第五节　逆矩阵

1.填空题.

（1）方阵 A,B,C 满足 $AB=BC=CA=E$，则 $A^2+B^2+C^2=$ $\underline{3E}$.

【解题过程】若方阵 A,B,C 满足

$AB=BC=CA=E,$

则 $A^{-1}=B,B^{-1}=C,C^{-1}=A.$

即 $A^{-1}=A,B^{-1}=B,C^{-1}=C.$

于是 $A^2+B^2+C^2=3E.$

（2）设 $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $|A|=\underline{1}$，$A^*=$ $\underline{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-4\\-1&1&2\end{pmatrix}}$，$A^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-4\\-1&1&2\end{pmatrix}}$.

【解题过程】

$$|A|=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}=2\times1\times1+1\times2\times1$$

$$+3\times0\times0-\underline{3\times1\times1-2\times2\times0-}0\times1\times1=1;$$

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-4\\-1&1&2\end{pmatrix};$$

$\because AA^*=|A|E$

$\therefore A^*=A^{-1}$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-4\\-1&1&2\end{pmatrix}.$$

（3）设 A,B 为三阶方阵，且 $|A|=-2$，

$|B|=2$，则 $|A^*|=\underline{\ 4\ }$, $\left|(4A)^{-1}\right|=\underline{-\dfrac{1}{128}}$；

$|2A^*+8A^{-1}|=\underline{\ -32\ }$, $\left|-2\left(A^*B\right)^2\right|=\underline{-512}$,

$A^*\left(A^*\right)^*=\underline{\ 4E\ }$.

【解题思路】 $AA^*=|A|E$，$|A^2|=|A|^2$

【解题过程】 $\because AA^*=|A|E$

$\therefore |A^*|=\left||A|A^{-1}\right|=|A|^3\dfrac{1}{|A|}=4,$

$\left|(4A)^{-1}\right|=\left|(4A)^{-1}\right|=\left|\dfrac{1}{4}A^{-1}\right|=\dfrac{1}{64|A|}=-\dfrac{1}{128};$

$|2A^*+8A^{-1}|=|2|A|A^{-1}+8A^{-1}|=|4A^{-1}|$

$=4^3\dfrac{1}{|A|}=-32$

$\because \left|\left(A^*B\right)^2\right|=\left|A^*B\right|^2$

$\therefore \left|-2\left(A^*B\right)^2\right|=(-2)^3\left|A^*B\right|^2$

$=(-2)^3\left|A^*\right|^2|B|^2=-512.$

$\because AA^*=|A|E$

$\therefore A^*\left(A^*\right)^*=|A^*|E=4E.$

2.给出对角矩阵 $diag\left(a_1,\cdots,a_n\right)$ 可逆的充分必要条件，在可逆的情况下给出其逆矩阵.

【解题过程】 对角矩阵 $diag(a_1,\cdots,a_n)$ 可逆的充分必要条件为 $a_1\cdots a_n\neq 0$, $diag(a_1,\cdots,a_n)$ 的逆矩阵为 $diag\left(\frac{1}{a_1},\cdots,\frac{1}{a_n}\right)$.

3.若 A 为奇数阶方阵，且满足 $AA^T=E$，$|A|=1$，证明 $E-A$ 不可逆.

【解题过程】

$\because A$ 奇数阶方阵，且满足 $AA^T=E$

$\therefore |AA^T|=|A|^2=1$

$\because A^T(E-A)=A^T-A^TA=A^T-E=(A-E)^T$

$\therefore |A^T(E-A)|=|E-A|=|(A-E)^T|=-|E-A|$

$\therefore |E-A|=0$

即证：$E-A$ 不可逆.

4.设 A 是 n 阶方阵,如有非零矩阵 B 使 $AB=O$,证明 $|A|=0$.

【解题过程】 反证法：若 $|A|\neq 0$，则 A 可逆.

