第三节 二次型及其标准型

1.用矩阵记号表示下列二次型：

（1） $f = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

（2） $f = 8x_1x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4 + 2x_3x_4$.

【解题过程】

（1） $f\left(x_1, x_2, x_3\right)$

$$= x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

（2） $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$

$$= 8x_1x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4 + 2x_3x_4$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

2.写出下列矩阵所对应的二次型.

（1） $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

（2） $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

【解题过程】

(1) $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = X^T AX$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

(2) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=X^TBX$

$$=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3.$$

3.用正交变换把二次型

$$f=2{x_1}^2+{x_2}^2-4x_1x_2-4x_2x_3$$

化为标准形，并求正交变换的矩阵.

【解题过程】

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$$

的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征多项式为

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=\left(\lambda-1\right)\left(\lambda+2\right)\left(\lambda-4\right).$$

A 的特征值为：1,-2,4.

属于 $\lambda=1$ 的全部特征向量为：

$$k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},k_1\neq 0;$$

属于 $\lambda=-2$ 的全部特征向量为：

$$k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},k_2\neq 0;$$

属于 $\lambda=4$ 的全部特征向量为：

$$k_3\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix},k_3\neq 0.$$

将 $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$ 分别单位化，并以此为列作矩阵

$$T=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

则 T 为正交矩阵且 $T'AT=\begin{pmatrix}1&&\\&-2&\\&&4\end{pmatrix}$.

再令 $X=TY$ 化为正交线性替换，且原二次型化简为

$f=X'AX=y_1^2-2y_2^2+4y_3^2$. 变换矩阵为：

$$T=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

4.用配方法化二次型

$$f=x_1{}^2+4x_2{}^2+2x_3{}^2-4x_1x_2+2x_1x_3$$

为标准型，并写出所用的变换矩阵.

【解题过程】

$$\begin{aligned}&\mathrm{f}\left(x_1,x_2,x_3\right)\\&=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3\\&=\left(x_1-2x_2+x_3\right)^2+x_3^2+4x_2x_3.\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

即

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = CX$$

则

$$\begin{aligned} f(X) &= y_1^2 + y_3^2 + 4y_2y_3. \\ &= y_1^2 - 4y_2^2 + (2y_2 + y_3)^2 \end{aligned}$$

再令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

即

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = DY,$$

有 $f(X) = z_1^{\ 2} - 4z_2^{\ 2} + z_3^2$.其中变换矩

阵 $P = C^{-1}D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5.用配方法化二次型 $f = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$

为标准型，并写出所用的变换矩阵.

【解题过程】

$$f = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$$

令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

即

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=CY$$

则

$$\begin{aligned}f(X)&=(y_1+y_2)(y_1-y_2)\\&+(y_1-y_2)y_3+(y_1+y_2)y_3\\&=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3\\&=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2\end{aligned}$$

再令

$$\begin{cases}z_1=y_1+y_3\\z_2=y_2\\z_3=y_3\end{cases}$$

即

$$Z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=DY,$$

有 $f(X)=z_1{}^2-z_2{}^2-z_3^2$. 其中变换矩

阵为 $P=CD^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.