矩阵理论初步

——矩阵的概念与运算

陈树伟

swchen@swjtu.edu.cn

矩阵理论初步

一 矩阵的基本概念

二 矩阵代数运算

- （一） 线性运算
  - 1 数乘
  - 2 加法
- （二） 乘法运算

三 矩阵分块

四（方阵的）行列式

五 可逆矩阵

六 矩阵初等变换

七 矩阵的秩

引例

线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

一般的
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

矩阵的相关概念

定义1：由 $m \times n$ 个数 a_{ij} 排成 m 行 n 列的数表，表示成

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个m 行n 列的矩阵，简称为**矩阵**。通常简记为：

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

或就用一个大写字母 A, B 等表示。

矩阵的相关概念

称数 a_{ij} 称为矩阵 A 的位于第 i 行第 j 列的**元素**。

称 $$r_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots a_{in})$$

为矩阵A的 **第** i **行** $(1\le i\le m)$

$$c_j=\begin{pmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$$

为矩阵 A的**第**j **列**$(1\le j\le n)$

矩阵的相关概念

定义2: 若两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$， $B=(b_{ij})_{s\times t}$ 满足

$$m=s,\quad n=t$$

则称A与B是**同型矩阵**。

如果两个同型矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{ij})_{m\times n}$，对应的元素都相等，即

$$a_{ij}=b_{ij},\quad i=1,2,\cdots,m\quad j=1,2,\cdots,n$$

则称矩阵A与B是**相等**的，记作$A=B$。

特殊矩阵

1、 **行矩阵与列矩阵**

只有一列的矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为**列矩阵**，也称为列向量。

只有一行的矩阵 $(b_1, b_2, \cdots b_m)$ 称为**行矩阵**，又称**行向量**。

2、**零矩阵**

若矩阵 $A=(a_{ij})$ 中的元素 a_{ij} 都是零，即 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

则称A是**零矩阵，**记为： $A=O$

能说任何两个零矩阵相等吗?

特殊矩阵

3、**方阵**

若矩阵A的行数和列数相等

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称 A 为（n 阶）**方阵，** 简记为：$A = A_n$

称 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在位置为矩阵的**主对角线**.

特殊矩阵

4、**对角矩阵与单位矩阵**

若方阵$A=(a_{ij})_n$ 满足：当 $i \neq j$ 时 $a_{ij}=0$, 即主对角线以外的元素全是零，

则称A为**对角矩阵**。记为 $\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

当对角矩阵的主对角线上元素都是1时，称为**单位矩阵**，记为E，或E_n

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

特殊矩阵

对角矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 若主对角元素相同（即

$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$）则称为**数量矩阵**。

若记 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = k$

即数量矩阵是形如 $\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$ 的方阵

5、**三角矩阵**

当方阵A的主对角线下方（上方）的元素都是零时，称A为**上三角矩阵（下三角矩阵）**。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上三角矩阵 **下三角矩阵**

特殊矩阵

6、**对称矩阵和反对称矩阵**

若方阵 $A=(a_{ij})_n$，满足 $a_{ij}=a_{ji}$，则称

A为**对称矩阵**；即关于主对角线对称位置的元素相等。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ \boxed{2} & 2 & -1 & 9 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 & 3 \\ \boxed{4} & \boxed{9} & \boxed{3} & -1 \end{pmatrix}$$

若方阵 $A=(a_{ij})_n$，满足 $a_{ij}=-a_{ji}$ 则称A为**反对称矩阵**；

即主对角线上元素为零，其余关于主对角线对称位置的元素互为相反数。

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ \boxed{-2} & 0 & -1 & 9 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 3 \\ \boxed{-4} & \boxed{-9} & \boxed{-3} & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的转置

定义 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，把 A 的行和列互换，得到一个矩阵，称为 A 的转置矩阵或简称为转置，记作 A^T 或 A'

