线性方程组的一般理论

陈树伟

swchen@swjtu.edu.cn

线性方程组的一般理论

- 线性方程组的基本概念、主要研究内容
- 齐次线性方程组
- 非齐次线性方程组

线性方程组的基本概念

形如 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ 的方程组称为m个方程的$\boldsymbol{n}$**元线性方程组。**

$x_j\left(j=1,2,\cdots,n\right)$**代表未知量**；　$b_i\left(i=1,2,\cdots,m\right)$ **方程组的常数项**；

$a_{ij}\left(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\right)$ 称为**方程组的系数**；

$b_i=0\left(i=1,2,\cdots,m\right)$，那么此方程组为**齐次线性方程组**。

线性方程组的基本概念

若 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 使得方程组的m个等式均成立，则称它们为方程的**一个解**，记为 $(c_1, c_2, \cdots c_n)^T$

方程组的所有解构成的集合称为它的**解集合**。求解方程组是求方程组的**解集合**。

如果两个方程组有相同的解集合，则称它们是**同解方程组**。

线性方程组的矩阵和向量组表达方式

(一) 线性方程组的矩阵表示方式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

对于线性方程组（1），记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

则 $Ax = \beta \quad (2)$

线性方程组的矩阵和向量组表达方式

(二) 线性方程组的向量组表示方式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

记 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$ $\alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 方程组（1）可用向量组表示为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + \cdots x_n\alpha_n = \beta \qquad (3)$$

线性方程组的矩阵和向量组表达方式

例1 对于非齐次线性方程组：$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 5x_3 - 3x_4 = 4 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$

系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ 未知量向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 常数向量 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \beta$ 其中 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

线性方程组的主要研究内容

求解方程组的**主要内容**包括：

（1）给定的线性方程组是否有解？

（2）如果方程组有解，它有多少解？

（3）如果方程组有许多解，这些解之间有什么联系？

（4）如何求出方程组的全部解？

特别地，齐次线性方程组讨论的**主要问题**：

（1）齐次线性方程组是否有非零解?

（2）若方程组有非零解，这些解之间有什么联系？

（3）如何求出方程组的全部解？

线性方程组解的存在性

(一) 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件

对于n元齐次线性方程组 $Ax=0$ 即, $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$**有非零解**

$\Leftrightarrow$ 存在不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$

$\Leftrightarrow$ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关

$\Leftrightarrow$ 向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$的秩 $R\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}<n$

$\Leftrightarrow$ 系数矩阵A的秩$R(A)<n$，即 **系数矩阵的秩小于未知数个数。**

线性方程组解的存在性

定理. n元齐次线性方程组 $Ax=0$**有非零解** $\Leftrightarrow R(A)<n.$

定理. n元齐次线性方程组 $Ax=0$ **只有零解** $\Leftrightarrow R(A)=n.$

注: 若齐次线性方程组中方程个数小于未知量个数，则它有非零解。即:

当 $m<n$ 时，方程 $A_{m\times n}x=0$ 必有非零解。

特别地，当**方程个数等于未知量个数**时，由**克莱姆法则:**

$|A|=0 \quad \Leftrightarrow \quad R(A)<n \quad \Leftrightarrow \quad Ax=0$ 有非零解。

$|A|\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad R(A)=n \quad \Leftrightarrow \quad Ax=0$ 只有零解。

线性方程组解的存在性

(二) 非齐次线性方程组有解的充分必要条件

为了得到非齐次线性方程组是否有解的判别方法，我们通过方程组的系数矩阵**A**和常数项向量***β***构造如下矩阵：

$$\bar{A}=(A \mid \beta)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

称矩阵 $\bar{A}$ 非齐次线性方程组的**增广矩阵。**

定理. 非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 有解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\bar{A})$. 当$R(A)=R(\bar{A})$ 时，

(1) $Ax=\beta$ 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\bar{A})=n$.

(2) $Ax=\beta$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\bar{A})<n$.

