第二节 线性方程组解的结构定理

1.选择题.

（1）A 为 $m\times n$ 阶矩阵，齐次线性方程组 $Ax=0$ 有无数个解，则必有（ D ）.

（A）$m<n$　　（B）$R(A)<m$

（C）A 中有两列对应元素成比例

（D）A 的列向量组线性相关

【解题过程】 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$，

$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，齐次线性方程组 $Ax=0$ 有无数个解，即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 有非零解，于是 A 的列向量组线性相关.

（2）A 为 $m\times n$ 阶矩阵，非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解不唯一，则下列结论正确的是（ D ）.

（A）$m<n$

（B）$R(A)<m$

（C）A 为零矩阵

（D）$Ax=0$ 的解不唯一

【解题过程】 设 α,β 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，$\alpha\neq\beta$, 有 $A(\alpha-\beta)=0$，则 $\alpha-\beta$ 是 $Ax=0$ 的解.又 $Ax=0$ 有零解，于 $\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2$ 为其导出方程组的基础解系.则方程组的通解是

$$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}.$$

（4）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量，且 $R(A)=3$，

$\alpha_1=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_1+\alpha_2=(0,1,2,3)^T$，$c$ 表示任意常数，则线性方程组 $Ax=b$ 的通解为（ C ）.

（A）$(1,2,3,4)^T+c(1,1,1,1)^T$

（B）$(1,2,3,3)^T+c(0,1,2,3)^T$

（C）$(1,2,3,4)^T+c(2,3,4,5)^T$

（D）$(1,2,3,4)^T+c(3,4,5,6)^T$

【解题过程】 由 $\alpha_1=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_1+\alpha_2=(0,1,2,3)^T$ 可知，$\alpha_2=(-1,-1,-1,-1)^T$. $A(\alpha_1-\alpha_2)=0$，于是 $(2,3,4,5)^T$ 是 $Ax=b$ 的导出组的基础解析. 则线性方程组 $Ax=b$ 的通解为 $(1,2,3,4)^T+c(2,3,4,5)^T$.

（5）设 n 元 m 个方程的非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的秩为 r ，则（ A ）.

（A）$r=m$ 时，$Ax=b$ 必有解

（B）$r=n$ 时，$Ax=b$ 有唯一解

（C）$m=n$ 时，$Ax=b$ 有唯一解

（D）$r<n$ 时，$Ax=b$ 有无穷多解

【解题过程】 由题可知，A 为 m 行 n 列的矩阵，若 $R(A)=r=m$，则 $R(A)=R(A|b)=m$，于是 $Ax=b$ 必有解.

2.求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$$ 的通解.

【解题过程】 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$ 的

系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，将

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 进行初等行变化得：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

由此可得，$R(A)=3$ 且

$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1=\frac{4}{3}x_4 \\ x_2=-3x_4 \\ x_3=\frac{4}{3}x_4 \end{cases}$ 同

解，则该齐次线性方程组的基础解系为

$\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$，于是齐次线性方程组

$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0 \end{cases}$ 的通解为

$k\begin{pmatrix}4\\-9\\4\\3\end{pmatrix}$.

3. 已知下列两齐次线性方程组同解，求 a,b,c 的值.

（1）$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+5x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$；

（2）$\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$.

【解题过程】 $\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵为 $\begin{pmatrix}1&b&c\\2&b^2&c+1\end{pmatrix}$，

$R\begin{pmatrix}1&b&c\\2&b^2&c+1\end{pmatrix}\le 2<3$，

则 $\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$ 有非零解

$\because$ 齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+5x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$ 同解

$\therefore \begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+5x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$ 有非零解，

$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+5x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵为

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$,则$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=0$，得$a=2$.

当$a=2$时，$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$的系数矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，将$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$经过初等行变换得：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，由此可得，系数矩阵的秩为 2，齐次线性方程

组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$的 基 础 解 系 为

$\eta_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\because$ 齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases}$和

$\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0. \end{cases}$同解

$\therefore \eta_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$是$\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0. \end{cases}$

的解且$R\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \end{pmatrix}=2$

将$\eta_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$代入

$\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0. \end{cases}$

得：$\begin{cases}-1-b+c=0\\-2-b^2+(c+1)=0.\end{cases}$

解得：$\begin{cases}b=0\\c=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=1\\c=2\end{cases}$

$\because R\begin{pmatrix}1 & b & c\\2 & b^2 & c+1\end{pmatrix}=2$

$\therefore \begin{cases}b=1\\c=2\end{cases}$

综上所述，$\begin{cases}a=2\\b=1\\c=2\end{cases}$.

