线性代数综合测试题三

一、选择题.（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} a+x & b & c \\ a & b+x & c \\ a & b & c+x \end{vmatrix}, a+b+c\neq 0,$

则 $f(x)=0$ 的根为（ B ）.

（A） $0, a+b+c$

（B） $0, -(a+b+c)$

（C） $0, abc$

（D） $abc, -(a+b+c)$

【解题过程】

$$f(x)=\begin{vmatrix} a+x & b & c \\ a & b+x & c \\ a & b & c+x \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+x)x^2=0,$$

则 $f(x)=0$ 的根为 $0, -(a+b+c)$.

2.设 A, B 均为 n 阶可逆方阵，则下列结论正确的是（ C ）.

（A） $AB=BA$

（B） $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

（C） $(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$

（D） $|A+B|=|A|+|B|$

关注微信公众号：古德校园

【解题过程】$(AB)^* AB = |AB| E$，有

$(AB)^* = |B| B^{-1} |A| A^{-1} = B^* A^*$.

3. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$,

a,b,c,d 为任意实数，则（　A　）.

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关

（D）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关

【解题过程】

令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$,

将 A 进行初等行变换得：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & b & c & d \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

由此可知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；当 $d = 0$ 时，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关；当 $d\neq 0$ 时，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关.

4.下列实向量的集合中，（ C ）构成 R^3 的子空间.

（A）$V=\left\{(x_1,x_2,x_3)^T \mid x_1+x_2+x_3=1\right\}$

（B）$V=\left\{(x_1,x_2,x_3)^T \mid x_1x_2x_3=0\right\}$

（C）$V=\left\{(x_1,x_2,x_3)^T \mid x_1+x_2+x_3=0\right\}$

（D）$V=\left\{(x_1,x_2,x_3)^T \mid |x_1|=|x_2|=|x_3|\right\}$

【解题过程】排除法：（A）、（B）、（D）构成 R^3.

5.下列各组方阵相似的是（ D ）

（A）$\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

（B）$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

（D）$\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$

【解题过程】排除法：（A）、（B）、（C）都不满足若 A,B 矩阵相似，则 A,B 的特征多项式相同，特征值相同，行列式相同，$tr(A)=tr(B)$.

关注微信公众号：古德校园

二、填空题.（每小题 4 分，共 20 分）

1.如果可逆矩阵 A 的每行元素之和均为 a,

则 A^{-1} 的每行元素之和为 $\underline{\frac{1}{a}}$.

【解题过程】$A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\\frac{1}{a}\\\vdots\\\frac{1}{a}\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, 则 A^{-1} 的每行元素之和为

$\frac{1}{a}$.

2.设 A 为三阶非零矩阵，若存在三阶非零方

阵 B, 使得 $AB=O$, 则行列式 $|B|=\underline{0}$.

【解题过程】$\because A,B$ 均为 n 阶非零矩阵，

$AB=O$

$\therefore Ax=0$ 有非零解

$\therefore |A|=0$

将 $AB=O$ 等式两边取转置得：$B^T A^T=O$.

同理可得：$|B^T|=|B|=0$.

$\therefore |A|=|B|=0$.

3.已知α_1,α_2是线性无关的二维向量，A为二阶矩阵，且$A\alpha_1=0, A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，则$A$的非零特征根为<u>1</u>；

【解题过程】 $\because A\alpha_1=0, A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$

$\therefore A\left(2\alpha_1+\alpha_2\right)=2\alpha_1+\alpha_2$

于是A的非零特征根为1.

4.已知三阶方阵A的特征值为1，-1，2，则行列式$\left|A^2+A+E\right|=\underline{21}$.

【解题过程】 A的特征值为1，-1，2，则A^2+A+E的特征值为3，1，7，则行列式$\left|A^2+A+E\right|=21$.

5. 设$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix}$，则$D$中所有元素的代数余子式之和为<u>24</u>.

【解题过程】

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix}$$

$$=A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=24;$$

$$A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=0;$$
$$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=0;$$
$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0.$$

关注微信公众号：古德校园

则 D 中所有元素的代数余子式之和为 24.

三、计算题（本题共 55 分）

1.（8 分）设有向量组

$$A:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\k\end{pmatrix},k$$

为参数，求向量组 A 的秩和一个极大线性无关组.

【解题过程】设 A 为以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为列向量组构成的矩阵，并对矩阵 A 作初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&2\\2&1&7&3\\4&2&14&k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&3&3&3\\0&1&1&1\\0&2&2&k-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&2&2&k-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&k-6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&1\\0&0&0&k-6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得：当 $k=6$ 时，向量组 A 的秩 2，极大线性无关组为 α_1,α_2；当 $k\neq 6$ 时，向量组 A 的秩 3，极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

2.（8 分）设 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&-1\\0&1&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&2\\0&-3\end{pmatrix},$

矩阵 X 满足 $AX=2X+B$,求 X .

【解题过程】 $\because AX=2X+B$

$\therefore (A-2E)X=B$

$$A-2E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$$ 可逆,

则 $X=(A-2E)^{-1}B.$

由 $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-1&-1&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-1&0&0&2&1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&-2&-1\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

可得: $$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

于是 $X=(A-2E)^{-1}B$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&2\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

3.(12 分)已知线性方程组

关注微信公众号：古德校园

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=\mu \\ 3x_1-x_2+\lambda x_3+15x_4=3 \end{cases}$$

有解，且系数矩阵的秩为 3，试求：

（1）参数λ,μ的值；

（2）该方程组的通解.

