذج رسومية ومخططات ، ... ، أما النماذج الرياضية فهي ولعدة أسباب تعد الأهم والأكثر استخداماً من سائر أنواع النماذج الأخرى.

النمذجة الرياضية (Mathematical Modeling)

- هي التعبير عن الترابط بين المتغيرات الفيزيائية لنظام ما بعلاقات رياضية. أو بشكل آخر، النمذجة الرياضية هي صياغة مسألة ما وفق علاقات رياضية يطلق عليها اسم النموذج الرياضي.
- تستخدم النماذج الرياضية في العلوم الطبيعية (مثل الفيزياء ، الجيولوجيا ، ...) والهندسية (مثل هندسة النقل ، الذكاء الاصطناعي ، ...) والاجتماعية (مثل علم الاقتصاد ، علم النفس ، ...).
- أمثلة للنماذج الرياضية: البرامج الرياضية ، النماذج الإحصائية ، المعادلات التفاضلية ، ...

خطوات اتخاذ القرار الرياضي لحل مشكلة

1. تحديد المشكلة والهدف ضمن افتراضات معينة تتناسب وطبيعة المشكلة ومع رغبة متخذ القرار.
2. إيجاد النموذج الرياضي المناسب لتحقيق الهدف الذي نريد.
3. إيجاد الحلول المثلى باستخدام الطرق الرياضية المناسبة.

النمذجة الرياضية

لتكوين نموذج رياضي لأي مسألة أو مشكلة مطروحة لا بد من اتباع الخطوات الآتية:

1. دراسة المشكلة المطروحة وتحديد غايتها ومكوناتها. فيجب أن تكون هناك غاية ما يراد الوصول إليها، مثل تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف. كما يجب تحديد مجاهيل المسألة التي يجب إيجاد قيمها للوصول للغاية المطلوبة ، يمكن أن تكون هذه المجاهيل كميات إنتاج لمنتوجات معينة أو ساعات عمل في مؤسسة اقتصادية أو مبالغ من المال لفعاليات معينة أو كميات منقولة بين أماكن معينة وغير ذلك.

النمذجة الرياضية

2. تحديد المدخلات والمخرجات في ضوء الإمكانات المتاحة، وتحديد القيود المفروضة على المشكلة ، فمثلاً قد يكون هنالك قيود المواد الأولية المتوفرة وساعات الانتاج.
3. بيان علاقات التأثير بين مجاهيل المسألة. فمثلاً في مصنع معين، إذا زاد إنتاج أحد المنتوجات فإن ذلك سيؤدي إلى إنقاص الإنتاج من المنتوجات الأخرى. كما أن هناك شروطاً يجب أن تحققها هذه المجاهيل بغض النظر عن مردودها من حيث الغاية التي يجب تحقيقها. فمثلاً إذا كان أحد المجاهيل ممثلاً لكمية منتجة، يشترط فيه ألا يكون سالباً، وقد يفترض فيه ألا يقل عن أو أن يزيد على كمية معينة.

النمذجة الرياضية

4. بعد تحديد كل ما ورد أعلاه فإنه بالإمكان صياغة المسألة ضمن علاقات رياضية بمجموعها نطلق عليها اسم "النموذج الرياضي". وهذا النموذج هو تمثيل للمشكلة بصيغة رياضية قابلة للحل باستخدام إحدى الطرق أو الوسائل المتوافرة في بحوث العمليات.

وبشكل عام لا تكون المسألة الحقيقية سهلة الترجمة إلى نماذج رياضية. وحتى لو فرضنا أنه من الممكن ترجمة أي مسألة نصية إلى نموذج رياضي، فإنه ليس من الضروري أن يكون لكل نموذج رياضي حلول. لذلك فإنه من الضروري أحيانا أن نبسط المسألة أو نقربها إلى مسألة أخرى قريبة منها، وفي الوقت نفسه تكون أسهل للترجمة إلى نموذج رياضي، على أن نحافظ في أثناء عملية التقريب (التبسيط) لمسألة ما على كل الميزات الأساسية لها.

النمذجة الرياضية

بعد إيجاد النموذج الرياضي والحصول على نتائج حله، فإننا نكون أمام إحدى حالتين:

- إذا كانت هذه النتائج جيدة ومُرْضية ، فإننا نكون قد وفقنا بإيجاد النموذج الرياضي الذي يمثل المسألة الحقيقية.
- وإذا لم تكن النتائج مُرْضية ، فإننا نحاول إجراء بعض التعديلات والتغييرات في الفرضيات التي اعتبرناها عند تقريب المسألة، أو أن نبحث عن هيكل آخر للنموذج الرياضي.

البرمجة الرياضية

Mathematical Programming

- من أهم وأشهر النماذج الرياضية هو "البرنامج الرياضي"
- مسألة البرمجة الرياضية تعني – بشكل عام – البحث عن القيمة المثلى (صغرى أو عظمى) لدالة تسمى دالة الهدف تضم عدة متغيرات. تخضع هذه المتغيرات لمجموعة من القيود تأخذ صيغة معادلات أو متراجحات. إن حل مسألة البرمجة الرياضية يتطلب إذاً إيجاد قيم المتغيرات التي تحقق جميع القيود وتحقق القيمة المثلى لدالة الهدف.
- كلمة برمجة هنا تعني <u>التخطيط</u> للاستغلال الأمثل للموارد (مثل: تحديد <u>خطة</u> الإنتاج اليومي في أحد المصانع للحصول على أكبر ربح ممكن).
- سندرس فقط البرمجة الرياضية الخطية.

عناصر البرنامج الرياضي

- معالم النظام (Parameters)

بيانات معطاة، متخذ القرار لا يملك التحكم فيها

- متغيرات القرار (Decision Variables)

متخذ القرار يملك التحكم فيها

- دالة الهدف (Objective Function)

دالة تقييم القرار (مقدار المنفعة الحاصلة من قرار ما)

- القيود (Constraints)

الموارد المتاحة ، بيئة المشكلة ، العلاقة التي تربط متغيرات القرار

(معادلات أو متراجحات: $=$ ، $\leq$ ، $\geq$)

(لا نستخدم: $<$ ، $>$)

بناء النموذج الرياضي - مثال

مصنع ينتج نوعين من الدهانات : دهانات خارجية و دهانات داخلية.

ولإنتاج كل نوع من أنواع هذه الدهانات يتم مزج مادتين أساسيتين من المواد الخام هما: مادة A و مادة B. وتستطيع إدارة المصنع تأمين 6 أطنان على الأكثر يومياً من مادة A و 8 أطنان على الأكثر يومياً من مادة B. ولإنتاج طن واحد يومياً من الدهان الخارجي يتم مزج طن واحد من مادة A مع طنين من مادة B. في حين أن الطن الواحد المنتج من الدهان الداخلي يستلزم مزج طنين من مادة A مع طن واحد من مادة B. ومن خلال الدراسات على السوق تبين أن الطلب على الدهان الداخلي لا يمكن أن يزيد عن الطلب على الدهان الخارجي بأكثر من طن واحد يومياً. كما أظهرت الدراسات على الطلب أن إجمالي الطلب اليومي للدهان الداخلي لا يتعدى طنين يومياً. وترغب إدارة المصنع إيجاد سياسة الإنتاج المثلى لتشغيل المصنع علماً بأن المصنع يبيع الطن الواحد من الدهان الخارجي بـربح 3000 ريال والطن الواحد من الدهان الداخلي بـربح 2000 ريال.

بناء النموذج الرياضي

1 - معالم النظام (Parameters)

وهي معطيات المسألة. لا يملك متخذ القرار التحكم فيها.

- عدد الأطنان المتوفرة يومياً من مادة A = 6
- عدد الأطنان المتوفرة يومياً من مادة B = 8
- كمية مادة A الممزوجة في الطن الواحد من الدهان الخارجي = 1
- كمية مادة B الممزوجة في الطن الواحد من الدهان الخارجي = 2
- كمية مادة A الممزوجة في الطن الواحد من الدهان الداخلي = 2
- كمية مادة B الممزوجة في الطن الواحد من الدهان الداخلي = 1
- نسبة الطلب من الدهان الخارجي إلى الطلب من الدهان الداخلي
- أسعار بيع الطن من الدهان الخارجي والداخلي

بناء النموذج الرياضي

2 - متغيرات القرار (Decision Variables)

وهي القرارات (الخيارات) التي يملك متخذ القرار التحكم فيها.

- كمية مادة A المضافة لمادة B لإنتاج الطن من الدهان الخارجي ✗
- كمية مادة A المضافة لمادة B لإنتاج الطن من الدهان الداخلي ✗
- نسبة الطلب من الدهان الخارجي إلى الطلب من الدهان الداخلي ✗
- عدد الأطنان المتوفرة يومياً من مادة A ✗
- عدد الأطنان المتوفرة يومياً من مادة B ✗

بناء النموذج الرياضي

2 - متغيرات القرار (Decision Variables)

و هي القرارات (الخيارات) التي يملك متخذ القرار التحكم فيها.

- عدد الأطنان المنتجة يومياً من الدهان الخارجي ✓
  ولتكن x_1
- عدد الأطنان المنتجة يومياً من الدهان الداخلي ✓
  ولتكن x_2

بناء النموذج الرياضي

3 - دالة الهدف (Objective Function)

وهي دالة تقييم السياسات الإنتاجية الممكنة.

السياسة الإنتاجية ⇔ كمية الإنتاج من الدهان الخارجي والداخلي

على أي أساس يتم التقييم ؟؟

- سعر بيع الطن من الدهان الخارجي = 3000 ريال
- سعر بيع الطن من الدهان الداخلي = 2000 ريال

⇐ تقييم السياسات على أساس العوائد اليومية

بناء النموذج الرياضي

3 - دالة الهدف (Objective Function)

إجمالي العوائد اليومية =

(عدد الأطنان المنتجة من الخارجي يومياً) × (سعر بيع طن دهان خارجي)

+ (عدد الأطنان المنتجة من الداخلي يومياً) × (سعر بيع طن دهان داخلي)

=

(عدد الأطنان المنتجة من الدهان الخارجي يومياً) × (3000)

+ (عدد الأطنان المنتجة من الدهان الداخلي يومياً) × (2000)

=

$$3000\, x_1 + 2000\, x_2$$

بناء النموذج الرياضي

3 - دالة الهدف (Objective Function)

لتكن قيمة التقييم لأي سياسة (x_1 , x_2) هي z

$$z = 3000\, x_1 + 2000\, x_2$$

ما هو الهدف من التقييم (Optimality)؟؟

– أرباح ⇐ تعظيم قيمة الدالة (maximize)

– تكـــــاليف ⇐ تقليـل قيمة الدالة (minimize)

دالة الهدف:

$$\max \quad z = 3000\, x_1 + 2000\, x_2$$

بناء النموذج الرياضي

4 - القيـــــود (Constraints)

من صياغة المشكلة نجد أن :

1. إجمالي المتوفر يوميا من مادة A = 6 أطنان
2. إجمالي المتوفر يوميا من مادة B = 8 أطنان
3. لا يمكن أن يزيد الطلب على الدهان الخارجي بأكثر من طن يوميا
4. إجمالي الطلب اليومي للدهان الداخلي لا يتعدى طنين يوميا
5. قيود طبيعة القرار

بناء النموذج الرياضي

4 - القيـــــود (Constraints)

1. إجمالي المتوفر يوميا من مادة A = 6 أطنان

لا تستطيع إدارة المصنع أن تجعل الإنتاج اليومي من النوعين يستهلك أكثر من 6 أطنان يوميا من مادة A

(الحد الأعلى المتاح من مادة A يومياً) ≤ (إجمالي استهلاك المادة A يومياً)

2. إجمالي المتوفر يوميا من مادة B = 8 أطنان

لا تستطيع إدارة المصنع أن تجعل الإنتاج اليومي من النوعين يستهلك أكثر من 8 أطنان يوميا من مادة B

(الحد الأعلى المتاح من مادة B يومياً) ≤ (إجمالي استهلاك المادة B يومياً)

بناء النموذج الرياضي

4 - القيـــــود (Constraints)

إجمالي استهلاك المادة A يومياً =

عدد الأطنان المنتجة من الدهان الخارجي × (كمية المادة A المستهلكة لانتاج طن واحد من الدهان الخارجي)

+ عدد الأطنان المنتجة من الدهان الداخلي × (كمية المادة A المستهلكة لانتاج طن واحد من الدهان الداخلي)

$$1x_1 + 2x_2 =$$

إذن قيد الاستهلاك على مادة A

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

بناء النموذج الرياضي

4 - القيـــــود (Constraints)

إجمالي استهلاك المادة B يوميا =

عدد الأطنان المنتجة من الدهان الخارجي × (كمية المادة B المستهلكة لانتاج طن واحد من الدهان الخارجي)

+ عدد الأطنان المنتجة من الدهان الداخلي × (كمية المادة B المستهلكة لانتاج طن واحد من الدهان الداخلي)

$$2x_1 + 1x_2 =$$

إذن قيد الاستهلاك على مادة B

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

بناء النموذج الرياضي

4 - القيـــــود (Constraints)

3. الطلب على الدهان الداخلي لا يمكن أن يزيد عن الطلب على الدهان الخارجي بأكثر من طن واحد يومياً.

الحد الأعلى لعدد الأطنان المنتجة من الدهان الداخلي

= عدد الأطنان المنتجة من الدهان الخارجي يومياً + 1

إذن قيد الطلب على الدهان الداخلي بالنسبة للدهان الخارجي

$$x_2 \leq x_1 + 1 \iff -x_1 + x_2 \leq 1$$

بناء النموذج الرياضي

4 - القيـــــود (Constraints)

4. إجمالي الطلب اليومي للدهان الداخلي لا يتعدى طنين يومياً

الحد الأعلى للطلب على الدهان الداخلي = 2

إذن قيد الحد الأعلى للطلب على الدهان الداخلي

$$x_2 \leq 2$$

بناء النموذج الرياضي

4 - القيـــــود (Constraints)

5. قيود طبيعة القرار:

– وحدة قياس متغيرات القرارات أطنان ⇐ متغيرات متصلة (Continuous)

– متغيرات القرار تمثل إنتاج ⇐ غير سالبة

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

البرنامج الرياضي الخطي

$x_1 =$ عدد الأطنان المنتجة يومياً من الدهان الخارجي

$x_2 =$ عدد الأطنان المنتجة يومياً من الدهان الداخلي

$$\max \ z = 3000x_1 + 2000x_2$$

subject to:

$$x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$2x_1 + x_2 \le 8$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_2 \le 2$$
$$x_1 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

تكتب عادة:

$x_1 , x_2 \ge 0$

بناء النموذج الرياضي

<u>مثال 2:</u>

يعمل مصنع على إنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات: المنتج-1، المنتج-2 ، المنتج-3 . ولإنتاج وحدة واحدة من أي منتج من هذه المنتجات الثلاثة يتم مزج مادتين من ثلاثة مواد خام هي: خام-1 ، خام-2 ، خام-3 وذلك بمقادير محددة حسب الجدول التالي:

المواد الخام المستهلكة (بالكيلو) للوحدة الواحدة			
المنتج-3	المنتج-2	المنتج-1	
3	0	2	خام-1
0	1	3	خام-2
5	4	0	خام-3

بناء النموذج الرياضي

ويستطيع المصنع تأمين 400 كيلو يومياً من خام-1 و 300 كيلو يومياً من خام-2 و 350 كيلو يومياً من خام-3. تتم عملية الإنتاج بمرور المنتجات الثلاثة على آلتين متتاليتين هما: آلة-1 ، آلة-2 بحيث يستغرق كل منتج وقت محدد عند كل آلة حسب الجدول التالي:

الوقت المستغرق (بالساعة) للوحدة الواحدة عند كل آلة			
المنتج-3	المنتج-2	المنتج-1	
4	3	2	آلة-1
1	2	3	آلة-2

علما بأن المصنع يعمل لمدة 16 ساعة يوميا. فإذا علمت أن المصنع يربح 200 ريال لكل وحدة من المنتج-1 ويربح 350 ريال لكل وحدة من المنتج-2 ويربح 750 ريال لكل وحدة من المنتج-3 ، فأكتب البرنامج الرياضي الذي يحدد للمصنع السياسة الإنتاجية المثلى.

بناء النموذج الرياضي

1 - متغيرات القرار (Decision Variables)

- x_1 = عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتج-1
- x_2 = عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتج-2
- x_3 = عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتج-3

2 - دالة الهدف (Objective Function)

السياسة الإنتاجية $\Leftrightarrow$ كمية الإنتاج من كل منتج يومياً

التقييم (الأمثلية) على أساس الأرباح $\Leftarrow$ max

قيمة أي سياسة إنتاجية = z

$$\max\ z = 200\,x_1 + 350\,x_2 + 750\,x_3$$

بناء النموذج الرياضي

3 - القيـــــود (Constraints)

من صياغة المشكلة نجد أن الموارد المتاحة:

1. إجمالي المتوفر يومياً من مادة خام-1 = 400 كيلو
2. إجمالي المتوفر يومياً من مادة خام-2 = 300 كيلو
3. إجمالي المتوفر يومياً من مادة خام-3 = 350 كيلو
4. ساعات العمل اليومية على آلة-1 = 16 ساعة
5. ساعات العمل اليومية على آلة-2 = 16 ساعة

بناء النموذج الرياضي

3 - القيـــــود (Constraints)

باستخدام السياسة الإنتاجية x_3 , x_2 , x_1 فإن:

1. الاستهلاك من مادة خام-1 $= 2x_1 + 0\,x_2 + 3x_3$
2. الاستهلاك من مادة خام-2 $= 3x_1 + 1\,x_2 + 0x_3$
3. الاستهلاك من مادة خام-3 $= 0x_1 + 4\,x_2 + 5x_3$
4. ساعات العمل على آلة-1 $= 2x_1 + 3\,x_2 + 4x_3$
5. ساعات العمل على آلة-2 $= 3x_1 + 2\,x_2 + 1x_3$

البرنامج الرياضي الخطي

x_1 = عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتج-1

x_2 = عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتج-2

x_3 = عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتج-3

$$\max\ z = 200x_1 + 350x_2 + 750x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned}
2x_1 \qquad\qquad + 3x_3 &\le 400 \\
3x_1 + x_2 \qquad\qquad &\le 300 \\
4x_2 + 5x_3 &\le 350 \\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\le 16 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 16 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}$$

بناء النموذج الرياضي

مثال 3:

ترغب إدارة شركة بترول استثمار رأس مالها في هذه السنة والسنة المقبلة ولديها خمس فرص استثمارية كما هو موضح في الجدول التالي مع صافي الأرباح (بملايين الريالات). لدى الشركة 40 مليون ريال للإستثمار في السنة الحالية ويتوقع أن يتوفر للشركة في السنة المقبلة 20 مليون ريال للاستثمار. تستطيع الشركة شراء أي نسبة من كل استثمار على أن تستثمر نفس النسبة من الاستثمار في السنة المقبلة ولا تستطيع الشركة استخدام ما بقي من رأس المال في السنة الحالية للاستثمار في السنة القادمة.

	استثمار 1	استثمار 2	استثمار 3	استثمار 4	استثمار 5
قيمة الاستثمار في السنة الحالية	11	53	5	5	29
قيمة الاستثمار في السنة القادمة	3	6	5	1	34
صافي الأرباح	13	16	16	14	39

البرنامج الرياضي الخطي

x_i = نسبة المبلغ المستثمر في الاستثمار رقم i ، $i = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\max \ z = 13x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 14x_4 + 39x_5$$

s.t.

$$11x_1 + 53x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 29x_5 \le 40$$

$$3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 1x_4 + 34x_5 \le 20$$

$$x_i \le 1 \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$x_i \ge 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

بناء النموذج الرياضي

مثال 4:

تمتلك شركة وجبات سريعة مستودعين غذائيين لتأمين احتياجات ثلاثة فروع لها في المملكة. ويبين الجدول التالي احتياج كل فرع ومحتوى كل مستودع من الأغذية (بالطن) بالإضافة إلى تكلفة نقل الطن الغذائي الواحد من كل مستودع إلى أي فرع من الفروع. فأوجد النموذج الرياضي بحيث تؤمّن الشركة احتياجات كل فرع بأقل تكلفة إجمالية.

محتويات المستودع	تكلفة شحن الطن			
	فرع-3	فرع-2	فرع-1	
5	20	12	23	مستودع-1
8	4	19	8	مستودع-2
	2	3	4	طلب الفرع

البرنامج الرياضي الخطي:

x_{ij} = عدد الأطنان المنقولة من المستودع i إلى الفرع j ،

$i = 1, 2$ تمثل المستودع الأول والثاني

$j = 1, 2, 3$ تمثل الفرع الأول والثاني والثالث

$$\min \ z = 23x_{11} + 12x_{12} + 20x_{13} + 8x_{21} + 19x_{22} + 4x_{23}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 5$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 8$$

$$x_{11} + x_{21} \geq 4$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 3$$

$$x_{13} + x_{23} \geq 2$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2 \qquad j = 1, 2, 3.$$

البرنامج الرياضي الخطي:

x_{ij} = عدد الأطنان المنقولة من المستودع i إلى الفرع j ،

$i = 1, 2$ تمثل المستودع الأول والثاني

$j = 1, 2, 3$ تمثل الفرع الأول والثاني والثالث

$$\min \; z = 23x_{11} + 12x_{12} + 20x_{13} + 8x_{21} + 19x_{22} + 4x_{23}$$

s.t.

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 5$ (الكمية الخارجة من المستودع الأول)

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 8$ (الكمية الخارجة من المستودع الثاني)

$x_{11} + x_{21} \geq 4$ (الكمية الداخلة للفرع الأول)

$x_{12} + x_{22} \geq 3$ (الكمية الداخلة للفرع الثاني)

$x_{13} + x_{23} \geq 2$ (الكمية الداخلة للفرع الثالث)

$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2 \qquad j = 1, 2, 3.$

بناء النموذج الرياضي

مثال 5:

شركة منتجات إلكترونية تنتج نوعين من الحاسبات الشخصية : A و B. يمر كل نوع من هذه الأجهزة عبر ثلاث مراحل للإنتاج هي: مرحلة إعداد اللوحة الأساسية ، مرحلة تركيب محركات الأقراص ، مرحلة تحميل نظام التشغيل. الوقت الذي يستغرقه كل جهاز في كل من هذه المراحل موضح في الجدول التالي. وتوظف الشركة (7) فنيين موزعين على النحو التالي : (5) فنيين في قسم إعداد اللوحات الأساسية و (1) فني في قسم تركيب محركات الأقراص و (1) فني في قسم تحميل نظام التشغيل والبرمجيات ، وكل فني يعمل (8) ساعات يومياً ، علماً بأن فني البرمجيات يستطيع العمل على ثلاثة أجهزة في آن واحد ، وتستطيع الشركة تخزين مجموع (10) أجهزة يومياً. وتربح الشركة (800) ريال في الجهاز من نوع A بينما تربح (500) ريال في الجهاز من نوع B

بناء النموذج الرياضي

نوع الجهاز	الوقت المستغرق (ساعة)		
	اللوحة الأساسية	محركات الأقراص	نظام التشغيل
A	3	1	2
B	2	0.5	1

البرنامج الرياضي الخطي

x_1 = عدد الأجهزة المصنعة يومياً من النوع A.

x_2 = عدد الأجهزة المصنعة يومياً من النوع B.

$$\max z = 800x_1 + 500x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\le 40 \\ x_1 + 0.5x_2 &\le 8 \\ 2x_1 + x_2 &\le 24 \\ x_1 + x_2 &\le 10 \\ x_1 , x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

مقدمة في البرمجة الخطية

Introduction to Linear Programming

مقدمة في البرمجة الخطية

- **تعريف:**

يقال أن الدالة $f(x_1, \ldots, x_n)$ دالة خطية إذا كانت على الصورة

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

لأي قيم حقيقية للثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_n$

- **تعريف:**

لأي دالة خطية $f(x_1, \ldots, x_n)$ وثابت b فإن:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \le b \quad \text{أو} \quad f(x_1, \ldots, x_n) \ge b$$

تسمى متراجحة خطية

و $f(x_1, \ldots, x_n) = b$ تسمى معادلة خطية

مقدمة في البرمجة الخطية

- **ملاحظة:**

لأي دالة خطية $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ وثابت b فإن:

$f\,(x_1, \ldots, x_n) < b$ أو $f\,(x_1, \ldots, x_n) > b$

لا تعتبر متراجحة خطية !

مقدمة في البرمجة الخطية

- **تعريف:**

البرنامج الرياضي يسمى برنامجاً خطياً إذا احتوى على الآتي:

1. دالة هدف خطية في متغيرات القرار $(x_1, \ldots, x_n)$ و يراد تعظيم قيمتها (maximize) أو تقليل قيمتها (minimize).
2. مجموعة من دوال القيود الخطية في متغيرات القرار في صورة معادلات خطية أو متراجحات خطية.
3. قيود الإشارة (مثل قيود اللا سالبية) على جميع متغيرات القرار.

- جميع البرامج الرياضية التي سبق صياغتها في المحاضرات السابقة هي برامج خطية.

افتراضات البرنامج الخطي

1. التناسب (النسبية) (Proportionality)

- مساهمة كل متغير في قيمة دالة الهدف تتناسب مع قيمة المتغير.
- مساهمة كل متغير في قيمة الطرف الأيسر للقيد الخطي تتناسب مع قيمة المتغير.

$$x_1 + x_2 \leq 8 \quad \checkmark$$

$$x_1^2 + x_2 \leq 8 \quad \text{X}$$

$$x_1 + \sqrt{x_2} \leq 8 \quad \text{X}$$

افتراضات البرنامج الخطي

2. التجميع (Additivity)

- قيمة دالة الهدف هي مجموع العائد من كل متغير على حدة.
- مقدار الاستهلاك لأي مورد في أي قيد هو مجموع استهلاك كل متغير على حدة.

أي أن مساهمة كل متغير في البرنامج الخطي مستقل عن قيمة بقية المتغيرات. علاقة المتغيرات مع بعضها البعض علاقة جمعية فقط $\pm$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \quad \checkmark$$

$$x_1 x_2 + x_3 \le 5 \quad \text{X}$$

افتراضات البرنامج الخطي

3. الاتصال (Continuity)

جميع متغيرات القرار متغيرات متصلة وليس منها متغيرات متقطعة (صحيحة). أي يسمح للمتغير يأخذ قيم حقيقية (كسرية).

✓ $x_1 \geq 0$

X $x_1 = 0 \text{ or } 1 \text{ or } 2 \text{ or } 3 \text{ or } 4 \ldots$

4. التأكد (Certainty)

جميع معالم النظام محددة بشكل حتمي وليس في النظام أي عوامل احتمالية أو متغيرات عشوائية.

$x_1 + x_2 \leq b \quad , \quad x_1 \sim \text{Normal Distribution}$ X

$b \sim \text{Normal Distribution}$ X

الحل البياني للبرامج الخطية

Graphical Solution of Linear Programs

الحل البياني للبرنامج الخطي

- أي معادلة في متغيرين (أو ثلاثة متغيرات) يمكن تمثيلها بيانياً.
- المعادلة الخطية في متغيرين يتم تمثيلها بيانيا بخط مستقيم.
  - نحتاج معرفة نقطتين على المستقيم
  - أو نقطة على المستقيم وميل المستقيم
- المتراجحة الخطية في متغيرين يتم تمثيلها بيانياً بنصف فضاء مغلق.
  - نحتاج معرفة نقطتين لرسم مستقيم المتراجحة، ونقطة إضافية ليست على المستقيم لتحديد إتجاه تحقق المتراجحة الخطية.
  - تنصف الفضاء الذي تنتمي إليه $\mathbf{R}^2$ إلى نصفين.

الحل البياني للبرنامج الخطي

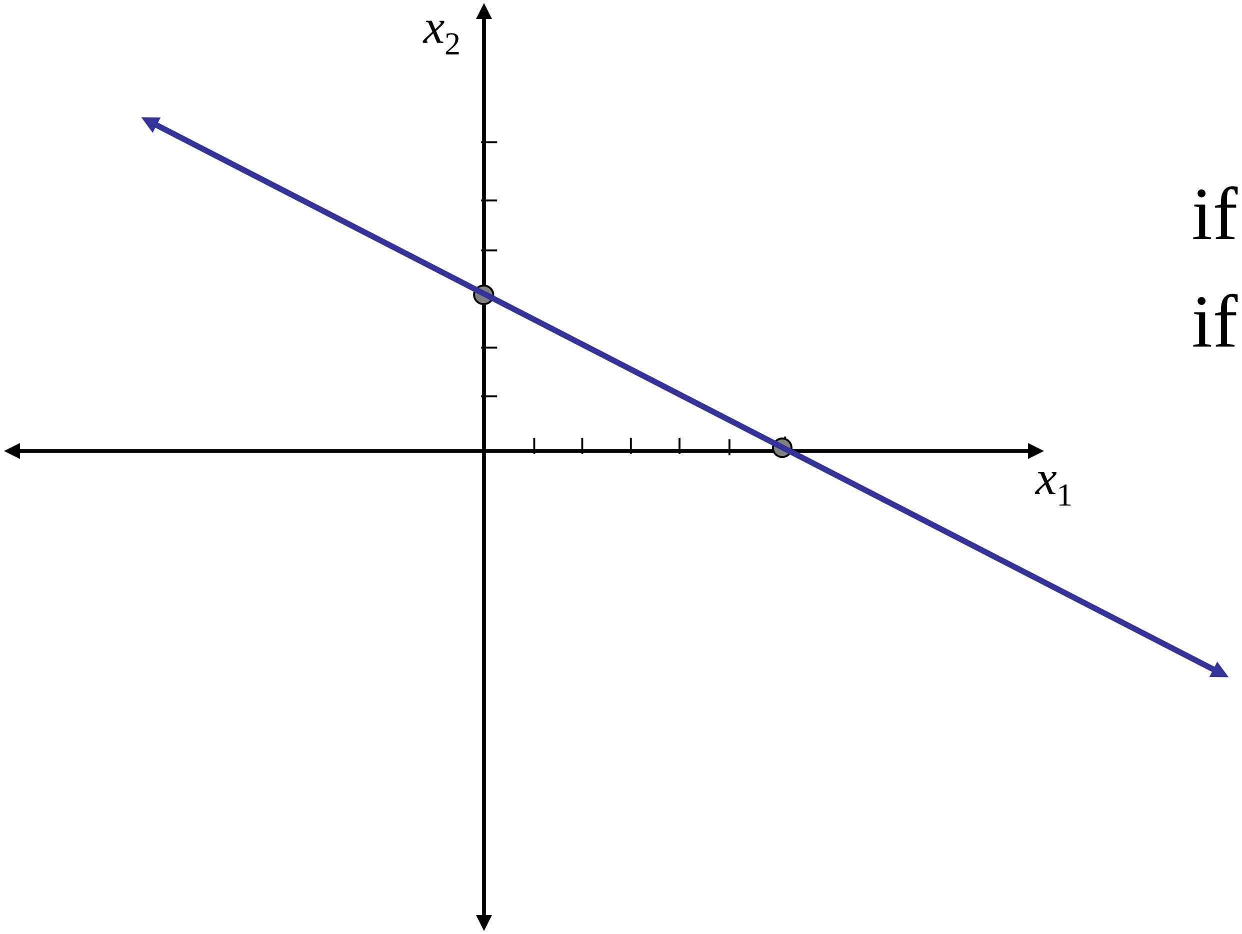
مثال: $x_1 + 2x_2 = 6$

نحتاج نقطتين:

$$\text{if} \quad x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$$

$$\text{if} \quad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6$$

(0,3) and (6,0)



الحل البياني للبرنامج الخطي

مثال: $x_1 + 2x_2 \leq 6$

نحتاج نقطتين لرسم المستقيم

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$\text{if} \quad x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$$

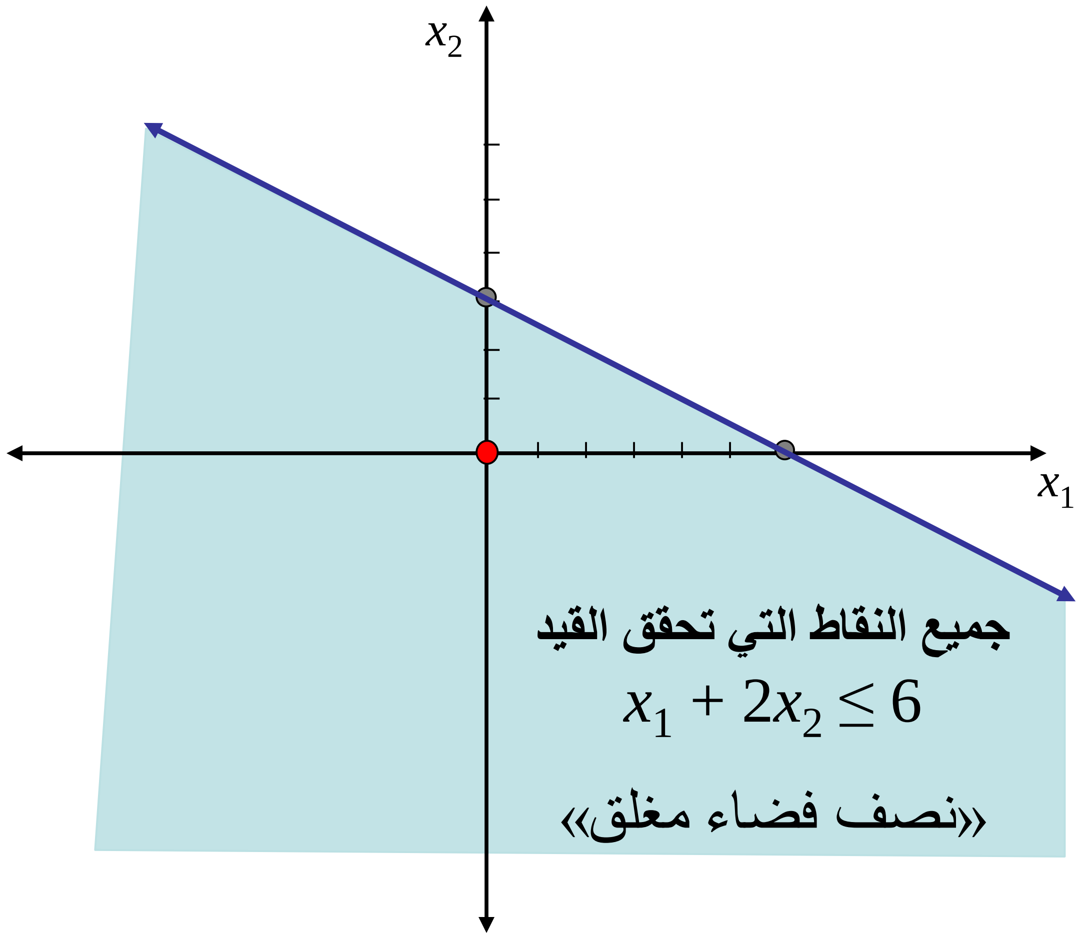
$$\text{if} \quad x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6$$

$$(0,3) \text{ and } (6,0)$$

نحتاج نقطة إضافية للتعويض ومعرفة اتجاه تحقق المتراجحة

$$(0,0)$$

$$0 + 2\,(0) = 0 < 6$$



الحل البياني للبرنامج الخطي

- تمرين:

ارسم القيود التالية:

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 2x_2 &= 10 \\
2x_2 &= 4 \\
3x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\
8x_1 &\geq 16
\end{aligned}
$$

الحل البياني للبرنامج الخطي

مثال : استخدم الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي:

$$\max \ z = 3000x_1 + 2000x_2$$

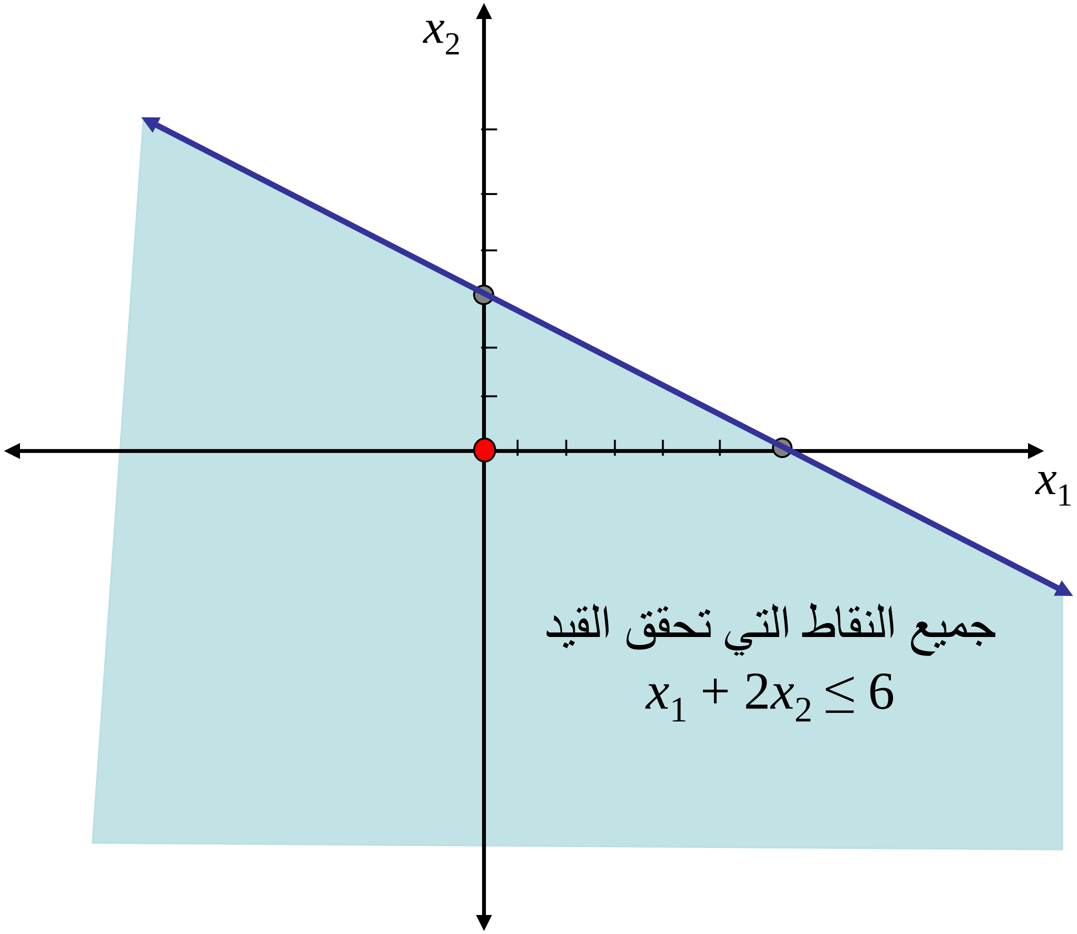
s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1 , x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

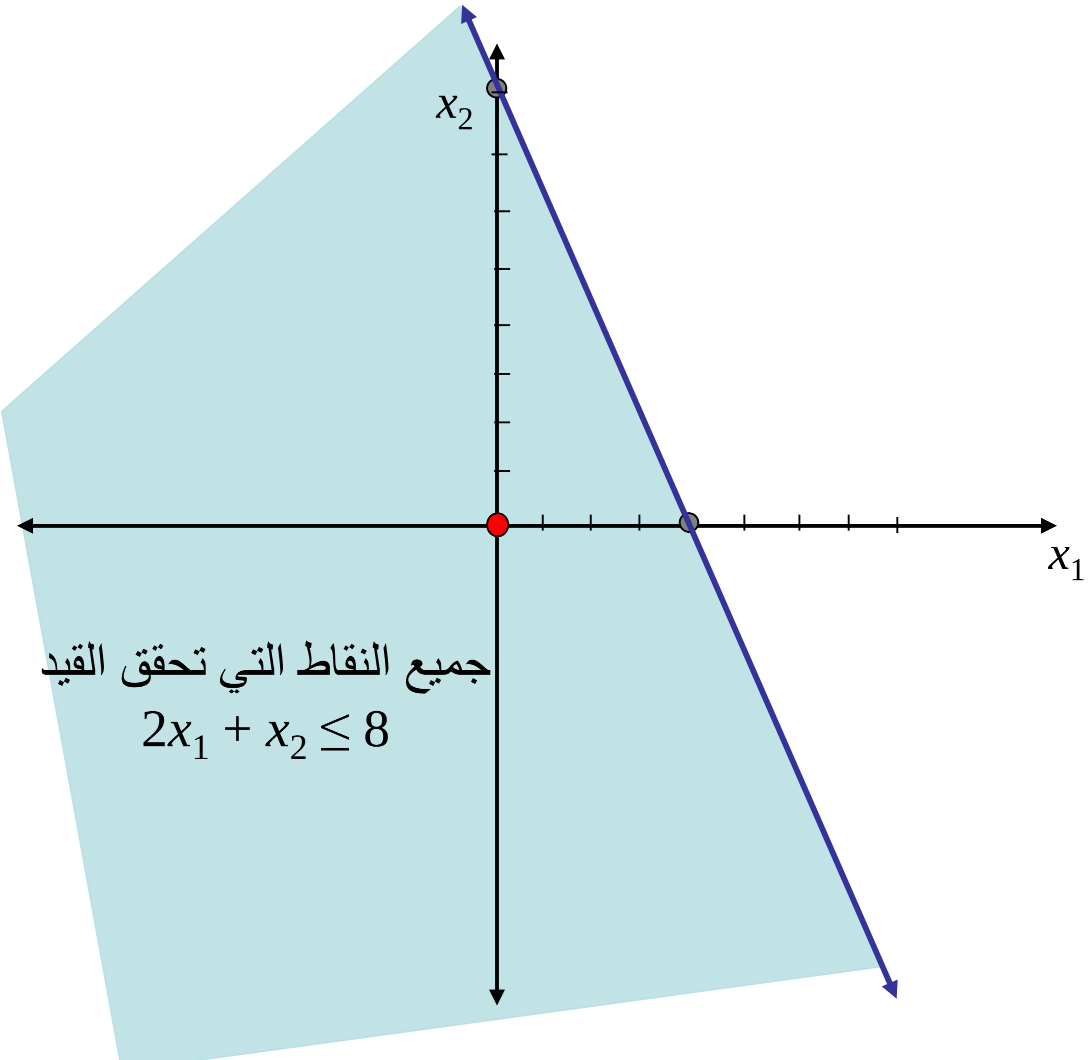
الحل البياني للبرنامج الخطي

تمثيل القيد:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$



الحل البياني للبرنامج الخطي



تمثيل القيد:

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

نقطتين على المستقيم:

$$2x_1 + x_2 = 8$$

$$\text{if} \quad x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 8$$

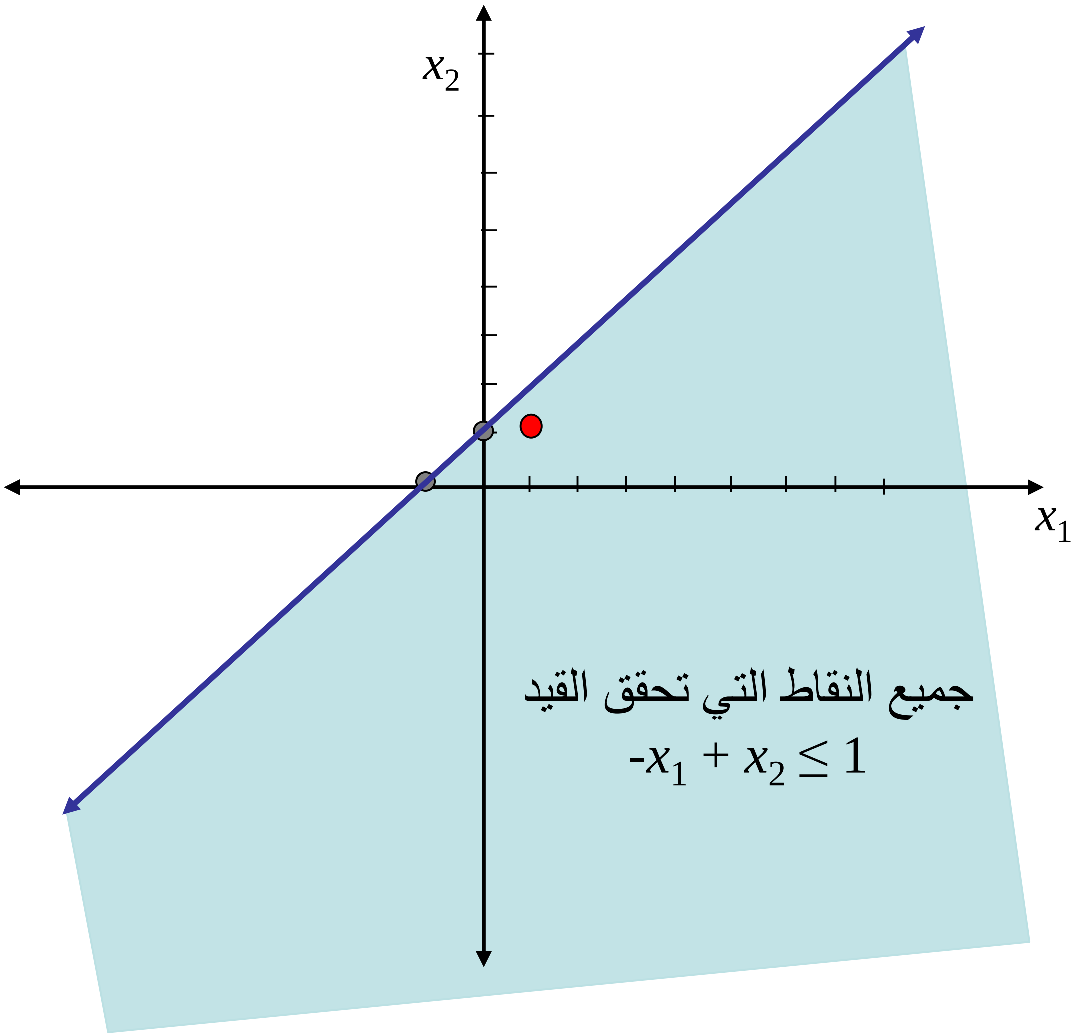
$$\text{if} \quad x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 4$$

$$(0,8) \text{ and } (4,0)$$

نقطة إضافية للتعويض: $(0,0)$

$$2(0) + 0 = 0 < 8$$

الحل البياني للبرنامج الخطي



تمثيل القيد:

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

نقطتين على المستقيم:

$$-x_1 + x_2 = 1$$

$$\text{if} \quad x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 1$$

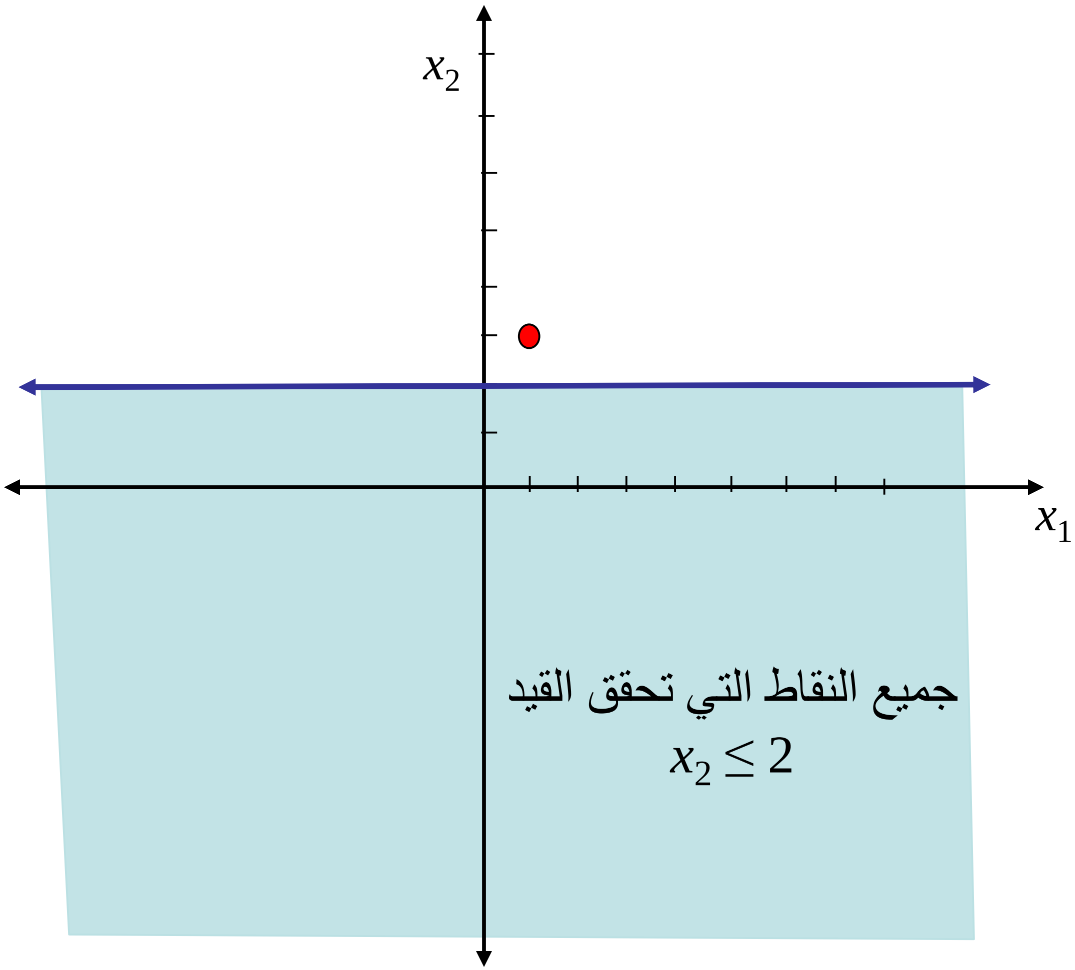
$$\text{if} \quad x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -1$$

$$(0,1) \text{ and } (-1,0)$$

نقطة إضافية للتعويض: (1,1)

$$1 - 1 = 0 < 1$$

الحل البياني للبرنامج الخطي



تمثيل القيد:

$$x_2 \leq 2$$

نرسم المستقيم:

$$x_2 = 2$$

نقطة إضافية للتعويض: (1,3)

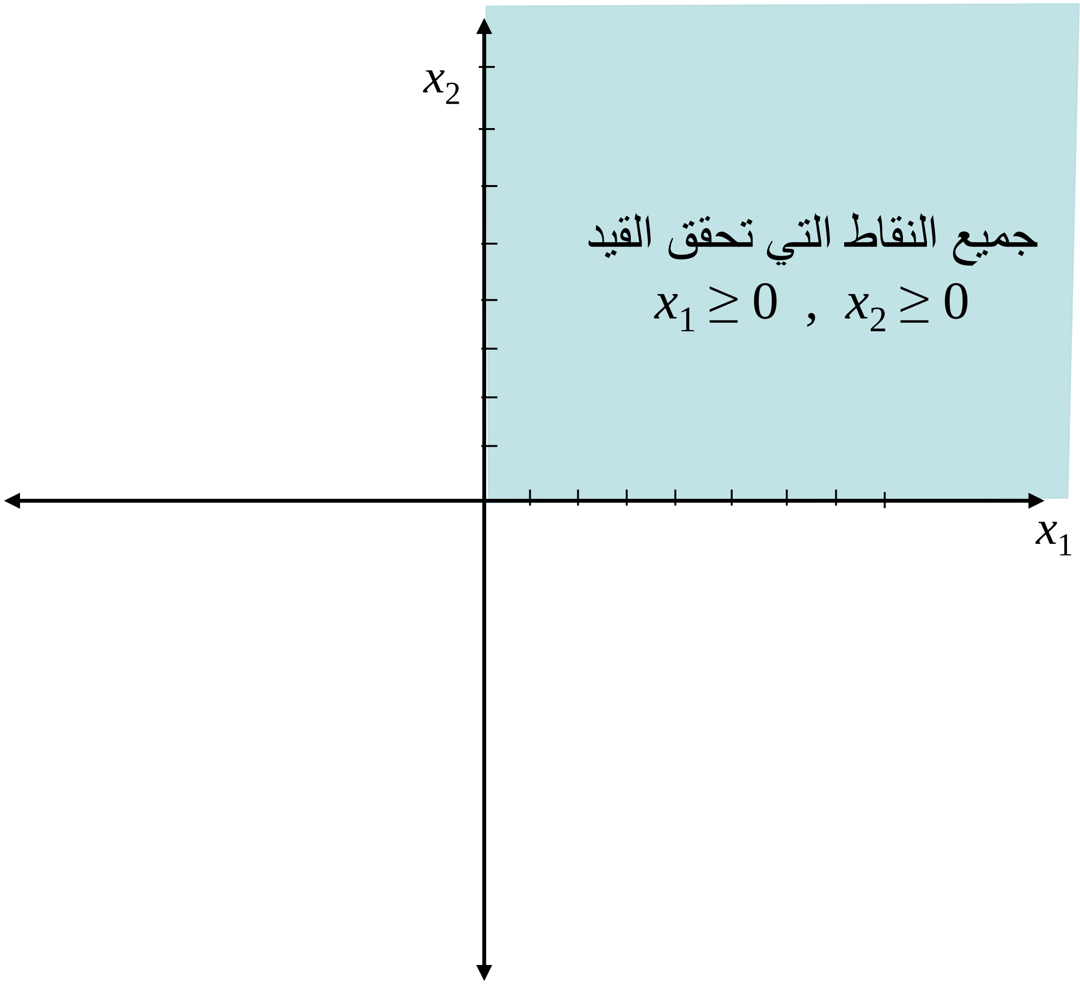
$$3 > 2$$

الحل البياني للبرنامج الخطي

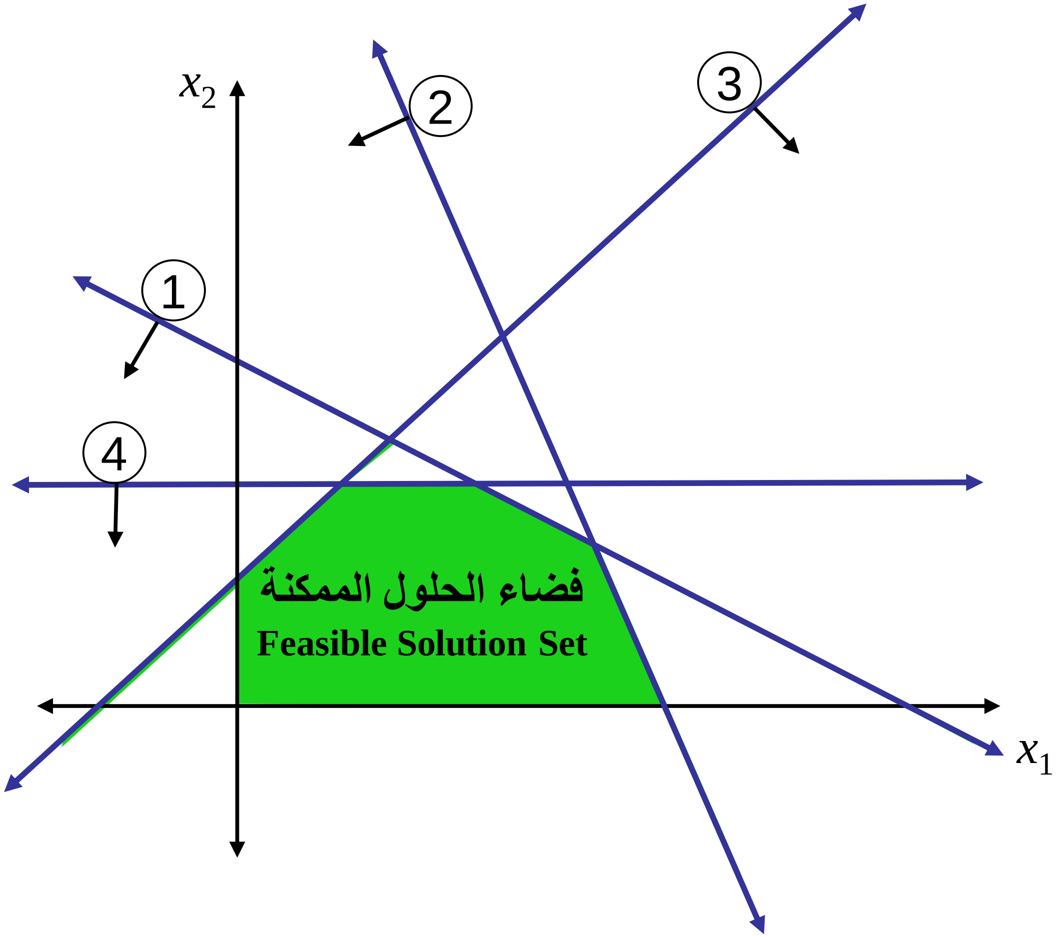
تمثيل القيود:

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



الحل البياني للبرنامج الخطي



النقاط التي تحقق جميع القيود:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \qquad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \qquad (2)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1 \qquad (3)$$

$$x_2 \leq 2 \qquad (4)$$

$$x_1 \,,\, x_2 \geq 0$$

الحل البياني للبرنامج الخطي

- تعريف: الحل الممكن (المسموح ، المقبول)

يسمى $(x_1, \ldots, x_n)$ حلاً ممكناً إذا كانت $(x_1, \ldots, x_n)$ تحقق جميع القيود.

بيانياً: هي النقطة التي تقع ضمن منطقة التظليل لجميع القيود.

- تعريف: منطقة الحلول الممكنة

هي المجموعة الجزئية من الفضاء $\mathbf{R}^n$ والتي تحقق جميع القيود.

أي أنها مجموعة النقاط التي تحقق جميع القيود.

بيانياً: هي منطقة تقاطع التظليل لجميع القيود.

الحل البياني للبرنامج الخطي

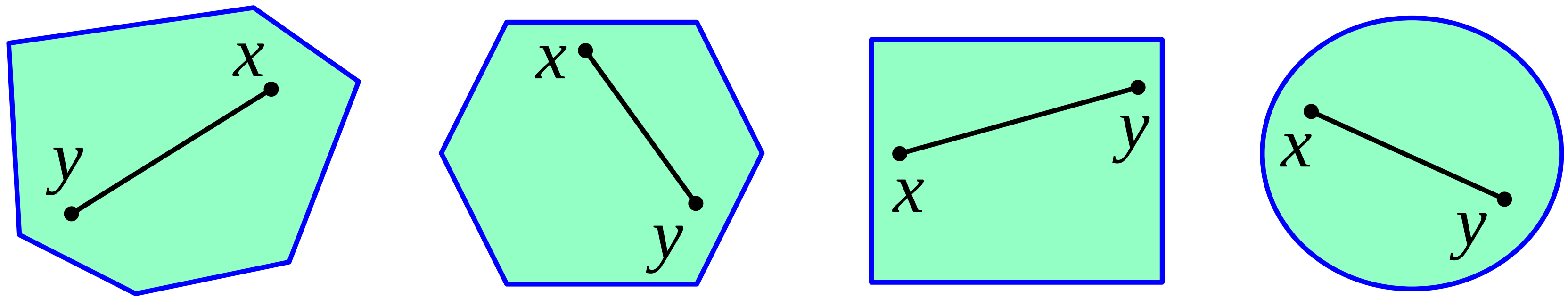
- تعريف: مجموعة محدبة (convex set)

تكون المجموعة S مجموعة محدبة إذا كان لأي نقطتين x و y تنتميان للمجموعة S ، فأن $t\,x + (1 - t)\,y$ تنتمي للمجموعة S. حيث $0 \le t \le 1$.

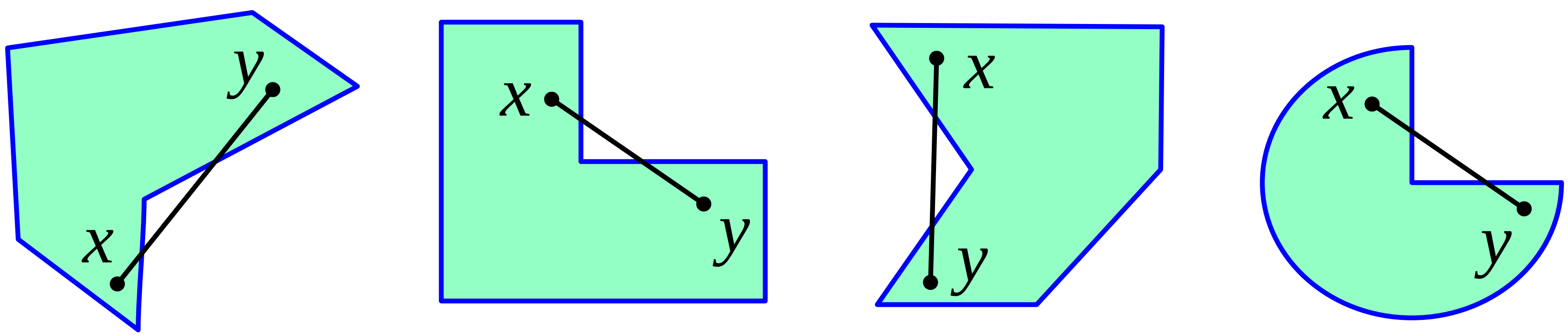
بيانياً: لأي نقطتين x و y تنتميان للمجموعة S، فإن المستقيم الذي يصل بين هاتين النقطتين يقع كاملا ضمن المجموعة S.

الحل البياني للبرنامج الخطي

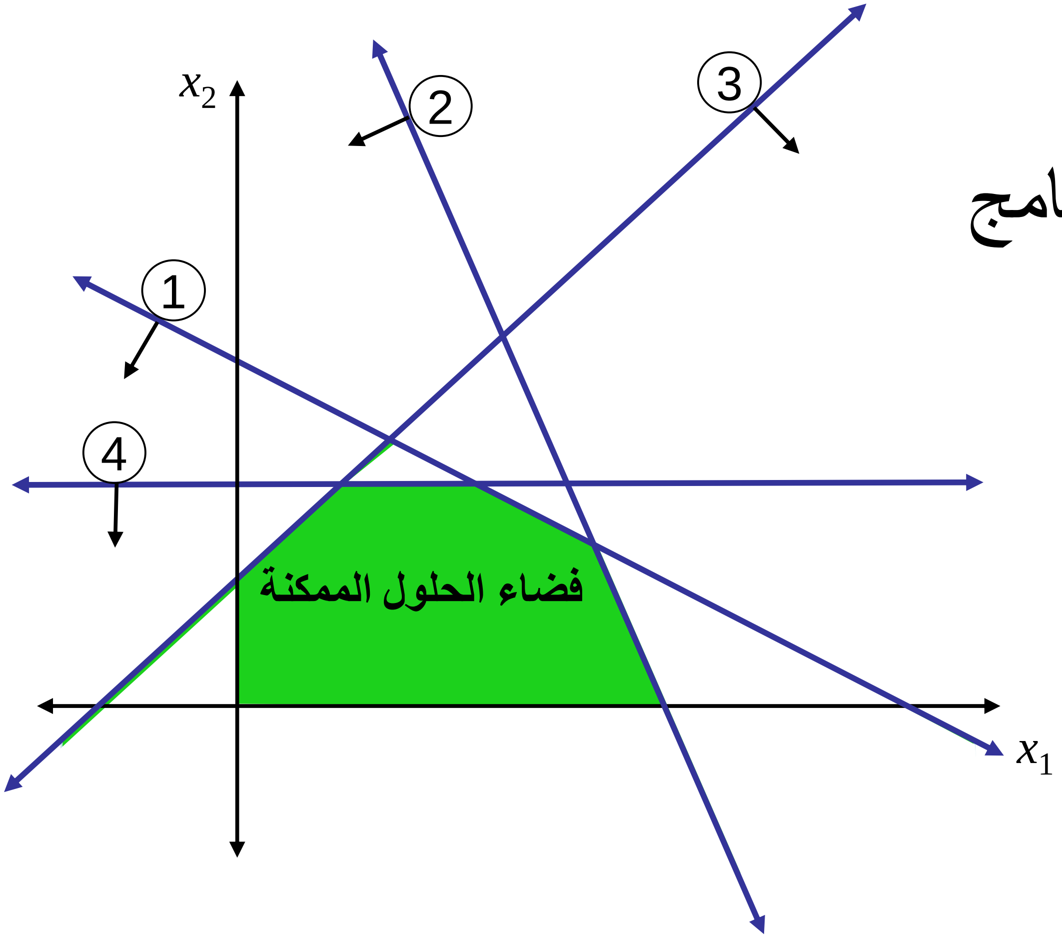
- أمثلة على مجموعات محدبة:



- أمثلة على مجموعات غير محدبة:



الحل البياني للبرنامج الخطي



نظرية:

منطقة الحلول الممكنة لأي برنامج خطي ستكون منطقة محدبة.

منطقة الحلول الممكنة في هذا المثال يسمى مجسم مضلع.

ويتكون من تقاطع عدد من أنصفة الفضاء المغلقة.

الحل البياني للبرنامج الخطي

تمثيل دالة الهدف بيانياً:

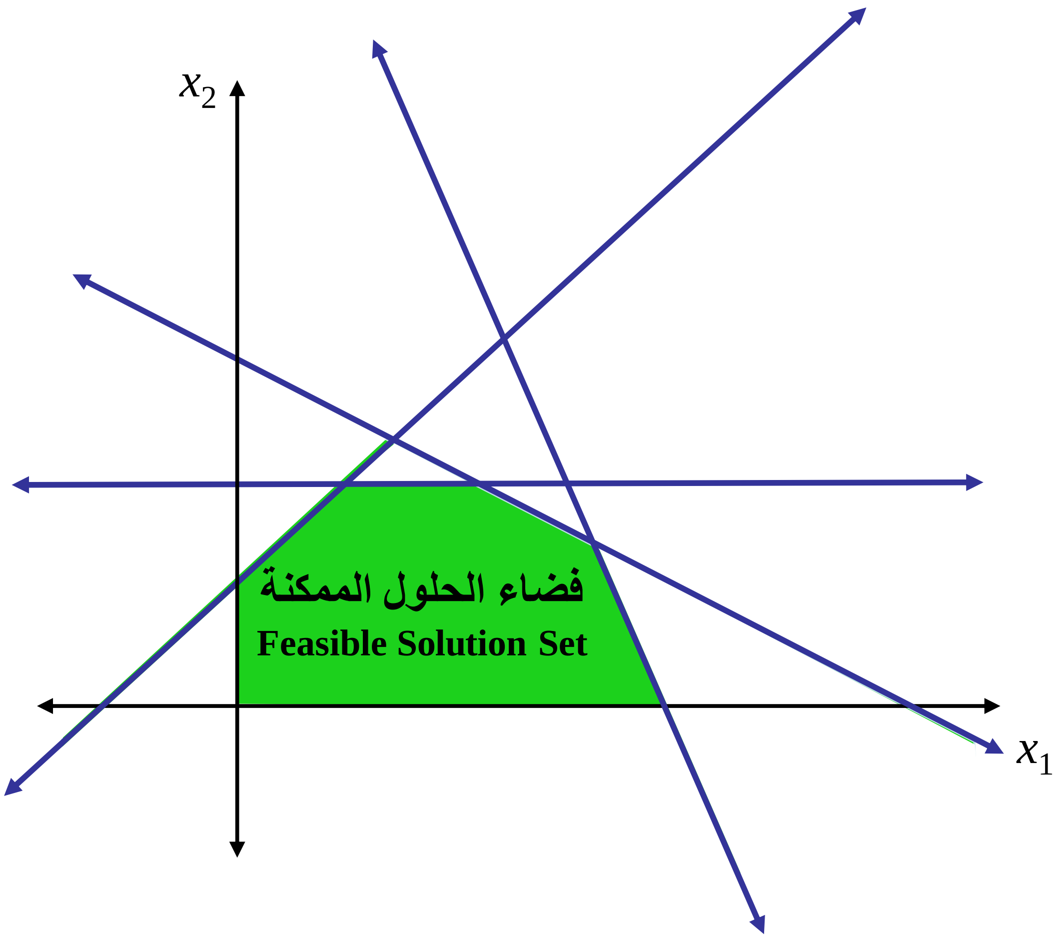
$$\max \text{ or } \min \quad z = c_1x_1 + c_2x_2$$

- لاحظ لا يوجد طرف أيمن لدالة الهدف.
- نستطيع رسم دالة الهدف فقط عندما تكون كما يلي:

$$c_1x_1 + c_2x_2 = k$$

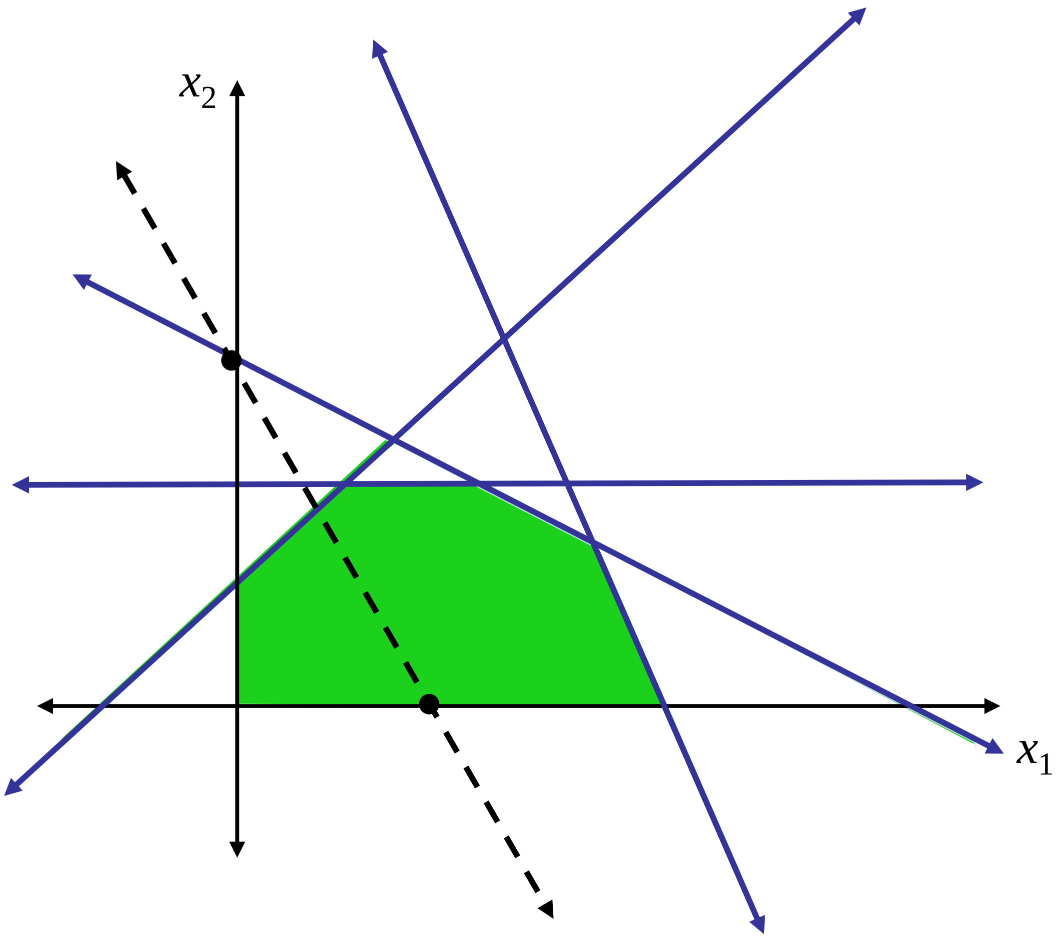
- نختار القيمة k كما نرغب، لكن يستحسن اختيارها بحيث يمر المستقيم بمنطقة الحلول الممكنة.

الحل البياني للبرنامج الخطي



ارسم مستقيم دالة الهدف الذي يمر بنقطة اختيارية في منطقة الحلول الممكنة، مثلا المار بالنقطة (2,0)

الحل البياني للبرنامج الخطي



مستقيم دالة الهدف الذي

يمر بالنقطة (2,0):

$$3000x_1 + 2000x_2 = 6000$$

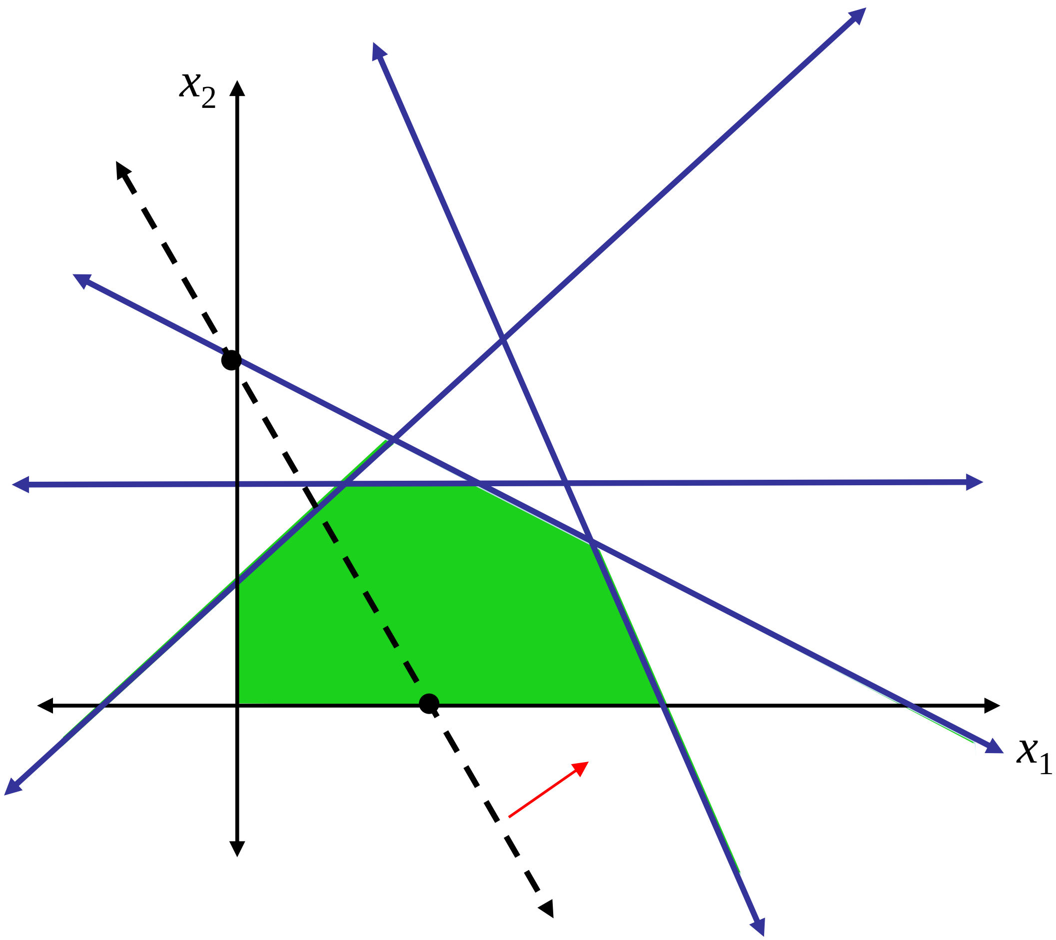
2 0

نحتاج نقطة أخرى:

$$\text{if } x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$$

(2,0) and (0,3)

الحل البياني للبرنامج الخطي



$z = 6000$

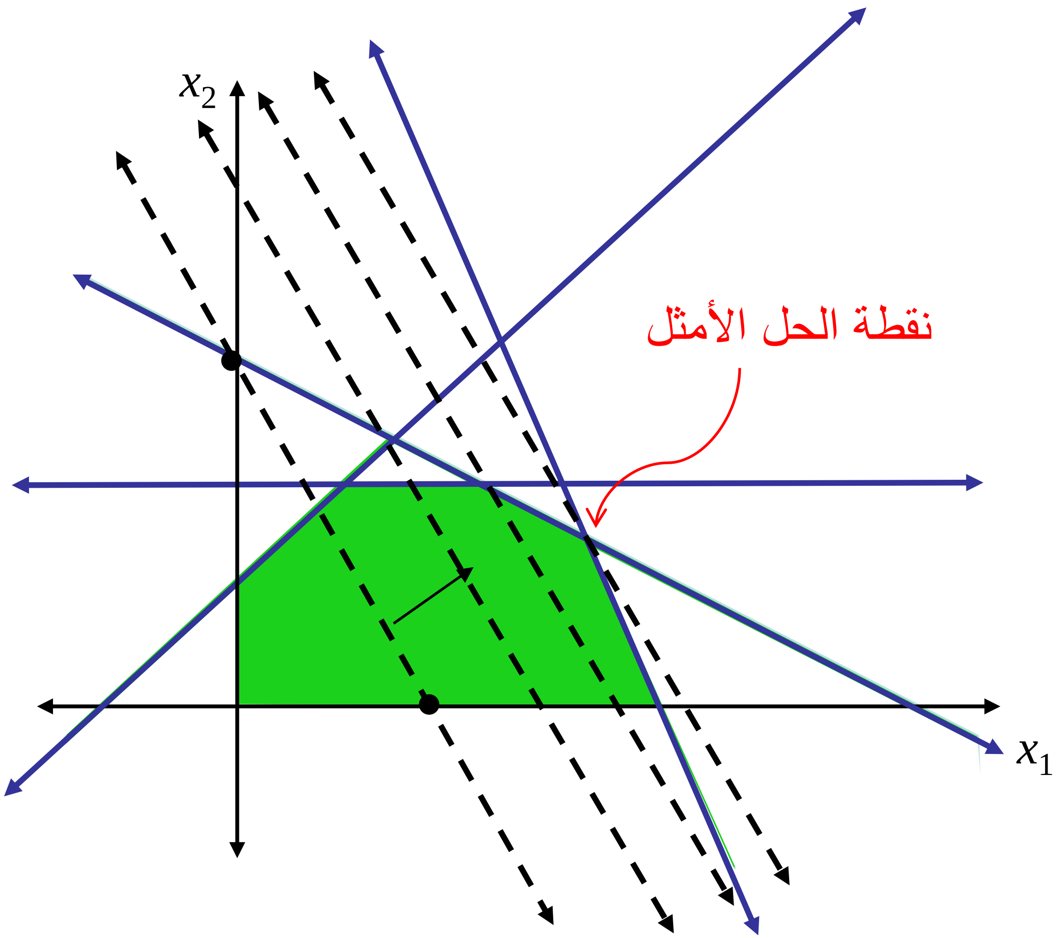
ثم نحدد اتجاه تحسن دالة الهدف. نختبر نقطة ليست على المستقيم.

مثلا، عند النقطة (3 , 3)، قيمة دالة الهدف هي:

$$3000x_1 + 2000x_2 = 15000$$

إذن دالة الهدف تتحسن جهة اليمين

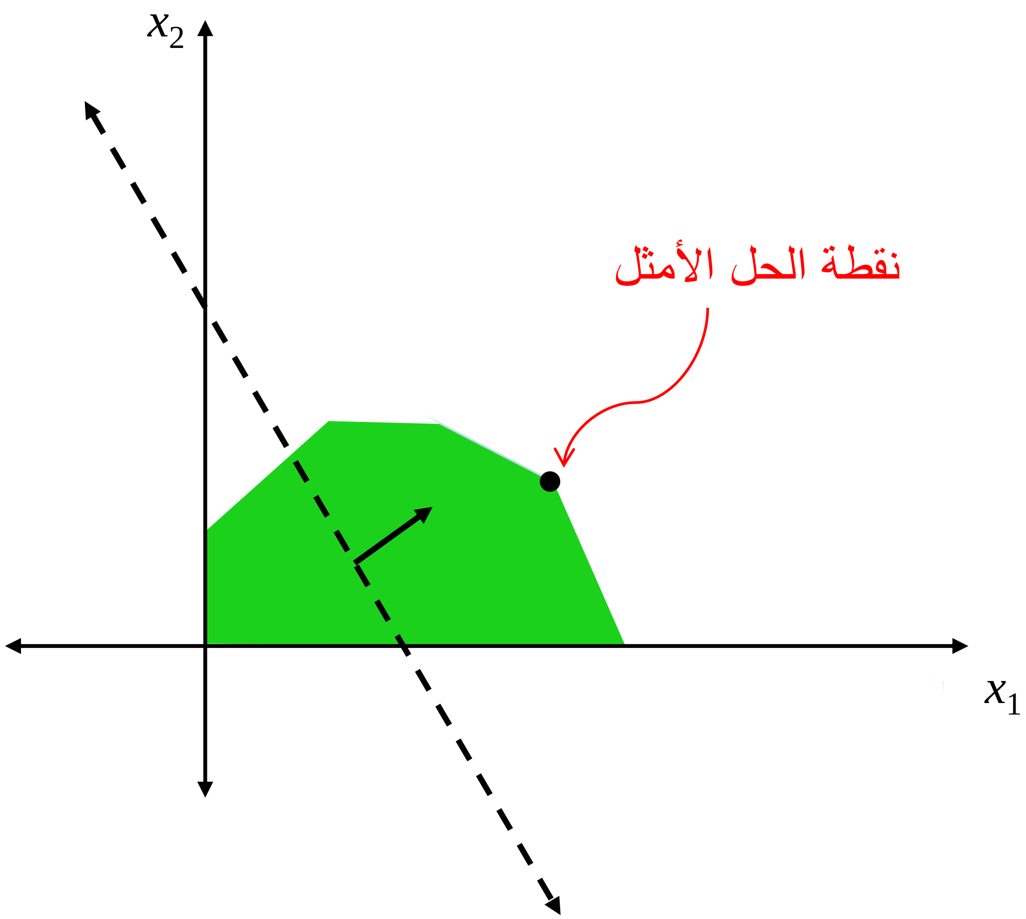
الحل البياني للبرنامج الخطي



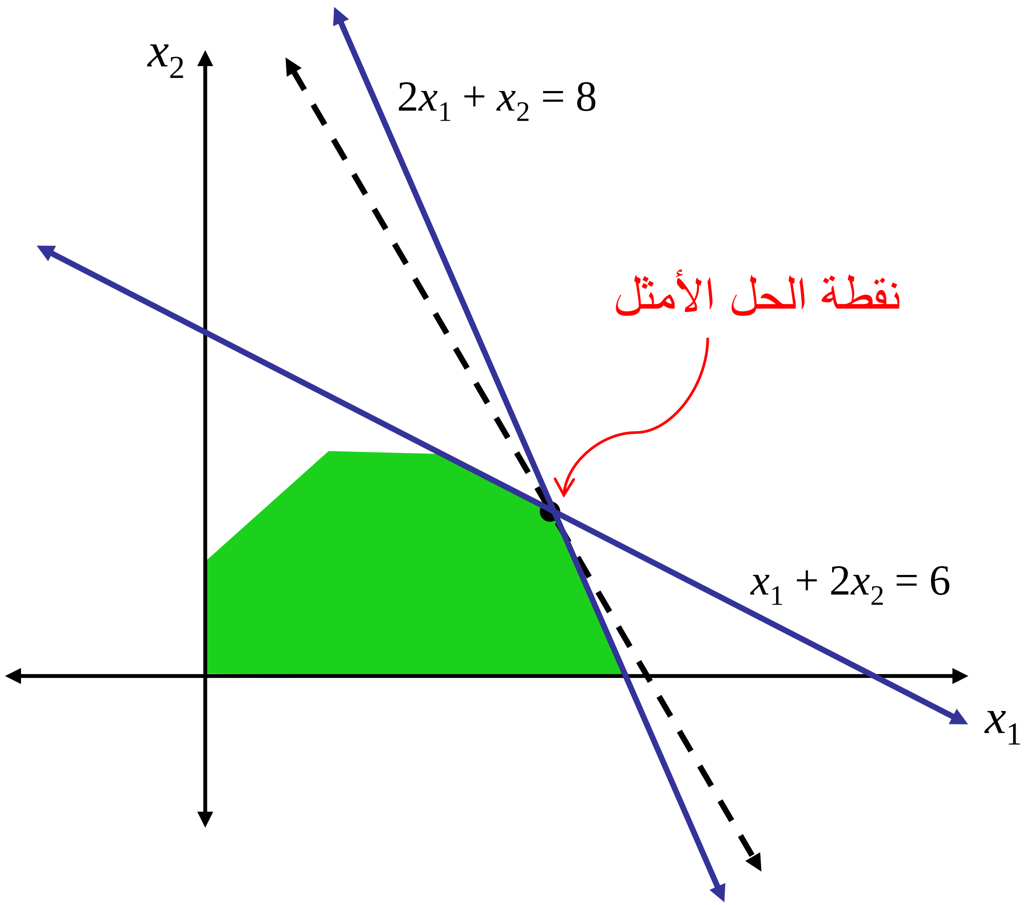
z = 6000

يزاح (يجر) مستقيم دالة الهدف موازيا لنفسه باتجاه **<u>التحسن</u>** حتى يصل إلى آخر نقطة في فضاء الحلول فتكون هذه النقطة هي الحل الأمثل.

الحل البياني للبرنامج الخطي



الحل البياني للبرنامج الخطي

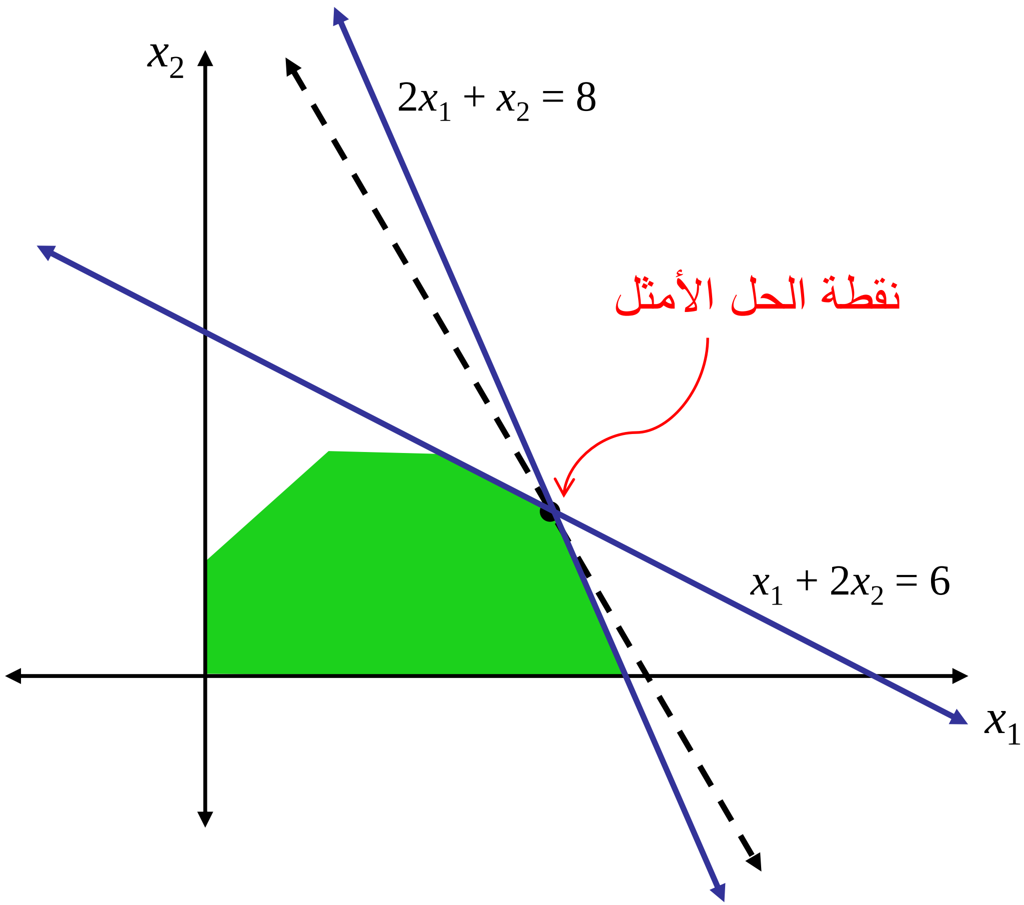


الحل الأمثل يقع عند تقاطع المستقيمين:

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$2x_1 + x_2 = 8$$

الحل البياني للبرنامج الخطي



تحديد الحل الأمثل يكون بحل النظام الخطي التالي:

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$2x_1 + x_2 = 8$$

الحل الأمثل:

$$x_1^* = 10/3 = 3.33$$

$$x_2^* = 4/3 = 1.33$$

الحل البياني للبرنامج الخطي

الحل الأمثل هو

$x_1^* = 3.33$ **and** $x_2^* = 1.33$

بعد التعويض في دالة الهدف نحصل على القيمة المثلى لدالة الهدف و هي:

$z^* = 12666.67$ **SR**

أي أن على الشركة إنتاج 3.33 طن من الدهان الخارجي و 1.33 طن من الدهان الداخلي يومياً لتحصل على عوائد يومية مثلى تقدر بـ 12666.67 ريال

الحل البياني للبرنامج الخطي

- **تعريف:** الحل الأمثل (Optimal Solution)

يكون القرار $(x_1, \ldots, x_n)$ حلاً أمثلاً للبرنامج الخطي إذا كان:

– ينتمي إلى فضاء الحلول الممكنة

– ذو أعلى قيمة لدالة الهدف في حالة max

أو ذو أقل قيمة لدالة الهدف في حالة min

- **تحديد الحل الأمثل بيانيا:**

▪ في حالة max: يزاح مستقيم دالة الهدف باتجاه التزايد حتى يصل إلى آخر نقطة في فضاء الحلول فتكون هذه النقطة هي الحل الأمثل.

▪ في حالة min: يزاح مستقيم دالة الهدف باتجاه التناقص حتى يصل إلى آخر نقطة في فضاء الحلول فتكون هذه النقطة هي الحل الأمثل.