4. 已知下列两齐次线性方程组有非零公共解，求 a 得值及所有公共解.

（1）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$；

（2）$x_1+2x_2+x_3=a-1$.

【解题过程】

$\because$ 线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 与

方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解

$\therefore$ 线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}$ 有

解，则系数矩阵的秩=增广矩阵的秩≤ 3

设线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}$ 的

增广矩阵 $\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{bmatrix}$，将其

进行初等行变换化为

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&a-1\\0&0&a^2-1&3-3a\\0&0&a-1&1-a\end{bmatrix}$$

由此可知，$2\leq$ 系数矩阵的秩=增广矩阵的秩 ≤ 3.

当 $a-1=0$ 即 $a=1$ 时，

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&2&1&0\\1&4&1&0\\1&2&1&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

此时系数矩阵的秩=增广矩阵的秩=2

取 x_3 为自由未知量，与其通解的方程组为

$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=0\end{cases}$，通解为 $k_1\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，其中 k_1 为任意常数；

当 $a\neq 1$ 时，

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&a-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&a-2\end{bmatrix}$$

$\because$ 系数矩阵的秩=增广矩阵的秩 ≤ 3

$\therefore a-2=0$ 即 $a=2$

当 $a=2$ 时，

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&2&2&0\\1&4&3&0\\1&2&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

此时系数矩阵的秩=增广矩阵的秩=3，有唯

一解 $\begin{cases}x_1=0\\x_2=1\\x_3=-1\end{cases}$；

综上所述：当 $a=1$ 时，

方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$

与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，

公共解为 $k_1\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，其中 k_1 为任意常数;当

$a=2$ 时，方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$

与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，

公共解为 $\begin{cases}x_1=0\\x_2=1\\x_3=-1\end{cases}$.

5.设 A,B 都是 n 阶方阵，且 $AB=O$，证明：

（1）$R(A)+R(B)\le n$；（2）若 $A^2=A$，

则 $R(A)+R(A-E)=n$.

【解题思路】 设 A, B 都是 $s\times n$ 矩阵，则

$R(A+B)\le R(A)+R(B)$

【解题过程】（1）令 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，则

$AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_n)=$

于是 $A\beta_1=0,A\beta_2=0,\cdots,A\beta_n=0$，即齐

次线性方程组 $Ax=0$ 有 n 个解

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$.

设 $R(A)=r$，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可由 $Ax=0$ 的 $n-r$ 个线性无关的解向量线性表示，于是 $R(B)=R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\le n-r$，即证 $R(A)+R(B)\le n.$

（2）$\because A(A-E)=0$

$\therefore R(A)+R(A-E)\le n$

$\because -E=A+(A-E)$

$\therefore n=R(-E)\le R(A)+R(A-E)$

于是，$R(A)+R(A-E)=n.$

6.设 A 是 n 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，证明：$R(A^*)=\begin{cases} n, 当R(A)=n \\ 1, 当R(A)=n-1 \\ 0, 当R(A)\le n-2 \end{cases}$.

【解题思路】 此类题考查的知识点为：（1）$R(A)=r$ 的充要条件为 A 有一个 r 阶子式不为零，而所有的 $r+1$ 阶子式（如果有）全为零；（2）A 为 n 阶矩阵且 $|A|\ne 0$，则 $R(A)=n$；（3）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$R(A)=r<n$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 存在基础解系，且基础解系含 $n-r$ 个解向量.

【解题过程】

当 $R(A)=n$ 时，$|A|\ne 0$

$\because AA^*=|A|E, |A|\ne 0$

$\therefore |A^*|\ne 0$ 从而 $R(A^*)=n$；

当 $R(A)=n-1$ 时，$|A|=0$ 且 A 有一

个 $n-1$ 阶子式不为零，从而 $A^* \neq 0$.

$\because AA^* = |A|E, |A| = 0$

$\therefore AA^* = 0$

从 而 $A^* = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 的 列 向 量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是 $Ax = 0$ 的解.