即若 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

或者说，若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $A^T=(a_{ij}^*)_{n\times m}$ 其中，$a_{ij}^*=a_{ji}$

矩阵的转置

显然: (1) $(A^T)^T = A$

(2) A 是对称矩阵等价于：$A^T = A$

(3) 若矩阵$A=(a_{ij})$ 与矩阵 $B=(b_{ij})$ 同型且满足：

$$b_{ij} = -a_{ij}, \quad (1 \le i, j \le n)$$

则称B 为A 的负矩阵，记为 $-A$

A 是反对称矩阵等价于：$A^T = -A$

矩阵的线性运算——加法与数乘

（一）矩阵的加与减

定义3 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}$ 定义

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}\quad ,\quad A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

它们分别称为矩阵A, B的**和**与**差**。 对应元素加或减

注：不是任何两个矩阵都能做加减，加减运算必须在同型矩阵之间进行。

性质： (1) 结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$

(2) 交换律 $A+B=B+A$

(3) $A+O=A$

(4) 对矩阵 A, 必存在矩阵 B, 满足 $A+B=O$

矩阵的线性运算——加法与数乘

定义4 设 λ 是一个数，定义 $\lambda A=\left(\lambda a_{ij}\right)_{m\times n}$ 称为数 λ 与矩阵A的乘积，简称数乘。

矩阵的加法与数乘运算统称为**线性运算**。

性质:

(1) $1A=A$

(2) $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)$

(3) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

(4) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

注： $(-1)A$ 简记为 $-A$，称它为**A的负矩阵，** 且

$$A-B=A+(-B)$$

矩阵的线性运算——加法与数乘

（2） 数量矩阵

$$\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = kE$$

即**“数量矩阵等于数乘单位矩阵”**

矩阵的乘法

定义5： 设 A 是 $m\times s$ 阶矩阵, B 是 $s\times n$ 阶矩阵, 记 $A=(a_{ij})_{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}$

定义矩阵A与B的乘积： $AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$.

其中， c_{ij} 满足

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

矩阵的乘法

$$A=(a_{ij})_{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}$$

$C=AB$ 其中

$$C=(c_{ij})_{m\times n}$$

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

注: 由定义可知，不是任何两个矩阵都能相乘，必须满足被乘（前）矩阵的列数与乘（后）矩阵的行数相同.

积矩阵的行数与被乘矩阵的行数相同，列数与乘矩阵的列数相同.

矩阵的乘法

例1 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 计算 AB

解 $$AB=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}_{2\times 3}$$

注： (1) 任何矩阵乘单位矩阵仍为该矩阵自身，即

$$A_{m\times n}E_n=A_{m\times n} \qquad E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}$$

(2) 显然，零矩阵乘任何矩阵(满足可乘条件)为零矩阵。

矩阵的乘法

例2 设线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

记 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

则上述方程组可写成： $Ax=\beta$

矩阵的乘法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad Ax = \beta$$

若 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 使得方程组的m个等式均成立，则称它们为方程的**一个解**，记为 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

从而n元方程组的一个解就是一个n维列向量。

故一个n维列向量 $\gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ 是方程的解 $\Leftrightarrow$ $A\gamma = \beta$

矩阵的乘法

例3 有 x_1, x_2, x_3 到 y_1, y_2, y_3 的一个坐标变换 $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$

记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

则上述坐标变换可以写成矩阵形式： $Y = AX$

矩阵的乘法

例4 设 $A=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 计算 $AB, BA.$

解 $AB=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 0 & 2\\-1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ $BA=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0$

注： 矩阵乘积不满足交换律

矩阵的乘法

例5 $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，计算 $AB, BA.$

解 $AB=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

注 $AB \neq BA.$

矩阵的乘法

注：矩阵乘法不满足交换律　　$AB \neq BA$

Ⅰ）AB 有意义，BA 可能没意义；

例　$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

Ⅱ）AB, BA 有意义，它们可能不同型。

例　$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$　　$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$

