第四节 正定二次型

1.判断题（正确的在括号里打“√”，错误的打“×”）.

（1）若 A 为 n 阶实对称阵，且二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx$ 正定，则 A 的特征值全为正. （ √ ）

（2）若 A 为 n 阶实对矩阵，且二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx$ 正定，则 A 的一切顺序主子式全为正 . （ √ ）

（3）若 A 为 n 阶实对矩阵，且二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx$ 正定，则 A 的主对角线上的元素全为正. （ √ ）

（4）若 A 为 n 阶实对矩阵，且二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx$ 正定，则对一切 n 维列向量 x,x^TAx 全为正. （ × ）

【解题过程】若 A 为 n 阶实对矩阵，且二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx$ 正定，则对

【解题过程】若 A 为 n 阶实对矩阵，且二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx$ 正定，则对一切 n 维列向量 $x\neq 0,x^TAx$ 全为正.

2.判断下列二次型的正定性.

（1）$f=x_1{}^2+2x_2{}^2+6x_3{}^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$

（2）$f=5x_1{}^2+x_2{}^2+5x_3{}^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$

【解题思路】 f 是否正定与 f 的矩阵是否正定是一致的. A 正定的充分必要条件是 A 的各阶顺序主子式都大于 0；A 为负定矩阵的充分必要条件是 A 的奇数阶顺序主子式小于零，偶数阶顺序主子式大于零.

【解题过程】

（1）$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2$

$+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$

的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}$

的各阶顺序主子式都大于 0，因此 f 正定.

（2）$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2$

$+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$

的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}$,

$$A=\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}$$

的各阶顺序主子式都大于 0，因此 f 正定.

3.求 t 的取值范围，使二次型为

$$f=t\left(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2\right)+2x_1x_2$$

（1）正定的；（2）负定的.

【解题思路】A 正定的充分必要条件是 A 的各阶顺序主子式都大于 0；A 为负定矩阵的充分必要条件是 A 的奇数阶顺序主子式小于零，偶数阶顺序主子式大于零.

【解题过程】

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=t\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+2x_1x_2$$

的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$，其一、二、三阶顺序主子式为：$t,t^2-1,t\left(t^2-1\right)$

（1）$t>0,t^2-1>0,t\left(t^2-1\right)>0$ 的充分必要条件是 $t>1$，故 $t>1$ 时，f 正定.

（2）$t<0,t^2-1>0,t\left(t^2-1\right)<0$ 的充分必要条件是 $t<-1$，故 $t<-1$ 时，f 负定.

4.设 A 为 n 阶实对矩阵，A 的特征值的全体为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$，则当 t 的取值范围为 $t>-\min\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right\}$ 时，$A+tE$ 正定，原因是

$A+tE$的特征值全体为$\lambda_1+t,$

$\lambda_2+t,\cdots\lambda_n+t.$

当$\lambda_1+t>0,\lambda_2+t>0,\cdots\lambda_n+t>0$时，

即$t>-\min\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right\}$时，

$A+tE$正定.

5.证明：设 A 为 n 阶正定矩阵，

则 $|A+E|>1$.

【解题思路】若 A 正定矩阵，则 A 的特征值都大于 0；

设有 n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，如果对任意一组不全为零的实数 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$，则称 f 为正定二次型.

【解题过程】设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，

则 $A+E$ 的特征值为

$\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$

$\because A$ 正定矩阵

$\therefore \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都大于零

$\therefore \lambda_1+1>1,\lambda_2+1>1,\cdots,\lambda_n+1>1$

$|A+E|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$

即证：$|A+E|>1$.

6.设 A 为 n 阶实对称矩阵，如对任意的 n 维向量 x，有 $x^T Ax=0$，则 $A=0$.

【解题过程】设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

对 $x=\begin{array}{c@{}l} \left(\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \\ \\ \\ (\text{第}i\text{个}) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$，由 $x^T Ax=0$ 得

$a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$. 再对 $x=\begin{array}{c@{}l} \left(\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \\ \\ (\text{第}i\text{个}) \\ \\ \\ (\text{第}j\text{个}) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$，

由 $x^T Ax=0$ 得，$a_{ii}+a_{jj}+a_{ij}+a_{ji}=0$，

所以 $a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j)$.