$\because R(A) = n-1$

$\therefore Ax = 0$ 基础解系含 1 个解向量，即 $R(a_1, a_2, \cdots, a_n) \le 1$

又$\because A^* \neq 0$

$\therefore R(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$，即 $R(A^*) = 1$；

当 $R(A) < n-1$ 时，A 的 $n-1$ 阶子式全为零

$$\because A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

$A_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 是 A 的 $n-1$ 阶子式

$\therefore A^* = 0$

$\therefore A^*$ 的秩为 0.

即证：$R(A^*) = \begin{cases} n, & \text{当} R(A) = n \text{时} \\ 1, & \text{当} R(A) = n-1 \text{时} \\ 0, & \text{当} R(A) < n-1 \text{时} \end{cases}$.

7.已知三阶方阵 $B \neq 0$，且 B 的每个列向量都是方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 的解，

（1）求 λ 的值；（2）证明：$|B| = 0$.

【**解题过程**】(1) $\because B$ 的每个列向量都是方程组的解且 $B\neq 0$

$\therefore$ 方程组有非零解，即 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$

系数矩阵的行列式为 0

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0,\text{得}\lambda=1.$$

(2) 反证法：假设 $|B|\neq 0$. 由 (1) 可知

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\because B$ 的每个列向量都是方程组的解

$\therefore AB=O$

$\because |B|\neq 0$

$\therefore B$ 存在逆矩阵，使得 $A=O$, 与

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 矛盾

即证：$|B|=0$.

8.设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，证明 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也是基础解系.

【解题思路】基础解系：齐次线性方程组的一组能表示所有解的线性无关解.

【解题过程】

$A(\alpha_1+\alpha_2)=0,A(\alpha_2+\alpha_3),A(\alpha_3+\alpha_1)=0,$

则 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 齐次线性方程组的一组解.

易知： $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\left[(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_1)\right]-(\alpha_2+\alpha_3),$$

$$\alpha_2=\frac{1}{2}\left[(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_1)\right]-(\alpha_3+\alpha_1)$$

$$\alpha_3=\frac{1}{2}\left[(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_1)\right]-(\alpha_1+\alpha_2)$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性表示，于是 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价. 即证： $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也是基础解系.

9.设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，向量 β 使 $A\beta\neq 0$，证明： $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关.

【解题过程】反证法：假设 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性相关，则存在不全为零的实数 $l,l_1,l_2,\cdots,l_t$ 使得

$l\beta+l_1(\beta+\alpha_1)+l_2(\beta+\alpha_2)+\cdots+l_t(\beta+\alpha_t)=0$

即 $(l+l_1+l_2+\cdots+l_t)\beta+l_1\alpha_1$

$+l_2\alpha_2+\cdots+l_t\alpha_t=0$

其中 $l+l_1+l_2+\cdots+l_t\neq 0$，

$\beta=-\frac{l_1}{l+l_1+l_2+\cdots+l_t}\alpha_1-\frac{l_2}{l+l_1+l_2+\cdots+l_t}\alpha_2$

$-\cdots-\frac{l_t}{l+l_1+l_2+\cdots+l_t}\alpha_t$

$\because \alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 是其导出组 $Ax=0$ 的基础解系

$\therefore A\alpha_1=0, A\alpha_2=0,\cdots, A\alpha_t=0$

$$\therefore A\begin{pmatrix}-\frac{l_1}{l+l_1+l_2+\cdots+l_t}\alpha_1-\frac{l_2}{l+l_1+l_2+\cdots+l_t}\alpha_2\\ -\cdots-\frac{l_t}{l+l_1+l_2+\cdots+l_t}\alpha_t\end{pmatrix}$$

$=A\beta=0$，

即 $A\beta=0$ 与向量 β 使 $A\beta\neq 0$

即证：$\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关.

10.设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3,已知 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量，其中 $\eta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\5\\-1\end{pmatrix}$，$\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\9\\8\\8\end{pmatrix}$，求方程组的通解.

【解题思路】非齐次线性方程组的两个解的差是导出组的解；非齐次线性方程组的一个解与它的导出组的一个解之和还是这个非齐次线性方程组的解.