الحل البياني للبرنامج الخطي

- **تعريف**: **النقاط الركنية:**

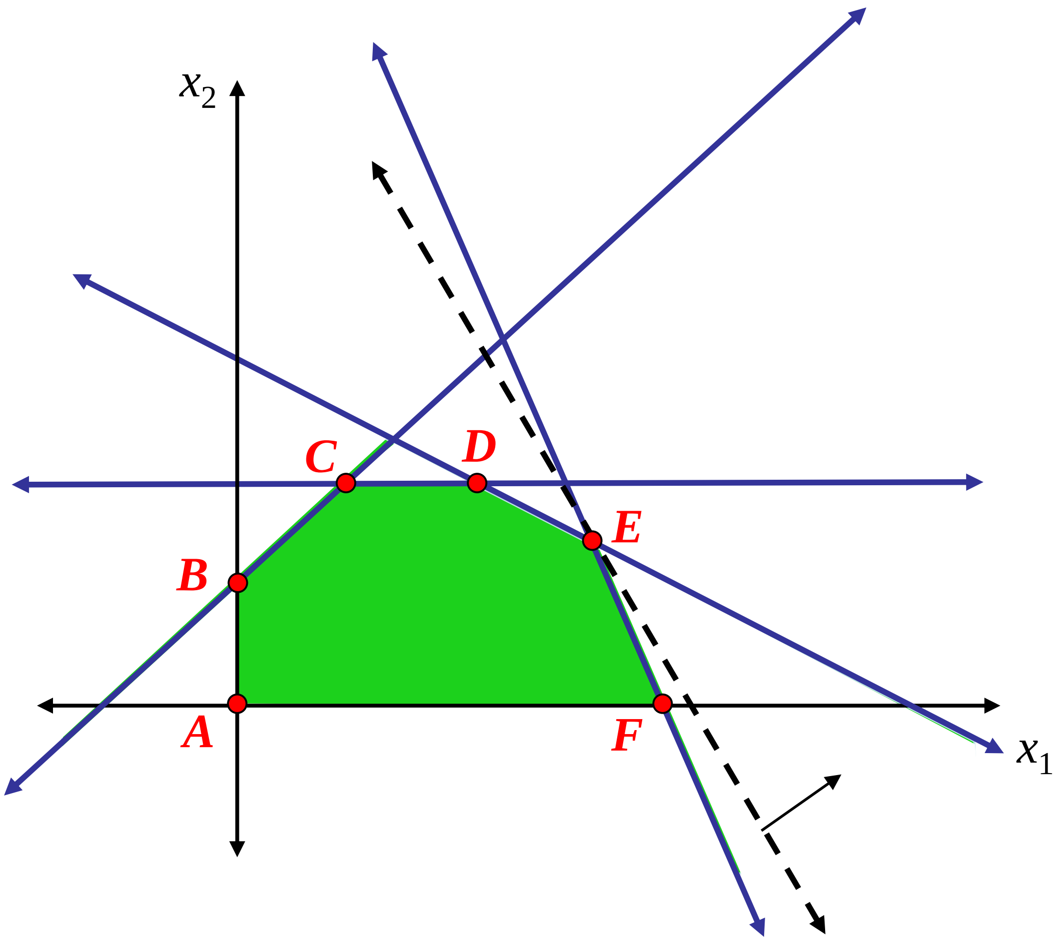
يكون القرار $(x_1, \ldots, x_n)$ نقطة ركنية ضمن منطقة الحلول الممكنة إذا كان:

كل قطعة مستقيمة داخل منطقة الحلول الممكنة وتمر بالنقطة $(x_1, \ldots, x_n)$،
تكون النقطة $(x_1, \ldots, x_n)$ هي أحد طرفي هذه القطعة المستقيمة.

تسمى أيضا نقاط قصوى أو نقاط زاوية.

- **نظرية**: إذا يوجد حل أمثل للبرنامج الخطي، فإن إحدى النقاط الركنية ستكون حل أمثل. (قد لا تكون الوحيدة كما سنرى لاحقاً)

الحل البياني للبرنامج الخطي



النقاط: A, B, C, D, E, F

هي نقاط ركنية لمنطقة الحلول الممكنة

الحل الأمثل عند النقطة E

$x_1^* = 10/3 = 3.33$

$x_2^* = 4/3 = 1.33$

الحل البياني للبرنامج الخطي

مثـــال :

مصنع ينتج السيارات الفاخرة، وتعتقد الإدارة أن غالبية الزبائن إما من رجال الأعمال أو من الموظفين ذوي الدخل العالي. وللوصول إلى أكبر شريحة من الزبائن قررت الإدارة طرح إعلانات تجارية مدتها دقيقة واحدة تتخلل إما البرامج الكوميدية أو البرامج الرياضية. يبين الجدول التالي عدد مشاهدات هذه البرامج:

	مشاهدي إعلانات البرامج الكوميدية (مليون/دقيقة إعلان)	مشاهدي إعلانات البرامج الرياضية (مليون/دقيقة إعلان)
رجال الأعمال	7	2
الموظفين ذوي الدخل العالي	2	12

وترغب الإدارة في إيجاد سياسة إعلانية مثلى تضمن لها كحد أدنى 28 مليون مشاهد من رجال الأعمال و 24 مليون مشاهد من موظفي الدخل العالي. فإذا كان الإعلان يكلف 50000 ريال للدقيقة الواحدة خلال البرامج الكوميدية ويكلف 100000 ريال للدقيقة الواحدة خلال البرامج الرياضية، فما هي سياسة الإعلان المناسبة.

الحل البياني للبرنامج الخطي

متغيرات القرار: ما الذي تملك الشركة التصرف فيه؟؟

x_1 = عدد الدقائق المخصصة للإعلان خلال البرامج الكوميدية

x_2 = عدد الدقائق المخصصة للإعلان خلال البرامج الرياضية

الحل البياني للبرنامج الخطي

دالة الهدف:

– لتكن z التكلفة الإجمالية بالريال للإعلانات خلال البرامج الكوميدية والبرامج الرياضية

$$z = 50{,}000\, x_1 + 100{,}000\, x_2$$

– يمكن إعادة تعريف z التكلفة الإجمالية بـالــ 1000 ريال للإعلان خلال البرامج الكوميدية والبرامج الرياضية. وبالتالي:

$$z = 50\, x_1 + 100\, x_2$$

– دالة الهدف تمثل تكاليف $\Leftarrow$ min

الحل البياني للبرنامج الخطي

القيود:

– قيد الحد الأدنى لمشاهدي الإعلان من رجال الأعمال، علماً بأن 7 مليون منهم يتابعون البرامج الكوميدية و 2 مليون منهم يتابعون البرامج الرياضية:

$$7000000x_1 + 2000000x_2 \geq 28000000$$

$$\Leftrightarrow \quad 7x_1 + 2x_2 \geq 28$$

– قيد الحد الأدنى لمشاهدي الإعلان من موظفي الدخل العالي، علماً بأن 2 مليون منهم يتابعون البرامج الكوميدية و 12 مليون منهم يتابعون البرامج الرياضية:

$$2000000x_1 + 12000000x_2 \geq 24000000$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x_1 + 12x_2 \geq 24$$

الحل البياني للبرنامج الخطي

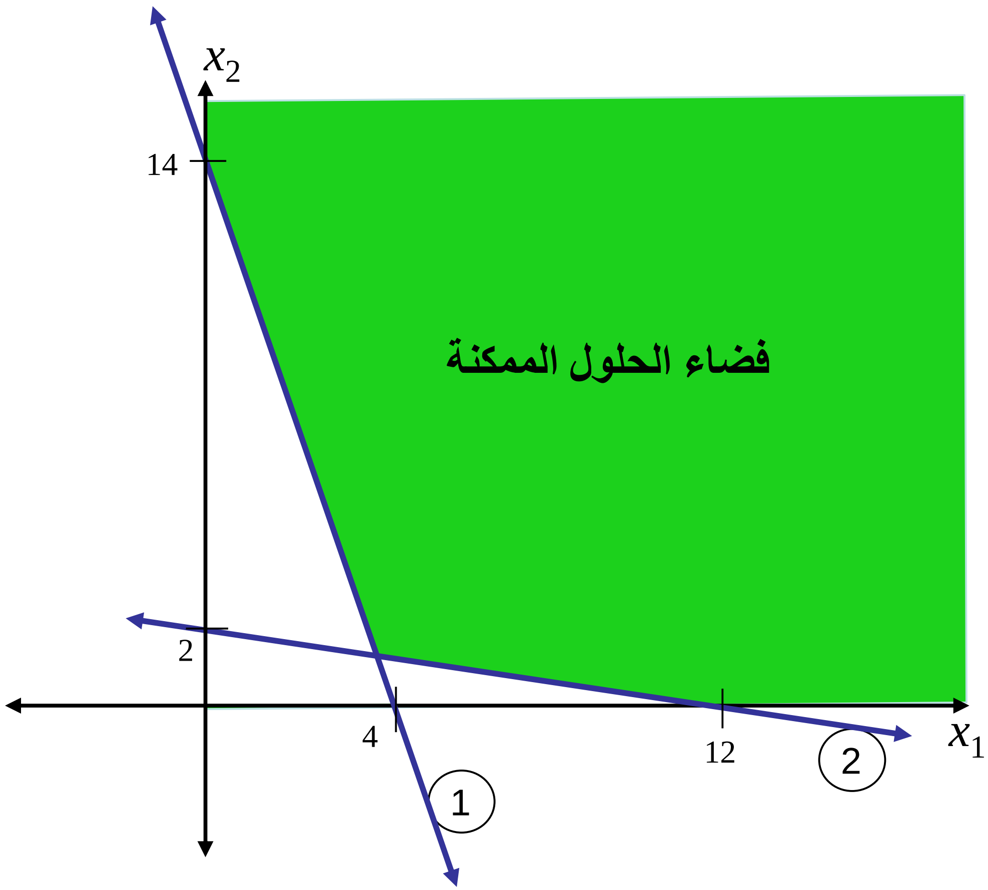
البرنامج الخطي:

x_1 = عدد الدقائق المخصصة للإعلان خلال البرامج الكوميدية
x_2 = عدد الدقائق المخصصة للإعلان خلال البرامج الرياضية

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 50x_1 + 100x_2 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& 7x_1 + 2x_2 \geq 28 \\
& 2x_1 + 12x_2 \geq 24 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

الحل البياني للبرنامج الخطي

تمثيل فضاء الحلول الممكنة بيانياً:



$$7x_1 + 2x_2 \geq 28$$

$(0,14)$, $(4,0)$

$(0,0) \Rightarrow 7(0)+2(0) = 0 < 28$

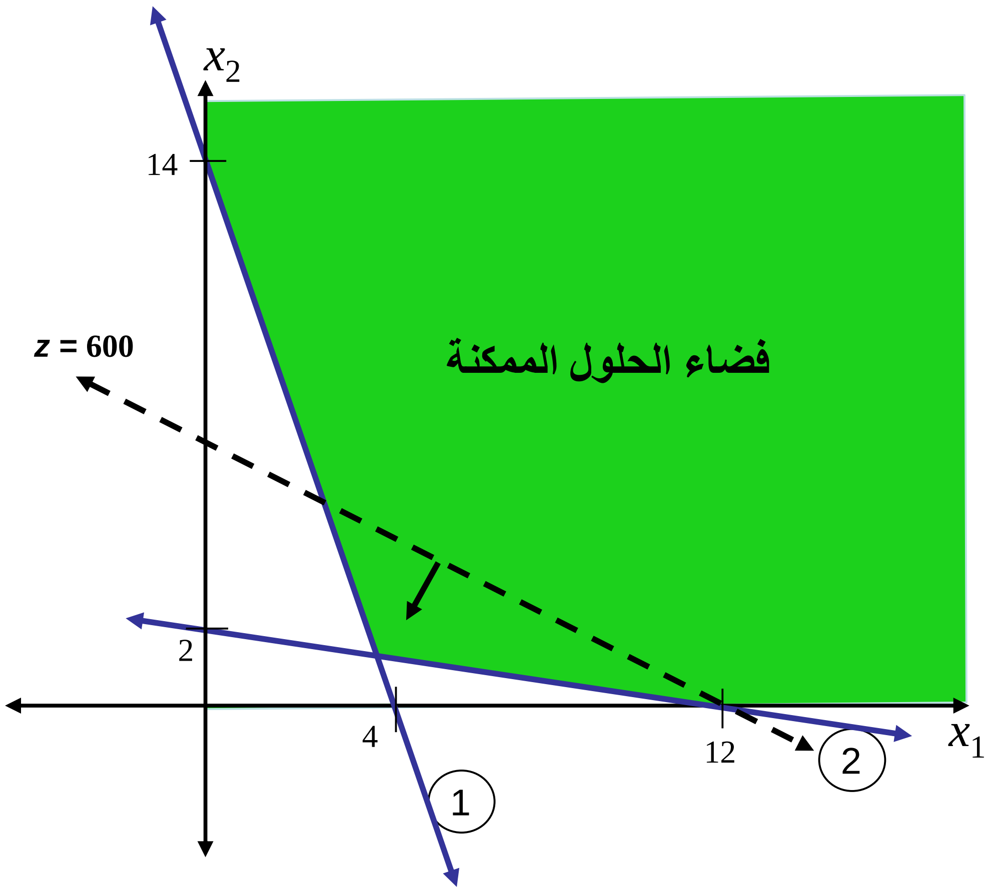
$$2x_1 + 12x_2 \geq 24$$

$(0,2)$, $(12,0)$

$(0,0) \Rightarrow 2(0)+12(0) = 0 < 24$

$$x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0$$

الحل البياني للبرنامج الخطي



تمثيل دالة الهدف بيانياً:

$$\min \quad z = 50x_1 + 100x_2$$

نرسم مستقيم دالة الهدف المار بالنقطة (4,4) «اختيارية»

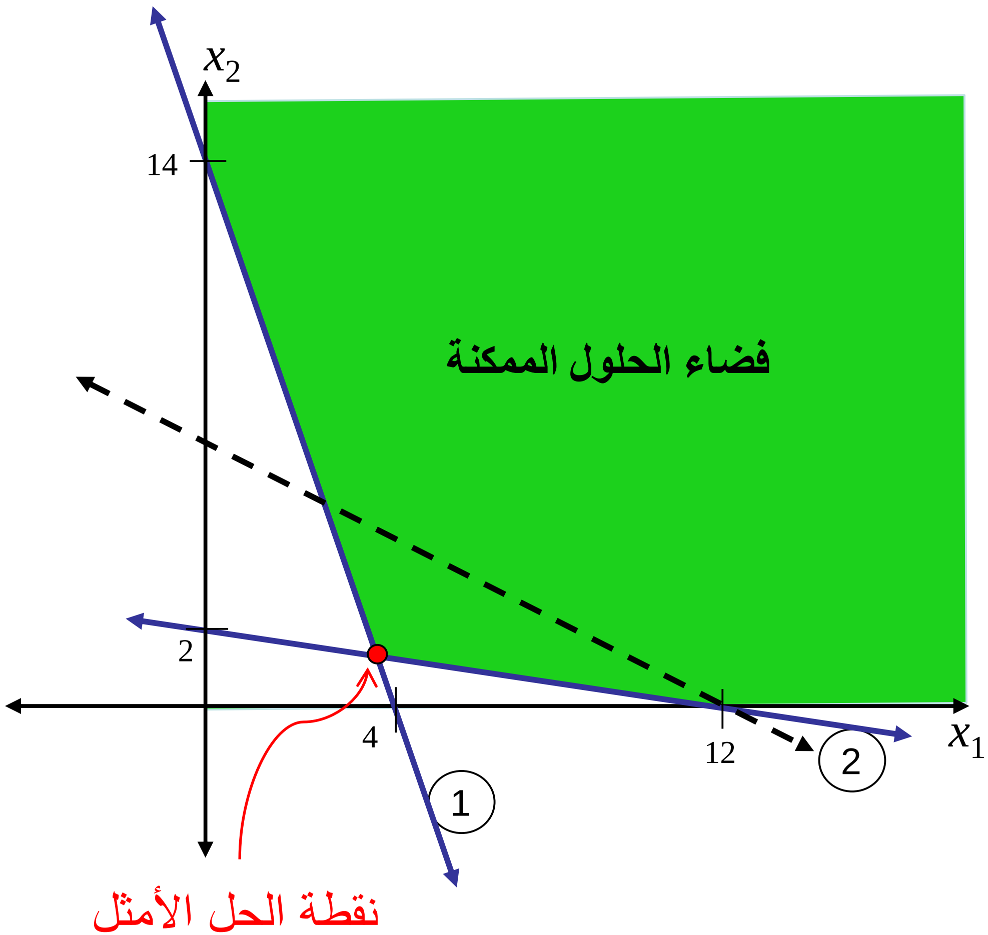
$$\Rightarrow \; 50x_1 + 100x_2 = 600$$

نحتاج نقطة أخرى:

(12,0) أو (0,6)

نرسم المستقيم، ثم نحدد اتجاه تحسن دالة الهدف.

الحل البياني للبرنامج الخطي



إيجاد الحل الأمثل:

إزاحة مستقيم z الافتراضي باتجاه التناقص.

لإيجاد قيم متغيرات القرار الأمثل، نحل المعادلتين:

$$7x_1 + 2x_2 = 28$$
$$2x_1 + 12x_2 = 24$$

$$\Rightarrow x_1^* = 3.6 \text{ and } x_2^* = 1.4$$
$$\Rightarrow z^* = 320000$$

على الإدارة شراء 3.6 دقيقة إعلان في البرامج الكوميدية و 1.4 دقيقة إعلان في البرامج الرياضية بتكلفة مثلى تساوي 320,000 ريال.

الحل البياني للبرنامج الخطي

مثال: ثلاث متغيرات (غير مطلوب!)

$$\max z = 20x_1 + 10x_2 + 15x_3$$

s.t.

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 55$$

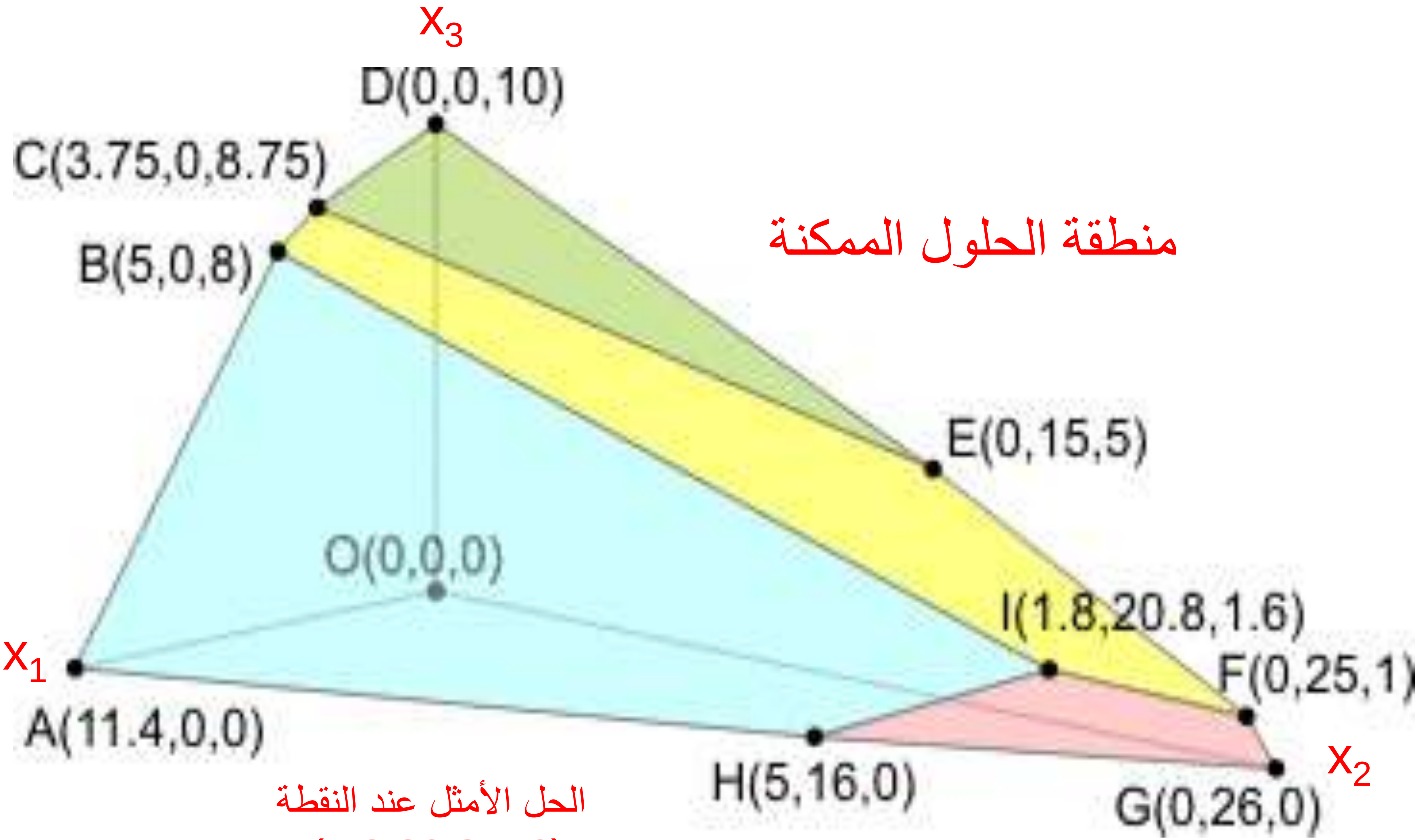
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 26$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 57$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل البياني للبرنامج الخطي



الحل الأمثل عند النقطة
I(1.8,20.8,1.6)

حالات القرار في البرامج الخطية

- حل أمثل وحيد (فريد)

للبرنامج الخطي نقطة وحيدة تعطي أفضل قيمة مثلى لدالة الهدف.

بيانياً: خط دالة الهدف يمر **بنقطة** وحيدة في فضاء الحلول عند أقصى حد ممكن لتحسين دالة الهدف.

- حلول مثلى متعددة (بديلة)

للبرنامج الخطي أكثر من نقطة تعطي أفضل قيمة مثلى لدالة الهدف. يوجد حلول مثلى لا نهائية.

بيانياً: خط دالة الهدف يمر **بحافة** (قطعة مستقيمة) من حواف فضاء الحلول عند أقصى حد ممكن لتحسين دالة الهدف.

- قيمة دالة الهدف غير محدودة

قيمة دالة الهدف تكون لا نهاية (∞) في حالة max، أو سالب لا نهاية (∞-) في حالة min.

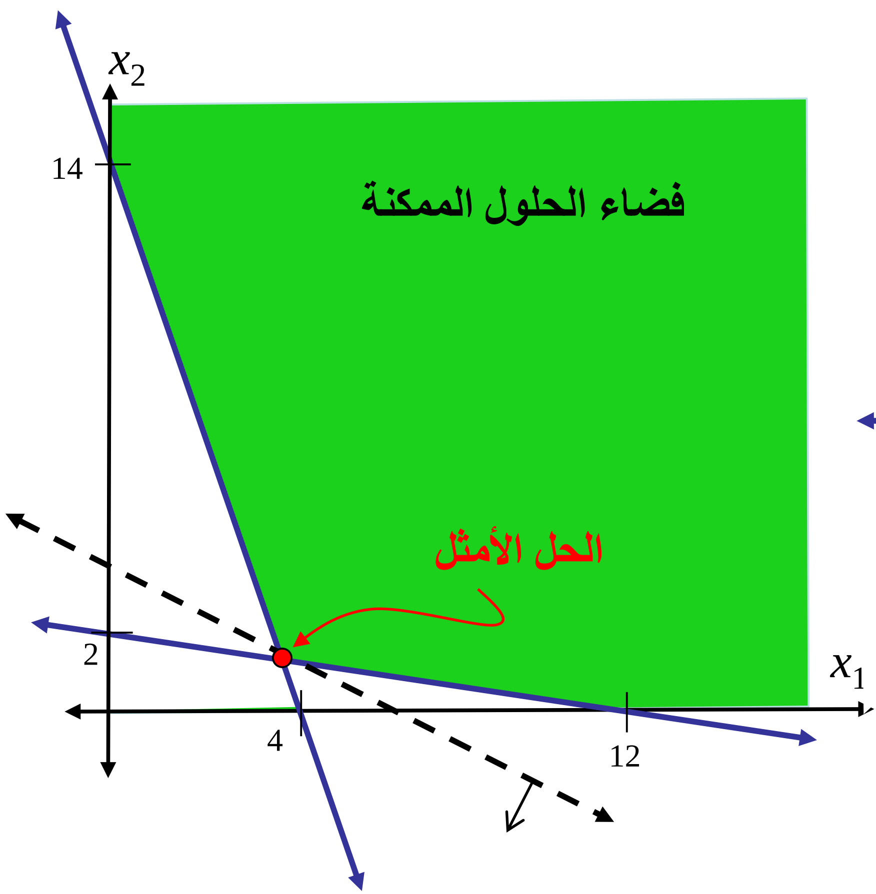
بيانيا: اتجاه تحسين دالة الهدف ليس له حد.

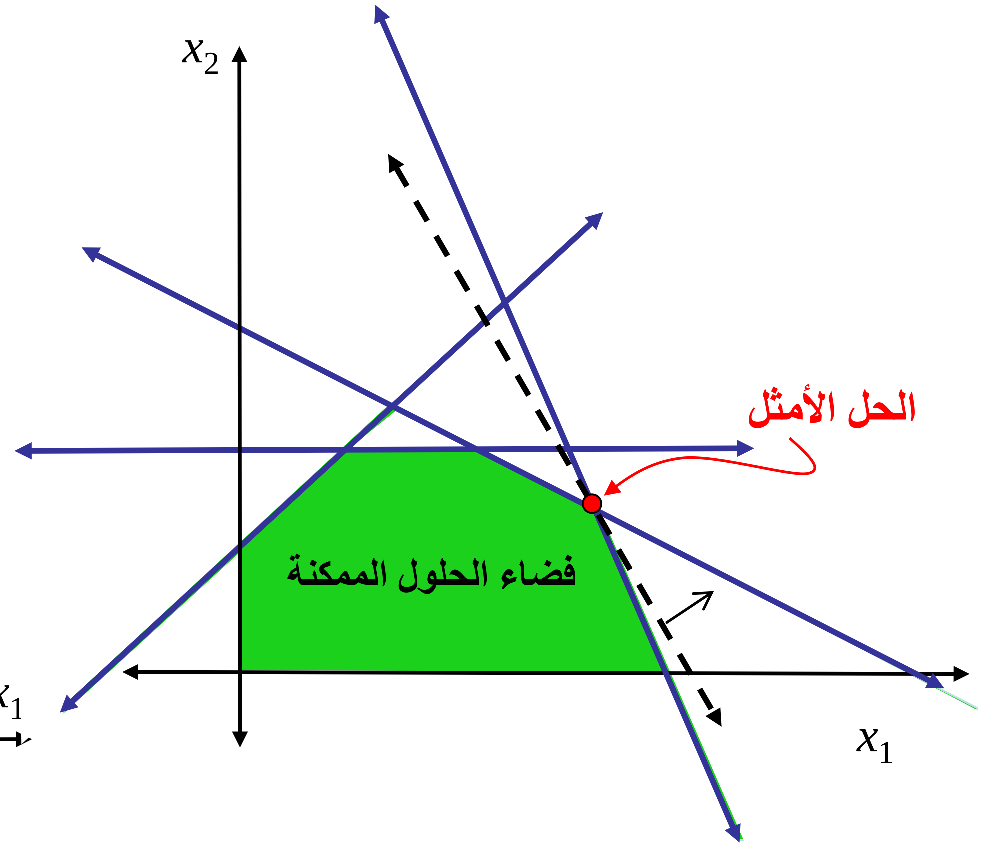
- فضاء الحلول فارغ

البرنامج الخطي ليس له فضاء حلول، أي لا يوجد له أي حل ممكن.

حالات القرار في البرامج الخطية

حل أمثل وحيد: المثالين السابقين لهما حل أمثل وحيد.





حالات القرار في البرامج الخطية

حلول مثلى متعددة (بديلة):

<u>مثال</u> : أوجد بيانياً الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي:

$$\min \quad z = 5x_1 + 10x_2$$

s.t.

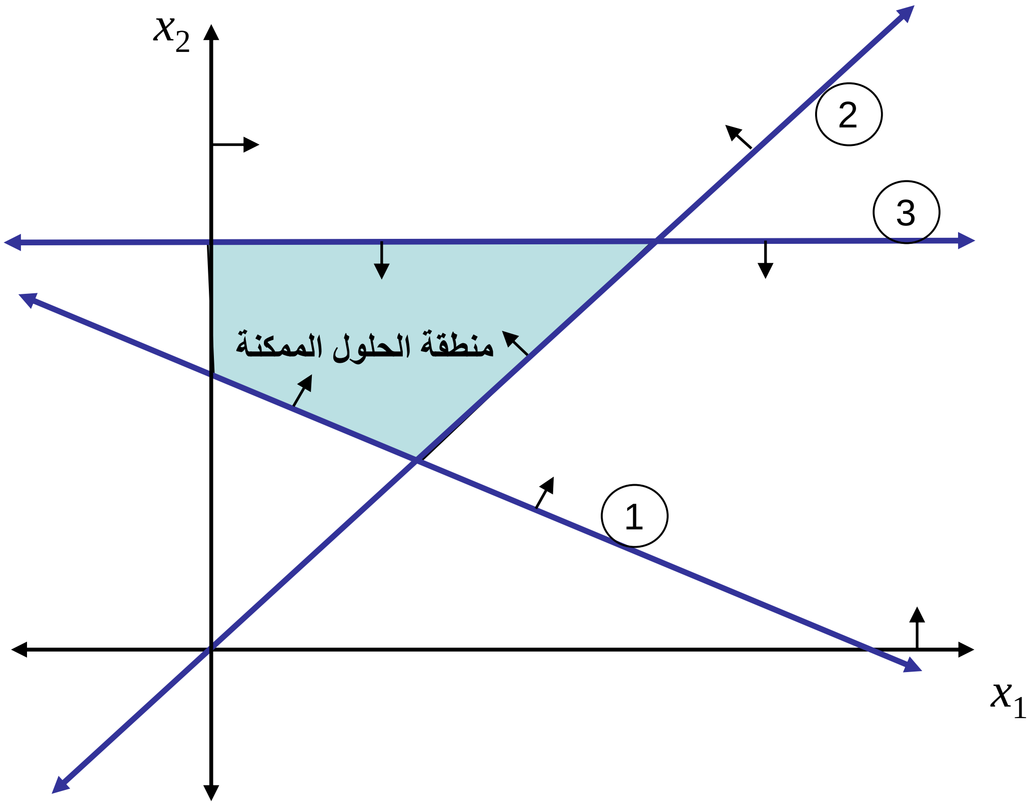
$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$

$$-x_1 + x_2 \geq 0$$

$$x_2 \leq 8$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

حالات القرار في البرامج الخطية



نرسم منطقة الحلول الممكنة

$$x_1 \geq 0 \ , \ \ x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$

$$(0,5) \ , \ (10,0)$$

$$(0,0) \Rightarrow (0)+2(0) = 0 < 10$$

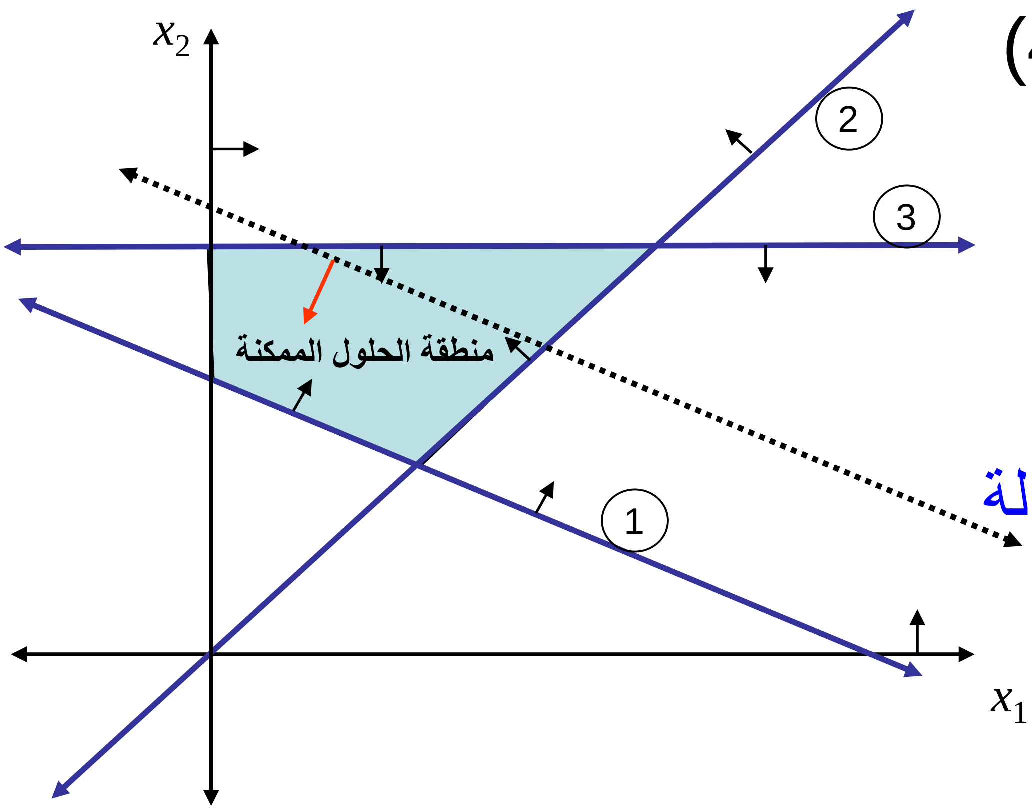
$$-x_1 + x_2 \geq 0$$

$$(1,1) \ , \ (2,2)$$

$$(1,2) \Rightarrow (2) - (1) = 1 > 0$$

$$x_2 \leq 8$$

حالات القرار في البرامج الخطية



نرسم مستقيم دالة الهدف

نختار عندما يمر بالنقطة (4,7)

$$5x_1 + 10x_2 = 90$$

نحتاج نقطة أخرى:

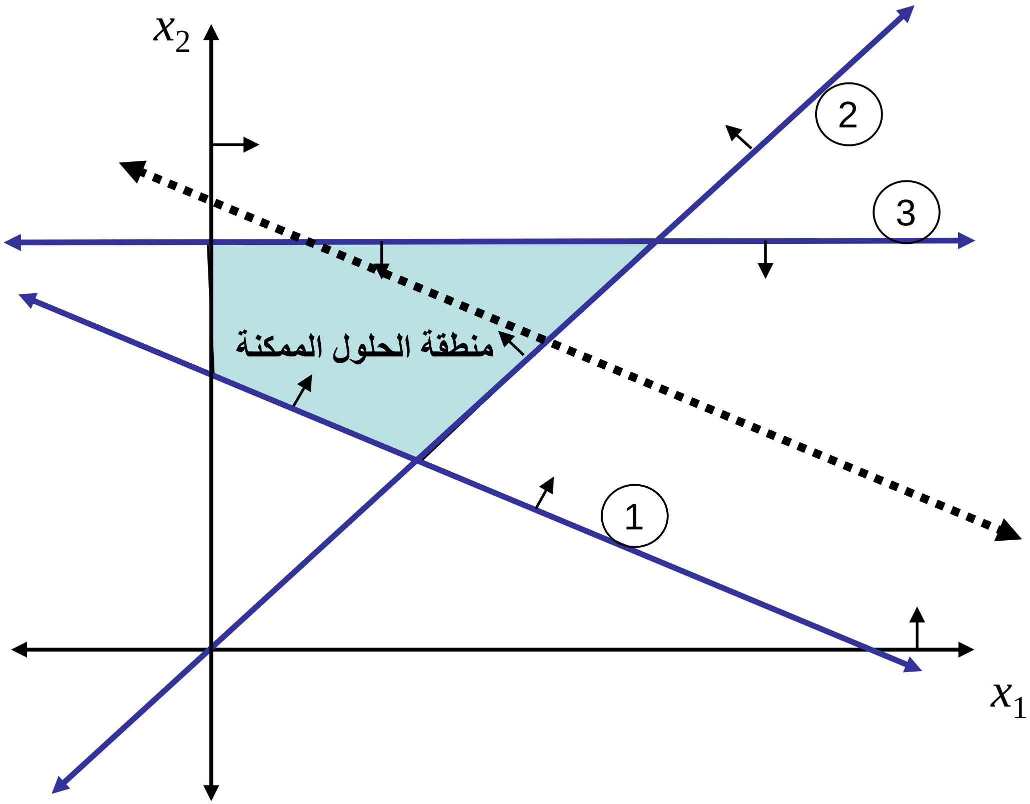
$$\text{if } x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 9$$

(4,7) and (0,9)

نختبر نقطة لتحديد إتجاه تحسن دالة الهدف، مثلا (1,1)

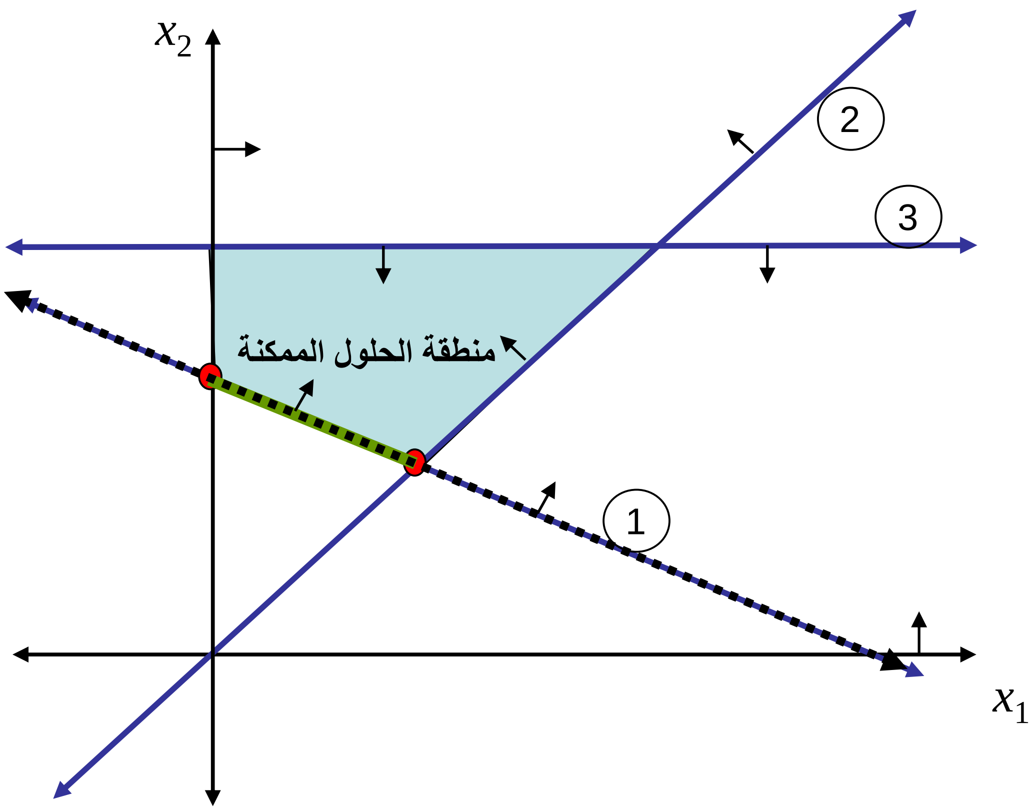
$$5(1)+10(1) = 15 < 90$$

حالات القرار في البرامج الخطية



نحرك مستقيم دالة الهدف موازيا لنفسه في إتجاه تحسنها

حالات القرار في البرامج الخطية



الحل الأمثل:

جميع النقاط على قطعة المستقيم (اللون الأخضر) حلول مثلى

حالات القرار في البرامج الخطية

قيمة دالة الهدف غير محدودة:

<u>مثال</u> : قيمة دالة الهدف غير محدودة

$$\max \quad z = 50x_1 + 100x_2$$

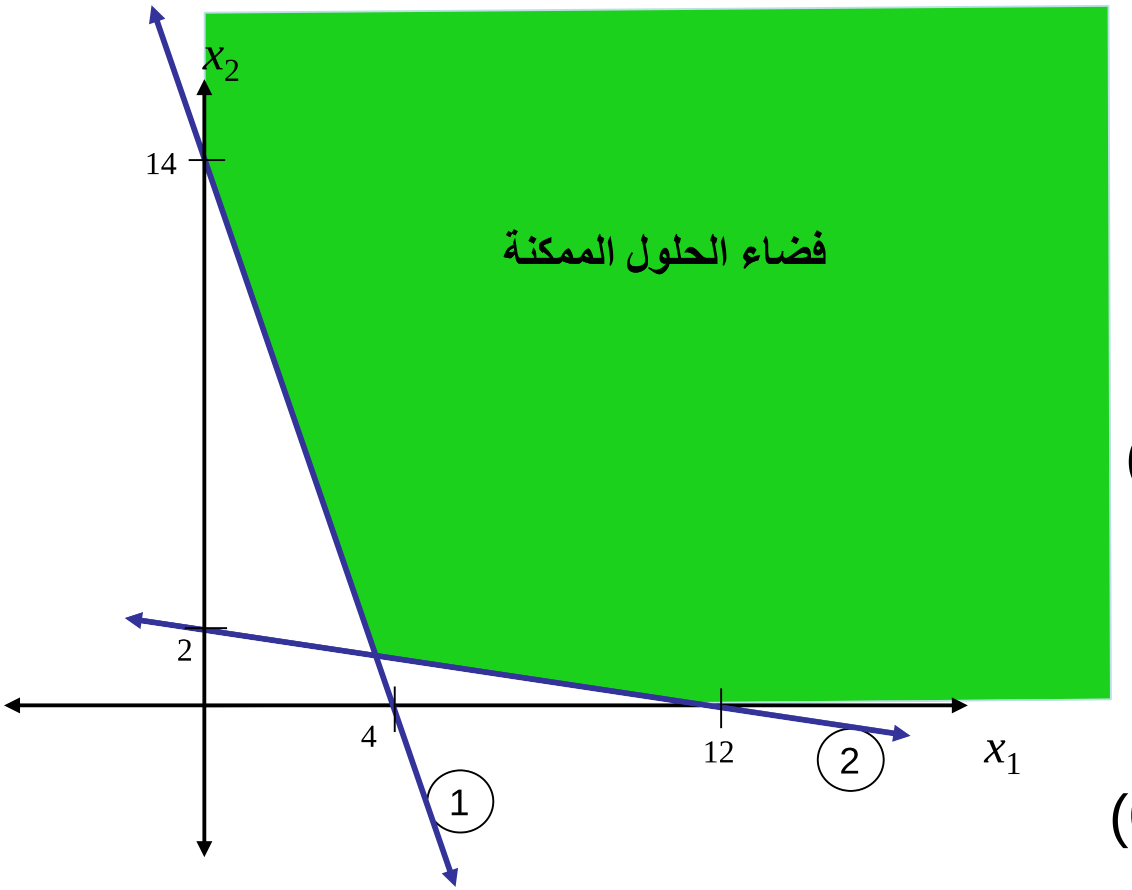
s.t.

$$7x_1 + 2x_2 \geq 28$$

$$2x_1 + 12x_2 \geq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حالات القرار في البرامج الخطية



نرسم منطقة الحلول الممكنة

$$x_1 \geq 0 \;,\;\; x_2 \geq 0$$

$$7x_1 + 2x_2 \geq 28$$

$$(0,14) \;,\; (4,0)$$

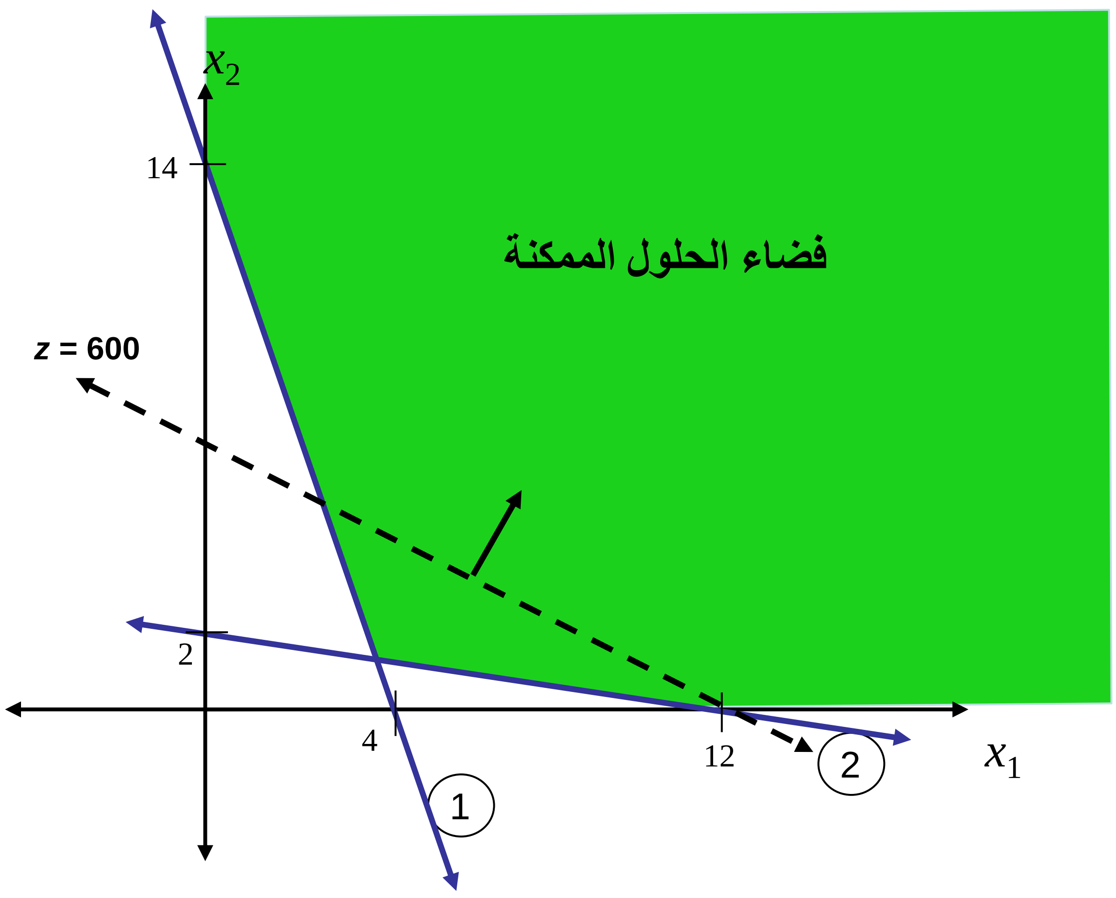
$$(0,0) \Rightarrow 7(0)+2(0) = 0 < 28$$

$$2x_1 + 12x_2 \geq 24$$

$$(0,2) \;,\; (12,0)$$

$$(0,0) \Rightarrow 2(0)+12(0) = 0 < 24$$

حالات القرار في البرامج الخطية



نرسم مستقيم دالة الهدف

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

نرسم مستقيم دالة الهدف عندما يمر بالنقطة (4,4)

$$50x_1 + 100x_2 = 600$$

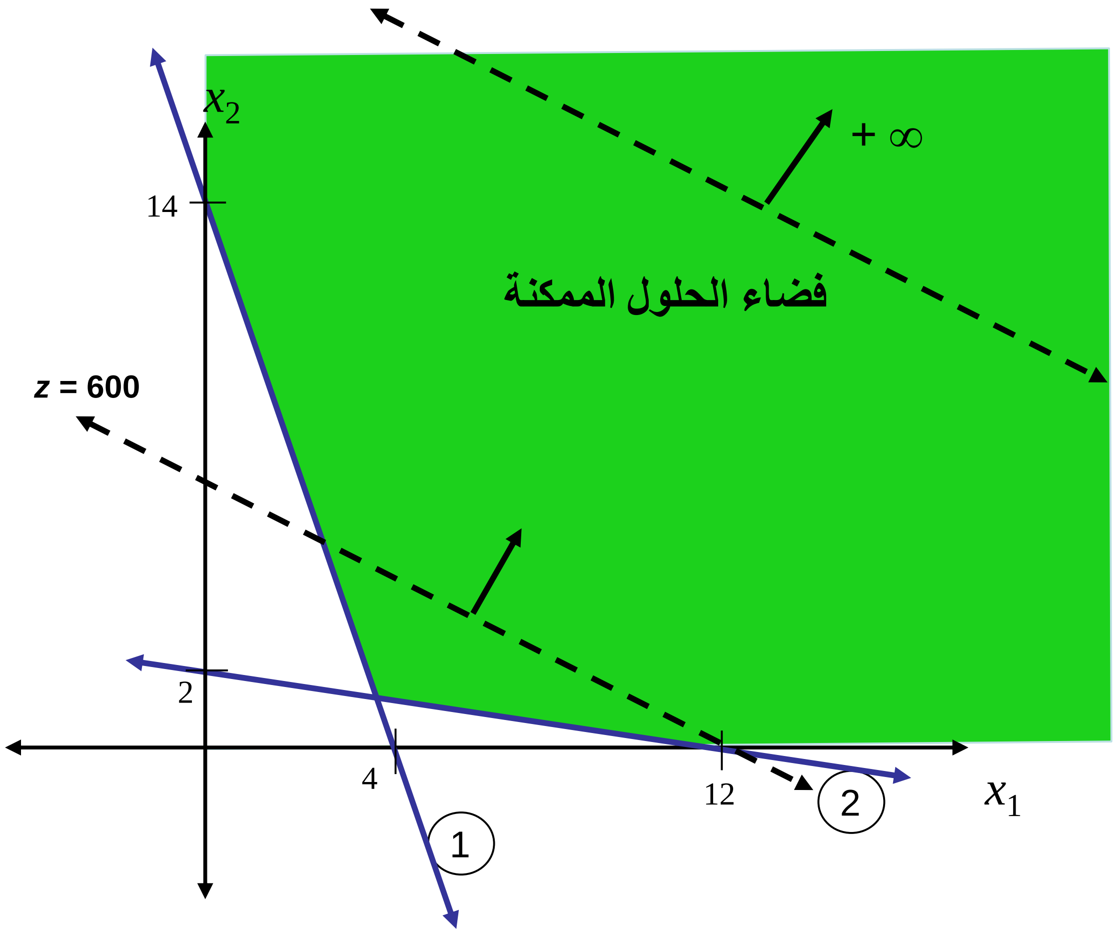
نحتاج نقطة أخرى:

$$\text{if } x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 6$$

(4,4) and (0,6)

اتجاه تحسن دالة الهدف للأعلى.