Ⅲ）AB 与 BA 同型但可能不相等

例　$A=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}, AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}-2&-2\\2&2\end{pmatrix}$

矩阵的乘法

注意：矩阵乘法不满足消去律

若$A \neq O, AB = AC \Rightarrow B = C$；$BA = CA \Rightarrow B = C$ 一般不成立。

例
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

注： $AB = O \Rightarrow A = O$ 或 $B = O$ 一般不成立。

矩阵的乘法

3 矩阵运算规律

(1) 结合律 $(AB)C = A(BC)$;

$$k(AB) = (kA)B = A(kB), k \in R$$

(2) 分配律 $A(B+C) = AB + AC,\quad (B+C)A = BA + CA$

注： 由于矩阵乘法不满足交换律，故分配律是两种形式，即左右分配律。

(3) $(A+B)^T = A^T + B^T \qquad (\lambda A)^T = \lambda A^T \qquad (AB)^T = B^T A^T$

矩阵的乘法

例6：计算

$$(1)\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}_m \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}_n$$

解 原式

$$= k\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_m \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

（2）同理。

注： 一个矩阵乘以数量矩阵等同于对其进行数乘！

矩阵的乘法

例7：设n阶方阵 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 的每列元素之和都等于1；设α为 $1\times n$ 矩阵且每个元素都为1。

（1）计算 αA 和 αB

（2）证明：矩阵 AB 的每列元素之和都等于1。

解:

$$\alpha A=(1,1,\cdots,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i1},\ \sum_{i=1}^{n}a_{i2},\cdots,\ \sum_{i=1}^{n}a_{in}\right)$$

$$=(1,1,\cdots,1)=\alpha$$

同理可得 $\alpha B=\alpha$

矩阵的乘法

设$AB=(c_{ij})$，那么 $\alpha(AB)=\left(\sum_{i=1}^{n}c_{i1},\sum_{i=1}^{n}c_{i2},\cdots,\sum_{i=1}^{n}c_{in}\right)$

另一方面，利用矩阵的乘积的结合律有

$$\alpha(AB)=(\alpha A)B=\alpha B=\alpha\;=(1,1,\cdots 1)$$

即矩阵 AB 的每列元素之和都等于1。

思考：要求各行之和能否通过矩阵乘法实现。

矩阵的乘法

补充：（1）方阵A的m次幂，记为A^m 定义为：$A^m = \overbrace{AA\cdots A}^{m}$

规定： $A^0 = E$

方阵的幂显然满足： $A^k A^l = A^{k+l}$ $(A^k)^l = A^{kl}$

（2）方阵 A 的矩阵多项式

设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

定义 $f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$

$f(A)$ 称为方阵 A 的多项式。

(3) 对数成立的公式对矩阵不一定成立的公式

$$(A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2\neq A^2-B^2$$

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2$$

$$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2\neq A^2-2AB+B^2$$

但

$$(A+E)(A-E)=A^2+EA-AE-E^2=A^2-E^2$$

$$(A\pm E)^2=A^2\pm EA\pm AE+E^2=A^2\pm 2A+E^2$$

定义6：若矩阵A与B满足$AB=BA$，则称A与B是**可交换的。**

矩阵的乘法

例8： 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 求与A可换的所有矩阵。

解： 设A与B可交换，则B应是2阶方阵，不妨记 $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，由 $AB=BA$

即有：$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

计算得 $\begin{pmatrix}a & b\\ a+c & b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & b\\ c+d & d\end{pmatrix}$ 故有 $\begin{cases}a=a+b\\ a+c=c+d\\ b+d=d\end{cases}$

解得 $b=0, a=d$

故A可换的所有矩阵为 $B=\begin{pmatrix}a & 0\\ c & a\end{pmatrix}$ 其中，a, c 为任意常数

矩阵的分块

（一） 定义

设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，将 A 用若干条横线和纵线分成许多小矩阵，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**。

