第二节 标准正交基与正交变换

1.设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$三维欧氏空间$V$中的一组标准正交基，证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$也是$V$中的一组标准正交基，其中

$$\alpha_1=\frac{1}{3}\left(2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3\right)$$
$$\alpha_2=\frac{1}{3}\left(2\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3\right)$$
$$\alpha_3=\frac{1}{3}\left(\varepsilon_1-2\varepsilon_2-2\varepsilon_3\right).$$

【解题过程】

$$\begin{aligned}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)&=\frac{1}{9}\left(2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3,2\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3\right)\\&=\frac{1}{9}\left[\left(2\varepsilon_1,2\varepsilon_1\right)+\left(2\varepsilon_2,-\varepsilon_2\right)+\left(-\varepsilon_3,2\varepsilon_3\right)\right]\\&=\frac{1}{9}\left[4+(-2)+(-2)\right]=0,\end{aligned}$$

同理可证$\left(\alpha_1,\alpha_3\right)=\left(\alpha_2,\alpha_3\right)=0,$

又$\left(\alpha_1,\alpha_1\right)$

$$=\frac{1}{9}\left(2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3,2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(4+4+1\right)=0,$$

同理可证$\left(\alpha_2,\alpha_2\right)=\left(\alpha_3,\alpha_3\right)=1$

所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$也是$V$中的一组标准正交基.

2.设x是n维列向量，$\|x\|=1,$证明：

$H=E-2xx^T$为对称的正交矩阵.

【解题思路】若$AA^T=E,$则A为正交矩阵.

【解题过程】

$\because H^T=\left(E-2xx^T\right)^T=E-2xx^T=H$

$\therefore H$ 为对称矩阵

$HH^T=\left(E-2xx^T\right)\left(E-2xx^T\right)^T$
$=E-4xx^T+4xx^Txx^T$

$\because \|x\|=1$

$\therefore x^Tx=1$

$\therefore HH^T=E-4xx^T+4xx^T=E$

即证： $H=E-2xx^T$ 为对称的正交矩阵.

3.设方阵 A,B 是正交，证明 A^T,AB,A^* 都是正交矩阵.

【解题思路】 n 阶实数矩阵 A 称为正交矩阵，如果 $A^T=A^{-1}$.

【解题过程】 $\because n$ 阶方阵 A,B 是正交矩阵

$\therefore A^T=A^{-1},B^T=B^{-1}$

$(AB)^T=B^TA^T=B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}$,

$\left(A^T\right)^T=A=\left(A^{-1}\right)^{-1}=\left(A^T\right)^{-1}$

由此可知， AB,A^T 都是正交矩阵

$\left(A^*\right)^T=\left(|A|A^{-1}\right)^T=|A|\left(A^{-1}\right)^T$
$=|A|A=|A|^2\left(|A|A^{-1}\right)^{-1}=|A|^2\left(A^*\right)^{-1}$

$\because A^T=A^{-1}$

$\therefore AA^T=E$

$\therefore |A|^2=1$

$\left(A^*\right)^T=|A|^2\left(A^*\right)^{-1}=\left(A^*\right)^{-1}$

由此可知， A^* 是正交矩阵.

即证.

4.求正交矩阵 P，使得 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

对角化.

【解题过程】 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征多

项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

A 的特征值为 1,1,10.

对 $\lambda=1$ 求特征向量，解齐次线性方程组：

$$\begin{cases} -x_1-2x_2+2x_3=0, \\ -2x_1-4x_2+4x_3=0, \\ 2x_1+4x_2-4x_3=0, \end{cases}$$

求得基础解系为：$\eta_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

正交化：

$$\beta_1=\eta_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_2=\eta_2-\frac{(\eta_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

单位化：

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\-\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{3\sqrt{5}}\\\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{5}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}.$$

再对 $\lambda=10$ 求特征向量，解齐次线性方程组：

$$\begin{cases}8x_1-2x_2+2x_3=0,\\-2x_1+5x_2+4x_3=0,\\2x_1+4x_2+5x_3=0,\end{cases}$$ 求得基础解系为：

$$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}.$$

单位化：

$$\gamma_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

以 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 为列作一个矩阵

$$T=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\-\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

则 T 为正交矩阵，且 $T'AT=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&10\end{pmatrix}.$

5.三阶实对称方阵 A 的特征值为 6,3,3，若对应于 6 的特征向量为 $p_1=(1,1,1)^T$，求方阵 A.

【解题过程】

设与 $\lambda = 3$ 对应的特征向量为 $\xi = \left(x_1, x_2, x_3\right)^T$，有 $\left(\xi_1, \xi\right) = 0$，即

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

由此解得：

$\xi_2 = \left(-1, 1, 0\right)^T$, $\xi_3 = \left(-1, 0, 1\right)^T$.

令 $P = \left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$A = P\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$