حالات القرار في البرامج الخطية



تتزايد قيمة دالة الهدف إلى ما لا نهاية !

الحل الأمثل غير محدود.

إي أنه لا يوجد حل أمثل.

حالات القرار في البرامج الخطية

فضاء الحلول فارغ:

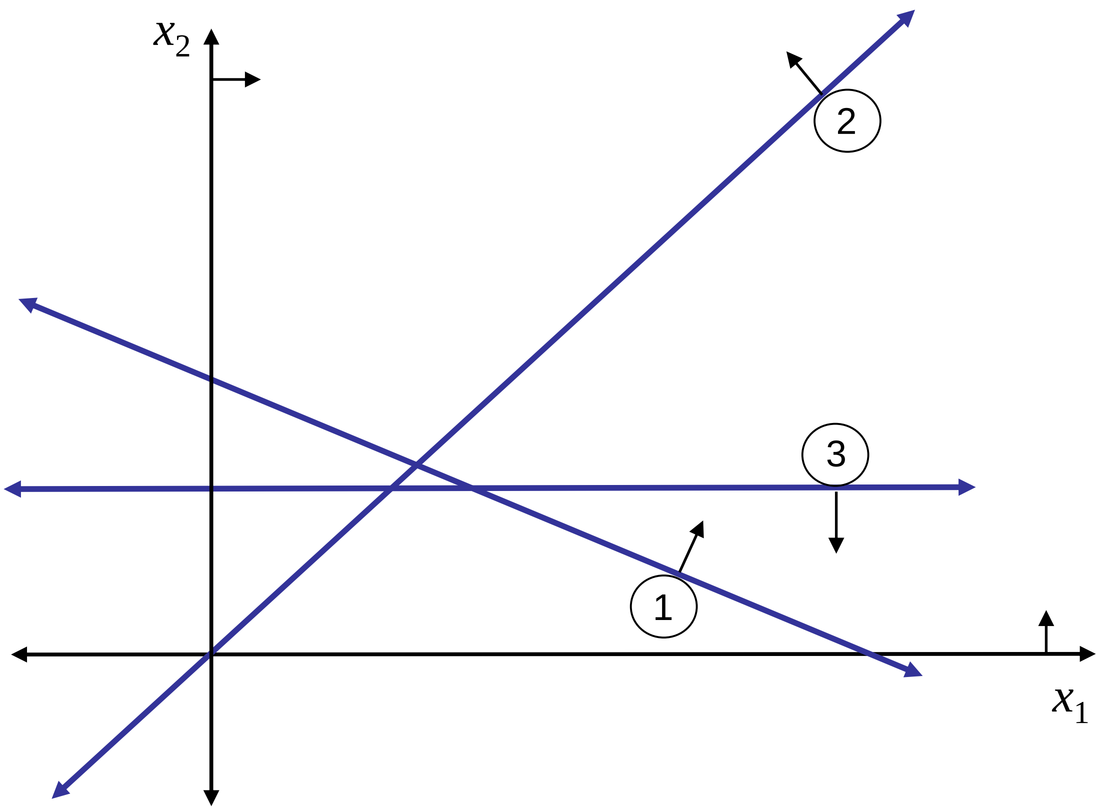
<u>مثال</u> : افترض البرنامج الخطي التالي

$$\min \quad z = 5x_1 + 10x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\ -x_1 + x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

حالات القرار في البرامج الخطية



الحل:

$$x_1 \geq 0\ ,\quad x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$
$$(0,5)\ ,\ (10,0)$$
$$(0,0) \Rightarrow (0)+2(0) = 0 < 10$$

$$-x_1 + x_2 \leq 0$$
$$(1,1)\ ,\ (2,2)$$
$$(1,2) \Rightarrow (2) - (1) = 1 > 0$$

$$x_2 \leq\ 3$$

لا توجد منطقة تقاطع مشتركة!

لا يوجد أي حل ممكن للبرنامج الخطي.

تحليل الحساسية
Sensitivity Analysis

تحليـل الحساسيـة

- دراسة ما بعد إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي.
- مدى حساسية الحل الأمثل للتغير في إحدى معطيات المسألة.
- إلى أي مدى يمكن زيادة أو إنقاص قيمة أحد:
  - معاملات المتغيرات في دالة الهدف
  - معاملات المتغيرات في القيود (معاملات الطرف الأيسر للقيود)
  - الموارد المتاحة (الطرف الأيمن للقيود)

ومعرفة تأثير ذلك في القرارات المتخذة و/أو قيمة دالة الهدف؟

ندرس تأثير تغيير قيمة معلم واحد فقط، مع بقاء بقية المعالم ثابتة.

تحليـل الحساسيـة

- **القيد الرابط:**

يكون أحد القيود قيداً رابطاً للحل الأمثل (x_1^*, x_2^*) إذا كان هذا القيد محققاً في صورة مساواة عند قيم متغيرات القرار الأمثل.

- **القيد الغير الرابط:**

يكون أحد القيود قيداً غير رابطاً للحل الأمثل (x_1^*, x_2^*) إذا كان هذا القيد غير متحقق في صورة مساواة عند قيم متغيرات القرار الأمثل.

- **المورد النادر:** مورد القيد الرابط يعتبر نادراً، لأنه تم استهلاكه كاملاً.

- **المورد المتوفر:** مورد القيد غير الرابط يعتبر متوفراً، لأنه لم يتم استهلاكه كاملاً.

تحليـل الحساسيـة

<u>مثال</u>: مسألة إنتاج الدهانات التي تم صياغتها سابقاً.

$$\max \; z = 3000x_1 + 2000x_2$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$2x_1 + x_2 \le 8$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_2 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

تحليـل الحساسيـة

الحل الأمثل: $x_1^* = 10/3$ and $x_2^* = 4/3$

نقوم بالتعويض في القيود:

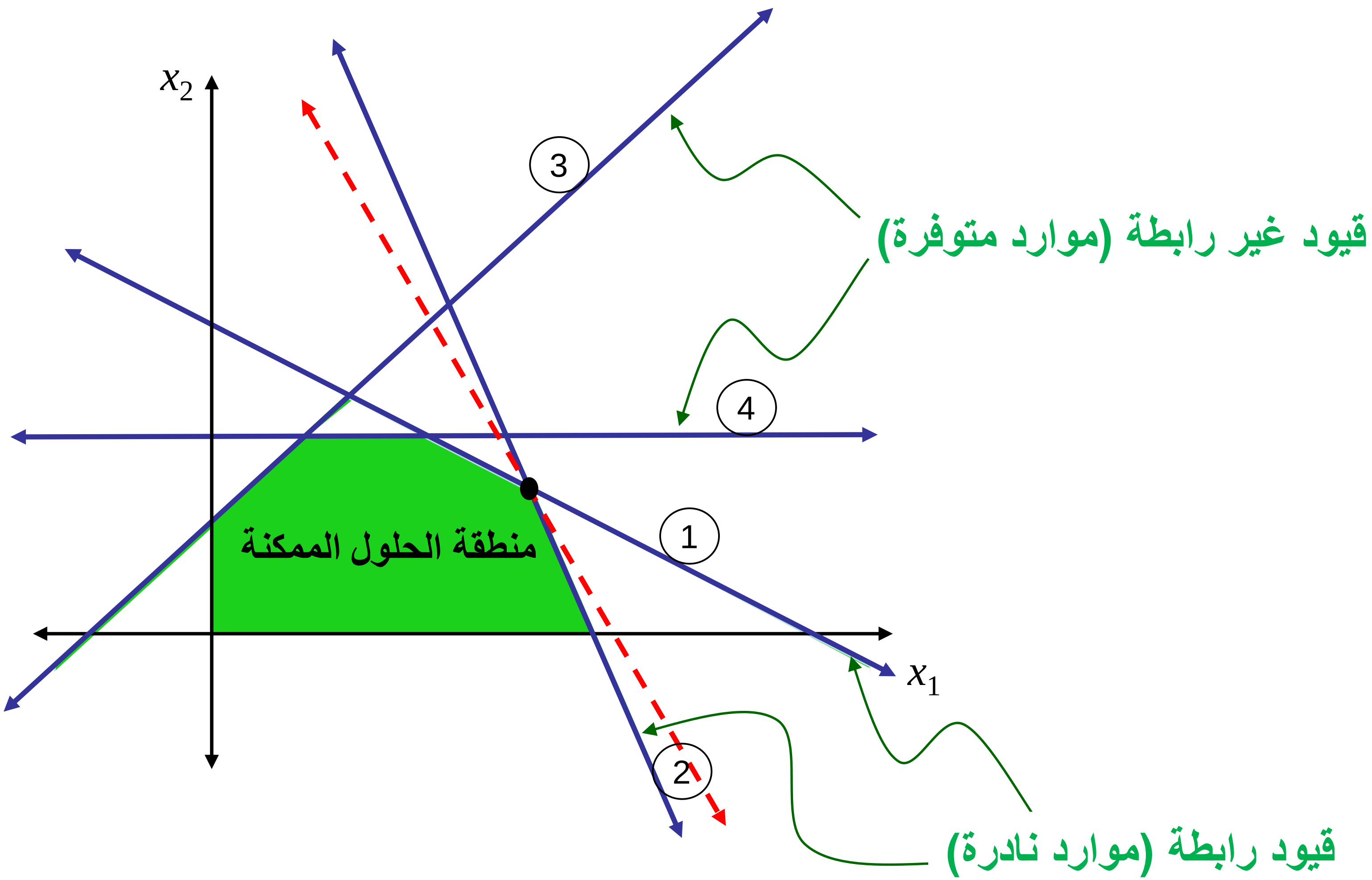
قيد رابط، مورد نادر $x_1^* + 2x_2^* = 6$

قيد رابط، مورد نادر $2x_1^* + x_2^* = 8$

قيد غير رابط، مورد متوفر $-x_1^* + x_2^* = -2 < 1$

قيد غير رابط، مورد متوفر $x_2^* = 4/3 = 1.333 < 2$

تحليـل الحساسيـة



تحليل الحساسية

لنفرض أن دالة الهدف $\max z$ وجميع القيود من نوع "$\leq$" أقل من أو يساوي

- الزيادة في الموارد النادرة ستؤدي إلى تحسين دالة الهدف.

السؤال 1: إلى أي مدى يمكن زيادة أحد الموارد النادرة لتحسين دالة الهدف؟

- النقصان في الموارد المتوفرة سيؤدي إلى توفير الاستهلاك.

السؤال 2: إلى أي مدى يمكن إنقاص أحد الموارد المتوفرة دون التأثير على دالة الهدف؟

تحليل حســاسـية الموارد النادرة

مثال: مسألة إنتاج الدهانات: المادة الخام B تعتبر مورد نادر.

ما مدى تأثير زيادة طن واحد من المادة الخام B على دالة الهدف؟

$$\max \ z = 3000x_1 + 2000x_2$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 \le 6 \qquad (1)$$

$$2x_1 + x_2 \le 8+1 \qquad (2)$$

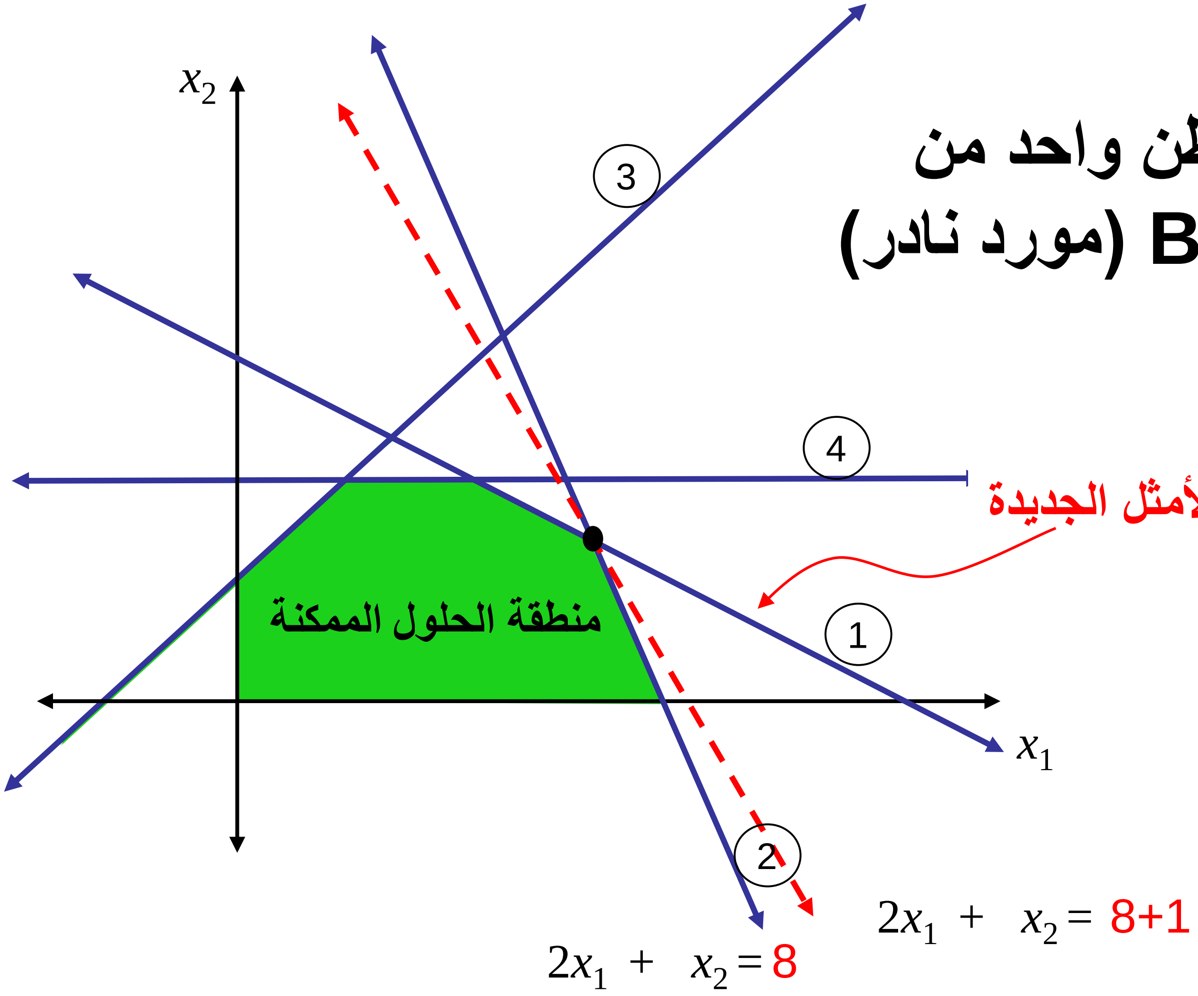
$$-x_1 + x_2 \le 1 \qquad (3)$$

$$x_2 \le 2 \qquad (4)$$

$$x_1 \ge 0 \text{ و } x_2 \ge 0$$

تحليل حسـاسيـة الموارد النادرة

تأثير زيادة طن واحد من المادة الخام B (مورد نادر)



تحليل حساسية الموارد النادرة

نقطة الحل الأمثل الجديدة ستكون عند تقاطع المستقيمين:

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$2x_1 + x_2 = 8+1 = 9$$

$$x_1{}^* = 4 \;,\; x_2{}^* = 1 \;,\; z^* = 14000$$

تأثير زيادة طن واحد من المادة الخام B

$$= z^*_{\text{new}} - z^*_{\text{old}} = 14000 - 12666.67 = 1333.34 \text{ SR}$$

هذه القيمة تسمى سعر الظل للمورد الخام B

تحليل حساسية الموارد النادرة

سؤال: ما مقدار أقصى زيادة اقتصادية من أحد الموارد النادرة لتحسين دالة الهدف؟

زيادة اقتصادية ⟺ كافة الكمية المتاحة من المورد تستهلك بدون فائض

الجواب: إيجاد أبعد مسافة يمكن بها إزاحة قيد استهلاك المورد بحيث تحدث تغيراً في منطقة فضاء الحلول.

تحليل حســاسيـة الموارد النادرة

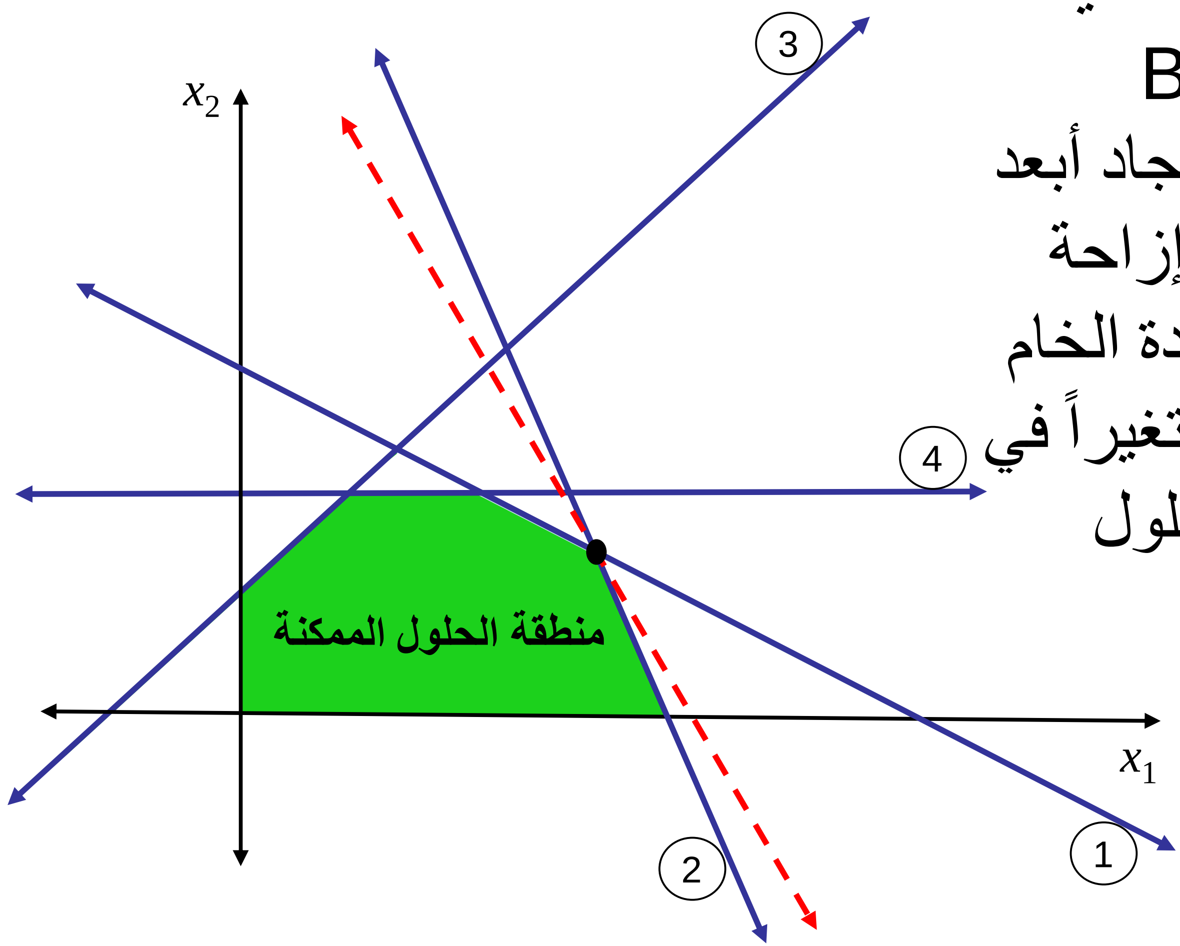
من الموارد النادرة: المادة الخام B

سؤال: ما مقدار أقصى زيادة اقتصادية من المادة الخام B لتحسين دالة الهدف؟

الجواب: إيجاد أبعد مسافة يمكن بها إزاحة قيد استهلاك المادة الخام B بحيث تحدث تغيراً في منطقة فضاء الحلول.

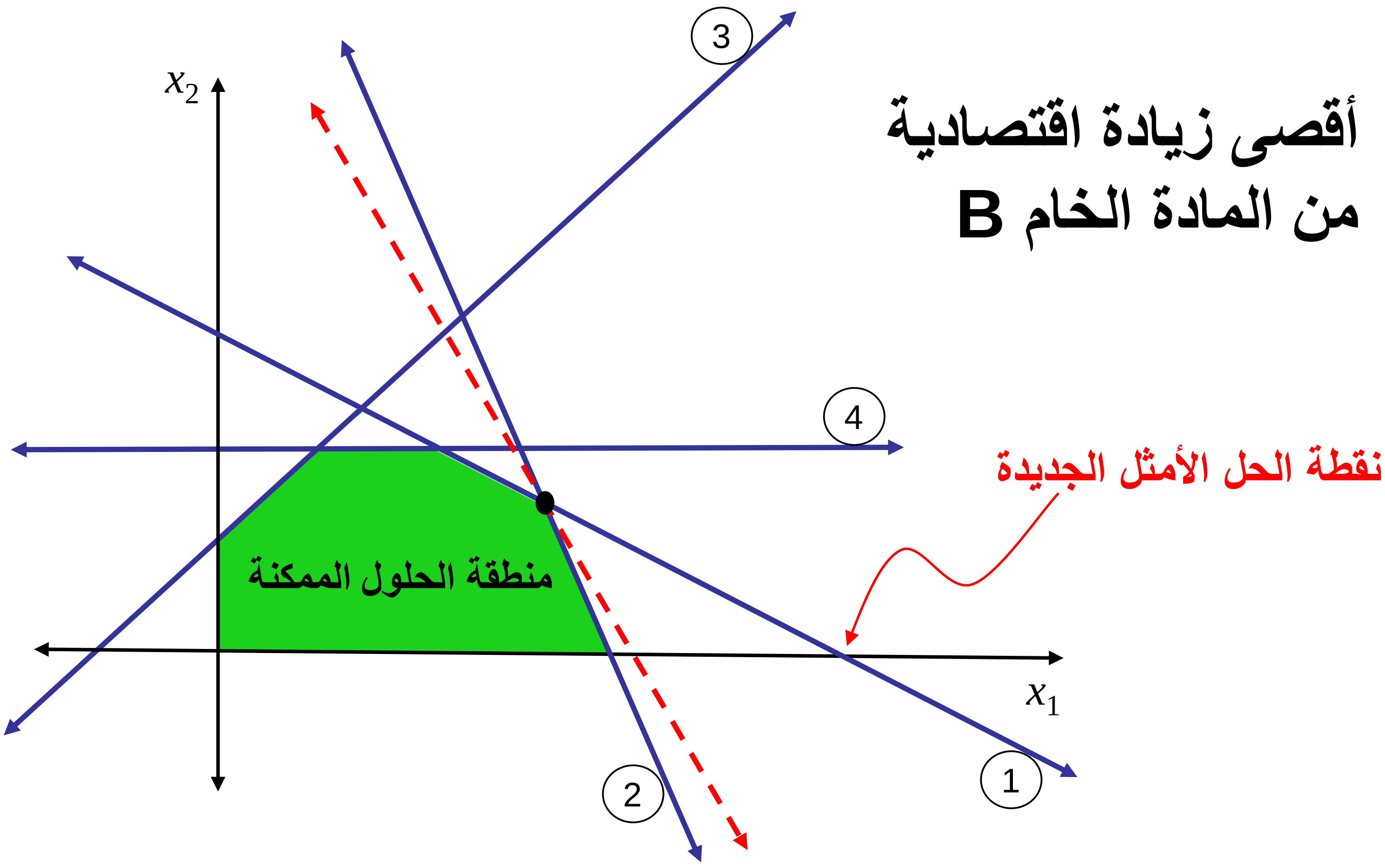
تحليل حســاسيـة الموارد النادرة

أقصى زيادة اقتصادية
من المادة الخام B
نحصل عليها بإيجاد أبعد
مسافة يمكن بها إزاحة
قيد استهلاك المادة الخام
B بحيث تحدث تغيراً في
منطقة فضاء الحلول

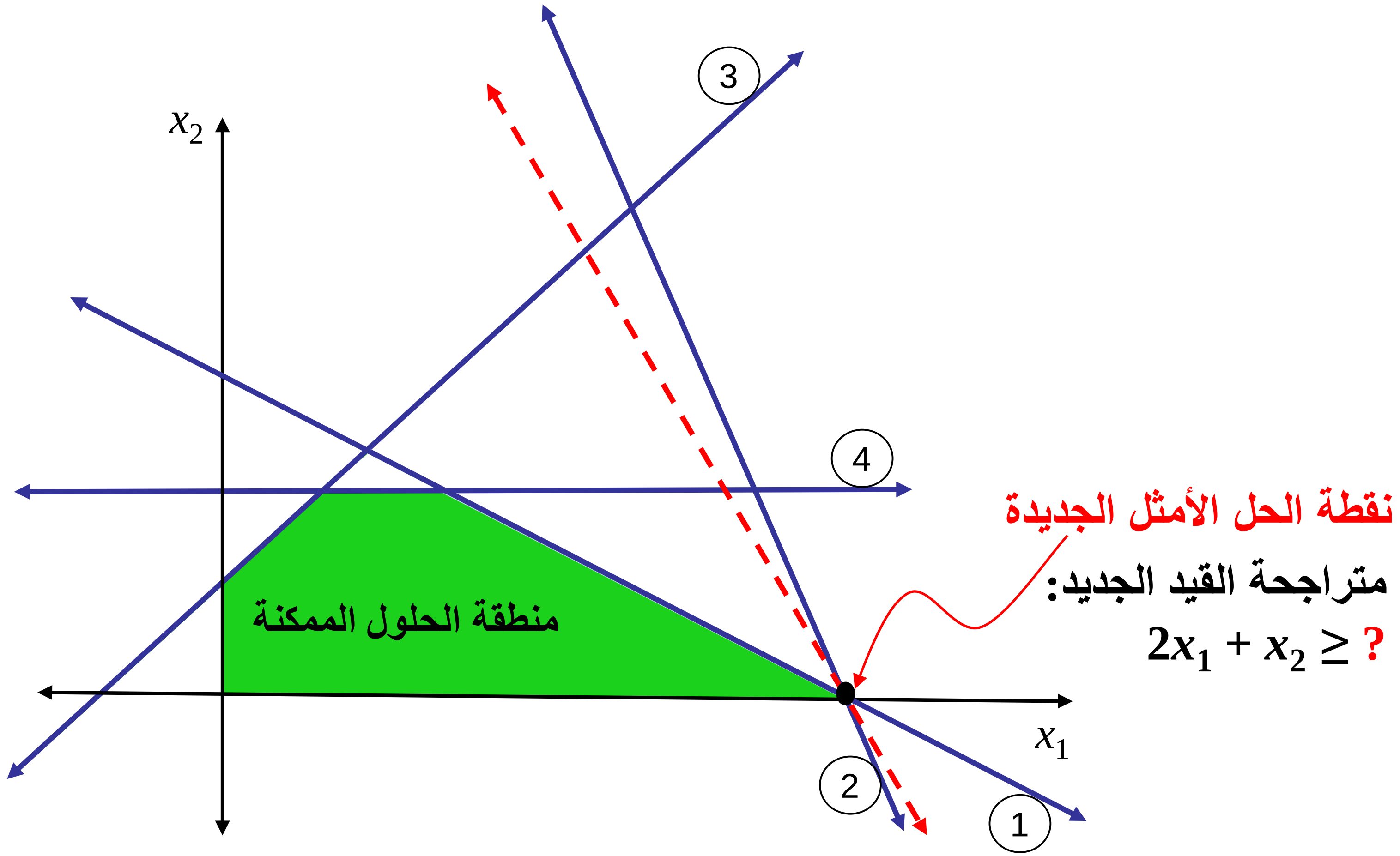


تحليل حســاسيـة الموارد النادرة

أقصى زيادة اقتصادية من المادة الخام B



تحليل حســاسيـة الموارد النادرة



تحليل حساسية الموارد النادرة

الحل الأمثل الجديد (عند تقاطع المستقيم (1) مع المستقيم $x_2 = 0$):

$$x_1^* = 6 \; , \; x_2^* = 0 \; , z^* = 18000$$

القيد الجديد للمادة الخام B هو: $2x_1 + x_2 \leq ?$

بتعويض الحل الأمثل الجديد $(x_1^* = 6 \; , \; x_2^* = 0)$ في القيد كما يلي:

$$2(6) + (0) = 12$$

إذاً القيد الخطي الجديد هو: $2x_1 + x_2 \leq 12$

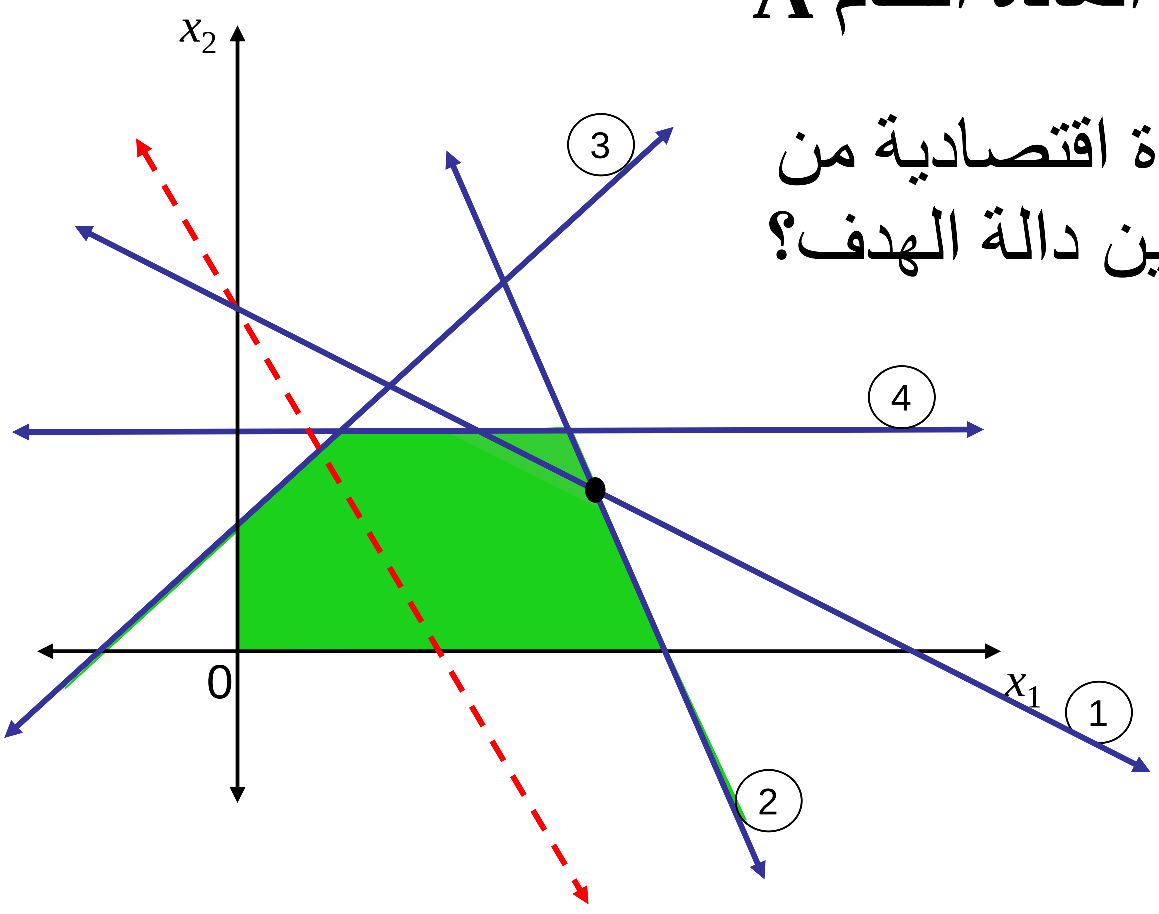
الحد الأعلى للمادة الخام B عند الحل الأمثل الجديد = 12 طن

وأقصى زيادة اقتصادية للمادة الخام B = 12 – 8 = 4 أطنان

تحليـل حســاسيـة الموارد النادرة

<u>من الموارد النادرة</u>: المادة الخام A

ما مقدار أقصى زيادة اقتصادية من المادة الخام A لتحسين دالة الهدف؟



تحليل حســاسيــة الموارد النادرة

الحل الأمثل الجديد (عند تقاطع المستقيم (2) مع المستقيم (4)):

$$x_1^* = 3 \;\; , \;\; x_2^* = 2 \; , \; z^* = 13000$$

القيد الجديد للمادة الخام A هو: $x_1 + 2x_2 \leq ?$

بتعويض الحل الأمثل الجديد $(x_1^* = 3 \;\; , \;\; x_2^* = 2)$ في القيد كما يلي:

$$(3) + 2(2) = 7$$

إذاً القيد الخطي الجديد هو: $x_1 + 2x_2 \leq 7$

الحد الأعلى للمادة الخام A عند الحل الأمثل الجديد = 7 طن

وأقصى زيادة اقتصادية للمادة الخام A = 7 – 6 = 1 طن

(Shadow Prices) أسعار الظل

سعر الظل للمورد = القيمة الاقتصادية للوحدة الإضافية من المورد

$$= \frac{z^*_{\text{new}} - z^*_{\text{old}}}{\text{أكبر زيادة اقتصادية ممكنة للمورد}}$$

$z^*_{\text{new}} =$ قيمة دالة الهدف بعد إضافة الوحدات الإضافية من المورد

$z^*_{\text{old}} =$ قيمة دالة الهدف بدون إضافة أي وحدات إضافية من المورد

- زيادة قيمة المورد النادر يحسن قيمة دالة الهدف.
- سعر الظل للمورد المتوفر = صفر.

أسعار الظل

القيمة الاقتصادية للوحدة الزائدة من المادة الخام A:

إذا أمكن شراء وحدات إضافية من المادة الخام A فما هو أعلى سعر شراء ذو منفعة للوحدة الواحدة؟

$$z^*_{new} = 13000$$
$$z^*_{old} = 12666.67$$

قيمة الوحدة الإضافية للمادة A $= \dfrac{13000 - 12666.67}{1}$

$= 333.33$ ريال للطن

أسعار الظل

القيمة الاقتصادية للوحدة الزائدة من المادة الخام B:

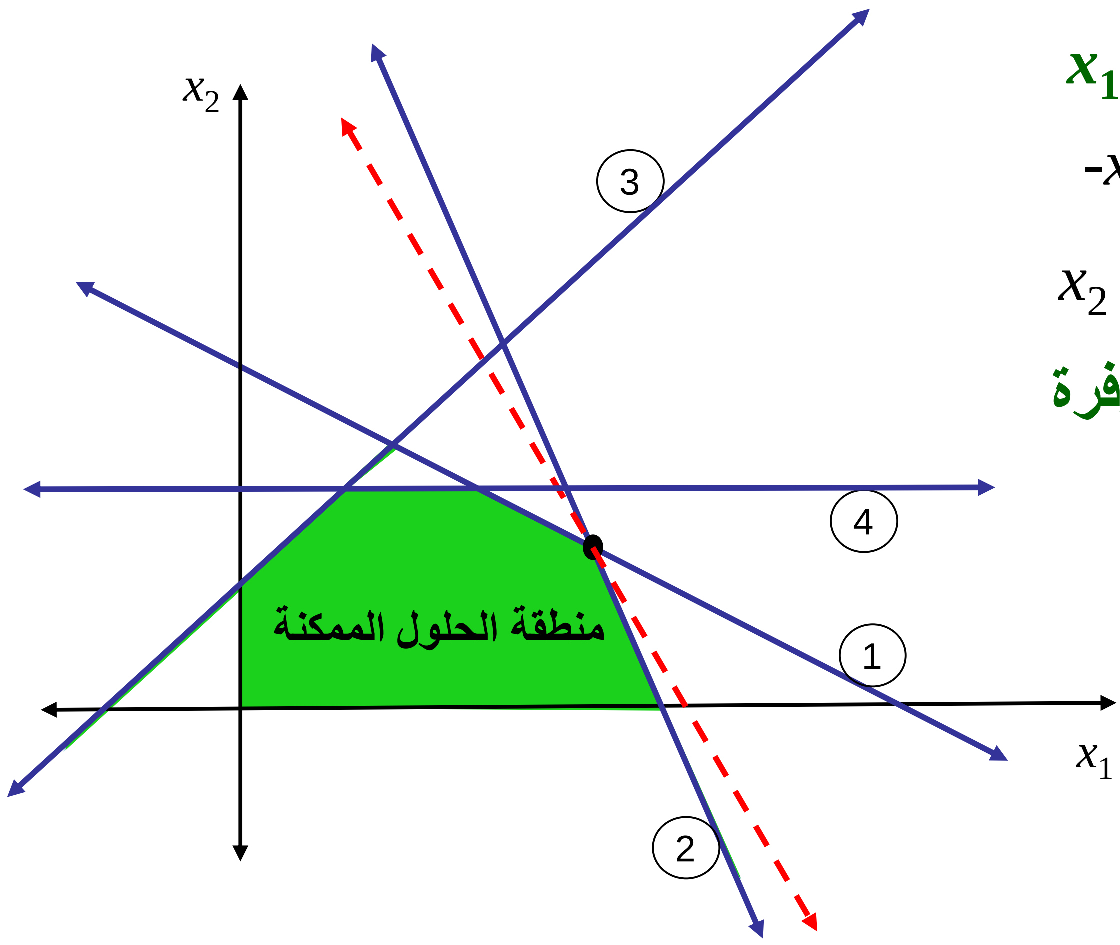
إذا أمكن شراء وحدات إضافية من المادة الخام B فما هو أعلى سعر شراء ذو منفعة للوحدة الواحدة؟

$$z^*_{new} = 18000$$
$$z^*_{old} = 12666.67$$

قيمة الوحدة الإضافية للمادة B $= \dfrac{18000 - 12666.67}{4}$

$= 1333.33$ ريال للطن

تحليـل حساسيـة الموارد المتوفرة



الحل الأمثل:

$x_1^* = 10/3$ and $x_2^* = 4/3$

$-x_1^* + x_2^* = -2 < 1 \quad (3)$

$x_2^* = 4/3 = 1.33 < 2 \quad (4)$

موارد القيد الثالث والرابع متوفرة

تحليل حساسية الموارد المتوفرة

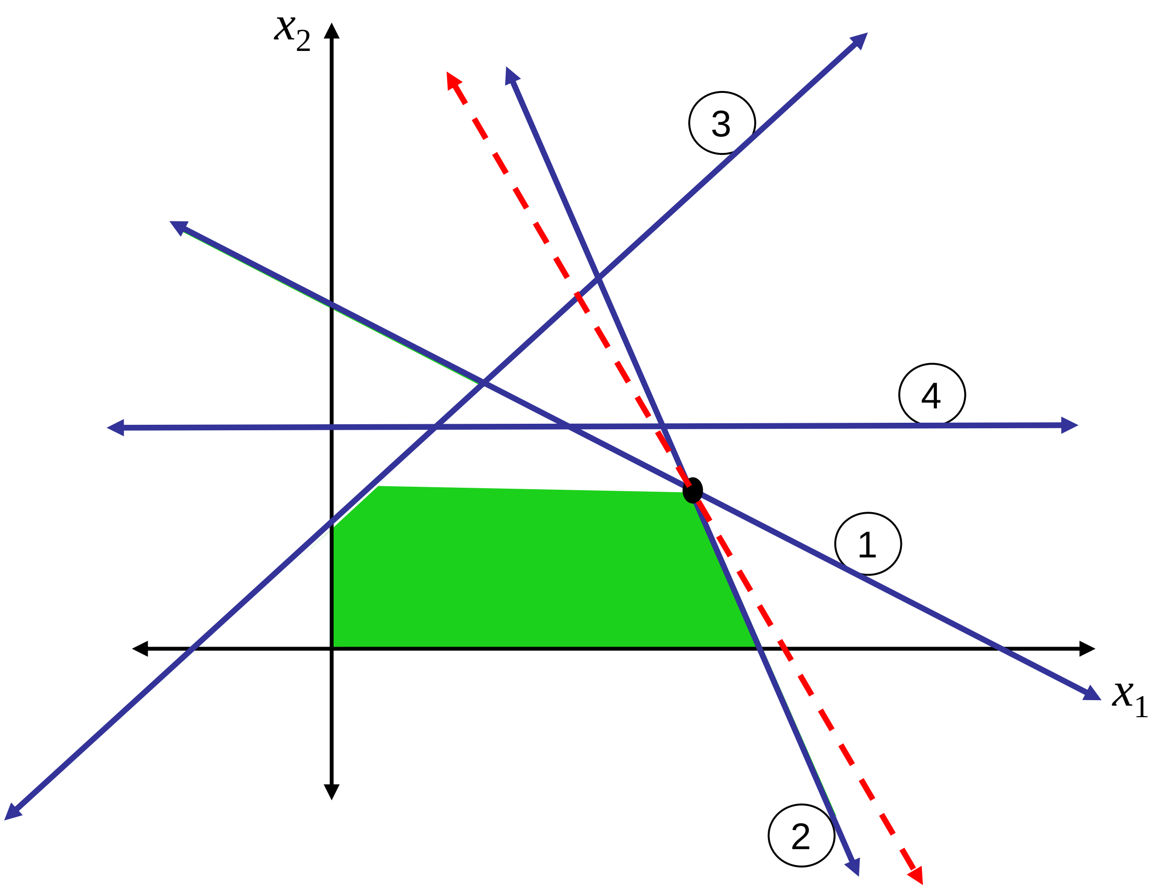
سؤال:

إلى أي مدى يمكن إنقاص المورد الوفير بحيث يبقى الحل الأمثل دون تغيير؟

الجواب:

الحد الأقصى للتناقص في أي مورد من الموارد الوفيرة هو إزاحة القيد الوفير باتجاه نقطة الحل الأمثل حتى يصل إلى نقطة الحل الأمثل.