例 $A=\left(\begin{array}{ccc:cc}1 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)$ 分成了四个子块，记

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

我们有分块矩阵 $\begin{pmatrix}A_1 & O_{2\times 2}\\ A_2 & E_2\end{pmatrix}=A$

注 在分块过程中，选择恰当分块方式把一些特殊矩阵分出，如零矩阵、单位阵、对角阵等。

矩阵的分块

例

$$A=\left(\begin{array}{cc:ccc:cc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

若设

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

则有分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & O_{2\times 3} & O_{2\times 2} \\ O_{3\times 2} & A_2 & O_{3\times 2} \\ O_{2\times 2} & O_{2\times 3} & A_3 \end{pmatrix}=A$$

分块对角阵

注（1）选择恰当分块使矩阵结构简单清晰了。上述矩阵为**分块对角阵** 。

（2）矩阵分块方式是任意的, 同一个矩阵可以需要划分成不同的分块矩阵。

只有在主对角线上有非零的子块，而其余子块均为零

矩阵的分块矩阵称为**分块对角阵**。即形如下的分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

类似可以定义**分块上（下）三角矩阵**。

矩阵的加法和数乘运算中的矩阵分块

（一）与矩阵的加法中的矩阵分块

1 分块的要求:　两个矩阵分法必须一致

2 运算：对应子块相加

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} \pm B_{11} & A_{12} \pm B_{12} & \cdots & A_{1n} \pm B_{1n} \\ A_{21} \pm B_{21} & A_{22} \pm B_{22} & \cdots & A_{2n} \pm B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{m1} \pm B_{m1} & A_{m2} \pm B_{m2} & \cdots & A_{mn} \pm B_{mn} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ 是同型矩阵

矩阵的分块

（二）矩阵数乘中矩阵分块

1 矩阵的数乘对矩阵的分块的要求：无要求

2 运算：

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \lambda A_{m1} & \lambda A_{m2} & \cdots & \lambda A_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的分块与矩阵乘法

1 矩阵的乘法对矩阵的分块的要求：

AB用分块矩阵作乘法时，
要求A的列的分法与B的行的分法必须一致

(注意分法一致在这里的含义)，以保证子块间的能进行运算，

而对A的行及B的列的分法没有限制。

当对矩阵分块时尽量分出单位矩阵子块或零矩阵子块，
计算时可能可以简化计算

2 运算: 将子块视为数按矩阵乘法方式进行.

矩阵的分块

例2 用矩阵的分块来计算AB，其中

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad B=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

解 对AB进行分块，设

$$A_{11}=E_{2\times 2} \qquad A_{12}=O_{2\times 2} \qquad B_{11}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_{12}=O_{2\times 1}$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{22}=E_{2\times 2} \qquad B_{21}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_{22}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

则 $$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{2\times 2} & O_{2\times 2} \\ A_{21} & E_{2\times 2} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11} & O_{1\times 2} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

矩阵的分块

$$AB=\begin{pmatrix} E_{2\times2} & O_{2\times2} \\ A_{21} & E_{2\times2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & O_{1\times2} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{2\times2}B_{11}+O_{2\times2}B_{21} & E_{2\times2}O_{2\times1}+O_{2\times2}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+E_{2\times2}B_{21} & A_{21}O_{2\times1}+E_{2\times2}B_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} B_{11} & O_{2\times1} \\ A_{21}B_{11}+B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \qquad A_{21}B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

故

$$AB=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_{11}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_{21}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_{22}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

矩阵的分块

（二）应用----矩阵乘积在分块下的认识

1: $A_{m\times n}B_{n\times s} = A(B_1, B_2, \cdots, B_s) = (AB_1, AB_2, \cdots, AB_s)$