【解题过程】设非齐次线性方程组为

$Ax=\beta$

$\because \eta_1,\eta_2,\eta_3$ 是 $Ax=\beta$ 的三个解向量

$\therefore A\eta_1=\beta, A\eta_2=\beta, A\eta_3=\beta$

$\because A\eta_2=\beta, A\eta_3=\beta$

$\therefore A(\eta_2+\eta_3)=2\beta$

$\therefore A\left(\frac{1}{2}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3\right)=\beta$，

即 $\frac{1}{2}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{9}{2}\\ 4\\ 4\end{pmatrix}$ 是 $Ax=\beta$ 的一个解

$\because A\eta_1=\beta, A\left(\frac{1}{2}\eta_2+\frac{1}{2}\eta_3\right)=\beta$

$\therefore A\left(\eta_1-\frac{1}{2}\eta_2-\frac{1}{2}\eta_3\right)=0$，

即 $\eta_1-\frac{1}{2}\eta_2-\frac{1}{2}\eta_3=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 5\\ -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{9}{2}\\ 4\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{9}{2}\\ 1\\ -5\end{pmatrix}$

$\because$ 四元非齐次线性方程组系数矩阵的秩为 3

$\therefore$ 其导出组的基础解系所含解向量的个数为 1

$\therefore \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{9}{2}\\ 1\\ -5\end{pmatrix}$ 为非齐次线性方程组导出组的基础解系

方程组的通解为$\begin{pmatrix}2\\0\\5\\-1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{9}{2}\\1\\-5\end{pmatrix}$，其中$k_1$为任意实数.

11. 设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，向量 $b=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求方程组 $Ax=b$ 的通解.

【解题过程】

$$\because (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$$

$\therefore \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$是 $Ax=b$ 的解

$\because$ $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$

$\therefore R(A)=R(A|b)=3$

$\therefore$ $Ax=b$ 的导出组的基础解系所含解向量的个数为 1 个

$$\because (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=0$$

$\therefore \begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$是 $Ax=b$ 的导出组的基础解系

于是方程组 $Ax=b$ 的通解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$.

12.设非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩为 r，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关解，证明：它的任一解可表示为 $x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$（其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$）.

【解题过程】

$\because \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$ 是它的 $n-r+1$ 个线性无关解

$\therefore \eta_2-\eta_1,\cdots,\eta_{n-r+1}-\eta_1$ 是它的导出组的 $n-r$ 个线性无关解

$\because$ 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的秩为 r

$\therefore Ax=b$ 的导出组的基础解系所含解向量的个数为 $n-r$

$\therefore \eta_2-\eta_1,\cdots,\eta_{n-r+1}-\eta_1$ 是 $Ax=b$ 的导出组的基础解系

$Ax=b$ 的任一解 γ 可以表示为:

$$\begin{aligned}\gamma&=\eta_1+l_2(\eta_2-\eta_1)+\cdots+l_{n-r+1}(\eta_{n-r+1}-\eta_1)\\&=(1-l_2-\cdots-l_{n-r+1})\eta_1+l_2\eta_2+\cdots+l_{n-r+1}\eta_{n-r+1}\end{aligned}$$

令 $1-l_2-\cdots-l_{n-r+1}=k_1$,

$l_2=k_2,\cdots,l_{n-r-1}=k_{n-r+1}$

则 $\gamma=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$,

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$.

即证.

13. 设向量组 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 能由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示为：

$$\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\right)K$$

其中 K 为 $s\times r$ 矩阵，且向量 A 组线性无关，证明：向量组 B 线性无关的充分必要条件是矩阵 K 的秩 $R\left(K\right)=r$.

【解题过程】 $\Rightarrow$ 若向量组 B 线性无关，则

$R\left(B\right)=r$

$\because\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\right)K$

$\therefore r=R\left(B\right)\le R\left(K\right)$

$\because K$ 为 $s\times r$ 矩阵

$\therefore R\left(K\right)\le r$

$\because r\le R\left(K\right)$

$\therefore R\left(K\right)=r$

$\Leftarrow$ 若 K 的秩为 r，其中 K 为 $s\times r$ 矩阵，则

$r\le s$

构造齐次线性方程 $Bx=0$ 和 $AKx=0$，由已知条件，这两个齐次线性方程组同解

$\because A$ 线性无关

$\therefore Ay=0$ 只有零解

要使 $AKx=0$，只需要满足 $Kx=0$ 即可

$\because K$ 的秩为 r

$\therefore Kx=0$ 只有零解

$\because Bx=0$ 和 $AKx=0$ 同解

$\therefore Bx=0$ 只有零解

故 B 的秩为 r，即向量组 B 线性无关