线性方程组解的存在性

例2. 方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + \lambda x_4 = 0 \end{cases}$ 是否有非零解？

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 3 & \lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

当 $\lambda = 0$ 时，$R(A) = 3 < 4$，方程组有非零解；

当 $\lambda \neq 0$ 时，$R(A) = 4$，方程组只有零解。

线性方程组解的存在性

例3 讨论非齐次方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=3 \\ 2x_1+x_2-2x_3+3x_4=\lambda \end{cases}$的可解性。

解：对增广矩阵行变换$\overline{A}=(A\vdots\beta)=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & \lambda \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{array}\right)$

故 $R(A)=2.$

当 $\lambda=1$ 时 $R(\overline{A})=2$, 即 $R(\overline{A})=R(A)$, 有无穷多解；

当 $\lambda\neq1$ 时 $R(\overline{A})=3$, 即 $R(\overline{A})\neq R(A)$, 无解。

线性方程组解的存在性

例4 a取何值时齐次线性方程组$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+ax_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases}$有非零解？

解： 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $|A|=(a-1)^2(a+2)$.

当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$ 时 $|A|\neq 0$, 仅有零解；

当 $a=1$ 或 $a=-2$ 时 $|A|=0$, 有非零解。

齐次线性方程组解的结构

(一) 齐次线性方程组$Ax=0$解的结构

记$S=\{\xi \mid A_{m\times n}\xi=0\}$它表示齐次线性方程组$Ax$=0解的全体。

则集合**S**具有如下性质：

（1）对 $\forall \xi_1,\xi_2\in S$，有 $\xi_1+\xi_2\in S$;

（2）对 $\forall \xi\in S$,$\forall k\in R$，有 $k\xi\in S$.

定理1： n个未知量的齐次线性方程组Ax=0的解向量集 S 构成一个向量空间，称为解空间。

齐次线性方程组解的结构

定义1：齐次线性方程组Ax=0的**解空间*S***的任意一个基（即*S*的极大无关组)称为齐次线性方程组Ax=0的一个**基础解系**。

注：设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 是齐次线性方程组Ax=0的一个基础解系，则

$$S=\{k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r \mid k_1,\cdots,k_r\in R\}.$$

称 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r$ 为齐次线性方程组Ax=0的**通解或一般解。**

(二) 齐次线性方程组$Ax=0$的主要定理

定理2 设齐次线性方程组$Ax=0$的系数矩阵A是$m\times n$阶矩阵，且$R(A)=r$，则方程组$Ax=0$的基础解系中有$n-r$个向量，即解空间S的维数$\mathbf{dim}S=n-r$。

例1 求 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3-3x_4=0 \\ x_1+2x_3+6x_4=0 \\ 4x_1+5x_2+3x_3-x_4=0 \end{cases}$ 的一个基础解系及通解。

解： 系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组同解于 $\begin{cases} x_1=-2x_3-6x_4 \\ x_2=x_3+5x_4 \end{cases}$ 故有基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

故方程组通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2=k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例2. 求 $\begin{cases} x_3 + \quad x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 \; - \; x_3 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ 的一个基础解系及通解。

解： 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2} r_4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

方程组同解于 $\begin{cases} x_1 = -4x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$，故有基础解系 $\xi = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

故方程组通解为 $k\xi$

齐次线性方程组解的结构

注: 系数矩阵化行最简形时只能用**行变换**，只有作**行变换**才能保证所得新方程组与原方程组是**同解**的。

例： 证明若 $A_{m\times n}B_{n\times k}=0$，则 $R(A)+R(B)\le n.$

例：$Ax=0$ 与 $Bx=0$ 的公共解即为方程 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X=0$ 的解。

非齐次线性方程组解的结构

（一）非齐次线性方程组$Ax=\beta$解的结构

定义. 非齐次线性方程组中$Ax=\beta$的常数项都换成0，得到齐次线性方程组

$$Ax=0$$

称它为非齐次线性方程组$Ax=\beta$的**导出方程组**，或称为与方程组$Ax=\beta$**对应的齐次方程组**。

定理1 非齐次线性方程$Ax=\beta$的解与它的导出方程组$Ax=0$的解之间有如下关系：

(1) 设η_1，η_2 是$Ax=\beta$的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是$Ax=0$ 的解；

(2) η 是$Ax=\beta$的解，ξ 是 $Ax=0$的解，则 $\xi+\eta$ 是$Ax=\beta$ 的解。

非齐次线性方程组解的结构

定理2. 设 η_0 是 $Ax=\beta$ 的一个**特解**，则 $Ax=\beta$ 的**通解** η 可表示为

$$\eta=\eta_0+\xi,$$

其中，ξ 是导出方程组 $Ax=0$ 的**通解**。

注： 解非齐次方程组 $Ax=\beta$，只需要找出非齐次方程组一个解设为 η_0，并找出

其导出组的 $Ax=0$ 的基础解系设为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ ，

则非齐次方程组的所有解为：

$$\{\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}|k_i\in R,\quad 1\le i\le n-r\}$$