从这里我们可以得到如下重要结论**(关于列的)**：

(1) 乘积的第j 列等于第一个矩阵乘以第二矩阵的第j 列

即若设 $A_{m\times n}B_{n\times s} = C = (C_1, C_2, \cdots, C_s)$

则 $C_j = AB_j \ (1 \le j \le s)$

矩阵的分块

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 则

AB 的第一列为 $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

AB 的第二列为 $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

AB 的第三列为 $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

故 $AB=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

乘积的第j 列等于第一个矩阵乘以第二矩阵的第j 列

$$A_{m\times n}B_{n\times s}=A(B_1,B_2,\cdots,B_s)=(AB_1,AB_2,\cdots,AB_s)$$

矩阵的分块

(2) 记 $e_j=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}_{n\times 1}\leftarrow j$ 则 $E_n=\begin{pmatrix}e_1 & \cdots & e_j & \cdots & e_n\end{pmatrix}$

由 $\begin{pmatrix}A_1 & \cdots & A_j & \cdots & A_n\end{pmatrix}=A_{m\times n}E_n$

$$=A\begin{pmatrix}e_1 & \cdots & e_j & \cdots & e_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}Ae_1 & \cdots & Ae_j & \cdots & Ae_n\end{pmatrix}$$

故矩阵的第j 列等于矩阵乘列向量 e_j, 即

$$A_j=Ae_j\ (1\le j\le n)$$

故求矩阵的列可以通过**矩阵的乘法来实现.**

矩阵的分块

例 $$A=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3\sqrt{5} & 3 & \pi \\ 0.01 & 4.7 & 0 & 42 \\ -2.4 & e^2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=Ae_2=\begin{pmatrix} 3\sqrt{5} \\ 4.7 \\ e^2 \end{pmatrix}$$

矩阵的第j列等于矩阵乘列向量e_j，即

$$A_j=Ae_j\ (1\le j\le n)$$

例4 若 $A=\left(\begin{array}{c:c:cccc:c} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)_{n\times n}$ 证明 $A^n=0$

证明: 将矩阵分块为 $A=(O, e_1, e_2, \cdots, e_{n-1})$, 则

$$A^2=AA=A(O, e_1, e_2, \cdots, e_{n-1})$$

$$=(AO, Ae_1, Ae_2, \cdots, Ae_{n-1})=(O, O, e_1, \cdots, e_{n-2})$$

$$A^3=AA^2=A(O, O, e_1, \cdots, e_{n-2})=(O, O, O, e_1, \cdots, e_{n-3})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad A^{n-1}=(O, O, \cdots, O, e_1)$$

$$A^n=AA^{n-1}=A(O, O, \cdots, O, e_1)$$

$$=(AO, AO, \cdots, AO, Ae_1)=(O, \cdots, O, O)=O$$

矩阵的分块

(3) **性质** 若 $AB=O$，则B的每一列 B_j 都是线性方程组

$$Ax=O \text{ 的解。}$$

例 已知
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 8 & -2 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则方程组 $\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ x-2y+4z=0 \\ 3x+8y-2z=0 \\ 4x-y+9z=0 \end{cases}$ 有解 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$，$\begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$，$\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$.

矩阵的分块

性质 若 $AB=O$, 则B的每一列 B_j 都是线性方程组

$Ax=O$ 的解。

证明 B_j 是线性方程组 $Ax=O$ 的解当且仅当 $AB_j=O$. 又

$$AB=A\left(B_1, \quad \cdots \quad ,B_j \quad ,\cdots \quad ,B_s\right)$$

$$=\left(AB_1 \quad \cdots \quad AB_j \quad \cdots \quad AB_s\right)=O$$

$$=\left(O \quad \cdots \quad O \quad \cdots \quad O\right)$$

得

$AB_j=O \quad \left(1\le j\le s\right)$ 证毕.