تحليـل حساسيـة الموارد المتوفرة



مورد القيد الرابع متوفر:

$x_1^* = 10/3$ and $x_2^* = 4/3$

$x_2^* = 4/3 = 1.33 < 2 \quad (4)$

يمكن للطرف الأيمن أن ينقص

بمقدار 0.67 :

(2 – 1.33 = 0.67)

ليصبح القيد:

$x_2^* \leq 4/3$

تحليـل حساسيـة الموارد المتوفرة

موارد القيد الثالث متوفر:

$x_1^* = 10/3$ and $x_2^* = 4/3$

$-x_1^* + x_2^* = -2 < 1 \quad (3)$

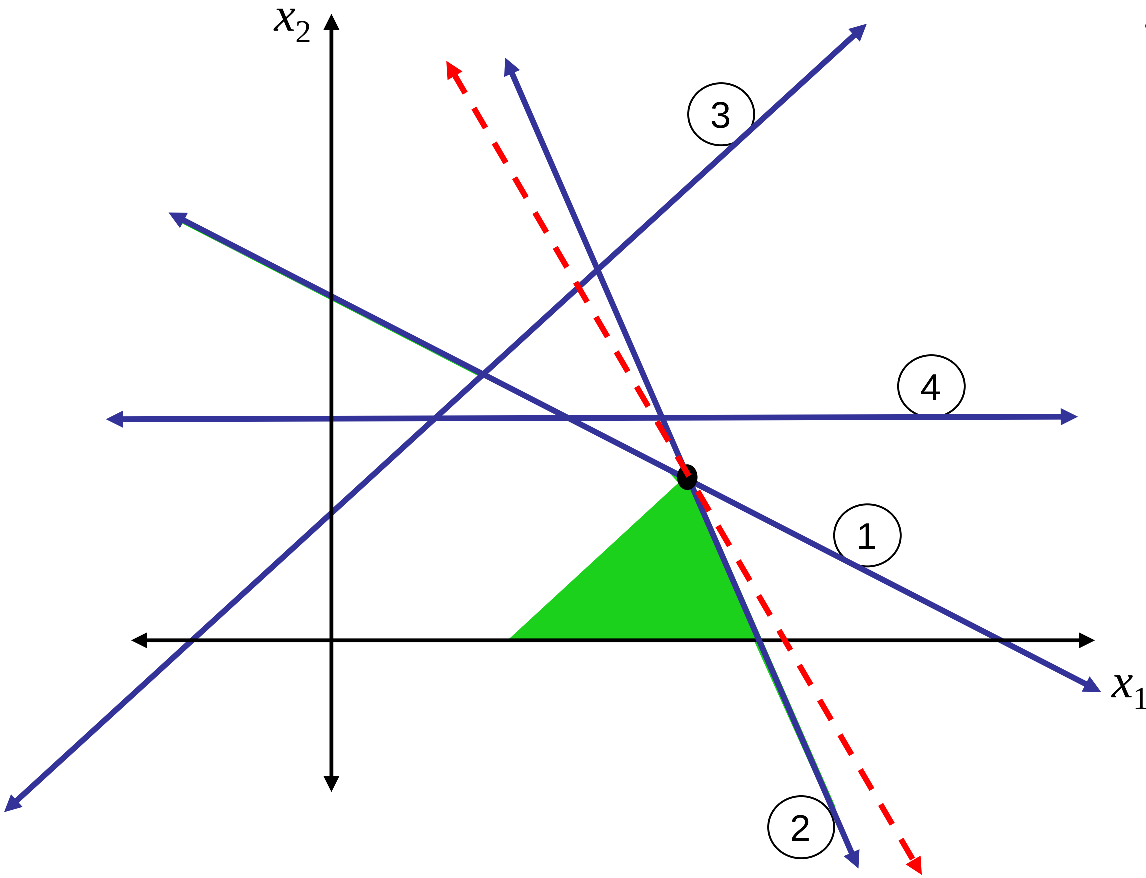
يمكن للطرف الأيمن أن ينقص

بمقدار 3 :

(1 – (– 2) = 3)

ليصبح القيد:

$-x_1^* + x_2^* \leq -2$



تحـليـل حساسيـة التغير في أحد معالم دالة الهدف

ميل المستقيم $ax_1 + bx_2 = \mathrm{c}$ هو $\frac{-a}{b}$ حيث أن a, b, c ثوابت.
$(b \neq 0)$

مستقيم دالة الهدف: $z = c_1x_1 + c_2x_2$ حيث أن c_1, c_2 ثوابت.

ميل مستقيم دالة الهدف: $\frac{-c_1}{c_2}$ $(c_2 \neq 0)$

التغير في قيمة أحد المعالم c_1 أو c_2 $\Leftrightarrow$ التغير في ميل دالة الهدف

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

قاعدة 1:

عند ضرب أو قسمة طرفي متراجحة بعدد سالب، نعكس اتجاه المتراجحة. لأي ثوابت حقيقية a, b :

$$-1 \times (a < b) \Rightarrow -a > -b$$

$$-1 \times (a > b) \Rightarrow -a < -b$$

$$-1 \times (a \leq b) \Rightarrow -a \geq -b$$

$$-1 \times (a \geq b) \Rightarrow -a \leq -b$$

مثال: $-1 \times (-1 \leq -a \leq 2) \Rightarrow 1 \geq a \geq -2$

وتكافئ: $-2 \leq a \leq 1$

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

قاعدة 2:

لأي ثوابت حقيقية a, b, c, d ، بحيث تكون جميعها موجبة أو جميعها سالبة، إذا قلبنا (عكسنا) طرفي المتراجحة ، نعكس اتجاه المتراجحة:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{a} > \frac{d}{c}$$

أمثلة:

$$\frac{3}{4} < \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{3} > \frac{2}{3}$$

$$-2 < -\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} > -4$$

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

سنكتفي بحالة عندما تكون القيود الرابطة ذات ميل سالب

<u>سؤال:</u>

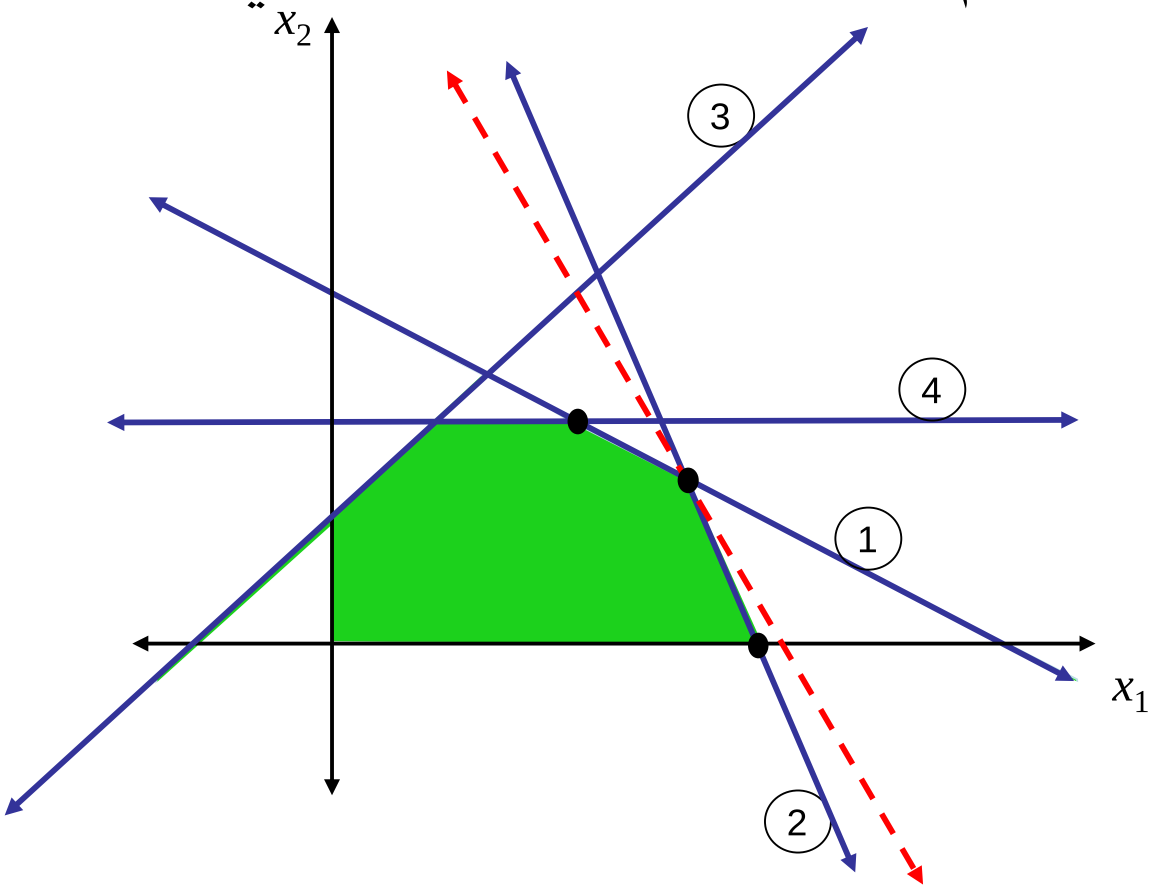
حدد المجال الذي يمكن أن يتغير فيه قيمة أحد المعالم c_1 أو c_2 دون أن يتغير الحل المثل.

<u>الجواب:</u>

لا يتغير الحل الأمثل إذا كان ميل دالة الهدف محصور بين ميل القيود الرابطة عند الحل الأمثل.

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

- التغير في أحد معالم دالة الهدف $\Leftrightarrow$ التغير في ميل دالة الهدف



تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

<u>مثال الدهانات</u>:

لا يتغير الحل الأمثل $x_2^* = 1.33$, $x_1^* = 3.33$ مع تغير الأسعار إذا كان ميل دالة الهدف محصور بين ميل القيد (1) وميل القيد (2).

ميل دالة الهدف $3000x_1 + 2000x_2 = -3000/2000 = -3/2 = -1.5$

ميل القيد (1) : $x_1 + 2x_2 = -1/2 = -0.5$

ميل القيد (2) : $2x_1 + x_2 = -2/1 = -2$

لا يتغير القرار الأمثل إذا كان : $-2 < \textit{slope } z < -0.5$

تحـليـل حساسيـة التغير في أحد معالم دالة الهدف

دالة الهدف: $z = 3000x_1 + 2000x_2$

(سعر الطن من الدهان الخارجي) $c_1 = 3000$

(سعر الطن من الدهان الداخلي) $c_2 = 2000$

سؤال:

أ) حدد المجال الذي يمكن أن يتغير فيه المعلم c_1 فقط دون أن يتغير الحل المثل.

ب) حدد المجال الذي يمكن أن يتغير فيه المعلم c_2 فقط دون أن يتغير الحل المثل.

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

جواب:

أ) فترة التغير السعري للطن من الدهان الخارجي c_1 (مع بقاء بقية المعالم ثابتة)

بحيث يبقى الحل الأمثل ثابتا هو:

$$-2 < \frac{-c_1}{c_2} < -\frac{1}{2}$$

$$-2 < \frac{-c_1}{2000} < -\frac{1}{2}$$

$$-4000 < -c_1 < -1000$$

$$1000 < c_1 < 4000$$

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

جواب:

ب) فترة التغير السعري للطن من الدهان الخارجي c_2 (مع بقاء بقية المعالم ثابتة)

بحيث يبقى الحل الأمثل ثابتا هو:

$$-2 < \frac{-c_1}{c_2} < -\frac{1}{2}$$

$$-2 < \frac{-3000}{c_2} < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{3000}{c_2} < 2$$

$$\frac{1}{2} < \frac{c_2}{3000} < 2$$

$$1500 < c_2 < 6000$$

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

$$\boldsymbol{a < slope\ z < b}$$

$$a < \frac{-c_1}{c_2} < b$$

ونحصل على:

$$-b\,c_2 < c_1 < -a\,c_2$$

$$and$$

$$-\frac{1}{a}c_1 < c_2 < -\frac{1}{b}c_1$$

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

- 2 < *slope z* < - 0.5

$$-2 < \frac{-c_1}{c_2} < -0.5$$

ونحصل على:

$$\begin{aligned}
&0.5\,c_2 < c_1 < 2\,c_2 && \rightarrow && 1000 < c_1 < 4000 \\
&and && && and \\
&0.5\,c_1 < c_2 < 2\,c_1 && \rightarrow && 1500 < c_2 < 6000
\end{aligned}$$

تحليـل الحســاسيـة

مثال: للبرنامج الخطي التالي:

$$\max z = 800x_1 + 500x_2$$

s.t.

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 &\le 40 && \text{(1) القيد} \\
x_1 + 0.5x_2 &\le 8 && \text{(2) القيد} \\
2x_1 + x_2 &\le 24 && \text{(3) القيد} \\
x_1 + x_2 &\le 10 && \text{(4) القيد} \\
x_1 , x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

أوجد تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف وللطرف الأيمن للقيود الخطية وأسعار الظل.

تحليل الحساسية

تحليـل الحســاسيـة

الحل الأمثل:

$$x_1^* = 6 \;,\; x_2^* = 4 \;, \qquad z^* = 6800$$

ويقع عند تقاطع القيدين الثاني والرابع.

ميل القيد (2) = -1/0.5 = -2

ميل القيد (4) = -1/1 = -1

تحليل حساسية معاملات دالة الهدف:

$$-2 < \frac{-c_1}{c_2} < -1$$

$$500 < c_1 < 1000$$

$$400 < c_2 < 800$$

تحليل الحساسية

لمعرفة الموارد النادرة والمتوفرة:

نعوض بقيم الحل الأمثل $x_2^* = 4$, $x_1^* = 6$ في متراجحات القيود.

$3x_1^* + 2x_2^* = 26 < 40$ (1) قيد غير رابط ، مورد متوفر

$x_1^* + 0.5x_2^* = 8 = 8$ (2) قيد رابط ، مورد نادر

$2x_1^* + x_2^* = 16 < 24$ (3) قيد غير رابط ، مورد متوفر

$x_1^* + x_2^* = 10 = 10$ (4) قيد رابط ، مورد نادر

تحليل الحساسية

الموارد النادرة: القيد (2)

نستطيع إزاحة القيد (2) ليصبح: $x_1 + 0.5x_2 \le \mathbf{10}$

أقصى زيادة اقتصادية ممكنة لمورد القيد (2) = **2**

الحل الأمثل الجديد سيكون: $\boldsymbol{x_1^* = 10\ ,\ x_2^* = 0\ ,\ z^* = 8000}$

سعر الظل لمورد القيد (2) =

القيمة الاقتصادية لسعر الوحدة الإضافية من مورد القيد (2) =

$$600 = \frac{8000 - 6800}{10 - 8}$$

تحليـل الحســاسيـة

الموارد النادرة: القيد (4)

نستطيع إزاحة القيد (4) ليصبح: $x_1 + x_2 \leq \mathbf{16}$

أقصى زيادة اقتصادية ممكنة لمورد القيد (4) = **6**

الحل الأمثل الجديد سيكون: $\boldsymbol{x_1^* = 0 \;,\; x_2^* = 16 \;,\; z^* = 8000}$

سعر الظل لمورد القيد (4) =

القيمة الاقتصادية لسعر الوحدة الإضافية من مورد القيد (4) =

$$200 = \frac{8000 - 6800}{16 - 10}$$

تحليـل الحســاسيـة

الموارد المتوفره:

يمكن إزاحة (إنقاص) القيد (1) ليصبح:

$$3x_1 + 2x_2 \leq \mathbf{26}$$

مقدار التوفير الاقتصادي في مورد القيد (1) = **14**

يمكن إزاحة (إنقاص) القيد (3) ليصبح:

$$2x_1 + x_2 \leq \mathbf{16}$$

مقدار التوفير الاقتصادي في مورد القيد (1) = **8**

سعر الظل لمورد القيد (1) ولمورد القيد (3) = صفر.

الحل الجبري للبرامج الخطية

خوارزمية السمبلكس
Simplex Algorithm

صيغ البرامج الخطية

1- الصيغة القانونية للبرامج الخطية (Canonical Form)

$$\textbf{max} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n \le b_1$$

$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n \le b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n \le b_m$$

$$x_i \ge 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

صيغ البرامج الخطية

1- الصيغة القانونية للبرامج الخطية (Canonical Form)

$$\min \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n \geq b_1$$

$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n \geq b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n \geq b_m$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

صيغ البرامج الخطية

2- الصيغة القياسية للبرامج الخطية (Standard Form)

- جميع القيود في صيغة معادلات، أي أنها قيود مساواة (**=**)
- لا يوجد سالب على الطرف الأيمن للقيود
- جميع متغيرات القرار غير سالبة

$$\max \text{ (or min) } \; z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1$$

$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n = b_m$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

صيغ البرامج الخطية

المتراجحة:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

يمكن تحويلها إلى معادلة بإضافة متغير مكمل غير سالب كما يلي:

$$x_1 + 2x_2 + s = 6$$

$$s \geq 0$$

المتغير المكمل الجديد s يكمل الدالة $x_1 + 2x_2$ لتساوي 6.

صيغ البرامج الخطية

مثال: برنامج في **الصيغة القانونية** لمسألة max:

$$\max \quad z = 3000x_1 + 2000x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

صيغ البرامج الخطية

مثال: ويمكن تحويلة للصيغة القياسية كما يلي:

$$\max \quad z = 3000x_1 + 2000x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + s_1 \qquad\qquad\qquad &= 6\\
2x_1 + x_2 \qquad + s_2 \qquad\qquad &= 8\\
-x_1 + x_2 \qquad\qquad + s_3 \qquad &= 1\\
x_2 \qquad\qquad\qquad + s_4 &= 2\\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

الحل الأساسي

حل نظام من معادلات خطية في حالة وجود عدد لانهائي من الحلول.
لنفترض لدينا النظام الخطي التالي:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}
$$

عدد المعادلات $= m$

عدد المتغيرات $= n$

$$n > m$$

الحل الأساسي

- اختر m من المتغيرات لتكون متغيرات أساسية (Basic Variables or BV)

- المتغيرات المتبقية (عددها $n - m$) تكون متغيرات غير أساسية (Non-Basic Variables or NBV)

- الحل الأساسي (Basic Solution): نحصل عليه بوضع قيم جميع المتغيرات الغير أساسية مساوية للصفر. ثم نوجد حل للنظام.

الحل الأساسي

مثال:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad\quad &= 10 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 20 \end{aligned}$$

لدينا ثلاثة متغيرات $(n = 3)$ وقيدان $(m = 2)$.
نحتاج تثبيت متغير واحد فقط $(n - m = 1)$ عند الصفر.

يمكن إيجاد ثلاثة حلول أساسية:

المتغير x_1 غير أساسي: $(x_1 , x_2 , x_3) = (0 , -10 , 15)$

المتغير x_2 غير أساسي: $(x_1 , x_2 , x_3) = (10 , 0 , 5)$

المتغير x_3 غير أساسي: $(x_1 , x_2 , x_3) = (15 , 5 , 0)$

الحل الأساسي الممكن

بعد إيجاد الحل الأساسي، إذا كانت قيم جميع المتغيرات غير سالبة، فأنه يسمى **حل أساسي ممكن** (Basic Feasible Solution).

سنوضح فكرة الحلول الأساسية في المثال التالي:
لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& x_1 + x_2 \le 40 \\
& 2x_1 + x_2 \le 60 \\
& x_1 , x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

الحل الأساسي الممكن

نحول المتباينات إلى معادلات بإضافة متغيرات مكملة: s_1 و s_2

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$\boxed{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & = & 40 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & s_2 & = & 60 \end{array}}$$

$$x_1\,,\, x_2\,,\, s_1\,,\, s_2 \geq 0$$

سنركز على نظام المعادلات.

لدينا أربعة متغيرات $(n = 4)$ ومعادلتين $(m = 2)$.

نحتاج تثبيت متغيرين فقط $(n - m = 2)$ عند الصفر.

وبالتالي فإن الحل الأساسي سيحتوي على: متغيرين أساسيين ومتغيرين غير أساسيين.

الحل الأساسي الممكن

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & = & 40 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & s_2 & = & 60 \end{array}$$

مثلا: لو اخترنا أن تكون المتغيرات الغير أساسية هما: x_1 و s_2
وبالتالي فأن قيمها ستساوي الصفر: $x_1 = 0$, $s_2 = 0$

سيكون المتغيران x_2 و s_1 متغيران أساسيان، ولإيجاد قيمهما نحل المعادلتين:

$$\begin{array}{rcl} x_2 + s_1 & = & 40 \\ x_2 & = & 60 \end{array}$$

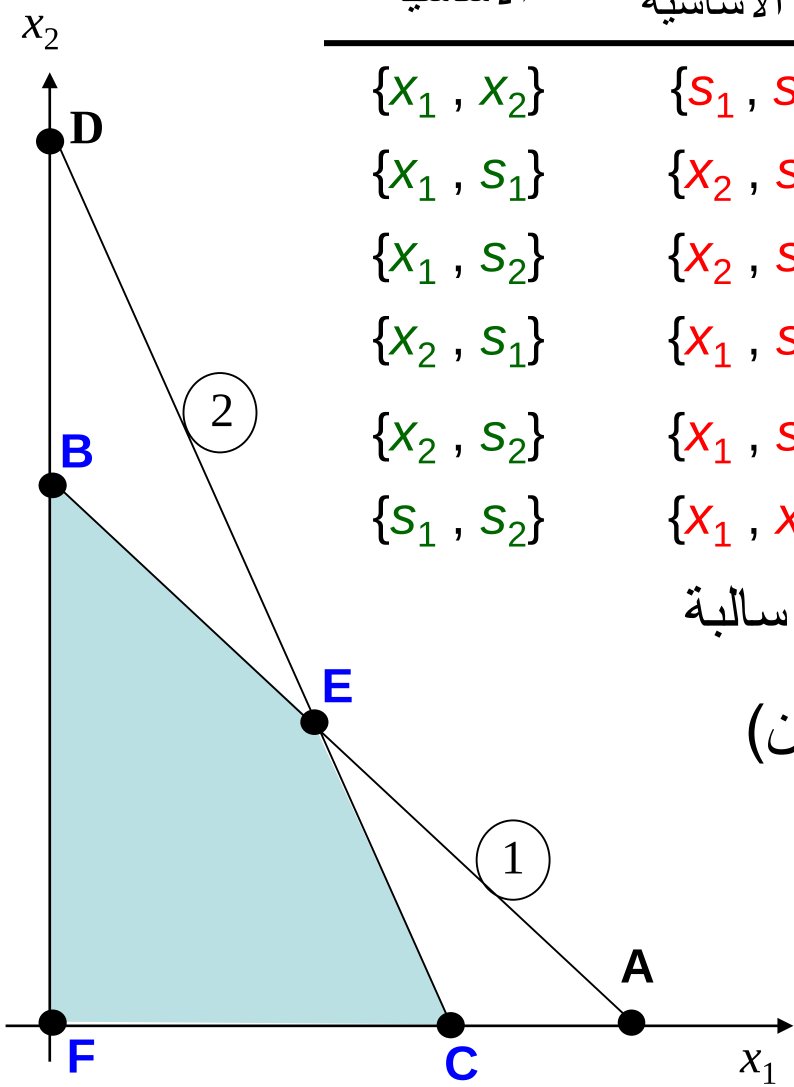
وبالتالي نحصل على الحل الأساسي:

$$(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 60, -20, 0)$$

وهو حل أساسي غير ممكن لوجود قيمة سالبة.

في الجدول التالي سنحدد كل الحلول الأساسية:

المتغيرات الأساسية	المتغيرات غير الأساسية	الحل الأساسي (x_1, x_2, s_1, s_2)	النقطة الموافقة للحل الأساسي
$\{x_1, x_2\}$	$\{s_1, s_2\}$	$(20, 20, 0, 0)$	E
$\{x_1, s_1\}$	$\{x_2, s_2\}$	$(30, 0, 10, 0)$	C
$\{x_1, s_2\}$	$\{x_2, s_1\}$	$(40, 0, 0, -20)$	A
$\{x_2, s_1\}$	$\{x_1, s_2\}$	$(0, 60, -20, 0)$	D
$\{x_2, s_2\}$	$\{x_1, s_1\}$	$(0, 40, 0, 20)$	B
$\{s_1, s_2\}$	$\{x_1, x_2\}$	$(0, 0, 40, 60)$	F



نلاحظ أن بعض هذه الحلول الأساسية قيمها غير سالبة

وتمثل في الرسم النقاط **B, E, C, F** (نقاط الأركان)

تسمى هذه الحلول: **الحلول الأساسية الممكنة**

النقطتان **A, D** تمثلان حلول أساسية غير ممكنة.

الحل الأساسي الممكن

<u>تعريف</u>: **<u>الحل الأساسي الممكن</u>** (Basic <u>Feasible</u> Solution)

هو الحل الأساسي الذي يحقق قيود اللاسالبية في البرنامج الخطي.

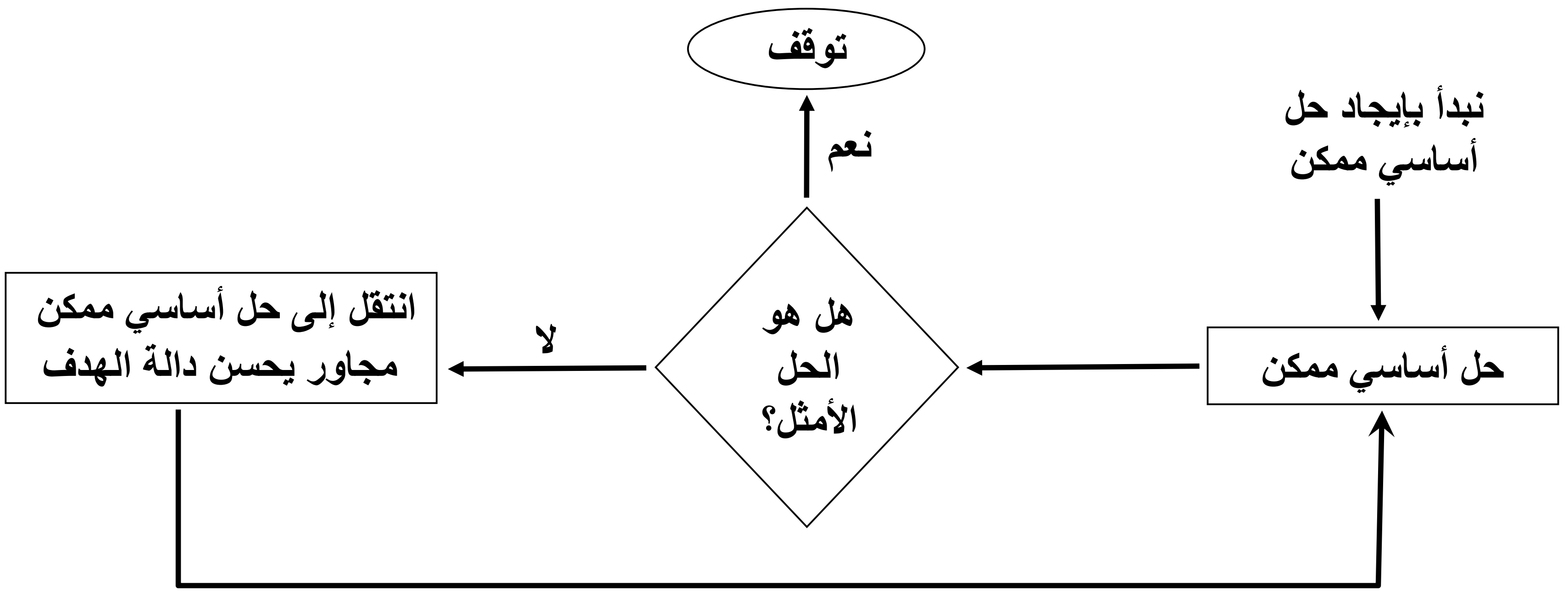
ويمثل هندسيا **إحدى النقاط الركنية** في منطقة الحلول الممكنة للبرنامج الخطي.

<u>نظرية</u>: إذا يوجد حل أمثل للبرنامج الخطي، فإن أحد الحلول الأساسية الممكنة سيكون حل أمثل. (قد لا يكون الحل الأمثل الوحيد)

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

سندرس فقط تطبيقها في حل مسائل البرمجة الخطية التي في الصيغة القانونية وذلك بعد تحويلها إلى الصيغة القياسية

سنفترض مسألة تعظيم دالة الهدف "max z"



خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

سنشرح خوارزمية السمبلكس بحل المثال التالي:

مثال: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي مستخدما طريقة السمبلكس:

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 &\le 40 \\ 2x_1 + \ x_2 &\le 60 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة الأولى: نحول البرنامج الخطي للصيغة القياسية:

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 \quad &= 40 \\ 2x_1 + x_2 \quad + s_2 &= 60 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

لاحظ أن:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & x_1 + x_2 + s_1 = 40 \\ & 2x_1 + x_2 + s_2 = 60 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

تكافئ:

$$\begin{aligned} \max \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & \\ & z = 4x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + x_2 + s_1 = 40 \\ & 2x_1 + x_2 + s_2 = 60 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

لاحظ أن:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 4x_1 + 3x_2 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad x_1 + x_2 + s_1 = 40 \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + s_2 = 60 \\
&\qquad x_1 , x_2 , s_1 , s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

وتكافئ:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad z - 4x_1 - 3x_2 = 0 \\
&\qquad x_1 + x_2 + s_1 = 40 \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + s_2 = 60 \\
&\qquad x_1 , x_2 , s_1 , s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

سنستخدم نظام المعادلات
هذا لتكوين جدول
السمبلكس المبدئي

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة الثانية: نكون جدول السمبلكس المبدئي كما يلي:

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	40
s_2	2	1	0	1	60

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الحل الأساسي المكمن المبدئي: $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 0, 40, 60)$

BV = Basic Variables = المتغيرات الأساسية = s_1 , s_2

The Non-Basic Variables = المتغيرات غير الأساسية = x_1 , x_2

	BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
صف دالة الهدف ⟶	z	-4	-3	0	0	0
صف القيد الأول ⟶	s_1	1	1	1	0	40
صف القيد الثاني ⟶	s_2	2	1	0	1	60

RHS = Right Hand Side = جهة الطرف الأيمن

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة الثالثة: اختبار الأمثلية

شرط الأمثلية للحل الأساسي الممكن الحالي في جدول السمبلكس:

الحل الأساسي الممكن الحالي يكون حلاً أمثلاً إذا كانت معاملات جميع المتغيرات الغير أساسية في صف دالة الهدف z أكبر من أو تساوي الصفر.

وحيث أن: دائماً قيم المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف = صفر

الحل الأساسي الممكن الحالي يكون حلاً أمثلاً إذا كانت معاملات جميع المتغيرات في صف دالة الهدف z أكبر من أو تساوي الصفر (غير سالبة).

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	40
s_2	2	1	0	1	60

الحل الأساسي الممكن الحالي: $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 0, 40, 60)$

وقيمة دالة الهدف $z = 0$

كما نلاحظ: لدينا قيم سالبة في صف دالة الهدف.

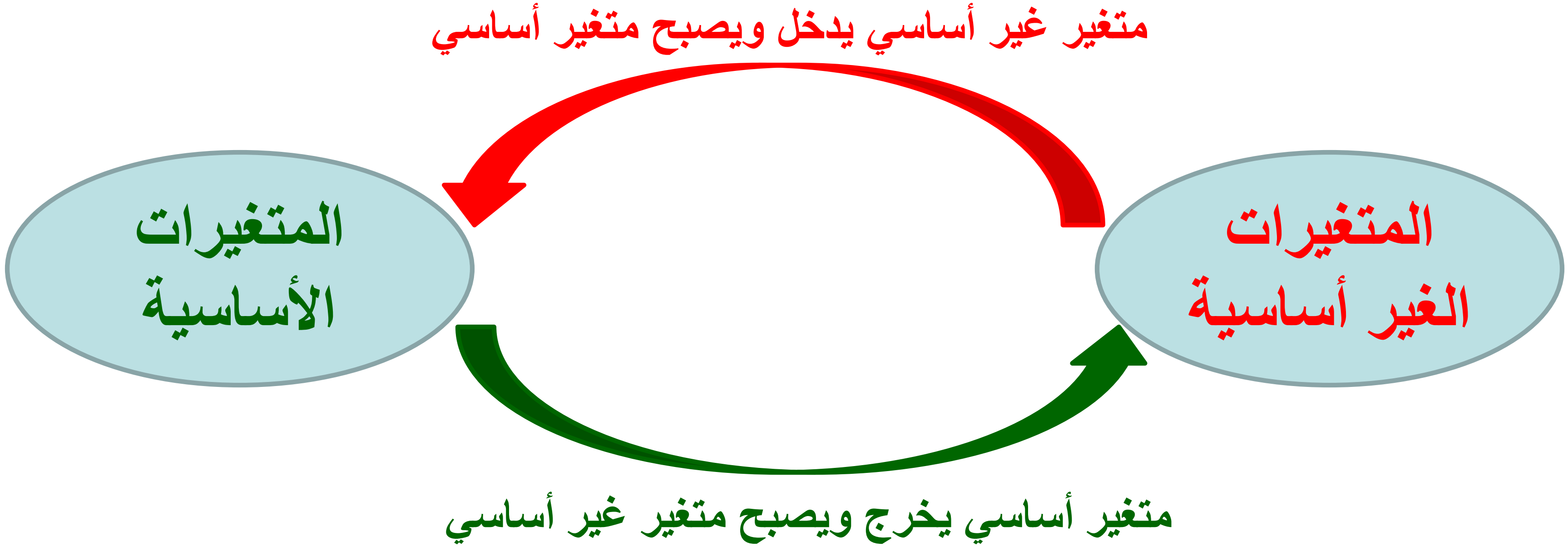
إذاً الحل الأساسي الممكن الحالي غير أمثل.

لابد من الانتقال لحل أساسي ممكن آخر يكون أفضل.

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

سيتم الانتقال إلى حل أساسي ممكن آخر **مجاور** يكون أفضل.

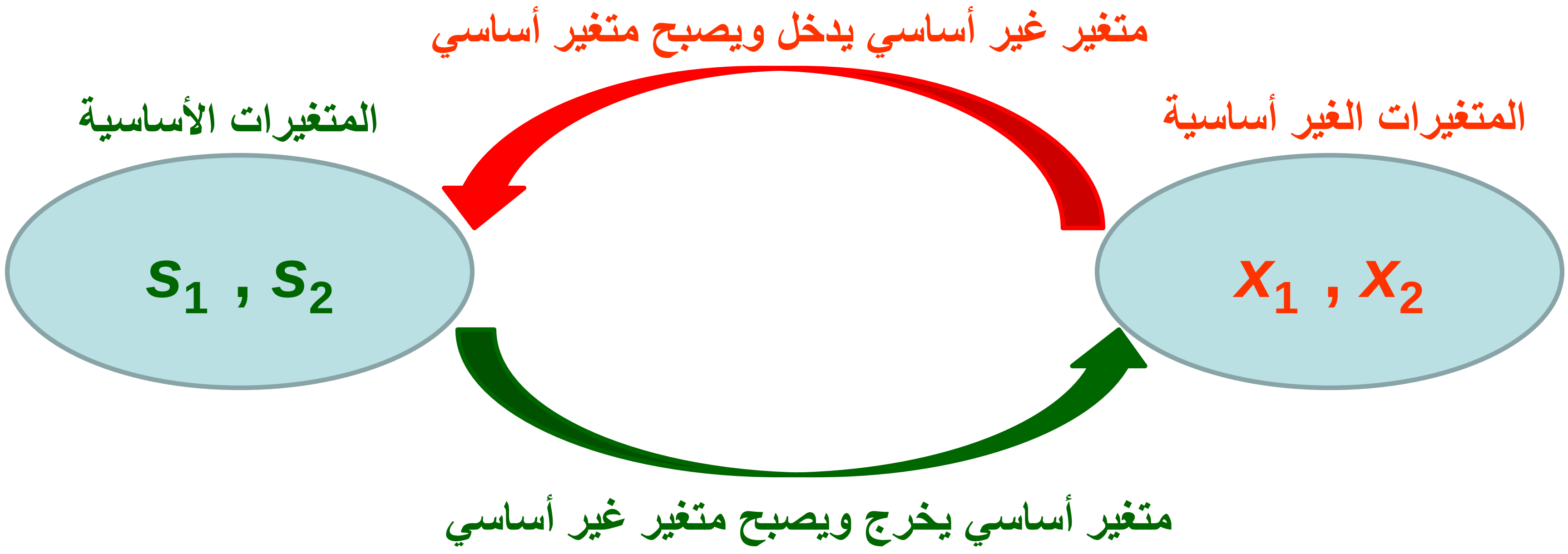
تتم هذه العمليه باستبدال متغير من مجموعة المتغيرات الغير أساسية ليصبح متغير أساسي، بدلاً عن متغير أساسي الذي يصبح غير أساسي.



خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

سيتم الانتقال إلى حل أساسي ممكن آخر **مجاور** يكون أفضل.

تتم هذه العمليه باستبدال متغير من مجموعة المتغيرات الغير أساسية ليصبح متغير أساسي، بدلاً عن متغير أساسي الذي يصبح غير أساسي.



خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة الرابعة:

نختار المتغير غير الأساسي الداخل لمجموعة المتغيرات الأساسية.

نختار المتغير ذو القيمة الأكثر سالبية في صف دالة الهدف z.

وهو المتغير x_1 في مثالنا.

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	40
s_2	2	1	0	1	60

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة الخامسة:

نختار المتغير الأساسي الخارج ليصبح في مجموعة المتغيرات الغير أساسية:
هو المتغير ذو الأقل قيمة في اختبار النسبة الصغرى.

اختبار النسبة الصغرى (Minimum Ratio Test):

نقسم قيم الطرف الأيمن على قيم عمود المتغير الداخل الموجبة فقط.
يخرج المتغير ذو القيمة الأصغر. إذا يخرج المتغير s_2

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
z	-4	-3	0	0	0	
s_1	1	1	1	0	40	$40/1 = 40$
s_2	2	1	0	1	60	$60/2 = 30$

المتغيرالخارج

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة السادسة: عملية التحوير (تحديث جدول السمبلكس)

العنصر المحوري: عند تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج.

كون جدول السمبلكس الجديد كما يلي:

1. نُدِّخل المتغير الداخل x_1 في مكان المتغير الخارج s_2.
2. نُحدِّث صف المتغير الخارج بحيث نجعل العنصر المحوري مساوياً للواحد وذلك بقسمة جميع قيم صف المتغير الخارج على قيمة العنصر المحوري.
3. نُحدِّث بقية الصفوف (بعمليات أولية على الصفوف) بحيث نجعل بقية عناصر عمود المتغير الداخل في الجدول الجديد أصفاراً.

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	40
s_2	2	1	0	1	60

المتغير الخارج

Ratio Test

$40/1 = 40$

$60/2 = 30$

العنصر المحوري

نحتاج تحويل عمود x_1 ليصبح:

$$\begin{array}{c} x_1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array}$$

دائماً سنجعل قيمة العنصر المحوري مساوية للواحد ، وبقية قيم العمود مساوية للصفر

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	40
s_2	2	1	0	1	60

المتغير الخارج

Ratio Test

$40/1 = 40$

$60/2 = 30$

صف القيد الثاني الجديد = صف القيد الثاني القديم مقسوماً على 2

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z					
s_1					
$\boldsymbol{x_1}$	**1**	**1/2**	**0**	**1/2**	**30**

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	40
s_2	2	1	0	1	60

المتغير الخارج

Ratio Test

40/1 = 40

60/2 = 30

صف القيد الأول الجديد = **–1** × صف القيد الثاني الجديد + صف القيد الأول القديم

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z					
s_1	**0**	**1/2**	**1**	**–1/2**	**10**
x_1	1	1/2	0	1/2	30

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	40
s_2	2	1	0	1	60

المتغير الخارج

Ratio Test

$40/1 = 40$

$60/2 = 30$

صف دالة الهدف الجديد = 4 × صف القيد الثاني الجديد + صف دالة الهدف القديم

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	**0**	**-1**	**0**	**2**	**120**
s_1	0	1/2	1	$-1/2$	10
x_1	1	1/2	0	1/2	30

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

بعد إكمال عملية تحديث الجدول، نحصل على جدول السمبلكس التالي:

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	-1	0	2	120
s_1	0	1/2	1	$-1/2$	10
x_1	1	1/2	0	1/2	30

الحل الأساسي الممكن الحالي: $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (30, 0, 10, 0)$

قيمة دالة الهدف $z = 120$

الآن نكرر خطوات طريقة السمبلكس من جديد.
نختبر الأمثلية. هذا الحل الأساسي الممكن ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في صف z.
نتحرك مرة أخرى إلى حل أساسي ممكن مجاور أفضل.

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	-1	0	2	120
s_1	0	1/2	1	$-1/2$	10
x_1	1	1/2	0	1/2	30

المتغير الخارج

Ratio Test

10/0.5 = 20

30/0.5= 60

صف القيد الأول الجديد = صف القيد الأول القديم مضروباً في 2

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z					
$\boldsymbol{x_2}$	**0**	**1**	**2**	**-1**	**20**
x_1					

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	-1	0	2	120
s_1	0	1/2	1	$-1/2$	10
x_1	1	1/2	0	1/2	30

المتغير الخارج

Ratio Test

10/0.5 = 20

30/0.5= 60

صف القيد الثاني الجديد = **–1/2** × صف القيد الأول الجديد + صف القيد الثاني القديم

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z					
x_2	0	1	2	-1	20
x_1	**1**	**0**	**-1**	**1**	**20**

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل

المتغير الخارج

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	-1	0	2	120
s_1	0	1/2	1	$-1/2$	10
x_1	1	1/2	0	1/2	30

Ratio Test

10/0.5 = 20

30/0.5= 60

صف دالة الهدف الجديد = **1** × صف القيد الأول الجديد + صف دالة الهدف القديم

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	**0**	**0**	**2**	**1**	**140**
x_2	0	1	2	-1	20
x_1	1	0	-1	1	20

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

بعد إكمال عملية تحديث الجدول، نحصل على جدول السمبلكس التالي:

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	0	2	1	140
x_2	0	1	2	−1	20
x_1	1	0	−1	1	20

الحل الأساسي الممكن الحالي: $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (20, 20, 0, 0)$

قيمة دالة الهدف $z = 140$

الآن نختبر الأمثلية.

هذا الحل أمثل لأنه لا يوجد قيمة سالبة في صف z. نتوقف.

مثال 2:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي مستخدماً طريقة السمبلكس:

$$\max \quad z = 30x_1 + 20x_2 + 5x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 8 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 &\le 8 \\ x_1 , x_2 , x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

نضع البرنامج في الصيغة القياسية:

$$\max \quad z = 30x_1 + 20x_2 + 5x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 &= 8 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + s_2 &= 8 \\ x_1 , x_2 , x_3 , s_1 , s_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

نكون جدول السمبلكس المبدئي
ونكمل حتى الوصول للحل الأمثل.

المتغير الداخل: x_1 — المتغير الخارج: s_1

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
z	-30	-20	-5	0	0	0	
s_1	2	1	1	1	0	8	$8/2 = 4$
s_2	1	3	-4	0	1	8	$8/1 = 8$

المتغير الداخل: x_2 — المتغير الخارج: s_2

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
z	0	-5	10	15	0	120	
x_1	1	1/2	1/2	1/2	0	4	$4/(1/2) = 8$
s_2	0	5/2	$-9/2$	$-1/2$	1	4	$4/(5/2) = 8/5$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	0	0	1	14	2	128
x_1	1	0	7/5	3/5	−1/5	16/5
x_2	0	1	−9/5	−1/5	2/5	8/5

هذا الحل أمثل لأنه لا يوجد قيمة سالبة في صف z. نتوقف.