即证：A 为零矩阵.

7.设 U 为可逆矩阵，$A=U^T U$，

证明 $f=x^T Ax$ 为正定二次型.

【解题过程】 $\because A=U^T U$

$\therefore f=x^T Ax=(Ux)^T(Ux)$

设 $Ux=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，则

$f=(Ux)^T(Ux)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$. 对于

$x \neq 0, Ux = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$, 则

$$f = (Ux)^T (Ux) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0,$$

于是 $f = x^T Ax$ 为正定二次型.

8.设 A 为 n 阶正定矩阵，证明存在可逆矩阵 U，使得 $A = U^T U$.

【解题思路】实对称矩阵 A 为正定矩阵的充分必要条件是 A 与 E 合同.

【解题过程】因实对称矩阵 A 为正定矩阵的充分必要条件是 A 与 E 合同，于是存在可逆矩阵 Q 使得 $Q^T AQ = E, A = (Q^{-1})^T EQ^{-1}$.

令 $U = Q^{-1}$，则 A 为正定矩阵的充分必要条件是存在可逆矩阵 U 使得 $A = U^T U$.

即证：A 为 n 阶正定矩阵，存在可逆矩阵 U，使得 $A = U^T U$.

9.若二次型

$$f = 2{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 3{x_3}^2 + 2tx_2x_3\ (t < 0)$$

通过正交变换化为 $f = 2{y_1}^2 + {y_2}^2 + 5{y_3}^2$

（1）求 t 得值；

（2）证明：当 ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1$ 时，f 的最大值为 5.

【解题思路】任一实二次型 $f(x) = x^T Ax$,

其中 $A = A^T \in R^{n\times n}$，存在正交变换 $x = Py$，其中 P 是正交矩阵，使得 $f(x)$ 化为标准形，即

$$f(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

其中，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

【解题过程】（1）

$$\because f(x_1, x_2, x_3)$$
$$= 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_2x_3 \ (t < 0)$$

$$\therefore f \text{ 的矩阵为 } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & t \\ 0 & t & 3 \end{pmatrix}$$

由题意可知，A 的特征值为 1,2,5.

$$\because |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & -t \\ 0 & -t & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 2)\left[(\lambda - 3)^2 - t^2\right]$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5)$$

$$\therefore t^2 = 4$$

$$\because t < 0$$
$$\therefore t = -2$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5)$$

有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$

当$\lambda_1 = 1$时，解齐次方程组

$$(E - A)x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

得基础解系$\xi_1 = (0, 1, 1)^T$.

将$\xi_1 = (0, 1, 1)^T$单位化得

$$\beta_1 = \frac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T.$$

当$\lambda_2 = 2$时，解齐次方程组

$$(2E - A)x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

得基础解系$\xi_2 = (1, 0, 0)^T$.

将$\xi_2 = (1, 0, 0)^T$单位化得

$$\beta_2 = \frac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2 = (1, 0, 0)^T.$$

当$\lambda_3 = 5$时，解齐次方程组

$$(5E - A)x = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

得基础解系$\xi_3 = (0, -1, 1)^T$.

将$\xi_3 = (0, -1, 1)^T$单位化得

$$\beta_3 = \frac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T.$$

令 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$,

则 P 是正交矩阵，且

$$P^T AP = P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

故作可逆正交变换 $x = Py$ 得

$$f\left(x\right) = x^T Ax = y^T P^T APy$$
$$= y^T \Lambda y = 2y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2.$$

（2）$x = Py\left(y = \left(y_1, y_2, y_3\right)^T\right)$,

有 $1 = \|x\|^2 = x^T x = y^T P^T Py$

$$= \|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

$$\therefore\ f\left(x\right) = x^T Ax = y^T P^T APy$$
$$= y^T diag\left(2, 1, 5\right) y$$
$$= 2y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2$$

$f\left(x\right) \le 5y_1^2 + 5y_2^2 + 5y_3^2 = 5$ 且

$\left(y_1, y_2, y_3\right)^T = \left(0, 0, 1\right)^T$ 时等号可取到.

由此可知，$f\left(x\right)$ 的最大值为 5.