矩阵的分块

1^*: $$A_{m\times n}B_{n\times s}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_m\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}A_1B\\A_2B\\\vdots\\A_mB\end{pmatrix}$$

有相应的重要结论(**关于行的**):

(1) 乘积的第i行等于**第一个矩阵的第i行乘以第二个矩阵**

即若设 $$A_{m\times n}B_{n\times s}=C=\begin{pmatrix}C_1\\\vdots\\C_i\\\vdots\\C_m\end{pmatrix}$$ 则 $$C_i=A_iB\quad(1\le i\le m)$$

矩阵的分块

(2) 由

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} = A = E_m A_{m\times s} = \begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_i^T \\ \vdots \\ e_m^T \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e_1^T A \\ \vdots \\ e_i^T A \\ \vdots \\ e_m^T A \end{pmatrix}$$

矩阵的第 i 行等于 e_i^T 乘以矩阵

即 $A_i = e_i^T A \qquad (1 \le i \le m)$

求矩阵的行也可以由矩阵的乘法实现.

矩阵的分块

2:

$$A_{m\times s}B_{s\times n}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_m\end{pmatrix}(B_1,B_2,\cdots,B_n)=\begin{pmatrix}A_1B_1 & A_1B_2 & \cdots & A_1B_n\\A_2B_1 & A_2B_2 & \cdots & A_2B_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\A_mB_1 & A_mB_2 & \cdots & A_mB_n\end{pmatrix}$$

积矩阵的第*i*行第*j*列的元素等于
第一个矩阵的第*i*行乘以第二个矩阵的第*j*列

即

$$c_{ij}=A_iB_j\qquad(1\le i\le m;1\le j\le n)$$

其中

$$AB=C=(c_{ij})$$

矩阵的分块

例

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

矩阵A各行为

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵B各列为

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

故 $c_{11} = A_1 B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$ 依次类推

矩阵的分块

3*: (1) $$A_{m\times s}B_{s\times n}=(A_1,A_2,\cdots,A_s)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

$$=(b_{11}A_1+b_{21}A_2+\cdots+b_{s1}A_s,\cdots,\ b_{1n}A_1+b_{2n}A_2+\cdots+b_{sn}A_s)$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{s}b_{k1}A_k,\ \cdots\ ,\sum_{k=1}^{s}b_{kj}A_k\ ,\cdots\ ,\sum_{k=1}^{s}b_{kn}A_k\right)$$

积矩阵的第*j*列是第一个矩阵各列与第二个矩阵第*j*列对应的数为系数的线性组合.

即若记 $$AB=C=(C_1,\ \cdots\ ,C_j\ ,\cdots\ ,C_n)$$

则 $$C_j=b_{1j}A_1+b_{2j}A_2+\cdots+b_{sj}A_s=\sum_{k=1}^{s}b_{kj}A_k$$

矩阵的分块

例 $$AB=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&1&1&0\\2&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&0\\1&-1&3\\-1&2&2\end{pmatrix}$$

矩阵A各列为 $$A_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}\quad A_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\quad A_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\quad A_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

则积矩阵 AB 第一列为

$$1A_1+0A_2+1A_3-1A_4=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

矩阵的分块

则积矩阵 AB 第二列为

$$-A_1+2A_2-A_3+2A_4=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\2\end{pmatrix}$$

第三列为

$$0A_1+0A_2+3A_3+2A_4=0\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&1&1&0\\2&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&0\\1&-1&3\\-1&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&0\\0&2&3\\1&2&2\end{pmatrix}$$

矩阵的分块

(2) $$A_{m\times s}B_{s\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{s} a_{1k}B_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{s} a_{ik}B_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{s} a_{mk}B_k \end{pmatrix}$$

故积矩阵的第*i*行是第二个矩阵各行与第一个矩阵第*i*行对应的数为系数的线性组合.

即若记 $$AB=C==\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_i \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix}$$ 则 $$C_i=\sum_{k=1}^{s} a_{ik}B_k$$

分块矩阵的转置

分块矩阵 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix}$ 的转置矩阵为

$$A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{p1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{p2}^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1q}^T & A_{2q}^T & \cdots & A_{pq}^T \end{pmatrix}$$