الحل الأساسي المكمن الحالي أمثل:

$$(x_1 , x_2 , x_3 , s_1 , s_2) = (16/5 , 8/5 , 0 , 0 , 0)$$

قيمة دالة الهدف $z = 128$

مثال 3:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي مستخدماً طريقة السمبلكس:

$$\max \quad z = 6x_1 + 14x_2 + 13x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} 1/2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 60 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

الحل:

نضع البرنامج في الصيغة القياسية:

$$\max \quad z = 6x_1 + 14x_2 + 13x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} 1/2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 &= 24 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + s_2 &= 60 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

نكون جدول السمبلكس المبدئي
ونكمل حتى الوصول للحل الأمثل.

المتغير الداخل: x_2

المتغير الخارج: s_1

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
z	-6	-14	-13	0	0	0	
s_1	1/2	2	1	1	0	24	24/2 = 12
s_2	1	2	4	0	1	60	60/2 = 30

المتغير الداخل: x_3

المتغير الخارج: s_2

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
z	$-5/2$	0	-6	7	0	168	
x_2	1/4	1	1/2	1/2	0	12	12/(1/2) = 24
s_2	1/2	0	3	-1	1	36	36/3 =12

المتغير الداخل

المتغير الخارج

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	$-3/2$	0	0	5	2	240
x_2	1/6	1	0	2/3	$-1/6$	6
x_3	1/6	0	1	$-1/3$	1/3	12

Ratio Test

6/(1/6) = 36

12/(1/6) = 72

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	0	9	0	11	1/2	294
x_1	1	6	0	4	-1	36
x_3	0	-1	1	-1	1/2	6

الحل الأمثل:

$x_1 = 36$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $z = 294$

حالة خاصة

مثال:

المتغير الداخل ↓ (x_2)

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
z	0	-3	-1	0	0	
x_1	1	-1	1	0	5	–
s_2	0	-2	2	1	8	–

عند عدم إمكانية إجراء اختبار النسبة الصغرى:

أي لا يوجد قيمة موجبة (أكبر من الصفر) في عمود المتغير الداخل

فإننا نستنتج أن الحل الأمثل غير محدود ، أي أن $z^* = +\infty$

حالة خاصة

مثال آخر:

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
z	0	-3	-1	0	0	
x_1	1	0	1	0	5	–
s_2	0	-2	2	1	8	–

الحل الأمثل غير محدود ، أي أن $z^* = +\infty$

مسألة النقل

Transportation Problem

مسألة النقل

- إحدى تطبيقات البرمجة الخطية
  - منتشرة في المجالات: الصناعية ، الزراعية ، العسكرية ، ...
- من مسائل الشبكات.
- هي مسألة نقل (منتجات ، أفراد ، طاقة كهربائية ، بيانات انترنت ، ...) من أماكن (تسمى أماكن الإمداد) إلى أماكن أخرى (تسمى أماكن الطلب).
- الهدف تقليل تكاليف النقل من أماكن الإمداد إلى أماكن الطلب.

مثال: توزيع الكهرباء

شركة كهرباء لديها ثلاث محطات لتوليد الكهرباء في مناطق متفرقة لتأمين طلب استهلاك الكهرباء لأربع مدن.

الطاقة الانتاجية من الكهرباء من محطة-1 تبلغ 35 مليون كيلووات يوميا

الطاقة الانتاجية من الكهرباء من محطة-2 تبلغ 50 مليون كيلووات يوميا

الطاقة الانتاجية من الكهرباء من محطة-3 تبلغ 40 مليون كيلووات يوميا

ومن خلال بيانات الاستهلاك السابقة تبين أن:

الاستهلاك اليومي في وقت الذروة لـ مدينة-1 يبلغ 45 مليون كيلووات يوميا

الاستهلاك اليومي في وقت الذروة لـ مدينة-2 يبلغ 20 مليون كيلووات يوميا

الاستهلاك اليومي في وقت الذروة لـ مدينة-3 يبلغ 30 مليون كيلووات يوميا

الاستهلاك اليومي في وقت الذروة لـ مدينة-4 يبلغ 30 مليون كيلووات يوميا

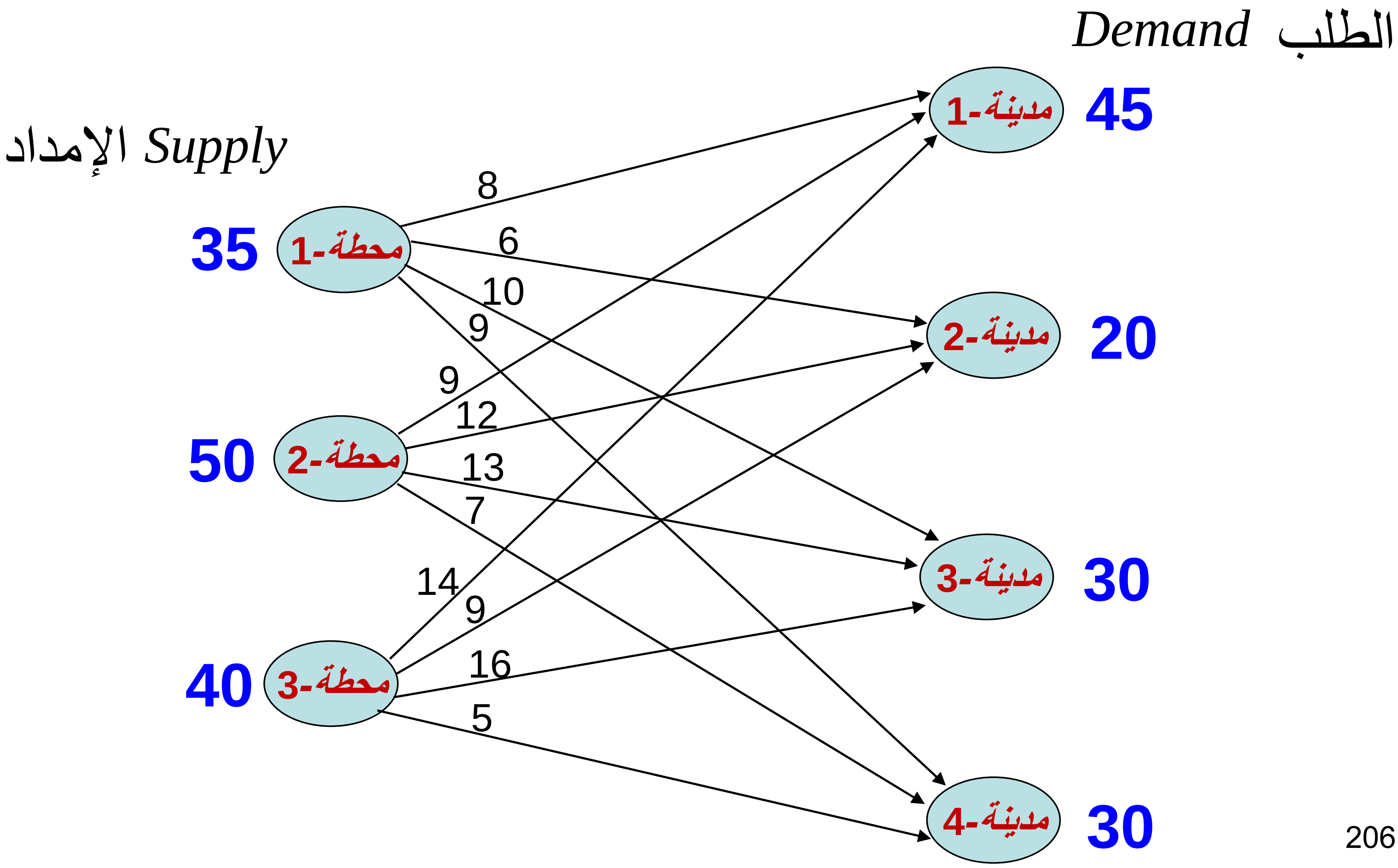
ولتباعد مواقع المحطات عن المدن يوجد تكلفة مقترنة بتأمين كل مليون كيلووات لأي مدينة من أي محطة من المحطات ، موضحة في الجدول التالي:

مثال: توزيع الكهرباء

التكاليف (ريال/مليون كيلووات)				
	إلى			
من	مدينة-1	مدينة-2	مدينة-3	مدينة-4
محطة-1	8	6	10	9
محطة-2	9	12	13	7
محطة-3	14	9	16	5

أوجد أفضل توزيع للكهرباء من محطات توليد الكهرباء الثلاث لتوفير استهلاك المدن الأربع من الكهرباء بأقل التكاليف.

رسم توضيحي


الطلب Demand
الإمداد Supply
35
محطة-1
50
محطة-2
40
محطة-3
مدينة-1
45
مدينة-2
20
مدينة-3
30
مدينة-4
30
8
6
10
9
9
12
13
7
14
9
16
5

البرنامج الرياضي الخطي

x_{ij} : ملايين الكيلووات المرسلة من محطة i إلى مدينة j يومياً

$$\min z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40$$

كل محطة لا ترسل أكثر من طاقتها القصوى

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 45$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 20$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 30$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 30$$

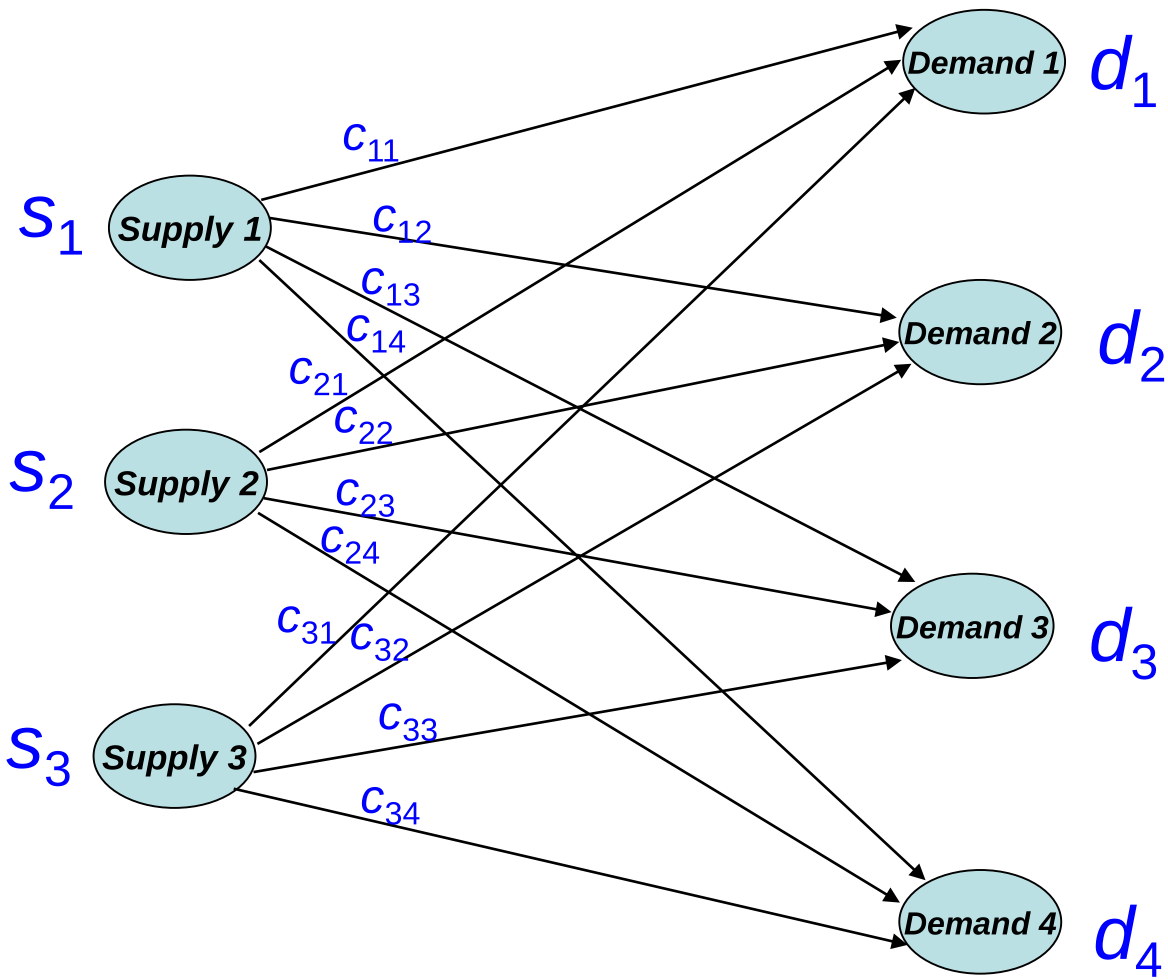
كل مدينة تستلم على الأقل طلبها

$$x_{ij} \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

العناصر الأساسية في مسألة النقل

1. مجموعة من عقد الإمداد (Supply Nodes) عددها m عقدة
2. مجموعة من عقد الطلب (Demand Nodes) عددها n عقدة
3. الطاقة القصوى للإمداد عند عقدة الإمداد i تساوي s_i
4. إجمالي الطلب عند عقدة الطلب j يساوي d_j
5. تكلفة نقل الوحدة من عقدة الإمداد i إلى عقدة الطلب j تساوي c_{ij}

مسألة النقل



ما هي الطريقة المثلى التي يتم بها نقل الوحدات من عقد الإمداد إلى عقد الطلب ؟؟

الصيغة العامة للنموذج الرياضي

x_{ij} = عدد الوحدات المنقولة من عقدة الإمداد i إلى عقدة الطلب j

$$i = 1, 2, \ldots, m \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

- تكلفة نقل x_{ij} من عقدة الإمداد i إلى عقدة الطلب j = $c_{ij}\, x_{ij}$
- كل عقدة طلب يجب أن تحصل على الأقل على ما يغطي الطلب لديها
- كل عقدة إمداد يجب أن يرسل منها على الأكثر طاقتها القصوى للإمداد

الصيغة العامة للنموذج الرياضي

x_{ij} = عدد الوحدات المنقولة من عقدة الإمداد i إلى عقدة الطلب j

$i = 1, 2, \dots, m \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n$

$$\min \ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$s.t.$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad i = 1, 2, \dots, m \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

مسألة النقل

مسائل النقل

مسائل النقل المتزنة

إجمالي الطلب = إجمالي الإمداد

مسائل النقل غير المتزنة

إجمالي الطلب ≠ إجمالي الإمداد

عجز

إجمالي الطلب > إجمالي الإمداد

فائض

إجمالي الطلب < إجمالي الإمداد

مسألة النقل المتزنة

– سنفترض أن: إجمالي الطلب = إجمالي الإمداد

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

– جميع قيود المتراجحات تصبح معادلات (رابطة).

– البرنامج سيكون في الصيغة القياسية.

$$\min \ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

تمثيل مشكلة النقل على شكل جدول

					Supply
	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	s_1
	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	s_2
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	s_m
Demand	d_1	d_2	$\ldots$	d_n	

مثال توزيع الكهرباء

					Supply
	8 x_{11}	6 x_{12}	10 x_{13}	9 x_{14}	**35**
	9 x_{21}	12 x_{22}	13 x_{23}	7 x_{24}	**50**
	14 x_{31}	9 x_{32}	16 x_{33}	5 x_{34}	**40**
Demand	**45**	**20**	**30**	**30**	

حل مسألة النقل

- يمكن حلها بطريقة السمبلكس
  - ليست الطريقة المناسبة
  - عدد المتغيرات والقيود كبير جدا في الغالب
  - قد تستغرق عدد كبير من المراحل للوصول إلى الحل الأمثل

- طريقة سمبلكس مسائل النقل:
  - جميع معاملات متغيرات القرار في القيود إما **0** أو **1**
    هذا يسهل الحسابات
  - يجب أن تكون المسألة متزنة

طريقة سمبلكس مسائل النقل

1. إيجاد حل أساسي ممكن مبدئي:
يمكن أن نستخدم أي من الطرق الثلاث التالية:
   - طريقة الركن الشمالي الغربي (North-West Corner Method)
   - طريقة اقل التكاليف (Minimum Cost Method)
   - طريقة فوجل (Vogel's Method)

2. تحسين الحل الأساسي الممكن حتى الوصول للحل الأمثل:
   - اختبر أمثلية الحل: طريقة التوزيع المعدل (Modified Distribution)
   - انتقل لحل أفضل: طريقة الحجر المتنقل (Stepping Stone Method)

الحل الأساسي الممكن في مسألة النقل

- قيمة الخلية $(i\ ,\ j)$ في جدول النقل تمثل قيمة المتغير x_{ij}
- يجب أن يحتوي جدول السمبلكس على $m+n-1$ خليه مملوءة (أساسية) وبقية الخلايا تبقى خاليه (غير أساسية)
- أي خليه غير مملوءة في جدول السمبلكس تعني أن قيمة المتغير المرتبط بهذه الخليه يساوي الصفر ولكن غير مكتوب في الخلية
- قد يوجد من بين الخلايا المملوءة ما هو مملوء بقيمة تساوي صفر
- مجموع قيم الخلايا المملوءة في العمود j $=$ الطلب عند عمود j
- مجموع قيم الخلايا المملوءة في الصف i $=$ الإمداد عند صف i

مثال توزيع الكهرباء

					supply
	8	6 **10**	10 **25**	9	**35**
	9 **45**	12	13 **5**	7	**50**
	14	9 **10**	16	5 **30**	**40**
Demand	**45**	**20**	**30**	**30**	

عدد الخلايا المملوءة $= m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$

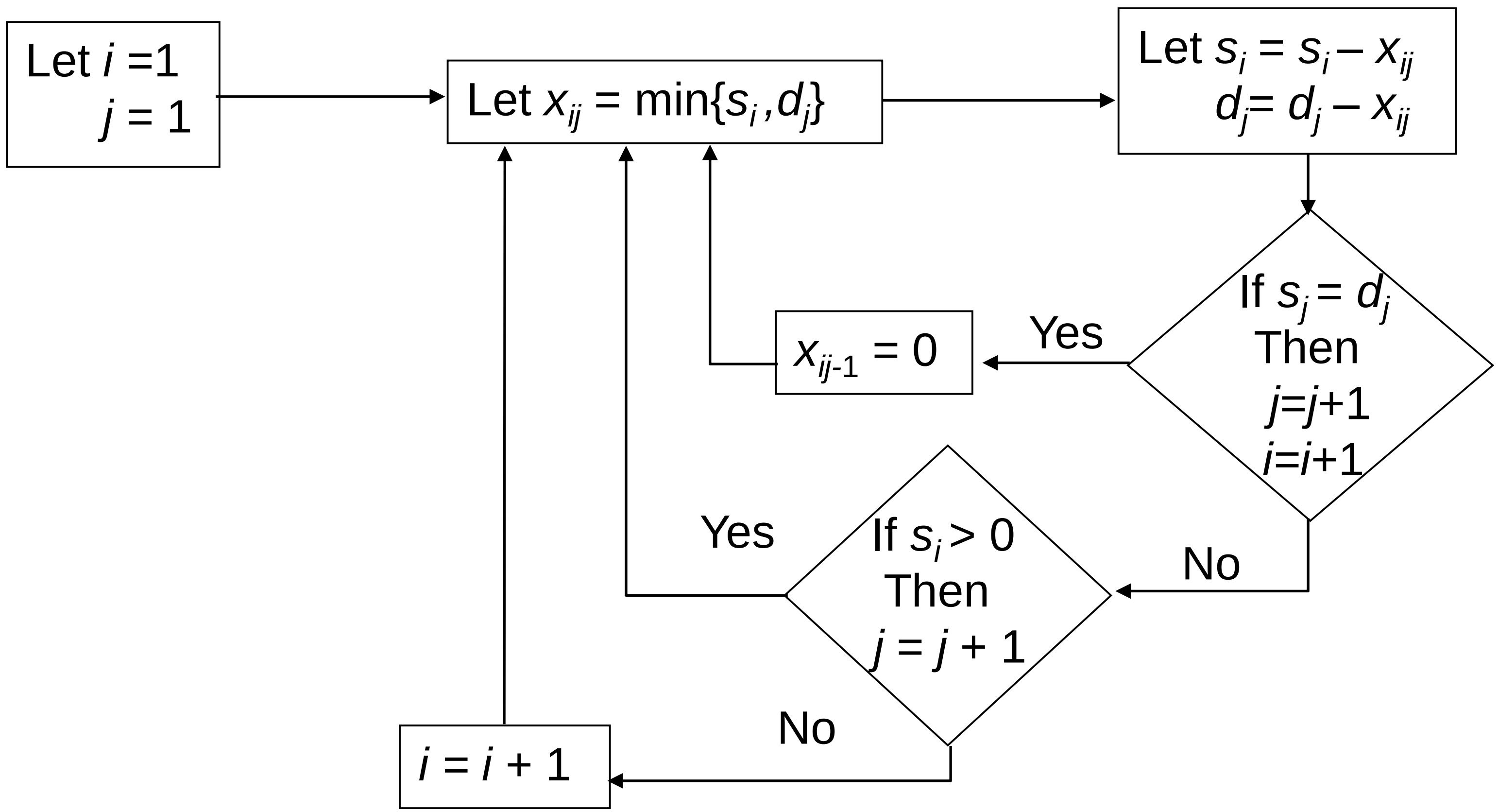
هذا يمثل أحد الحلول الأساسية الممكنة:

$$x_{12} = 10 \text{ , } x_{13} = 25 \text{ , } x_{21} = 45 \text{ , } x_{23} = 5 \text{ , } x_{32} = 10 \text{ , } x_{34} = 30$$

$$x_{11} = x_{14} = x_{22} = x_{24} = x_{31} = x_{33} = 0 \quad , \quad z = 1020$$

إيجاد حل أساسي ممكن مبدئي

طريقة الركن الشمالي الغربي



إيجاد حل أساسي ممكن مبدئي

طريقة الركن الشمالي الغربي

- اختر الخلية غير المملوءة ولتكن $(i\ ,\ j)$ التي في الركن الشمالي الغربي. وليكن $\underline{s}_i =$ كمية الإمداد المتبقية $\underline{d}_j =$ كمية الطلب المتبقية شريطة أن يكون أما $\underline{s}_i > 0$ أو $\underline{d}_j > 0$
- إذا كان $\underline{s}_i < \underline{d}_j$
  - $x_{ij} = \underline{s}_i$
  - ينتهي الإمداد من الصف i .
- إذا كان $\underline{s}_i > \underline{d}_j$
  - $x_{ij} = \underline{d}_j$
  - ينتهي الطلب من العمود j .

إيجاد حل أساسي ممكن مبدئي

طريقة الركن الشمالي الغربي

- إذا كان $\underline{s}_i = \underline{d}_j$
  - $x_{ij} = \underline{s}_i = \underline{d}_j$
  - نضع: $x_{i+1,j} = 0$ (خلية أساسية قيمتها تساوي الصفر)
  - ينتهي الإمداد من الصف i .
  - ينتهي الطلب من العمود j .
  - تسمى المسألة في هذه الحالة: مسألة نقل منحلة (متحللة)

- تكرر العملية لحين تخصيص كل الإمداد لكل عقد الطلب

إيجاد حل أساسي ممكن مبدئي

مثال توزيع الكهرباء: طريقة الركن الشمالي الغربي

					Supply
	8	6	10	9	~~35~~ 0
	9	12	13	7	~~50~~ ~~40~~ ~~20~~ 0
	14	9	16	5	~~40~~ ~~30~~ 0
Demand	~~45~~ ~~10~~ 0	~~20~~ 0	~~30~~ ~~10~~ 0	~~30~~ 0	

إيجاد حل أساسي ممكن مبدئي

مثال آخر: طريقة الركن الشمالي الغربي

					Supply
	8	6	10	9	~~35~~ 0
	9	12	13	7	~~50~~ ~~40~~ ~~20~~ 0
	14	9	16	5	~~40~~ 0
Demand	~~45~~ ~~10~~ 0	~~20~~ 0	~~20~~ 0	~~40~~ 0	

اختبار أمثلية الحل الأساسي الممكن في جدول النقل (طريقة التوزيع المعدل)

سنفترض مسألة تصغير دالة الهدف: $\min z$

- لكل خلية أساسية (i , j) احسب الأوزان u_i و v_j بحيث:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

  – كل صف i له الوزن u_i وكل عمود j له الوزن v_j
  – لتكن قيمة $u_1 = 0$

- لكل خلية غير أساسية (i , j) احسب:

$$u_i + v_j - c_{ij}$$

  – سنرمز لها بـ δ_{ij} أي أن: $\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$

- إذا كانت $\delta_{ij} \leq 0$ لجميع الخلايا غير الأساسية فإن الحل أمثل.

اختبار أمثلية الحل الأساسي الممكن في جدول النقل (طريقة التوزيع المعدل)

مثال توزيع الكهرباء: اختبار أمثلية الحل الأساسي الممكن المبدئي

	$0 + v_1 = 8$ $v_1 = 8$	$1 + v_2 = 12$ $v_2 = 11$	$1 + v_3 = 13$ $v_3 = 12$	$4 + v_4 = 5$ $v_4 = 1$	*Supply*
$u_1 = 0$	8 35	6 $0 + 11 - 6$ $\delta_{12} = 5$	10 $0 + 12 - 10$ $\delta_{13} = 2$	9 $0 + 1 - 9$ $\delta_{14} = -8$	35
$u_2 + 8 = 9$ $u_2 = 1$	9 10	12 20	13 20	7 $1 + 1 - 7$ $\delta_{24} = -5$	50
$u_3 + 12 = 16$ $u_3 = 4$	14 $4 + 8 - 14$ $\delta_{31} = -2$	9 $4 + 11 - 9$ $\delta_{31} = 6$	16 10	5 30	40
Demand	45	20	30	30	

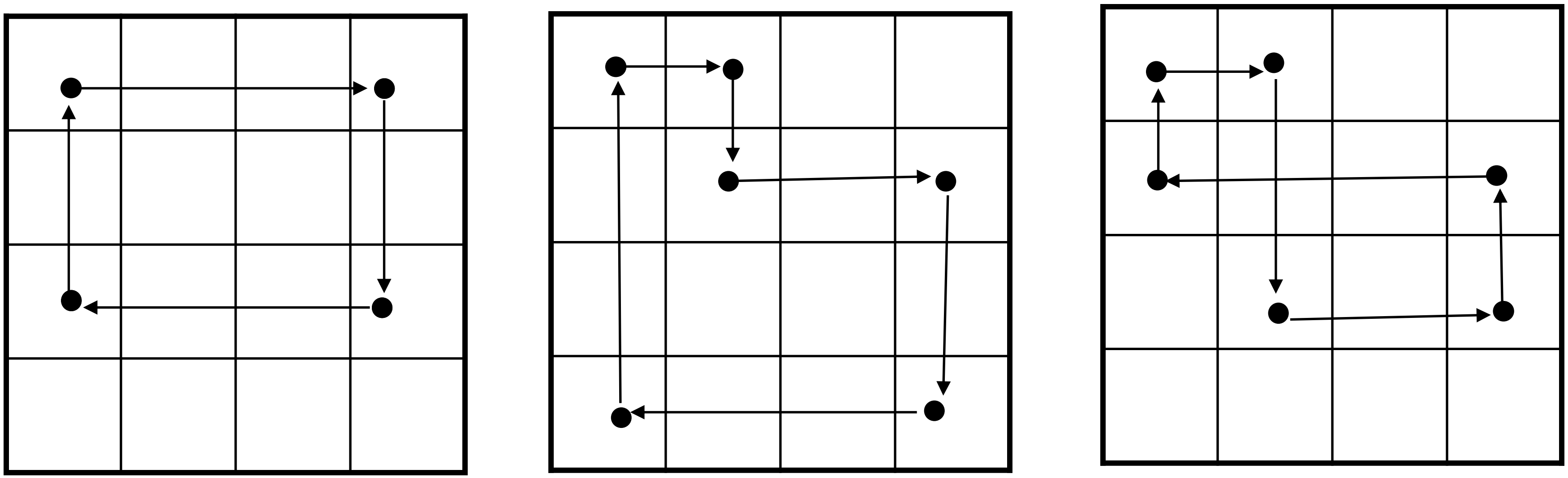
يوجد $\delta_{ij} > 0$ ، إذاً **الحل ليس أمثل**

حلقة التحوير

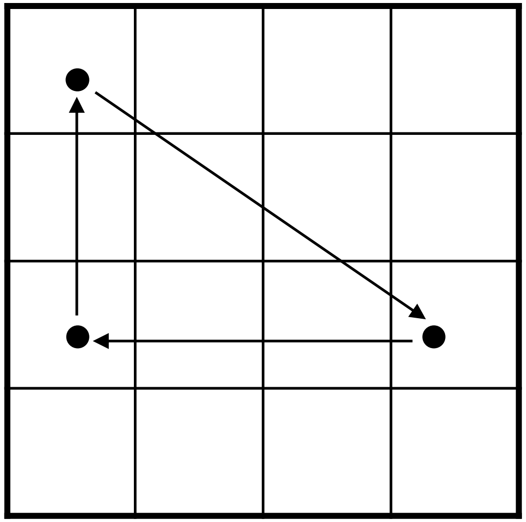
هي أي متتابعة من الخلايا في جدول النقل بحيث تحقق:

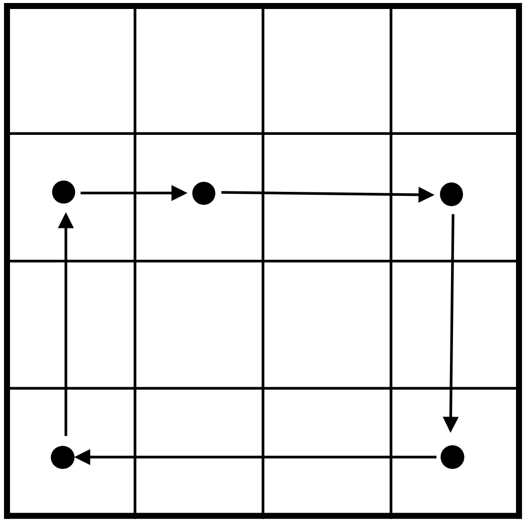
1. أي خليتين متتاليتين تشتركان إما بالصف أو العمود.
2. لا يوجد في المتتابعة ثلاث خلايا متتالية على نفس الصف أو العمود.
3. الخلية الأخيرة في المتتابعة لها نفس الصف أو العمود للخلية الأولى في المتتابعة.

حلقات تحوير صحيحة



حلقات تحوير غير صحيحة





الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل (طريقة الحجر المتنقل)

1. حدد أكبر قيمة موجبة لـ δ_{ij} ولتكن δ^*

$$\delta^* = \max \{ \delta_{ij} \ : \ \text{خلية غير أساسية} \ (i , j) \}$$

2. كون حلقة تحوير في جدول النقل بحيث:
   - تحقق شروط حلقة التحوير الثلاث
   - الحلقة تحتوي على خلية غير أساسية واحدة فقط وهي التي تحمل القيمة δ^*
3. وزع إشارات $(+)$ و $(-)$ على خلايا الحلقة بالتبادل ابتداء من الخلية غير الأساسية ذات القيمة δ^*

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل (طريقة الحجر المتنقل)

4. حدد من بين الخلايا ذات إشارة $(-)$ الخلية التي تحتوي على أقل قيمة ولتكن θ

$\theta = \min \{ x_{ij} :\ (-)$ خلية غير أساسية ذات إشارة $(i, j) \}$

5. انتقل إلى الحل الأساسي الممكن الجديد بحيث تكون القيم الجديدة للخلايا في حلقة التحوير كالتالي:

$x_{ij} = x_{ij} + \theta$ للخلايا ذات الإشارة $(+)$

$x_{ij} = x_{ij} - \theta$ للخلايا ذات الإشارة $(-)$

بقية الخلايا تبقى بدون تغيير في القيم

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

- مثال توزيع الكهرباء: **إيجاد حلقة تحوير**

				Supply
[8] 35	[6] $0 + 11 - 6$, $\delta_{12} = 5$	[10] $0 + 12 - 10$, $\delta_{13} = 2$	[9] $0 + 1 - 9$, $\delta_{14} = -8$	35
[9] 10	[12] 20	[13] 20	[7] $1 + 1 - 7$, $\delta_{24} = -5$	50
[14] $4 + 8 - 14$, $\delta_{31} = -2$	[9] $4 + 11 - 9$, $\delta_{32} = 6$	[16] 10	[5] 30	40
Demand 45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

- مثال توزيع الكهرباء: إيجاد حلقة تحوير

					Supply
	8 35	6	10	9	35
	9 10	12 – 20	13 + 20	7	50
	14	9 + $\delta^* = 6$	16 – 10	5 30	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

- مثال توزيع الكهرباء: عملية التحوير

$$\theta = \min \{ 20 \; , 10 \} = 10$$

					Supply
	8 **35**	6	10	9	35
	9 **10**	12 − **20**	13 + **20**	7	50
	14	9 + $\delta^* = 6$	16 − **10**	5 **30**	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

- مثال توزيع الكهرباء: عملية التحوير

$$\theta = \min \{ 20 \ , 10 \} = 10$$

					Supply
	8 **35**	6	10	9	35
	9 **10**	12 − **20** − θ	13 + **20** + θ	7	50
	14	9 + + θ	16 **10** − θ −	5 **30**	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

- مثال توزيع الكهرباء: عملية التحوير

$$\theta = \min \{ 20 \ , 10 \} = 10$$

					Supply
	(8) **35**	(6)	(10)	(9)	35
	(9) **10**	(12) – **20 – 10**	(13) + **20 + 10**	(7)	50
	(14)	(9) + **+ 10**	(16) **10 – 10** –	(5) **30**	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

- مثال توزيع الكهرباء: الحل الأساسي الممكن الجديد

				Supply
8 **35**	6	10	9	35
9 **10**	12 **10**	13 **30**	7	50
14	9 **10**	16	5 **30**	40
Demand 45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

في أي عملية تحوير:

- الخلية التي تعطي القيمة *δ تمثل المتغير الداخل.
  يصبح متغير **أساسي** (خلية مملوءة).

- الخلية التي تعطي القيمة θ تمثل المتغير الخارج.
  يصبح متغير **غير أساسي** (خلية غير مملوءة).

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

في أي عملية تحوير:

- المتغير الخارج يأخذ قيمة صفر بعد عملية التحوير ، ولا يكتب الصفر في تلك الخلية.
- إذا وجد أكثر من خلية تأخذ قيمة صفر بعد عملية التحوير ، يتم أخراج متغير واحد فقط ليصبح غير أساسي ، وبقية الخلايا تبقى أساسية وتأخذ القيمة صفر وتكتب في الجدول.
- يمكن أن تكون قيمة المتغير الداخل ليصبح أساسياً مساوية للصفر بعد انتهاء عملية التحوير، وتكتب في الجدول.

اختبار أمثلية الحل الأساسي الممكن الجديد

تكملة مثال توزيع الكهرباء:

	$0 + v_1 = 8$ $v_1 = 8$	$1 + v_2 = 12$ $v_2 = 11$	$1 + v_3 = 13$ $v_3 = 12$	$-2 + v_4 = 5$ $v_4 = 7$	*Supply*
$u_1 = 0$	[8] 35	[6] $0 + 11 - 6$ $\delta_{12} = 5$	[10] $0 + 12 - 10$ $\delta_{13} = 2$	[9] $0 + 7 - 9$ $\delta_{14} = -2$	35
$u_2 + 8 = 9$ $u_2 = 1$	[9] 10	[12] 10	[13] 30	[7] $1 + 7 - 7$ $\delta_{24} = 1$	50
$u_3 + 11 = 9$ $u_3 = -2$	[14] $-2 + 8 - 14$ $\delta_{31} = -8$	[9] 10	[16] $-2 + 12 - 16$ $\delta_{33} = -6$	[5] 30	40
Demand	45	20	30	30	

يوجد $\delta_{ij} > 0$ ، إذاً **الحل ليس أمثل**

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

$$\delta^* = \delta_{12} = 5 \Rightarrow x_{12} \text{ enter}$$

					Supply
	cost 8; **35** −	cost 6; $\delta^* = 5$ +	cost 10	cost 9	35
	cost 9; **10** +	cost 12; **10** −	cost 13; **30**	cost 7	50
	cost 14	cost 9; **10**	cost 16	cost 5; **30**	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

$$\delta^* = \delta_{12} = 5 \Rightarrow x_{12} \text{ enter}$$

$$\theta = \min\{10\ ,\ 35\} = 10 \Rightarrow x_{22} \text{ leave}$$

					Supply
	8 35 − θ −	6 + θ +	10	9	35
	9 10 + θ +	12 10 − θ −	13 30	7	50
	14	9 10	16	5 30	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

$$\delta^* = \delta_{12} = 5 \Rightarrow x_{12} \text{ enter}$$

$$\theta = \min\{10\ ,\ 35\} = 10 \Rightarrow x_{22} \text{ leave}$$

					Supply
	[8] 35 − 10	[6] + 10	[10]	[9]	35
	[9] 10 + 10	[12] 10 − 10	[13] 30	[7]	50
	[14]	[9] 10	[16]	[5] 30	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

الحل الأساسي الممكن الجديد:

					Supply
	8 **25**	6 **10**	10	9	35
	9 **20**	12	13 **30**	7	50
	14	9 **10**	16	5 **30**	40
Demand	45	20	30	30	

اختبار أمثلية الحل الأساسي الممكن الجديد

	$0 + v_1 = 8$ $v_1 = 8$	$0 + v_2 = 6$ $v_2 = 6$	$1 + v_3 = 13$ $v_3 = 12$	$3 + v_4 = 5$ $v_4 = 2$	*Supply*
$u_1 = 0$	[8] 25	[6] 10	[10] $0 + 12 - 10$ $\delta_{13} = 2$	[9] $0 + 2 - 9$ $\delta_{14} = -7$	35
$u_2 + 8 = 9$ $u_2 = 1$	[9] 20	[12] $1 + 6 - 12$ $\delta_{22} = -5$	[13] 30	[7] $1 + 2 - 7$ $\delta_{24} = -4$	50
$u_3 + 6 = 9$ $u_3 = 3$	[14] $3 + 8 - 14$ $\delta_{31} = -3$	[9] 10	[16] $3 + 12 - 16$ $\delta_{33} = -1$	[5] 30	40
Demand	45	20	30	30	

يوجد $\delta_{ij} > 0$ ، إذاً الحل ليس أمثل

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

عملية التحوير:

$$\delta^* = \delta_{13} = 2 \Rightarrow x_{13} \text{ enter}$$

					Supply
	cost 8; **25** −	cost 6; **10**	cost 10; $\delta^* = 2$ +	cost 9	35
	cost 9; **20** +	cost 12	cost 13; **30** −	cost 7	50
	cost 14	cost 9; **10**	cost 16	cost 5; **30**	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

عملية التحوير:

$$\delta^* = \delta_{13} = 2 \Rightarrow x_{13} \text{ enter}$$

$$\theta = \min\{25\ ,\ 30\} = 25 \Rightarrow x_{11} \text{ leave}$$

					Supply
	[8] 25 − θ	[6] 10	[10] + θ	[9]	35
	[9] 20 + θ	[12]	[13] 30 − θ	[7]	50
	[14]	[9] 10	[16]	[5] 30	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

عملية التحوير:

$$\delta^* = \delta_{13} = 2 \Rightarrow x_{13} \text{ enter}$$

$$\theta = \min\{25 , 30\} = 25 \Rightarrow x_{11} \text{ leave}$$

					Supply
	[8] 25 − 25	[6] 10	[10] + 25	[9]	35
	[9] 20 + 25	[12]	[13] 30 − 25	[7]	50
	[14]	[9] 10	[16]	[5] 30	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

الحل الأساسي الممكن الجديد:

					Supply
	8	6 **10**	10 **25**	9	35
	9 **45**	12	13 **5**	7	50
	14	9 **10**	16	5 **30**	40
Demand	45	20	30	30	

اختبار أمثلية الحل الأساسي الممكن الجديد

	$3 + v_1 = 9$ $v_1 = 6$	$0 + v_2 = 6$ $v_2 = 6$	$0 + v_3 = 13$ $v_3 = 10$	$3 + v_4 = 5$ $v_4 = 2$	*Supply*
$u_1 = 0$	8 $0 + 6 - 8$ $\delta_{12} = -2$	6 10	10 25	9 $0 + 2 - 9$ $\delta_{14} = -7$	35
$u_2 + 10 = 13$ $u_2 = 3$	9 45	12 $3 + 6 - 12$ $\delta_{22} = -3$	13 5	7 $3 + 2 - 7$ $\delta_{24} = -2$	50
$u_3 + 6 = 9$ $u_3 = 3$	14 $3 + 6 - 14$ $\delta_{31} = -5$	9 10	16 $3 + 10 - 16$ $\delta_{33} = -3$	5 30	40
Demand	45	20	30	30	

الحل أمثل لأن $0 \leq \delta_{ij}$ لجميع الخلايا غير الأساسية

الحل الأمثل لمثال توزيع الكهرباء

				Supply
[8]	[6] **10**	[10] **25**	[9]	35
[9] **45**	[12]	[13] **5**	[7]	50
[14]	[9] **10**	[16]	[5] **30**	40
Demand 45	20	30	30	

الحل الأمثل:

$x_{12} = 10$, $x_{13} = 25$, $x_{21} = 45$, $x_{23} = 5$, $x_{32} = 10$, $x_{34} = 30$,

$x_{11} = x_{14} = x_{22} = x_{24} = x_{31} = x_{33} = 0$.

$z = (6 \times 10) + (10 \times 25) + (9 \times 45) + (13 \times 5) + (9 \times 10) + (5 \times 30) = 1020$

ملاحظات

- سمبلكس النقل ⇔ طريقة السمبلكس العامة لحل البرامج الخطية
  - المتغير الداخل ⇔ δ
  - اختبار الأمثلية δ تمثل معاملات صف دالة الهدف في جدول السمبلكس
  - المتغير الخارج ⇔ θ ⇔ اختبار النسبة الصغرى
- شروط الإمداد والطلب محققة في كل مرحلة
- مسألة النقل تكون متحللة إذا وجد جدول سمبلكس للمسألة بحيث تكون إحدى الخلايا الأساسية مملوءة بالقيمة 0
- عند الوصول لجدول النقل الأمثل:
  – يكون الحل الأمثل وحيداً إذا كانت "$\delta < 0$" لجميع الخلايا الغير أساسية
  – يوجد حلول مثلى متعددة إذا وجد "$\delta = 0$" في أحد الخلايا الغير أساسية

نماذج النقـــل

نماذج النقل

- **نماذج النقل المتزنة**
  إجمالي الطلب = إجمالي الإمداد
- **نماذج النقل غير المتزنة**
  إجمالي الطلب ≠ إجمالي الإمداد
  - **فائض**
    إجمالي الطلب < إجمالي الإمداد
  - **عجز**
    إجمالي الطلب > إجمالي الإمداد

نماذج النقـــل غير المتزنة

يجب أن تكون مسألة النقل متزنة لتطبيق سمبلكس النقل

إجمالي الطلب ≠ إجمالي الإمداد

فائض

إجمالي الطلب < إجمالي الإمداد

تحول إلى متزنة

عقدة طلب وهمية = الفائض

عجز

إجمالي الطلب > إجمالي الإمداد

تحول إلى متزنة

عقدة إمداد وهمية = العجز

نماذج النقـــل غير المتزنة – فائض في الإمداد

$$\Sigma s_i > \Sigma d_j$$

- نوجد نقطة طلب إضافية (وهمية) ، نسميها Δ
- مقدار الطلب عندها d_Δ مساوي للفائض من الإمداد:

$$d_\Delta = \Sigma s_i - \Sigma d_j$$

- تكلفة النقل من عقدة الإمداد i إلى عقدة الطلب الوهمية Δ تساوي:
  - الصفر (هذا يكفي لحل مسألة النقل)
  - ويمكن وضعها تساوي تكلفة التخزين عند عقدة الإمداد i

نماذج النقــل غير المتزنة ـ فائض في الإمداد

مثال:

مصفاة بترول لديها موقعين لتأمين احتياج ثلاثة مدن من وقود التدفئة. تبلغ الطاقة الانتاجية من وقود التدفئة للمصفاة الأولى 20 مليون برميل يوميا بينما تبلغ الطاقة الانتاجية من وقود التدفئة للمصفاة الثانية 46 مليون برميل يوميا. يقدر الطلب من الوقود لكل مدينة : 18 و 23 و 12 مليون برميل يوميا للمدينة الأولى والثانية والثالثة على الترتيب. وتبلغ تكلفة نقل البرميل الواحد من أحد المصفاتين إلى أي مدينة 5 ريال لكل 10 كيلو متر. وتبعد المدينة-1: 50 كم و 30 كم عن المصفاة 1 و 2 على الترتيب والمدينة-2: 24 كم و 46 كم عن المصفاة 1 و 2 على الترتيب و المدينة-3: 32 كم و 18 كم عن المصفاة 1 و 2 على الترتيب. أوجد الطريقة المثلى لتأمين احتياج كل مدينة.

