第三节 线性变换

1.定义 R^3 的线性变换：

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

求 T 在标准基

$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵.

【解题过程】

$$T\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$T(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

由此可知 T 在标准基

$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.设 R^3 的线性变换在标准基

$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

求在另一组基

$$\eta_1 = \varepsilon_1, \eta_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \eta_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

下的矩阵.

【解题过程】线性变换在标准基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下

的矩阵是$A=\begin{pmatrix}1&3&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{pmatrix}$,

即$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$

$\because \eta_1=\varepsilon_1$

$\eta_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2$

$\eta_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$

$\therefore(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$T(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\because(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\therefore(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$

$$T(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

由此可知，T在基(η_1,η_2,η_3)下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

由

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

得，$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

T 在基 (η_1,η_2,η_3) 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&5&5\\-3&-4&-6\\2&3&8\end{pmatrix}.$$

3.设 A,B 均为 n 阶方阵，$|A|\neq 0$，证明 AB 与 BA 相似.

【解题思路】我们称 n 阶方阵 A 和 A' 相似，如果存在可逆矩阵 P 使得 $A'=P^{-1}AP$.

【解题过程】若 A 可逆,则存在逆矩阵 A^{-1}，使得 $A^{-1}(AB)A=BA$，由矩阵相似的定义可知，AB 与 BA 相似.

4.若设 A 与 B 相似，证明 A^T 与 B^T 相似.

【解题过程】$\because A$ 与 B 相似

$\therefore$ 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$

将 $P^{-1}AP=B$ 左右两边取转置:

$\left(P^{-1}AP\right)^T=P^TA^T\left(P^T\right)^{-1}=B^T$，其中 P^T 为可逆矩阵，于是 A^T 与 B^T 相似.

5.设 R^3 的线性变换在标准基

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

求 T 的核 $KerT$.

【解题思路】 $\ker T = \left\{ \xi \middle| T\xi = 0 \right\}$.

【解题过程】 设 $\xi \in \ker T$，其在基

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 下 的 坐 标 为

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，则 $T\xi$ 在 $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

下的坐标为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，有：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得上面齐次线性方程组仅有零解，所以

$\ker T = 0$.