称 $\eta=\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 为非齐次方程组的**通解.**

非齐次线性方程组解的结构

(二)利用矩阵的初等行变换求解非齐次线性方程组

求解非齐次线性方程组$Ax=\beta$ 的过程可分为以下**步骤**：

(1) **判断系数矩阵**的秩$R(A)$ **是否等于增广矩阵**的秩$R(\overline{A})$由此检验非齐次线性**方程组是否有解**；

(2) 如果$R(A)=R(\overline{A})$，求出导出方程组的**通解**；

(3) 求出$Ax=\beta$ 的**一个特解**；

(4) 写出$Ax=\beta$ 的**通解**。

利用矩阵的**初等行变换**，上述4步骤可以一并解决：

(1) 对增广矩阵施行**初等行变换**得到**行最简形矩阵**。设为：

$$\bar{A}=(A \,\vdots\, \beta)\sim\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 若 $d_{r+1}\neq 0$，则$R(A)\neq R(\bar{A})$，方程组**无解**。

若 $d_{r+1}=0$，则$R(A)=R(\bar{A})$，方程组**有解**。

(3)当 $d_{r+1}=0$ 时，由 $\bar{A}=(A \quad \beta)\sim\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1,n} & d_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{r,n} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

得 $Ax=\beta$ 的一个**同解方程组**：

$$\begin{cases} x_1 \quad + \quad b_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{1n}x_n=d_1 \\ x_2 \quad + \quad b_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{2n}x_n=d_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots \\ x_r + \quad b_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{rn}x_n=d_r \end{cases}$$

即，

$$\begin{cases} x_1=-b_{1,r+1}x_{r+1}-b_{1,r+2}x_{r+2}\cdots-b_{1n}x_n+d_1 \\ \vdots \\ x_r=-b_{r,r+1}x_{r+1}-b_{r,r+2}x_{r+2}\cdots-b_{rn}x_n+d_r \end{cases}$$

非齐次线性方程组解的结构

对于 $\begin{cases} x_1 = -b_{1,r+1}x_{r+1} - b_{1,r+2}x_{r+2} \cdots - b_{1n}x_n + d_1 \\ \vdots \\ x_r = -b_{r,r+1}x_{r+1} - b_{r,r+2}x_{r+2} \cdots - b_{rn}x_n + d_r \end{cases}$

(1) 当 $r = n$，方程组有**唯一的解**:

$$x = \left(d_1, \cdots, d_n\right)^T$$

(2) 当 $r < n$ ，非齐次方程组的一个**特解**: $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ，导出齐次方程组的**基础解系:**

$$\begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -b_{2,r+2} \\ \vdots \\ -b_{2,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

非齐次线性方程组解的结构

故非齐次线性方程组$Ax=\beta$的**通解**为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -b_{2,r+2} \\ \vdots \\ -b_{2,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots\cdots + k_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

非齐次线性方程组解的结构

例1. 求解非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$

解: $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5} r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_1 + \frac{15}{4} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} & -1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 故 $R(\overline{A}) = 2 = R(A)$ 方程组有解。

非齐次线性方程组解的结构

得同解方程组：$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{5}x_3 + x_4 + \frac{7}{5} \\ x_2 = \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5} \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$

故方程组的通解为 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (k_1, k_2 \in R)$

例2. 已知四元线性方程组$Ax=\beta$的三个解是：ξ_1,ξ_2,ξ_3,

且 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\xi_2+\xi_3=\begin{pmatrix}3\\5\\7\\9\end{pmatrix}$, $R(A)=3$。求方程组的通解。

解： 由 $4-R(A)=1$ 知导出方程组基础解系有一个解。易知

$\xi_2+\xi_3-2\xi_1=(1\quad 1\quad 1\quad 1)^T$ 是导出方程组的一个解。进而 $(1\quad 1\quad 1\quad 1)^T$

是导出方程组基础解系。

故方程组的通解 $k(1\quad 1\quad 1\quad 1)^T+(1\quad 2\quad 3\quad 4)^T$.