نماذج النقـــل غير المتزنة – فائض في الإمداد

مثال: **جدول النقل:**

				Supply
	25	12	16	20
	15	23	9	46
Demand	18	23	12	

نماذج النقـــل غير المتزنة – فائض في الإمداد

مثال: إجمالي الطلب = 18 + 23 + 12 = 53

إجمالي الإمداد = 20 + 46 = 66

الفرق = 66 – 53 = 13 ⇔ فائض

				dummy	*Supply*
	25	12	16	0	20
	15	23	9	0	46
Demand	18	23	12	13	

نماذج النقــل غير المتزنة – عجز في الإمداد

$$\Sigma s_i < \Sigma d_j$$

- نوجد نقطة إمداد إضافية (وهمية) ، نسميها Δ
- مقدار الإمداد عندها s_Δ مساوي للعجز في الإمداد:

$$s_\Delta = \Sigma d_j - \Sigma s_i$$

- تكلفة النقل من عقدة الإمداد الوهمية Δ إلى أي عقدة الطلب j تساوي:
  - الصفر (هذا يكفي لحل مسألة النقل)
  - ويمكن وضعها تساوي تكلفة تأمين العجز من عقدة الإمداد Δ

نماذج النقـــل غير المتزنـة – عجز في الإمداد

مثال:

في المثال السابق افترض أن:

1. أحد المولدات في مصفاة-2 قد تعطل مما أدى إلى انخفاض الإنتاج إلى النصف.

2. يتم ضخ كميات من الوقود من قبل المصفاة الرئيسية التي تبعد 100 كم عن المصفاة المعطلة بتكلفة 20 ريال للبرميل.

نماذج النقــل غير المتزنة _ عجز في الإمداد

مثال: إجمالي الطلب = $18 + 23 + 12 = 53$

إجمالي الإمداد = $20 + 23 = 43$

الفرق = $53 - 43 = 10 \Leftrightarrow$ عجز

				Supply
	25	12	16	20
	15	23	9	23
Dummy	35	43	29	10
Demand	18	23	12	

مسألة التخصيص

Assignment Problem

مسألة التخصيص (الإسناد) (التعيين)

- إحدى تطبيقات البرمجة الخطية
- من مسائل الشبكات، وتعتبر حالة خاصة من مسألة النقل
  - يمكن تحويل مسألة التخصيص إلى مسألة نقل (ويمكن أيضا تحويل مسألة النقل إلى مسألة تخصيص).
  - طريقة سمبلكس النقل غير فعالة لتطبيقها على مسألة التخصيص.
- هي مسألة تخصيص (إسناد ، تعيين):
  - وظائف إلى موظفين
  - مهام إلى مكائن (آلات)
  - موظفي مبيعات إلى مناطق بيع
  - مشاريع إلى شركات

مسألة التخصيص

- هي مسألة تخصيص مجموعة n من المهمات إلى مجموعة n من المنفذين.
- كل منفذ يسند له تنفيذ مهمة واحدة فقط
- كل مهمة يسند تنفيذها لمنفذ واحد فقط
- عند إسناد المنفذ i لتنفيذ المهمة j يكون هناك تكلفة (أو ربح) c_{ij}.
- الهدف تقليل تكاليف (أو زيادة أرباح) التخصيص.

مثال

مدير قسم المحاسبة في إحدى الشركات لديه أربعة موظفين لتنفيذ أربعة مهام أساسية للقسم. زمن إنجاز المهمة يختلف من موظف لآخر حسب المهمة.
كل موظف سيعمل على تنفيذ مهمة واحدة فقط، وكل مهمة سيتم تنفيذها من قبل موظف واحد فقط.

الجدول التالي يبين زمن (بالأيام) تنفيذ كل مهمة لكل موظف:

مثال

	مهمة-1	مهمة-2	مهمة-3	مهمة-4
موظف-1	14	5	8	7
موظف-2	2	12	6	5
موظف-3	7	8	3	9
موظف-4	2	4	6	10

ما هو التخصيص (الإسناد) الأمثل لهذه المهام الأربع للموظفين الأربعة، وذلك ليكون مجموع زمن تنفيذ هذه المهام أقل ما يمكن.

البرنامج الرياضي

متغيرات القرار:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم إسناد المهمة } i \text{ للموظف } j \\ 0 & \text{إذا لم يتم إسناد المهمة } i \text{ للموظف } j \end{cases}$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{and} \quad j = 1, 2, 3, 4$$

البرنامج الرياضي

$$
\begin{aligned}
\min \quad z = {} & 14\,x_{11} + 5\,x_{12} + 8\,x_{13} + 7\,x_{14} + \\
& 2\,x_{21} + 12\,x_{22} + 6\,x_{23} + 5\,x_{24} + \\
& 7\,x_{31} + 8\,x_{32} + 3\,x_{33} + 9\,x_{34} + \\
& 2\,x_{41} + 4\,x_{42} + 6\,x_{43} + 10\,x_{44}
\end{aligned}
$$

s.t.

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1
\end{aligned}
$$

كل موظف يسند لمهمة واحدة فقط

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1
\end{aligned}
$$

كل مهمة تسند لموظف واحد فقط

$$x_{ij} = 0 \text{ or } 1 \quad i = 1,2,\ldots,n \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n$$

البرنامج الرياضي بشكل عام

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم إسناد المهمة } i \text{ للموظف } j \\ 0 & \text{إذا لم يتم إسناد المهمة } i \text{ للموظف } j \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{and} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

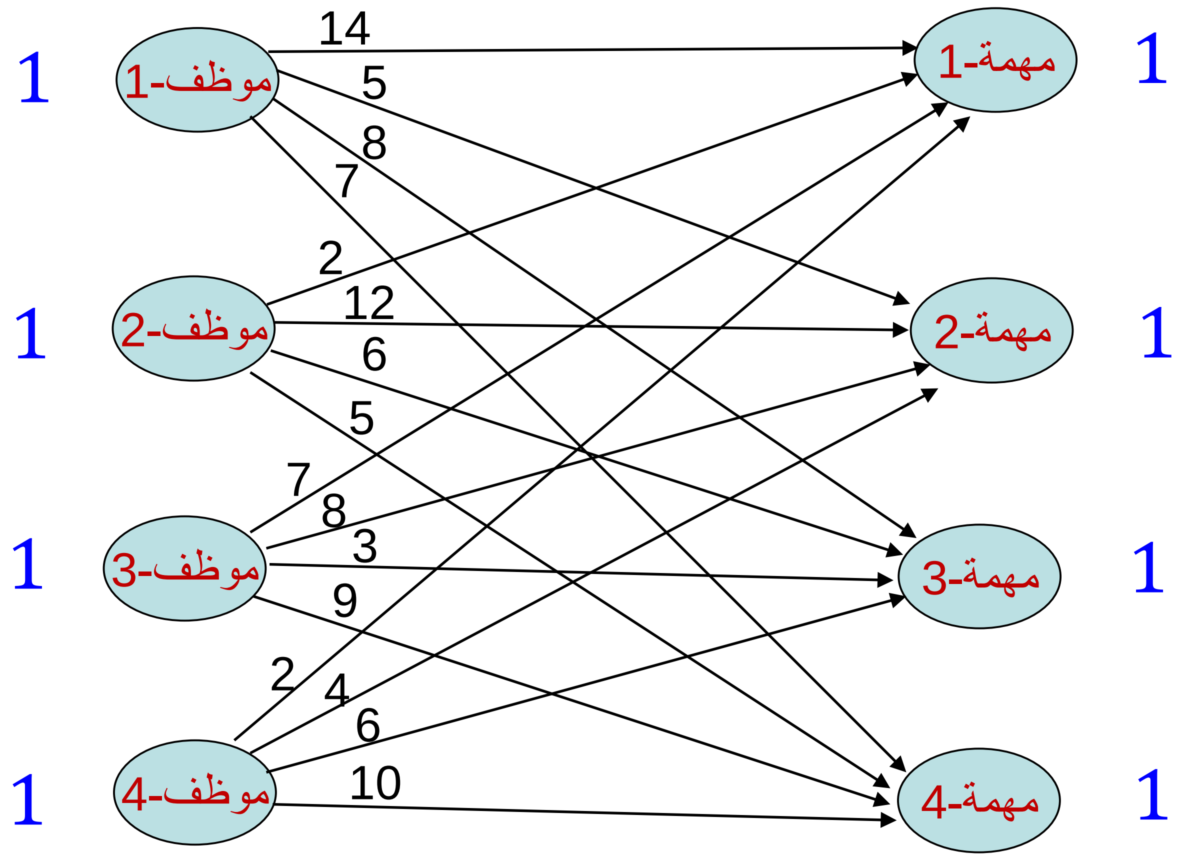
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} = 0 \text{ or } 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

مسألة التخصيص – حالة خاصة من مسألة النقل

الإمداد *Supply*

Demand الطلب



مسألة التخصيص – حالة خاصة من مسألة النقل

البرامج الخطية

تحقق خصائص البرنامج الخطي

مسائل النقل

معاملات المتغيرات في القيود 0 أو 1

مسائل التخصيص

معاملات المتغيرات في القيود 0 أو 1

الطرف الأيمن في القيود = 1

الطريقة الهنغارية (The Hungarian Method)

- خوارزمية لحل مسائل التخصيص.
- يجب ان تكون مسألة التخصيص متزنة:
  - عدد المهام = عدد المنفذين
  - قد نحتاج لافتراض مهمات وهمية أو منفذين وهميين لجعل المسألة متزنة، مع تكاليف تخصيص مساوية للصفر.
- تطبق على مسائل التخصيص من نوع : $\min z$
  - يمكن تطبيق الخوارزمية على مسائل التخصيص من نوع $\max z$ بعد ضرب عناصر مصفوفة الأرباح في -1 أو تحويل مصفوفة الأرباح لمصفوفة فرص ضائعة (لن ندرسها).

الطريقة الهنغارية

- تعتمد على مصفوفة التكاليف فقط.
- سنفترض أن تكلفة تخصيص المهمة i للمنفذ j غير سالبة.

أي أن : $c_{ij} \geq 0$

- تعمل باستخدام النظرية التالية:

إذا أضفنا أو طرحنا قيمة ثابتة من جميع القيم في أحد الصفوف أو في أحد الأعمدة في مصفوفة التكاليف ، فإن التخصيص الأمثل لا يتغير.

(تنطبق النظرية أيضا على مسألة النقل المتزنة)

الطريقة الهنغارية

لتكن مصفوفة تكاليف الإسناد كالتالي:

c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	$\rightarrow p_1$
c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	$\rightarrow p_2$
c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	$\rightarrow p_3$
c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	$\rightarrow p_4$

خطوة 1: لكل صف i حدد العنصر الأصغر وليكن p_i

$$p_i = \min \{c_{ij} : j = 1 , 2 , \ldots , n\}$$

الطريقة الهنغارية

خطوة 2: لكل صف i اطرح العنصر الأصغر p_i من كل عنصر في الصف لتنتج المصفوفة الجديدة التالية:

$c_{11}-p_1$	$c_{12}-p_1$	$c_{13}-p_1$	$c_{14}-p_1$
$c_{21}-p_2$	$c_{22}-p_2$	$c_{23}-p_2$	$c_{24}-p_2$
$c_{31}-p_3$	$c_{32}-p_3$	$c_{33}-p_3$	$c_{34}-p_3$
$c_{41}-p_4$	$c_{42}-p_4$	$c_{43}-p_4$	$c_{44}-p_4$

الطريقة الهنغارية

لتكن المصفوفة الناتجة هي:

d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}
d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}
d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
q_1	q_2	q_3	q_4

خطوة 3: لكل عمود j حدد العنصر الأصغر وليكن q_j

$$q_j = \min\{d_{ij} : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

الطريقة الهنغارية

خطوة 4: لكل عمود j اطرح العنصر الأصغر q_j من كل عنصر في العمود لتنتج المصفوفة الجديدة التالية:

$d_{11}-q_1$	$d_{12}-q_2$	$d_{13}-q_3$	$d_{14}-q_4$
$d_{21}-q_1$	$d_{22}-q_2$	$d_{23}-q_3$	$d_{24}-q_4$
$d_{31}-q_1$	$d_{32}-q_2$	$d_{33}-q_3$	$d_{34}-q_4$
$d_{41}-q_1$	$d_{42}-q_2$	$d_{43}-q_3$	$d_{44}-q_4$

الطريقة الهنغارية

خطوة 5: اختبار الأمثلية:

أوجد k = أقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية والعمودية التي تغطي جميع الأصفار في المصفوفة.

إذا كان k = عدد الصفوف (أو عدد الأعمدة) $\Leftrightarrow$ الحل أمثل. تـوقف.

[يمكن إثبات أنه يمكن تخصيص k منفذ إلى k مهمة ، لذا نتوقف

عندما k = عدد المنفذين (الصفوف) = عدد المهمات (الأعمدة)]

الطريقة الهنغارية

خطوة 6: إذا كان k أقل من عدد الصفوف:

- حدد أقل عنصر من العناصر الغير مغطاه بخط أفقي أو عمودي وليكن h.
- اطرح العدد h من جميع العناصر الغير مغطاه.
- أضف العدد h إلى جميع العناصر المغطاة بخطين (خط أفقي وخط عمودي).
- انتقل إلى خطوة 5.

تحديد الحل الأمثل في المصفوفة النهائية

1. لكل صف: إذا وجدت خلية واحدة فقط في الصف ذات تكلفة صفر، ولتكن خلية (i , j)، اجعل $x_{ij}* = 1$ ثم احذف الصف i والعمود j من التعيينات اللاحقة.
2. لكل عمود: إذا وجدت خلية واحدة فقط في العمود ذات تكلفة صفر، ولتكن خلية (i , j)، اجعل $x_{ij}* = 1$ ثم احذف الصف i والعمود j من التعيينات اللاحقة.
3. في حالة عدم وجود صف أو عمود متبقي يحتوي على خلية واحدة فقط ذات تكلفة صفر، فيتم التخصيص في الصف أو العمود الأقل أصفارا. يتم التعيين بطريقة اختيارية لأحد الخلايا الموجودة ذات القيمة صفر، ويحذف الصف والعمود من التعيينات اللاحقة. ثم نعيد الخطوتين 1 و 2.

مثال: الطريقة الهنغارية

14	5	8	7	$\rightarrow p_1 = 5$
2	12	6	5	$\rightarrow p_2 = 2$
7	8	3	9	$\rightarrow p_3 = 3$
2	4	6	10	$\rightarrow p_4 = 2$

حدد العنصر الأصغر في كل صف ، ثم اطرحه من قيم الصف

9	0	3	2
0	10	4	3
4	5	0	6
0	2	4	8

مثال: الطريقة الهنغارية

9	0	3	2
0	10	4	3
4	5	0	6
0	2	4	8

↓ $q_1 = 0$ ↓ $q_2 = 0$ ↓ $q_3 = 0$ ↓ $q_4 = 2$

حدد العنصر الأصغر في كل عمود ، ثم اطرحه من قيم العمود

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

مثال: الطريقة الهنغارية

تغطية الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف

مثال: الطريقة الهنغارية

حدد العنصر الأصغر في الخلايا غير المغطاة

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

مثال: الطريقة الهنغارية

اطرح العنصر الأصغر من العناصر غير المغطاة
أضف العنصر الأصغر على العناصر المغطاة بخطين

9 +1	0	3	0
0	10-1	4-1	1-1
4 +1	5	0	4
0	2-1	4-1	6-1

مثال: الطريقة الهنغارية

اطرح العنصر الأصغر من العناصر غير المغطاة
أضف العنصر الأصغر على العناصر المغطاة بخطين

9+1	0	3	0
0	10-1	4-1	1-1
4+1	5	0	4
0	2-1	4-1	6-1

مثال: الطريقة الهنغارية

تغطية الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

عدد الخطوط = عدد الصفوف

وصلنا للحل الأمثل

مثال: الطريقة الهنغارية

تحديد الإسناد الأمثل

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

$\mathbf{x_{12} = 1}$ $\mathbf{x_{24} = 1}$ $\mathbf{x_{33} = 1}$ $\mathbf{x_{41} = 1}$

مثال: الطريقة الهنغارية

تحديد الإسناد الأمثل

14	5	8	7
2	12	6	5
7	8	3	9
2	4	6	10

$x_{12} = 1$ $x_{24} = 1$ $x_{33} = 1$ $x_{41} = 1$

$$z = c_{12} + c_{24} + c_{33} + c_{41}$$
$$= 5 + 5 + 3 + 2 = 15$$ يوم

مثال: الطريقة الهنغارية

- قيمة دالة الهدف المثلى = 15
- لاحظ أن:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + h$$
$$= 5 + 2 + 3 + 2 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1$$
$$= 15$$

مسألة التخصيص: مثال 2

شركة تطوير عقاري أسند إليها تنفيذ خمسة مشاريع. تمتلك هذه الشركة أربعة فرق إنشاء مختلفة تتفاوت فيما بينها بالمعدات والإمكانات وأعداد العمال. يستغرق كل فريق وقت (بالأشهر) لإنجاز أي من المشاريع حسب ما هو موضح في الجدول التالي:

	المشروع-1	المشروع-2	المشروع-3	المشروع-4	المشروع-5
الفريق-1	12	6	11	24	6
الفريق-2	15	9	13	17	5
الفريق-3	20	10	12	18	6
الفريق-4	20	10	12	18	6
الفريق-5	13	12	9	20	4

مسألة التخصيص: مثال 2

12	6	11	24	6	$\rightarrow p_1 = 6$
15	9	13	17	5	$\rightarrow p_2 = 5$
20	10	12	18	6	$\rightarrow p_3 = 6$
20	10	12	18	6	$\rightarrow p_4 = 6$
13	12	9	20	4	$\rightarrow p_5 = 4$

6	0	5	18	0
10	4	8	12	0
14	4	6	12	0
14	4	6	12	0
9	8	5	16	0
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$q_1 = 6$	$q_2 = 0$	$q_3 = 5$	$q_4 = 12$	$q_5 = 0$

مسألة التخصيص: مثال 2

0	0	0	6	0
4	4	3	0	0
8	4	1	0	0
8	4	1	0	0
3	8	0	4	0

عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف

0	0	0	**6+1**	**0+1**
4-1	**4-1**	**3-1**	0	0
8-1	**4-1**	**1-1**	0	0
8-1	**4-1**	**1-1**	0	0
3	8	0	**4+1**	**0+1**

مسألة التخصيص: مثال 2

0	0	0	7	1
3	3	2	0	0
7	3	0	0	0
7	3	0	0	0
3	8	0	5	1

عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف

0	0	**0+3**	**7+3**	**1+3**
3-3	**3-3**	2	0	0
7-3	**3-3**	0	0	0
7-3	**3-3**	0	0	0
3-3	**8-3**	0	5	1

مسألة التخصيص: مثال 2

0	0	3	10	4
0	0	2	0	0
4	0	0	0	0
4	0	0	0	0
0	5	0	5	1

عدد الخطوط = عدد الصفوف

وصلنا للحل الأمثل

مسألة التخصيص: مثال 2

0	0	3	10	4
0	0	2	0	0
4	0	0	0	0
4	0	0	0	0
0	5	0	5	1

$$x_{12} = 1$$
$$x_{21} = 1$$
$$x_{35} = 1$$
$$x_{44} = 1$$
$$x_{53} = 1$$

$$z = 54$$

12	6	11	24	6
15	9	13	17	5
20	10	12	18	6
20	10	12	18	6
13	12	9	20	4

مسألة التخصيص: مثال 2

0	0	3	10	4
0	0	2	0	0
4	0	0	0	0
4	0	0	0	0
0	5	0	5	1

حل أمثل آخر

$x_{11} = 1$
$x_{22} = 1$
$x_{34} = 1$
$x_{45} = 1$
$x_{53} = 1$

$z = 54$

12	6	11	24	6
15	9	13	17	5
20	10	12	18	6
20	10	12	18	6
13	12	9	20	4

مسألة التخصيص: مثال 2

0	0	3	10	4
0	0	2	0	0
4	0	0	0	0
4	0	0	0	0
0	5	0	5	1

حل أمثل ثالث آخر

$x_{11} = 1$
$x_{25} = 1$
$x_{34} = 1$
$x_{42} = 1$
$x_{53} = 1$

$z = 54$

12	6	11	24	6
15	9	13	17	5
20	10	12	18	6
20	10	12	18	6
13	12	9	20	4

مسألة التخصيص: مثال 2

- قيمة دالة الهدف المثلى = 54
- لاحظ أن:

$$
\begin{aligned}
& p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + h_1 + h_2 \\
= \; & 6 + 5 + 6 + 6 + 4 + 6 + 0 + 5 + 12 + 0 + 1 + 3 \\
= \; & 54
\end{aligned}
$$

نظرية القرارات

Decision Theory

نظرية القرارات

- هي دراسة كيفية اتخاذ أفضل قرار من بين عدة قرارات ممكنة.
  - هل استثمر في الأسهم أو العقار أو افتح محل تجاري؟
  - هل أدرس في الجامعة أو في كلية عسكرية أو التحق بوظيفة؟
  - هل اشتري سيارة نقل صغيرة أو سيارة نقل كبيرة؟
- يجب أن يعرف متخذ القرار كل القرارات الممكنة وأن يكون لديه إمكانية الاختيار.
- يجب أن يعرف متخذ القرار "حالات الطبيعة" أو الحوادث التي قد تحدث مستقبلا وتؤثر على الفائدة من اتخاذ القرار.
- يجب أن يعرف متخذ القرار بطريقة كمية الربح أو الخسارة عند اتخاذ كل قرار وحدوث إحدى حالات الطبيعة المؤثرة.

حالات الطبيعة والبدائل

- حالات الطبيعة (States of Nature): هي ظروف غير قابلة للتحكم فيها تحدث بعد اتخاذ القرار وتؤثر في عائد القرار.

مثال:
حالة الطلب على منتج : عالي – متوسط – منخفض
حالة الاقتصاد المحلي مستقبلاً : كساد – ركود – مزدهر – تضخم

- البدائل (Alternatives): هي خيارات القرار المتعددة المتاحة لمتخذ القرار ليختار إحداها قبل معرفة ما سيحدث من حالات الطبيعة.

مصفوفة العوائد

- عائد القرار (Reward): هي القيمة الناتجة بعد اتخاذ القرار ومعرفة حالة الطبيعة التي حدثت (تمثل أرباح أو تكاليف).

- مصفوفة (جدول) العوائد:

لتكن حالات الطبيعة لقرار ما هي : $S_1 , S_2 , S_3 , \ldots , S_n$

لتكن البدائل المتاحة لقرار ما هي : $A_1 , A_2 , A_3 , \ldots , A_m$

وليكن العائد من اختيار البديل i وحدوث حالة الطبيعة $j = r_{ij}$

مصفوفة العوائد

مصفوفة العوائد للقرار المتخذ هي كالتالي:

	S_1	S_2	$\cdots$	S_n
A_1	r_{11}	r_{12}	$\cdots$	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	$\cdots$	r_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
A_m	r_{m1}	r_{m2}	$\cdots$	r_{mn}

مثال: مصفوفة العوائد

ترغب شركة باستثمار مبلغ من المال خلال عام. ولدى الشركة ثلاث فرص استثمارية: إنشاء شركة بيع أثاث ، أو شراء أسهم ، أو إنشاء شركة تسويق سيارات. وقد دلت الدراسات الإحصائية على أن الوضع الاقتصادي في البلد قد يكون إما في حالة نمو بنسبة 50% أو في حالة ركود بنسبة 30% أو في حالة تضخم بنسبة 20%. ومن خلال استقراء الشركة لحالات الاقتصاد تتوقع أن تكون نسبة الأرباح من كل نشاط كالتالي:

حالة النمو : بيع أثاث = 12% ، أسهم = 25 % ، تسويق سيارات = 16.5%

حالة الركود : بيع أثاث = 8 % ، أسهم = 10% ، تسويق سيارات = 8.5 %

حالة التضخم : بيع أثاث = 7 % ، أسهم = ‎-2 % ، تسويق سيارات = 6.5 %

كون مصفوفة العوائد لقرار اختيار الاستثمار الأفضل.

مثال: مصفوفة العوائد

مصفوفة العوائد:

	S_1 : نمو	S_2 : ركود	S_3 : تضخم
	$P(S_1) = 0.5$	$P(S_2) = 0.3$	$P(S_3) = 0.2$
A_1 : أثاث	12	8	7
A_2 : أسهم	25	10	-2
A_3 : سيارات	16.5	8.5	6.5

أنواع القرارات

1. قرار في حالة التأكد

تتوفر معلومات المسألة بشكل كامل قبل اتخاذ القرار:

- البرامج الخطية
- مسائل الشبكات
- مسائل النقل والتخصيص

مثال:

القرار : x_1 و x_2 = الإنتاج اليومي من السيارات من النوع الأول والثاني.

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ & x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

المعاملات b_2 , b_1 , a_{22} , a_{21} , a_{12} , a_{11} , c_2 , c_1 معلومة تماماً.

أنواع القرارات

2. قرار في حالة المخاطرة (Under Risk)

- حالات الطبيعة معلومة بشكل كامل
- نعلم احتمال حدوث أي من حالات الطبيعة
- نستخدم الدالة الاحتمالية في اتخاذ القرار

مثال:

القرار : x_1 و x_2 = الإنتاج اليومي من السيارات من النوع الأول والثاني.

العائد $= c_1x_1 + c_2x_2$ باحتمال 0.75 "الطلب عالي"

$= d_1x_1 + d_2x_2$ باحتمال 0.25 "الطلب منخفض"

أنواع القرارات

3. قرار في حالة عدم التأكد (Under Uncertainty)

– حالات الطبيعة معلومة بشكل كامل
– لا نعلم احتمال حدوث أي من حالات الطبيعة
– القرار يعتمد فقط على هل متخذ القرار متفائل أو متشائم.

مثال:

القرار : x_1 و x_2 = الإنتاج اليومي من السيارات من النوع الأول والثاني.

العائد $= c_1x_1 + c_2x_2$ إذا كان الطلب عالي

$= d_1x_1 + d_2x_2$ إذا كان الطلب منخفض

معايير اتخاذ القرار في حالة المخاطرة

متخذ القرار يعرف الدالة الاحتمالية لحالات الطبيعة:

$$P(S_1) = p_1 \, , P(S_2) = p_2 \, , P(S_3) = p_3 \, , \dots \, , P(S_n) = p_n$$

حيث

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

يمكن اتخاذ القرار باستخدام:

1. معيار القيمة المتوقعة للعوائد
2. معيار القيمة المتوقعة لخسارة الفرص (الندم)
3. معيار الحالة الأكثر وقوعا

معيار القيمة المتوقعة للعوائد

تقييم البديل A_i على أساس معيار القيمة المتوقعة للعوائد هو $E[A_i]$:

$$E[A_i] = p_1 r_{i1} + p_2 r_{i2} + p_3 r_{i3} + \ldots + p_n r_{in} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

مصفوفة أرباح: البديل الأمثل هو A^* ذو E^* حيث

$$E^* = \max \{ E[A_1], E[A_2], \ldots, E[A_m] \}$$

أي أنه البديل الذي يعطي أكبر أرباح متوقعة

مصفوفة تكاليف: البديل الأمثل هو A^* ذو E^* حيث

$$E^* = \min \{ E[A_1], E[A_2], \ldots, E[A_m] \}$$

أي أنه البديل الذي يعطي أقل تكاليف متوقعة

معيار القيمة المتوقعة للعوائد

مثال: لدينا مصفوفة الأرباح التالية:

	S_1	S_2	S_3
	$P(S_1) = 0.5$	$P(S_2) = 0.3$	$P(S_3) = 0.2$
A_1	12	8	7
A_2	25	10	-2
A_3	16.5	8.5	6.5

معيار القيمة المتوقعة للعوائد

القيمة المتوقعة للعوائد للبديل A_1:

$$E[A_1] = 0.5(12) + 0.3(8) + 0.2\ (7) = 9.8$$

القيمة المتوقعة للعوائد للبديل A_2:

$$E[A_2] = 0.5(25) + 0.3(10) + 0.2(-2) = 15.1$$

القيمة المتوقعة للعوائد للبديل A_3:

$$E[A_3] = 0.5(16.5) + 0.3(8.5) + 0.2(6.5) = 12.1$$

$$E^* = \max \{ 9.8\ ,\ 15.1\ ,\ 12.1 \} = 15.1$$

$A^* = A_2 =$ أفضل بديل حسب معيار القيمة المتوقعة للعوائد

معيار القيمة المتوقعة للعوائد

مثال: لدينا مصفوفة التكاليف التالية:

	S_1	S_2	S_3	S_4
	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.1$	$p_3 = 0.4$	$p_4 = 0.2$
A_1	8	9	5	12
A_2	10	12	6	12
A_3	17	5	8	15

معيار القيمة المتوقعة للعوائد

مثال: لدينا مصفوفة التكاليف التالية:

	S_1	S_2	S_3	S_4	$E[A_i]$
	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.1$	$p_3 = 0.4$	$p_4 = 0.2$	
A_1	8	9	5	12	7.7
A_2	10	12	6	12	9
A_3	17	5	8	15	11.8

$$E^* = \min \{ 7.7 , 9 , 11.8 \} = 7.7 \Rightarrow A^* = A_1$$

أفضل بديل حسب معيار القيمة المتوقعة للعوائد هو A_1

معيار القيمة المتوقعة لخسارة الفرص

خسارة الفرصة (الندم): هو مقدار ما يخسره متخذ القرار من عائد إذا اختار البديل A_i وحدثت حالة الطبيعة S_j

في مثال شركة الاستثمار السابق:
إذا كان قرار الشركة هو إنشاء شركة بيع أثاث ، ثم لو حدث أن الوضع الاقتصادي في البلد أصبح في حالة النمو، فإن العائد سيكون 12%.
بينما لو كنا نعرف مسبقاً بأن حالة النمو الاقتصادي سوف تحدث، فإن القرار الأفضل كان اختيار الاستثمار في الأسهم بعائد يساوي 25%.

إذن الشركة خسرت الفرصة في الحصول على عائد إضافي بمقدار 13% كانت ستحصل عليها لو اختارت الاستثمار في الأسهم بدلاً من شركة الأثاث.

معيار القيمة المتوقعة لخسارة الفرص

مصفوفة خسارة الفرص (وتسمى مصفوفة الندم): هي مصفوفة بنفس حجم مصفوفة العوائد وعناصره معرفة كما يلي:

مصفوفة أرباح:

$$L_{ij} = \{\max r_{kj} : r_{kj} \text{ in } S_j\} - r_{ij}$$

في كل عمود: يتم طرح كل عدد من العدد الأكبر في العمود

مصفوفة تكاليف:

$$L_{ij} = r_{ij} - \{\min r_{kj} : r_{kj} \text{ in } S_j\}$$

في كل عمود: يتم طرح العدد الأصغر في العمود من كل عدد

معيار القيمة المتوقعة لخسارة الفرص

تقييم البديل A_i على أساس معيار القيمة المتوقعة لخسارة الفرص هو $EL[A_i]$ ويعرف كما يلي:

$$EL[A_i\,] = p_1L_{i1} + p_2L_{i2} + p_3L_{i3} + \ldots + p_nL_{in}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

في مصفوفة الأرباح أو التكاليف:

البديل الأمثل هو A^* ذو EL^* حيث

$$EL^* = \min \{ EL[A_1] , EL[A_2] , \ldots , EL[A_m] \}$$

أي أنه البديل الذي يعطي أقل تكاليف متوقعة لخسارة الفرص

البديل الذي يعطي أقل ندم متوقع

معيار القيمة المتوقعة لخسارة الفرص

مثال: لدينا مصفوفة الأرباح التالية:

	S_1	S_2	S_3
	$P(S_1) = 0.5$	$P(S_2) = 0.3$	$P(S_3) = 0.2$
A_1	12	8	7
A_2	25	10	-2
A_3	16.5	8.5	6.5

معيار القيمة المتوقعة لخسارة الفرص

مصفوفة خسارة الفرص (الندم) للعوائد:

	S_1	S_2	S_3
	$P(S_1) = 0.5$	$P(S_2) = 0.3$	$P(S_3) = 0.2$
A_1	$25 - 12 = 13$	$10 - 8 = 2$	$7 - 7 = 0$
A_2	$25 - 25 = 0$	$10 - 10 = 0$	$7 - (-2) = 9$
A_3	$25 - 16.5 = 8.5$	$10 - 8.5 = 1.5$	$7 - 6.5 = 0.5$

في كل عمود: يتم طرح كل عدد من العدد الأكبر في العمود

معيار القيمة المتوقعة لخسارة الفرص

القيمة المتوقعة لخسارة الفرص للبديل A_1:

$$EL[A_1] = 0.5(\ 13\ ) + 0.3(\ 2\ )\ +\ 0.2(\ 0\ ) = 7.1$$

القيمة المتوقعة لخسارة الفرص للبديل A_2:

$$EL[A_2] = 0.5(\ \ 0\ \ ) + 0.3(\ 0\ )\ +\ 0.2(\ 9\ ) = 1.8$$

القيمة المتوقعة لخسارة الفرص للبديل A_3:

$$EL[A_3] = 0.5(8.5)\ + 0.3(1.5) + 0.2(0.5) = 4.8$$

$$EL^* = \min\{\ 7.1\ ,\ 1.8\ ,\ 4.8\ \} = 1.8$$

$A^* = A_2 =$ أفضل بديل حسب معيار القيمة المتوقعة لخسارة الفرص

معيار القيمة المتوقعة لخسارة الفرص

مثال: لدينا مصفوفة التكاليف التالية:

	S_1	S_2	S_3	S_4
	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.1$	$p_3 = 0.4$	$p_4 = 0.2$
A_1	8	9	5	12
A_2	10	12	6	12
A_3	17	5	8	15

معيار القيمة المتوقعة لخسارة الفرص

مثال: لدينا مصفوفة التكاليف التالية:

	S_1	S_2	S_3	S_4	$EL[A_i]$
	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.1$	$p_3 = 0.4$	$p_4 = 0.2$	
A_1	$8-8=0$	$9-5=4$	$5-5=0$	$12-12=0$	0.4
A_2	$10-8=2$	$12-5=7$	$6-5=1$	$12-12=0$	1.7
A_3	$17-8=9$	$5-5=0$	$8-5=3$	$15-12=3$	4.5

$$EL^* = \min \{ 0.4 , 1.7 , 4.5 \} = 0.4 \Rightarrow A^* = A_1$$

أفضل بديل حسب معيار القيمة المتوقعة لخسارة الفرص هو A_1

معيار حالة الطبيعة الأكثر وقوعا

حالة (حالات) الطبيعة الأكثر وقوعا هي j^* ذات الاحتمال P^* حيث

$$P^* = \max \{ p_1 , p_2 , p_3 , \ldots , p_n \}$$

تقييم البديل A_i على أساس معيار حالة الطبيعة الأكثر وقوعا j^* هو $ML[A_i]$ويعرف كما يلي:

$$j^* = 1 \text{ state} : \quad ML[A_i] = r_{ij^*} \quad i = 1 , 2 , \ldots , m$$

$$j^* = 2 \text{ states} : \quad ML[A_i] = \frac{r_{ij_1^*} + r_{ij_2^*}}{2} \quad i = 1 , 2 , \ldots , m$$

$$j^* = 3 \text{ states} : \quad ML[A_i] = \frac{r_{ij_1^*} + r_{ij_2^*} + r_{ij_3^*}}{3} \quad i = 1 , 2 , \ldots , m$$

معيار حالة الطبيعة الأكثر وقوعا

البديل الأمثل على أساس معيار حالة الطبيعة الأكثر وقوعا هو:

مصفوفة أرباح: البديل الأمثل هو A^* ذو ML^* حيث

$$ML^* = \max \{ ML[A_1] , ML[A_2] , \dots , ML[A_m] \}$$

مصفوفة تكاليف: البديل الأمثل هو A^* ذو ML^* حيث

$$ML^* = \min \{ ML[A_1] , ML[A_2] , \dots , ML[A_m] \}$$

معيار حالة الطبيعة الأكثر وقوعا

مثال: لدينا مصفوفة الأرباح التالية:

	S_1	S_2	S_3
	$P(S_1) = 0.5$	$P(S_2) = 0.3$	$P(S_3) = 0.2$
A_1	12	8	7
A_2	25	10	-2
A_3	16.5	8.5	6.5

معيار حالة الطبيعة الأكثر وقوعا

$$P^* = \max\{0.5\ ,\ 0.3\ ,\ 0.2\} \ = 0.5 \Rightarrow j^* = 1 \Rightarrow S_1$$

إذاً الحالة الأكثر احتمالاً لحدوثها هي S_1.

البديل الأفضل هو الذي يحقق الأعلى ربحاً في عمود حالة الطبيعة S_1

$$ML[A_1] = 12$$
$$ML[A_2] = 25$$
$$ML[A_3] = 16.5$$

$$ML^* = \max\{\ 12\ \ ,25\ \ ,16.5\ \} = 25$$

$A^* = A_2 =$ أفضل بديل حسب معيار حالة الطبيعة الأكثر وقوعا

معيار حالة الطبيعة الأكثر وقوعا

مثال آخر:

لتكن احتمالات حالات الطبيعة هي:

$$P(S_1) = 0.4 \ , \ P(S_2) = 0.4 \ , \ P(S_3) = 0.2$$

ومصفوفة الأرباح هي:

	S_1	S_2	S_3
	$P(S_1) = 0.4$	$P(S_2) = 0.4$	$P(S_3) = 0.2$
A_1	12	8	7
A_2	25	10	-2
A_3	16.5	8.5	6.5

معيار حالة الطبيعة الأكثر وقوعا

تقييم البدائل بمعيار الحالة الأكثر وقوعا:

$$P^* = \max\{0.4\ ,\ 0.4\ ,\ 0.2\} = 0.4 \Rightarrow j^* = 1,2 \Rightarrow S_1\ ,\ S_2$$

الحالات الأكثر احتمالاً لحدوثها هي S_2 و S_1

نحسب لكل بديل متوسط العوائد الموافقة للحالتين S_2 و S_1:

$$ML[A_1] = (\ 12 + 8\ )\ /\ 2 \qquad = 10$$

$$ML[A_2] = (\ 25 + 10\ )\ /\ 2 \qquad = 17.5$$

$$ML[A_3] = (\ 16.5 + 8.5\ )\ /\ 2 = 12.5$$

$$ML^* = \max\ \{\ 10\ \ ,\ 17.5\ \ ,\ 12.5\ \} = 17.5$$

$A^* = A_2 =$ أفضل بديل حسب معيار حالة الطبيعة الأكثر وقوعا

معيار حالة الطبيعة الأكثر وقوعا

مثال: لدينا مصفوفة التكاليف التالية:

	S_1	S_2	S_3	S_4
	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.1$	$p_3 = 0.4$	$p_4 = 0.2$
A_1	8	9	5	12
A_2	10	12	6	12
A_3	17	5	8	15

معيار حالة الطبيعة الأكثر وقوعا

مثال: لدينا مصفوفة التكاليف التالية:

$$P^* = \max\{0.3\ ,\ 0.1\ ,\ 0.4\ ,\ 0.2\} = 0.4 \Rightarrow j^* = 3 \Rightarrow S_3$$

	S_1	S_2	S_3	S_4	$ML[A_i]$
	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.1$	$p_3 = 0.4$	$p_4 = 0.2$	
A_1	8	9	5	12	5
A_2	10	12	6	12	6
A_3	17	5	8	15	8

$$ML^* = \min\ \{\ 5\ ,\ 6\ ,\ 8\ \} = 5 \Rightarrow A^* = A_1$$

أفضل بديل حسب معيار حالة الطبيعة الأكثر وقوعا هو A_1

معايير اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد

حالات الطبيعة للقرار معلومة: $S_1 , S_2 , S_3 , \ldots , S_n$

احتمالات الحدوث غير معلومة:

$$P(S_1) = ?? , P(S_2) = ?? , \ldots , P(S_n) = ??$$

يمكن اتخاذ القرار باستخدام:

1. معيار لابلاس (Laplace Criterion)
2. معيار التشاؤم (Pessimist Criterion)
3. معيار التفاؤل (Optimist Criterion)
4. معيار هورويز (Hurwicz Criterion)
5. معيار سافيج (Savage Criterion)

مثال

يرغب مدير شركة في اختيار وسيلة إعلانية من بين ثلاث وسائل متوفرة:

$A_1 =$ الإعلان التلفزيوني , $A_2 =$ الإعلان الإذاعي, $A_3 =$ الإعلان الصحفي

وسيجد ثلاث حالات للدخل المادي للأفراد (التي ستؤثر على القدرة الشرائية):

$S_1 =$ ارتفاع في الدخل , $S_2 =$ إنخفاض في الدخل , $S_3 =$ ثبات في الدخل

ولم يتمكن المدير من الحصول على البيانات اللازمة لمعرفة احتمال الحدوث لكل حالة، ولكن تمكن من تقدير الأرباح المتوقعة من كل وسيلة إعلامية في الجدول التالي، فما هو البديل المناسب للإعلان؟

	S_1 : ارتفاع	S_2 : انخفاض	S_3 : ثبات
A_1 : تلفزيوني	3	6	−1
A_2 : إذاعي	8	5	4
A_3 : صحفي	−4	7	12

معيار لابلاس

جميع حالات الطبيعة متساوية في احتمال الحدوث

$$P(S_1) = P(S_2) = P(S_3) = \cdots = P(S_n) = \frac{1}{n}$$

تقييم البديل A_iهو:

$$LE[A_i] = \frac{1}{n}(r_{i1} + r_{i2} + \cdots + r_{in}), \quad i = 1 , 2 , \ldots , m$$

معيار لابلاس

البديل الأمثل على أساس معيار لابلاس:

مصفوفة أرباح: البديل الأمثل هو A^* ذو LE^* حيث

$$LE^* = \max \{ LE[A_1] , LE[A_2] , \dots , LE[A_m] \}$$

مصفوفة تكاليف: البديل الأمثل هو A^* ذو LE^* حيث

$$LE^* = \min \{ LE[A_1] , LE[A_2] , \dots , LE[A_m] \}$$

معيار لابلاس

مثال: في مصفوفة الأرباح التالية ، ما هو البديل المناسب بمعيار لابلاس ؟

	S_1	S_2	S_3
A_1	3	6	-1
A_2	8	5	4
A_3	-4	7	12

$$LE[A_1] = \frac{1}{3}(\ 3 + 6 - 1\ ) = 2.67$$

$$LE[A_2] = \frac{1}{3}(\ 8 + 5 + \ 4\ ) = 5.67$$

$$LE[A_3] = \frac{1}{3}(-4 + 7 + 12\ ) = 5$$

$$LE^* \ = \ \max\{\ 2.67\ ,\ 5.67\ ,\ 5\ \} = \ 5.67 \quad \Rightarrow \quad A^* = A_2$$

معيار لابلاس

مثال: في مصفوفة التكاليف التالية ، ما هو البديل المناسب بمعيار لابلاس ؟

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	8	9	5	12
A_2	10	12	6	12
A_3	17	5	8	15

$$LE[A_1] = \frac{1}{4}(8 + 9 + 5 + 12) = 8.5$$

$$LE[A_2] = \frac{1}{4}(10 + 12 + 6 + 12) = 10$$

$$LE[A_3] = \frac{1}{4}(17 + 5 + 8 + 15) = 11.25$$

$$LE^* = \min\{8.5, 10, 11.25\} = 8.5 \Rightarrow A^* = A_1$$

معيار التشاؤم

أسوأ العوائد هو الذي سيتحقق لكل بديل

تقييم البديل A_i هو:

مصفوفة أرباح: عند اختيار البديل A_i، سنحصل على أقل ربح:

$$PV[A_i] = \min\,(r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, \dots, r_{in}) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

مصفوفة تكاليف: عند اختيار البديل A_i، سنحصل على أكبر خسارة:

$$PV[A_i] = \max\,(r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, \dots, r_{in}) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

معيار التشاؤم

البديل الأمثل على أساس معيار التشاؤم : <u>نختار أفضل السيئين</u> :

مصفوفة أرباح: البديل الأمثل هو الذي يعطي أكبر "أقل ربح"

البديل الأمثل هو A^* ذو PV^* حيث:

$$PV^* = \max \{ PV[A_1] , PV[A_2] , \ldots , PV[A_m] \}$$

مصفوفة تكاليف: البديل الأمثل هو الذي يعطي أقل "أكبر خسارة"