【解题过程】（1）$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3 \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=\mu \\ 3x_1-x_2+\lambda x_3+15x_4=3 \end{cases}$

的系数矩阵为$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & -5 & -10 & 12 \\ 3 & -1 & \lambda & 15 \end{pmatrix}$，

增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & \mu \\ 3 & -1 & \lambda & 15 & 3 \end{pmatrix}$

将$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & \mu \\ 3 & -1 & \lambda & 15 & 3 \end{pmatrix}$进行初等行变换得：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & \mu \\ 3 & -1 & \lambda & 15 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & -12 & 9 & \mu-1 \\ 0 & -4 & \lambda-6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -6 & -12 & 9 & \mu-1\\ 0 & -4 & \lambda-6 & 6 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & \mu+5\\ 0 & 0 & \lambda+2 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

$\because$ 系数矩阵的秩为 3

$\therefore \lambda=-2$

$\because$ 线性方程组有解

$\therefore \mu=1$

（2）当 $\lambda=-2,\mu=1$时，

$$\bar{A}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -8\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由此可知，线性方程组的通解为

关注微信公众号：古德校园

$$x=\begin{pmatrix}-8\\3\\0\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix},k\in R.$$

4.（13 分）设三阶实对称 A 的特征值为 6,3,3，

若对应于 6 的特征向量 $p_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，对应于 3 的

一个特征向量 $p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，试求：

（1）对应于特征值 3 的一个特征向量 p_3，使

得 p_2,p_3 正交；

（2）方阵 A；

（3）若 $\beta=\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$，求 $A^{-1}\beta$.

【解题过程】（1）假设对应于特征值 3 的一

个特征向量 $p_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$\because p_2,p_3$ 正交， p_1,p_3 正交

$\because p_2,p_3$ 正交， p_1,p_3 正交

$\therefore (p_2,p_3)=x_1+x_2-2x_3=0,$

$(p_1,p_3)=x_1+x_2+x_3=0$

$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=0\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵为

$B=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$，将 B 进行初等行变换得：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

由此可知，$p_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

（2）令 $P=\left(p_1,p_2,p_3\right)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$,

有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}$,

则 $A=P\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}P^{-1}$

由 $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&1&-1&0&1&0\\1&-2&0&0&0&1\end{array}\right)$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&0&-2&-1&1&0\\0&-3&-1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&-3&-1&-1&0&1\end{array}\right)$$

关注微信公众号：古德校园

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

可得：$P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

$$A=P\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}.$$

（3）$\beta=\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

$$A^{-1}\beta=A^{-1}\left(2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=$$

5.（14 分）设二次型

$$f=6x_1^2+9x_2^2+6x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3,$$

试求：

（1）该二次型的矩阵 A；

（2）一个正交变换 $x=Qy$, 将其化为标准形；

（3）二次型 f 在该正交变换下的标准形.

【解题过程】（1）

$$f=6x_1^2+9x_2^2+6x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$$

$$=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&-2&4\\-2&9&2\\4&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

由此可知，该二次型的矩阵

关注微信公众号：古德校园

$$A=\begin{pmatrix}6&-2&4\\-2&9&2\\4&2&6\end{pmatrix}.$$

（2） $A=\begin{pmatrix}6&-2&4\\-2&9&2\\4&2&6\end{pmatrix}$ 的特征多项式为：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6&2&-4\\2&\lambda-9&-2\\-4&-2&\lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-10)^2$$

A 的特征值为 1，10，10.

当 $\lambda=1$ 时，$(E-A)x=0$, 将其系数矩阵进行初等行变换得：

$$E-A=\begin{pmatrix}-5&2&-4\\2&-8&-2\\-4&-2&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-8&-2\\-5&2&-4\\-4&-2&-5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-4&-1\\-5&2&-4\\-4&-2&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-4&-1\\0&-18&-9\\0&-18&-9\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-4&-1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得，属于 1 的特征向量为 $\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$, 单位化后为 $\xi_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$;

当 $\lambda=10$ 时，$(10E-A)x=0$, 将其系数矩

阵进行初等行变换得：

$$10E-A=\begin{pmatrix}4&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得，属于 10 的特征向量为 $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

单位化、正交化后为

$$\xi_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix};\xi_3=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix};$$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}\\\frac{2}{3}&0&\frac{5}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}$

为正交矩阵，则所求的正交变换为 $x=Py$.

（3）二次型 f 在该正交变换下的标准形

$$f=y_1^2+10y_2^2+10y_3^2.$$

四．证明题（本题 5 分）

已知 A 是 n 阶正定矩阵，n 维非零列向量

关注微信公众号：古德校园

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 满足

$\alpha_i^T A a_j = 0\left(i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,s, s \leq n\right)$,

证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

【解题过程】 假设实数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$,

则 $\alpha_1^T A\left(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s\right) = 0$,

于是

$k_1\alpha_1^T A\alpha_1 + k_2\alpha_1^T A\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_1^T A\alpha_s = 0$

$\because A$ 是 n 阶正定矩阵，α_1 为 n 维非零列向量

$\therefore k_1 = 0$

同理可知，$k_2 = k_3 = \cdots = k_s = 0$

即证向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.5