البديل الأمثل هو A^* ذو PV^* حيث:

$$PV^* = \min \{ PV[A_1] , PV[A_2] , \ldots , PV[A_m] \}$$

معيار التشاؤم

مثال: في مصفوفة الأرباح التالية ، ما هو البديل المناسب بمعيار التشاؤم ؟

	S_1	S_2	S_3
A_1	3	6	-1
A_2	8	5	4
A_3	-4	7	12

$$PV[A_1] = \min\{\ 3, 6, -1\ \} = -1$$
$$PV[A_2] = \min\{\ 8, 5, 4\ \} = 4$$
$$PV[A_3] = \min\{\ -4, 7, 12\ \} = -4$$

$$PV^* = \max\{\ -1, 4, -4\ \} = 4 \Rightarrow A^* = A_2$$

معيار التشاؤم

مثال: في مصفوفة التكاليف التالية ، ما هو البديل المناسب بمعيار التشاؤم ؟

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	8	9	5	12
A_2	10	12	6	12
A_3	17	5	8	15

$$PV[A_1] = \max\{\ 8\ ,\ 9\ ,\ 5\ ,\ 12\ \} = 12$$
$$PV[A_2] = \max\{\ 10\ ,\ 12\ ,\ 6\ ,\ 12\ \} = 12$$
$$PV[A_3] = \max\{\ 17\ ,\ 5\ ,\ 8\ ,\ 15\ \} = 17$$

$$PV^* = \min\{\ 12\ ,\ 12\ ,\ 17\ \} = 12 \quad \Rightarrow \quad A^* = A_1 \text{ or } A_2$$

معيار التفاؤل

أفضل العوائد هو الذي سيتحقق لكل بديل

تقييم البديل A_i هو:

مصفوفة أرباح: عند اختيار البديل A_i ، سنحصل على أكبر ربح:

$$OV[A_i] = \max\,(r_{i1}\,,\, r_{i2}\,,\, r_{i3}\,,\, \ldots\,,\, r_{in}) \qquad , \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

مصفوفة تكاليف: عند اختيار البديل A_i ، سنحصل على أقل خسارة:

$$OV[A_i] = \min\,(r_{i1}\,,\, r_{i2}\,,\, r_{i3}\,,\, \ldots\,,\, r_{in}) \qquad , \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

معيار التفاؤل

البديل الأمثل على أساس معيار التفاؤل: نختار أفضل الأفضل :

مصفوفة أرباح: البديل الأمثل هو الذي يعطي أكبر "أكبر ربح"

البديل الأمثل هو A^* ذو OV^* حيث:

$$OV^* = \max \{ OV[A_1] , OV[A_2] , \ldots , OV[A_m] \}$$

مصفوفة تكاليف: البديل الأمثل هو الذي يعطي أقل "أقل خسارة"

البديل الأمثل هو A^* ذو OV^* حيث:

$$OV^* = \min \{ OV[A_1] , OV[A_2] , \ldots , OV[A_m] \}$$

معيار التفاؤل

مثال: في مصفوفة الأرباح التالية ، ما هو البديل المناسب بمعيار التفاؤل ؟

	S_1	S_2	S_3
A_1	3	6	−1
A_2	8	5	4
A_3	− 4	7	12

$$OV[A_1] = \max \{ 3 , 6 , -1 \} = 6$$
$$OV[A_2] = \max \{ 8 , 5 , 4 \} = 8$$
$$OV[A_3] = \max \{ -4 , 7 , 12 \} = 12$$

$$OV^* = \max \{ 6 , 8 , 12 \} = 12 \Rightarrow A^* = A_3$$

معيار التفاؤل

مثال: في مصفوفة التكاليف التالية ، ما هو البديل المناسب بمعيار التفاؤل ؟

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	8	9	5	12
A_2	10	12	6	12
A_3	17	5	8	15

$$OV[A_1] = \min\{8, 9, 5, 12\} = 5$$
$$OV[A_2] = \min\{10, 12, 6, 12\} = 6$$
$$OV[A_3] = \min\{17, 5, 8, 15\} = 5$$

$$OV^* = \min\{5, 6, 5\} = 5 \Rightarrow A^* = A_1 \text{ or } A_3$$

معيار هورويز

- معيار متوسط بين التشاؤم والتفاؤل
- يعتمد على نسبة التفاؤل α عند متخذ القرار $(0 \le \alpha \le 1)$

تقييم البديل A_i هو:

$$HV[A_i] = \alpha \,[\text{أفضل عائد لـ } A_i\,] + (1-\alpha)\,[\text{أسوأ عائد لـ } A_i\,]$$

مصفوفة أرباح:

$$HV[A_i] = \alpha\,[\max(r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{in})] + (1-\alpha)\,[\min(r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{in})]$$

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

مصفوفة تكاليف:

$$HV[A_i] = \alpha\,[\min(r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{in})] + (1-\alpha)\,[\max(r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{in})]$$

$$i = 1, 2, \ldots, m$$

معيار هورويز

البديل الأمثل على أساس معيار هورويز:

مصفوفة أرباح: البديل الأمثل هو A^* ذو HV^* حيث:

$$HV^* = \max \{ HV[A_1] , HV[A_2] , \ldots , HV[A_m] \}$$

مصفوفة تكاليف: البديل الأمثل هو A^* ذو HV^* حيث:

$$HV^* = \min \{ HV[A_1] , HV[A_2] , \ldots , HV[A_m] \}$$

معيار هورويز

مثال: في مصفوفة الأرباح التالية ، ما هو البديل المناسب بمعيار هورويز بنسبة تفاؤل 55%؟

	S_1	S_2	S_3
A_1	3	6	-1
A_2	8	5	4
A_3	-4	7	12

$$HV[A_1] = 0.55\,(6) + 0.45\,(-1) = 2.85$$
$$HV[A_2] = 0.55\,(8) + 0.45\,(4) = 6.2$$
$$HV[A_3] = 0.55\,(12) + 0.45\,(-4) = 4.8$$

$$HV^* = \max\{2.85\,,\,6.2\,,\,4.8\} = 6.2 \quad \Rightarrow \quad A^* = A_2$$

معيار هورويز

ما مدى التفاؤل الذي يجعل البديل A_1 هو البديل الأمثل؟

$$\alpha = ??$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$HV[A_1] = \alpha\,(6) + (1-\alpha)\,(-1) = 7\alpha - 1$$
$$HV[A_2] = \alpha\,(8) + (1-\alpha)\,(4) = 4\alpha + 4$$
$$HV[A_3] = \alpha\,(12) + (1-\alpha)\,(-4) = 16\alpha - 4$$

$$A^* = A_1$$
$$\Rightarrow \quad HV[A_1] > HV[A_2] \Rightarrow 7\alpha - 1 > 4\alpha + 4 \Rightarrow 3\alpha > 5 \Rightarrow \alpha > 1.67$$
$$\text{and} \quad HV[A_1] > HV[A_3] \Rightarrow 7\alpha - 1 > 16\alpha - 4 \Rightarrow 9\alpha < 3 \Rightarrow \alpha < 0.33$$

لا يوجد قيمة لـ α تجعل A_1 هو البديل الأمثل

معيار هورويز

ما مدى التفاؤل الذي يجعل البديل A_2 هو البديل الأمثل؟

$$\alpha = ??$$

$$0 \le \alpha \le 1$$

$$HV[A_1] = \alpha\,(\,6\,) + (1-\alpha)\,(-1) = 7\alpha - 1$$
$$HV[A_2] = \alpha\,(\,8\,) + (1-\alpha)\,(\,4\,) = 4\alpha + 4$$
$$HV[A_3] = \alpha\,(12) + (1-\alpha)\,(-4) = 16\alpha - 4$$

$$A^* = A_2$$
$$\Rightarrow \quad HV[A_2] > HV[A_1] \Rightarrow 4\alpha + 4 > 7\alpha - 1 \Rightarrow 3\alpha < 5 \Rightarrow \alpha < 1.67$$
$$\text{and} \quad HV[A_2] > HV[A_3] \Rightarrow 4\alpha + 4 > 16\alpha - 4 \Rightarrow 12\alpha < 8 \Rightarrow \alpha < 0.67$$

$$\textbf{For all} \quad 0 \le \alpha < 0.67 \quad \Rightarrow \quad A^* = A_2$$

معيار هورويز

ما مدى التفاؤل الذي يجعل البديل A_3 هو البديل الأمثل؟

$$\alpha = ??$$

$$0 \le \alpha \le 1$$

$$HV[A_1] = \alpha\,(6) + (1-\alpha)\,(-1) = 7\alpha - 1$$
$$HV[A_2] = \alpha\,(8) + (1-\alpha)\,(4) = 4\alpha + 4$$
$$HV[A_3] = \alpha\,(12) + (1-\alpha)\,(-4) = 16\alpha - 4$$

$$A^* = A_3$$
$$\Rightarrow \quad HV[A_3] > HV[A_1] \Rightarrow 16\alpha - 4 > 7\alpha - 1 \Rightarrow 9\alpha > 3 \Rightarrow \alpha > 0.33$$
$$\text{and} \quad HV[A_3] > HV[A_2] \Rightarrow 16\alpha - 4 > 4\alpha + 4 \Rightarrow 12\alpha > 8 \Rightarrow \alpha > 0.67$$

$$\textbf{For all} \quad \mathbf{0.67} < \boldsymbol{\alpha} \le \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A^* = A_3}$$

معيار هورويز

مثال: في مصفوفة التكاليف التالية ، ما هو البديل المناسب بمعيار هورويز بنسبة تفاؤل 60%؟

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	8	9	5	12
A_2	10	12	6	12
A_3	17	5	8	15

$$HV[A_1] = 0.60\,(\,5\,) + 0.40\,(\,12\,) = 7.8$$
$$HV[A_2] = 0.60\,(\,6\,) + 0.40\,(\,12\,) = 8.4$$
$$HV[A_3] = 0.60\,(\,5\,) + 0.40\,(\,17\,) = 9.8$$

$$HV^* = \min \{\, 7.8 \,,\, 8.4 \,,\, 9.8 \,\} = 7.8 \quad \Rightarrow \quad A^* = A_1$$

معيار هورويز

ما مدى التفاؤل الذي يجعل البديل A_1 هو البديل الأمثل؟

$$\alpha = ??$$

$$0 \le \alpha \le 1$$

$$HV[A_1] = \alpha(5) + (1-\alpha)(12) = -7\alpha + 12$$
$$HV[A_2] = \alpha(6) + (1-\alpha)(12) = -6\alpha + 12$$
$$HV[A_3] = \alpha(5) + (1-\alpha)(17) = -12\alpha + 17$$

$$A^* = A_1 \quad \Rightarrow$$
$$HV[A_1] < HV[A_2] \Rightarrow -7\alpha + 12 < -6\alpha + 12 \Rightarrow -\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 0$$
$$HV[A_1] < HV[A_3] \Rightarrow -7\alpha + 12 < -12\alpha + 17 \Rightarrow 5\alpha < 5 \Rightarrow \alpha < 1$$

For all $\mathbf{0 < \alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad A^* = A_1}$

معيار هورويز

ما مدى التفاؤل الذي يجعل البديل A_2 هو البديل الأمثل؟

$$\alpha = ??$$

$$0 \le \alpha \le 1$$

$$HV[A_1] = \alpha\,(5) + (1-\alpha)\,(12) = -7\alpha + 12$$
$$HV[A_2] = \alpha\,(6) + (1-\alpha)\,(12) = -6\alpha + 12$$
$$HV[A_3] = \alpha\,(5) + (1-\alpha)\,(17) = -12\alpha + 17$$

$$A^* = A_2 \quad \Rightarrow$$
$$HV[A_2] < HV[A_1] \Rightarrow -6\alpha + 12 < -7\alpha + 12 \Rightarrow \alpha < 0$$
$$HV[A_2] < HV[A_3] \Rightarrow -6\alpha + 12 < -12\alpha + 17 \Rightarrow 6\alpha < 5 \Rightarrow \alpha < 0.83$$

لا يوجد قيمة لـ α تجعل A_2 هو البديل الأمثل

معيار هورويز

ما مدى التفاؤل الذي يجعل البديل A_3 هو البديل الأمثل؟

$$\alpha = ??$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$HV[A_1] = \alpha(5) + (1-\alpha)(12) = -7\alpha + 12$$
$$HV[A_2] = \alpha(6) + (1-\alpha)(12) = -6\alpha + 12$$
$$HV[A_3] = \alpha(5) + (1-\alpha)(17) = -12\alpha + 17$$

$$A^* = A_3 \quad \Rightarrow$$
$$HV[A_3] < HV[A_1] \Rightarrow -12\alpha + 17 < -7\alpha + 12 \Rightarrow 5\alpha > 5 \Rightarrow \alpha > 1$$
$$HV[A_3] < HV[A_2] \Rightarrow -12\alpha + 17 < -6\alpha + 12 \Rightarrow 6\alpha > 5 \Rightarrow \alpha > 0.83$$

لا يوجد قيمة لـ α تجعل A_3 هو البديل الأمثل

معيار سافيج – معيار الندم

- نكون مصفوفة خسارة الفرص
- نطبق معيار التشاؤم على جدول خسارة الفرص:
  - سيحدث أكبر ندم عند اختيار كل بديل
  - نختار البديل الذي له أقل "أكبر ندم"

تقييم البديل A_i هو:

$$SV[A_i] = \min\,(L_{i1}, L_{i2}, L_{i3}, \ldots, L_{in}) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

البديل الأمثل هو A^* ذو SV^* حيث:

$$SV^* = \max\,\{ SV[A_1], SV[A_2], \ldots, SV[A_m] \}$$

معيار سافيج – معيار الندم

مثال: في مصفوفة الأرباح التالية ، ما هو البديل المناسب بمعيار سافيج ؟

	S_1	S_2	S_3
A_1	3	6	-1
A_2	8	5	4
A_3	-4	7	12

معيار سافيج – معيار الندم

مثال: في مصفوفة الأرباح التالية ، ما هو البديل المناسب بمعيار سافيج ؟

	S_1	S_2	S_3
A_1	$8-3=5$	$7-6=1$	$12-(-1)=13$
A_2	$8-8=0$	$7-5=2$	$12-4=8$
A_3	$8-(-4)=12$	$7-7=0$	$12-12=0$

$$SV[A_1] = \min\{5, 1, 13\} = 1$$
$$SV[A_2] = \min\{0, 2, 8\} = 0$$
$$SV[A_3] = \min\{12, 0, 0\} = 0$$

$$SV^* = \min\{1, 0, 0\} = 1 \quad \Rightarrow \quad A^* = A_1$$

معيار سافيج – معيار الندم

مثال: في مصفوفة التكاليف التالية ، ما هو البديل المناسب بمعيار سافيج ؟

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	8	9	5	12
A_2	10	12	6	12
A_3	17	5	8	15

معيار سافيج – معيار الندم

مثال: في مصفوفة التكاليف التالية ، ما هو البديل المناسب بمعيار سافيج ؟

	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	$8-8=0$	$9-5=4$	$5-5=0$	$12-12=0$
A_2	$10-8=2$	$12-5=7$	$6-5=1$	$12-12=0$
A_3	$17-8=9$	$5-5=0$	$8-5=3$	$15-12=3$

$$SV[A_1] = \max\{0, 4, 0, 0\} = 4$$
$$SV[A_2] = \max\{2, 7, 1, 0\} = 7$$
$$SV[A_3] = \max\{9, 0, 3, 3\} = 9$$

$$SV^* = \min\{4, 7, 9\} = 4 \quad \Rightarrow \quad A^* = A_1$$

شجرة القرار (Decision Tree)

- عقد وروابط مترابطة مع بعضها البعض (لا تحتوي على دورة)
- قرارات متعددة ؛ لكل مرحلة قرارها وحالات طبيعة خاصة بها
- القرار النهائي: سلسلة من القرارات المعتمدة على بعضها البعض

- تمثيل شجرة القرار:
  - عقدة القرار (اختيار أحد بدائل القرار) تمثل بـ □
  - عقدة المخاطرة أو عدم تأكد: القرار يمر بعدة حالات طبيعة تمثل بـ ○
  - الروابط بين العقد تبين تسلسل القرار
  - أطراف الشجرة تمثل العائد النهائي لتتابع القرار لهذا الطرف

مثال

ترغب شركة باستثمار مبلغ من المال خلال عام. ولدى الشركة ثلاث فرص استثمارية: إنشاء شركة بيع أثاث ، أو شراء أسهم ، أو تسويق سيارات. وقد دلت الدراسات الإحصائية على أن الوضع الاقتصادي في البلد قد يكون في أحد الحالات التالية:

حالة نمو بنسبة 50%

حالة ركود بنسبة 30%

حالة تضخم بنسبة 20%

وتتوقع الشركة أن تكون نسبة الأرباح من كل نشاط استثماري كالتالي:

حالة النمو : بيع أثاث = 12% ، أسهم = 25% ، تسويق سيارات = 16.5%

حالة الركود : بيع أثاث = 8% ، أسهم = 10% ، تسويق سيارات = 8.5%

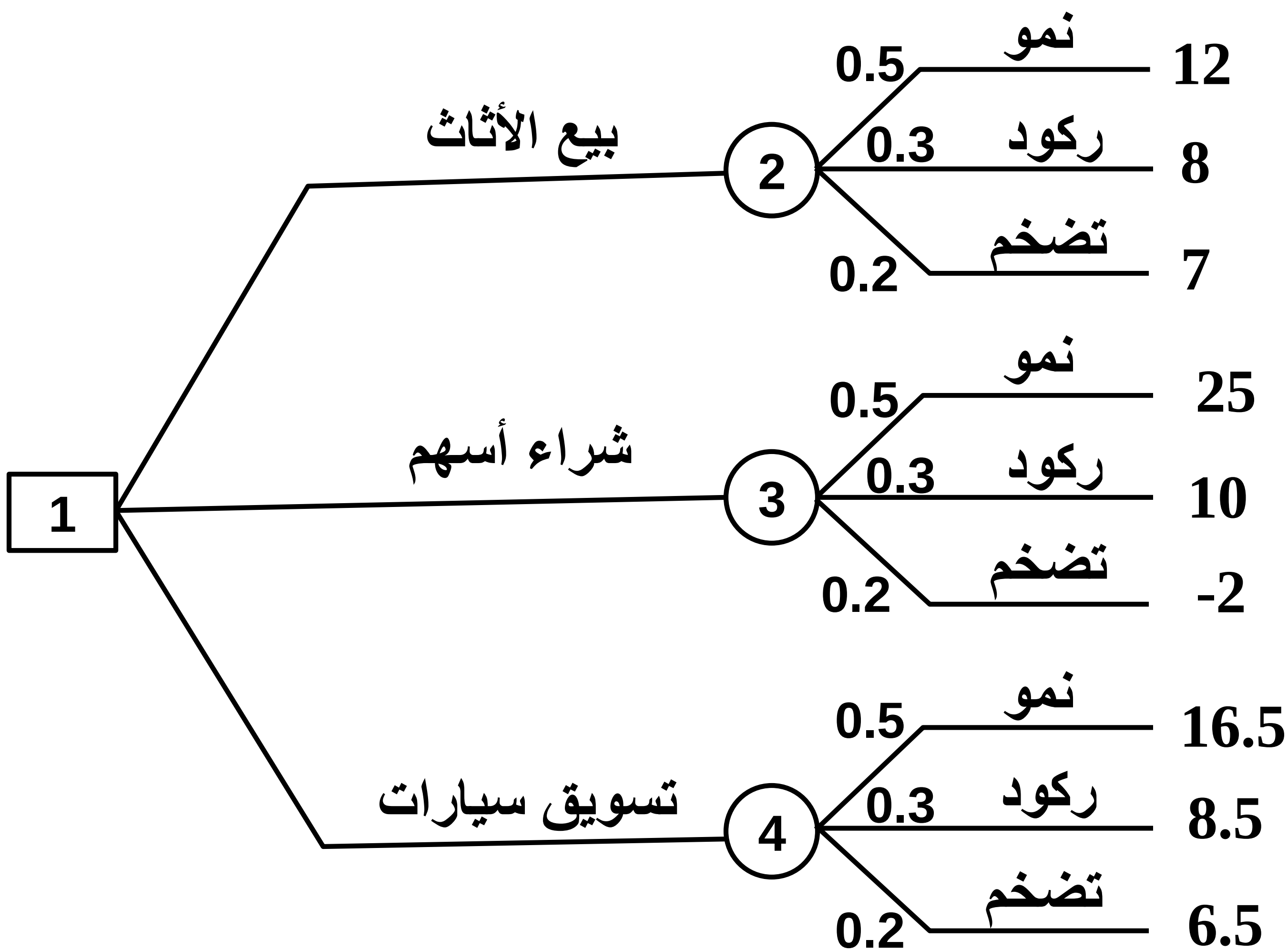
حالة التضخم : بيع أثاث = 7% ، أسهم = -2% ، تسويق سيارات = 6.5%

ارسم شجرة القرار.

شجرة القرار

- الشركة عليها أن تحدد أي البدائل ستختار في البداية
- بعد اتخاذ القرار وبداية الاستثمار، ستحدث إحدى حالات الطبيعة: نمو – ركود – تضخم
- ثم تحصل الشركة على الربح حسب القرار المتخذ وحالة الطبيعة التي حدثت

شجرة القرار



1
بيع الأثاث
2
شراء أسهم
3
تسويق سيارات
4
0.5
نمو
12
0.3
ركود
8
0.2
تضخم
7
0.5
نمو
25
0.3
ركود
10
0.2
تضخم
-2
0.5
نمو
16.5
0.3
ركود
8.5
0.2
تضخم
6.5

حل شجرة القرار

- تحديد معيار مناسب لاختيار البديل الأمثل في حالة المخاطرة (أو معيار مناسب لاختيار البديل الأمثل في حالة عدم التأكد)
- تقييم العقد على شجرة القرار ابتداء من أطراف (أوراق) شجرة القرار رجوعاً إلى جذر الشجرة
- تقييم عقدة المخاطرة على أساس معيار المخاطرة المناسب (تقييم عقدة عدم التأكد على أساس معيار حالة عدم التأكد المناسب)

سندرس حل شجرة القرار في حالة المخاطرة فقط:

- تقييم عقدة القرار (الاختيار) على أساس أفضل البدائل عند هذه العقدة:
  - الأكبر في حالة الأرباح
  - الأقل في حالة التكاليف

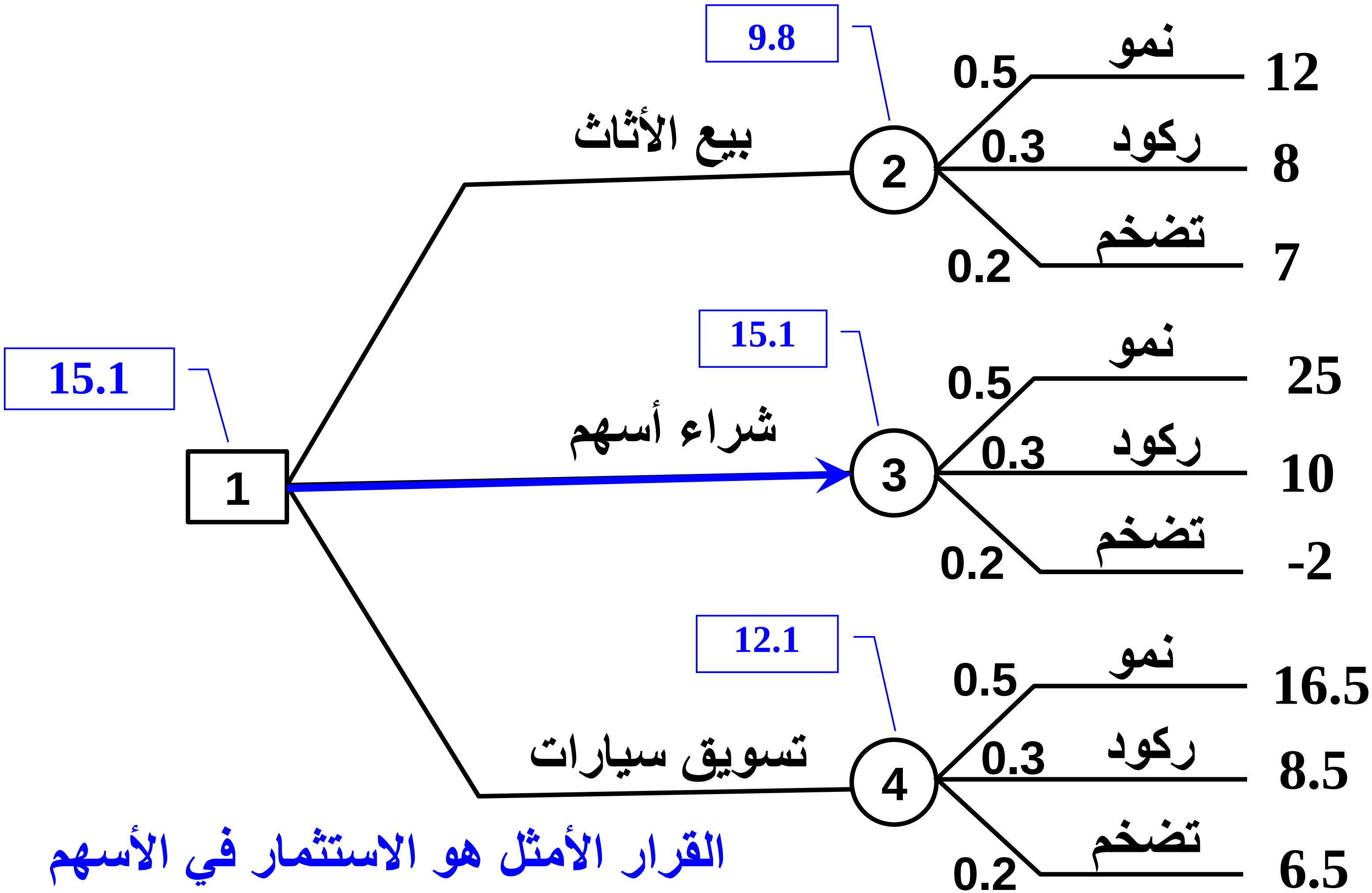
التقييم على أساس القيمة المتوقعة للعوائد

- تقييم عقدة المخاطرة i هو $E[i]$
- تقييم عقدة القرار i هو $D[i]$

$$E[2] = 0.5(12) + 0.3(8) + 0.2(7) = 9.8$$
$$E[3] = 0.5(25) + 0.3(10) + 0.2(-2) = 15.1$$
$$E[4] = 0.5(16.5) + 0.3(8.5) + 0.2(6.5) = 12.1$$

التقييم على أساس القيمة المتوقعة للعوائد

$$D\,[1] = \max\{9.8\ ,\ 15.1\ \ ,\ 12.1\ \} = 15.1$$



القرار الأمثل هو الاستثمار في الأسهم

مثال آخر

شركة مرطبات لديها رأس مال قدره 150,000 ريال وتريد تقرير هل تنتج وتسوق دولياً منتج جديد أم لا.

تمتلك الشركة الخيار في طرح المنتج الجديد في السوق مباشرة أو تقوم بعملية تسويق محلية لاختبار المنتج الجديد ومن خلال مخرجات هذه العملية تقرر إنزال المنتج الجديد في السوق الدوليه من عدمه.

إذا لم يتم تنفيذ عملية التسويق المحلي، فإن الشركة تعتقد أنه سوف ينجح المنتج الجديد دولياً بنسبة 55% وبصافي أرباح تقدر بـ 300,000 ريال، بينما تعتقد الشركة أنه سوف يفشل المنتج الجديد في السوق الدولي بنسبة 45% وستتكبد الشركة في هذه الحالة خسائر تقدر بـ 100,000 ريال.

مثال آخر

تستطيع الشركة تسويق المنتج محلياً لاختبار نجاح المنتج الجديد، وبناءً على تجربة التسويق المحلي يتم تقرير تسويق المنتج دولياً من عدمه. ستتكلف الشركة 30,000 ريال لإجراء تجربة التسويق المحلي ويتوقع بنسبة 60% أن تكون هذه التجربة إيجابية تفيد بنجاح المنتج إذا تم تسويقه على نطاق دولي، وقد تكون نتيجة هذه الدراسة سلبية بنسبة 40% تفيد بفشل المنتج إذا تم تسويقه على نطاق دولي. بعد حصول الشركة على معلومات ومخرجات تجربة التسويق المحلية، على الإدارة تحديد قرارها في تسويق المنتج الجديد على المستوى الدولي مع العلم بأنه في حالة النتائج الإيجابية للدراسة فإن نسبة نجاح المنتج الجديد في السوق الدولي هي 85% بينما إذا كانت نتائج الدراسة المحلية سلبية فإن نسبة نجاح المنتج الجديد في السوق الدولي هي 10%.

ما هو القرار الأمثل للشركة على أساس القيمة المتوقعة للأصول المالية.

شجرة القرار

مراحل القرار:

1. قرار التسويق المحلي؟

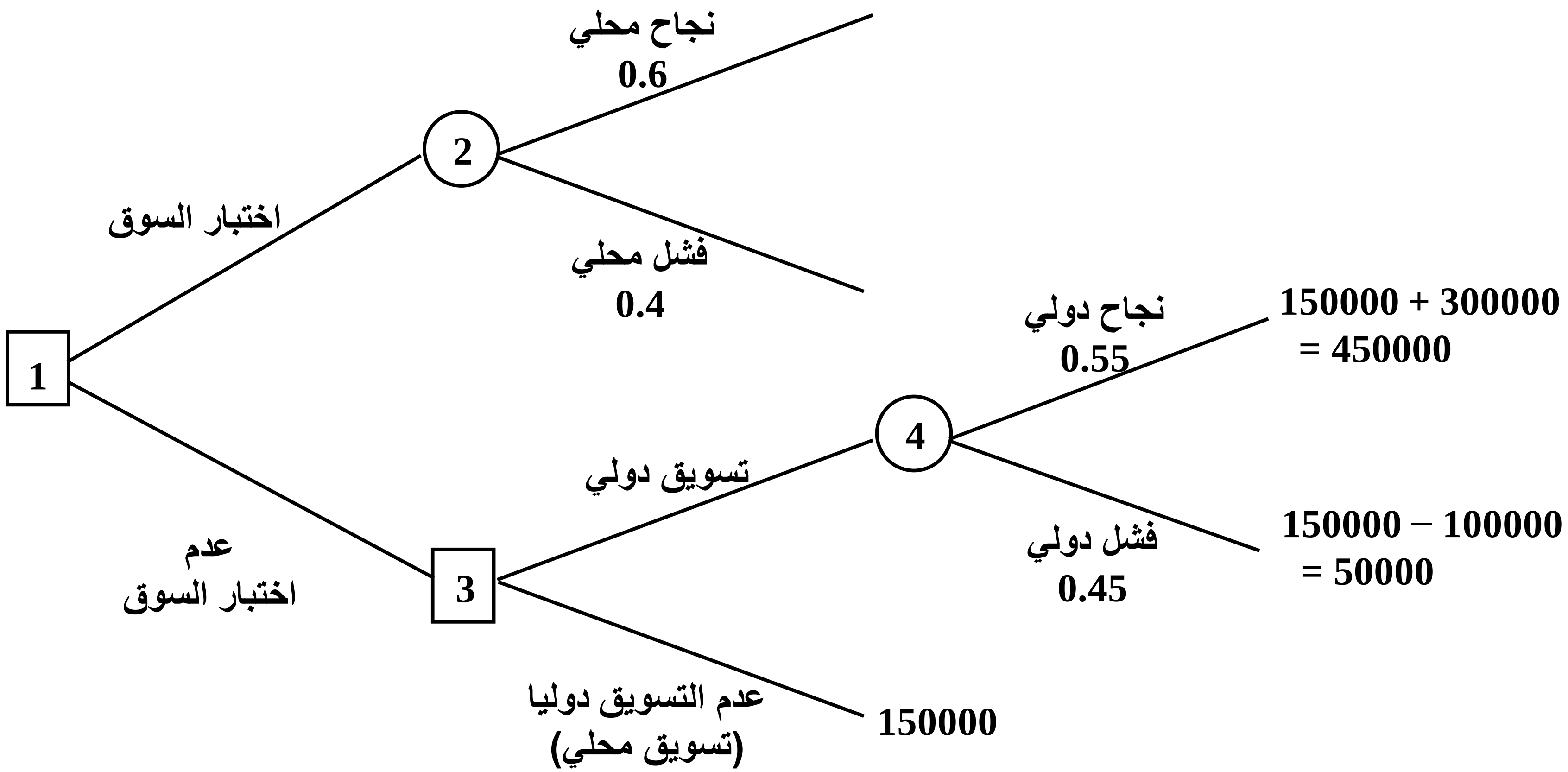
بناء على نتائج التسويق المحلي هناك قرار آخر:

- التسويق الدولي
- عدم التسويق الدولي

2. التسويق الدولي مباشرة؟

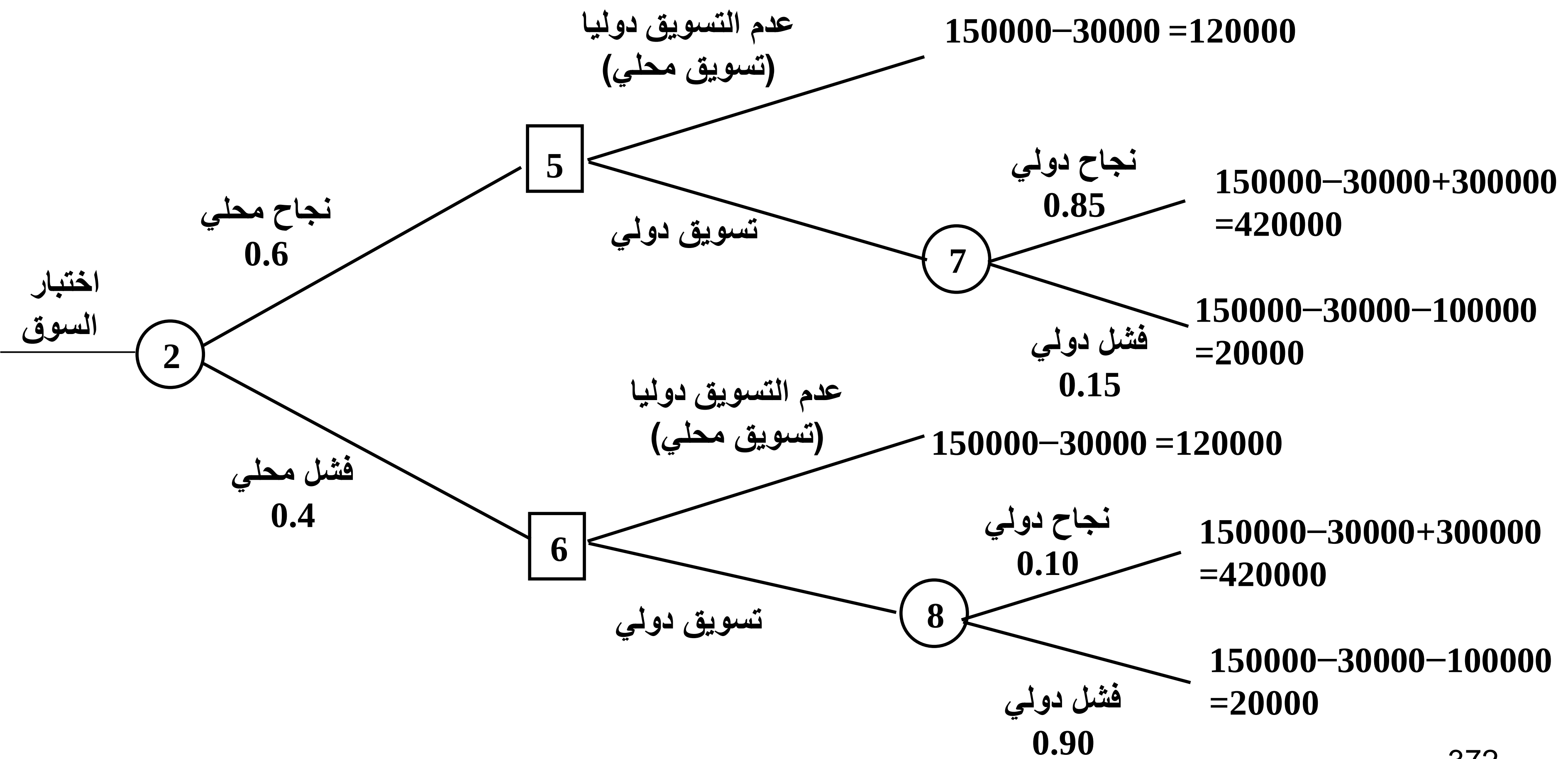
- التسويق الدولي
- عدم التسويق الدولي

شجرة القرار

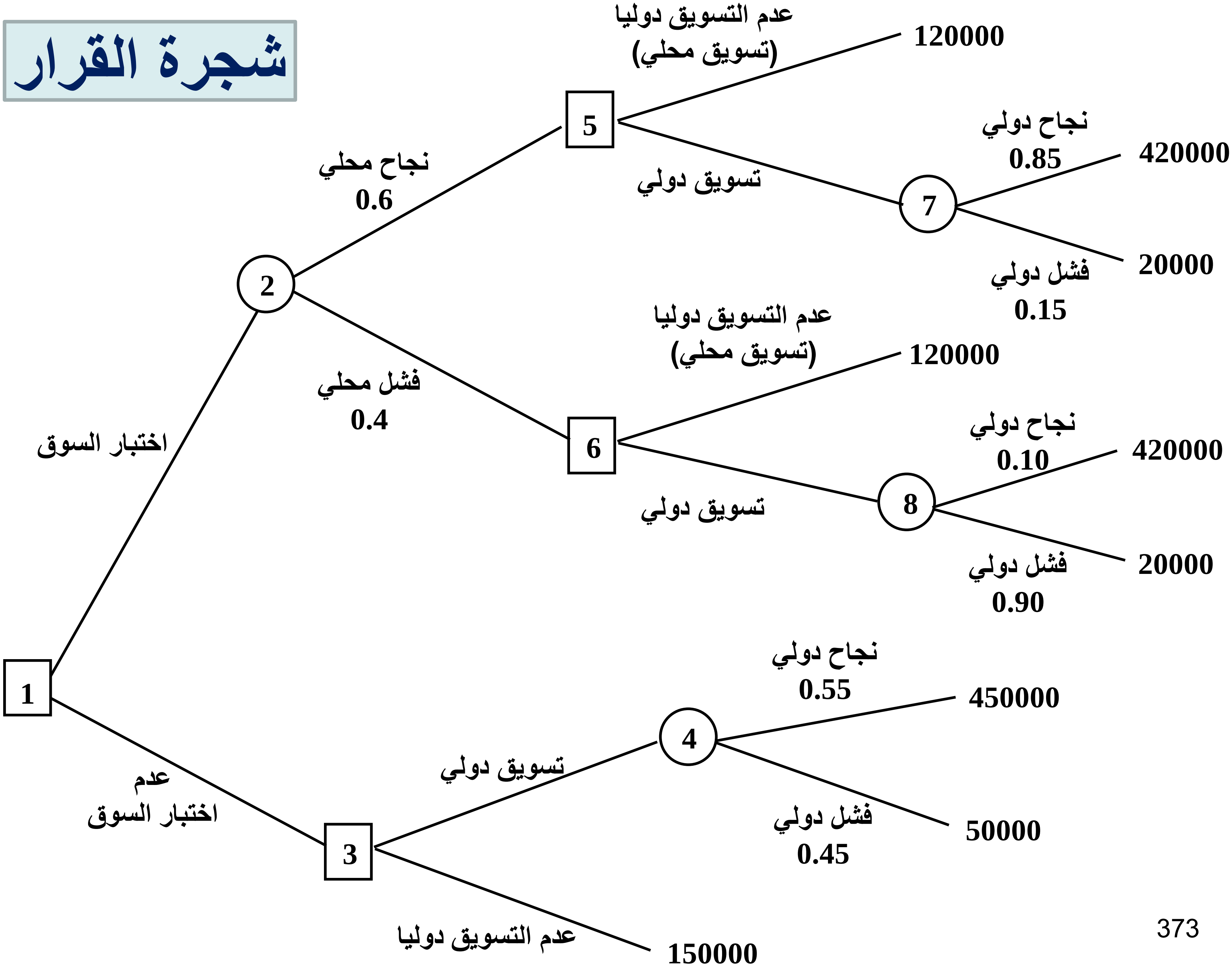


نجاح محلي
0.6
2
اختبار السوق
فشل محلي
0.4
نجاح دولي
0.55
150000 + 300000
= 450000
1
4
تسويق دولي
150000 − 100000
= 50000
عدم
اختبار السوق
فشل دولي
0.45
3
عدم التسويق دوليا
(تسويق محلي)
150000

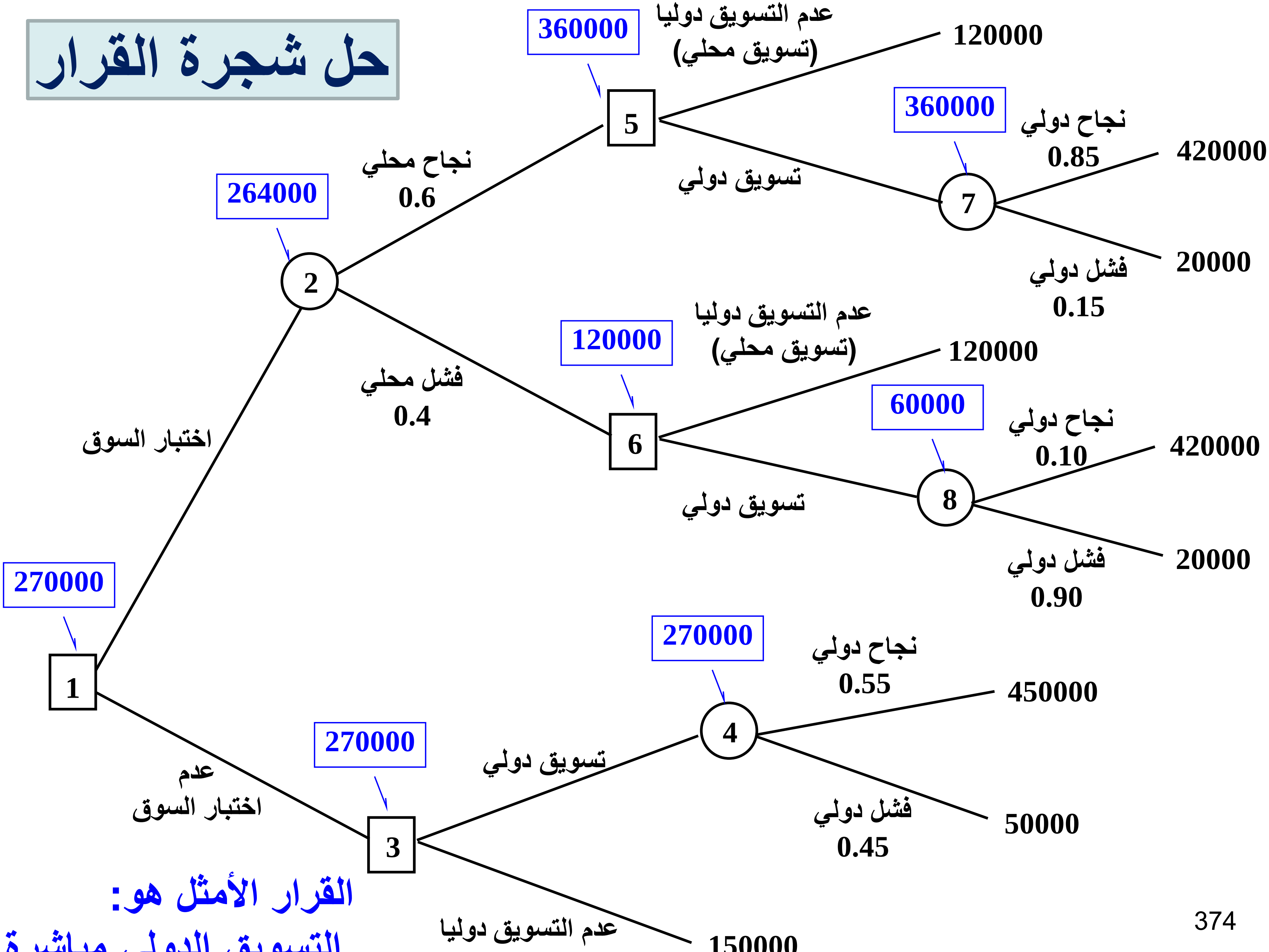
شجرة القرار


اختبار
السوق
2
نجاح محلي
0.6
فشل محلي
0.4
5
عدم التسويق دوليا
(تسويق محلي)
150000−30000 =120000
تسويق دولي
7
نجاح دولي
0.85
150000−30000+300000
=420000
فشل دولي
0.15
150000−30000−100000
=20000
6
عدم التسويق دوليا
(تسويق محلي)
150000−30000 =120000
تسويق دولي
8
نجاح دولي
0.10
150000−30000+300000
=420000
فشل دولي
0.90
150000−30000−100000
=20000

شجرة القرار


1
اختبار السوق
2
نجاح محلي
0.6
5
عدم التسويق دوليا
(تسويق محلي)
120000
تسويق دولي
7
نجاح دولي
0.85
420000
فشل دولي
0.15
20000
فشل محلي
0.4
6
عدم التسويق دوليا
(تسويق محلي)
120000
تسويق دولي
8
نجاح دولي
0.10
420000
فشل دولي
0.90
20000
عدم
اختبار السوق
3
تسويق دولي
4
نجاح دولي
0.55
450000
فشل دولي
0.45
50000
عدم التسويق دوليا
150000

حل شجرة القرار



القرار الأمثل هو:
التسويق الدولي مباشرة