将 $AB=O$ 左乘 A^{-1} 得：

$A^{-1}AB=B=A^{-1}O=O$，即 $B=O$. 与 B 为非零矩阵矛盾，于是 $|A|=0$.

5.设 n 阶非零方阵 A 的伴随矩阵为 A^*, 且 $A^*=A^T$, 求证 A 可逆.

【解题过程】

$\because\ A^* = A^T, AA^* = |A| E$

$\therefore\ AA^T = |A| E$

$\because A$ 为 n 阶非零方阵

$\therefore A$ 中至少有一个元素不为 0

不妨设该元素为 $a_{ij} \neq 0$，设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，

$AA^T = (c_{ij})_{n\times n}$，

其中 $c_{ii} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$

$= a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2$. 则 $c_{ii} > 0$.

$\because\ AA^T = |A| E$

$\therefore\ c_{ii} = |A| > 0$

即证： A 可逆.

6.设 A 是 n 阶方阵，证明：（1）若 $|A| = 0$, 则 $|A^*| = 0$;（2）$|A^*| = |A|^{n-1}$；（3）当 A 可逆时，有 $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$.

【解题过程】（1）反证法：若 $|A| = 0$,

$AA^* = |A|E = 0E$, 若 $|A^*| \neq 0$, 则 A^* 可逆,

$(AA^*)(A^*)^{-1} = 0E(A^*)^{-1} = O, A = O$, A

的所有代数余子式都为 $A_{ij} = 0$, 而 $|A^*| \neq 0$,

矛盾.故$\left|A^*\right|=0.$

（2）当$|A| = 0$时，$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}=0;$

当$|A| \neq 0$时，A可逆

$\because\ AA^* = |A|\,E$

$\therefore\ A^* = |A|\,A^{-1}$

$\because\ \left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$

$\therefore\ \left|A^*\right| = \left||A|\,A^{-1}\right| = |A|^{n-1}$

（3）$\because A$可逆

$\therefore A^*=|A|A^{-1}$，$\left(A^*\right)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A,$

$\left|A^*\right|=\left||A|A^{-1}\right|=|A|^{n-1}$即$A^*$可逆

$\because A^*\left(A^*\right)^*=\left|A^*\right|E$

$\therefore \left(A^*\right)^*=\left|A^*\right|\left(A^*\right)^{-1}=|A|^{n-2}A.$

7. 设$A^k=O$，证明

$\left(E-A\right)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$

【解题过程】

$\because\ A^k = 0, k$为正整数

$E^k - A^k$
$= \left(E - A\right)\left(E^{k-1} + E^{k-2}A + \cdots + A^{k-1}\right)$
$= E^k = E$
$\therefore \left(E - A\right)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$

8.设方阵A满足$A^2-A-2E=0,$证明：A

及 $A+2E$ 都是可逆矩阵，并求其逆矩阵.

【解题思路】对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得

$$AB=BA=E$$

则称矩阵 A 可逆，并把矩阵 B 称为 A 的逆矩阵.

【解题过程】

由 $A^2-A-2E=0$ 得 $A\left(A-E\right)=2E$，即

$$A\left[\frac{1}{2}\left(A-E\right)\right]=E$$

由逆矩阵的定义，$A,A-E$ 可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A-E\right);$$

再由 $A^2-A-2E=0$ 得

$$\begin{aligned}
&A^2-\left(A+2E\right)=0\\
&A^2-4E-\left(A+2E\right)=-4E\\
&\left(A+2E\right)\left(A-2E\right)-\left(A+2E\right)=-4E\\
&\left(A+2E\right)\left(A-3E\right)=-4E
\end{aligned}$$

即 $\left(A+2E\right)\left[-\frac{1}{4}\left(A-3E\right)\right]=E$

由逆矩阵的定义，$A+2E,A-3E$ 可逆，且

$$\left(A+2E\right)^{-1}=-\frac{1}{4}\left(A-3E\right).$$

9. 已知 $A^*BA=2BA-12E,A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

求 B.

【解题过程】 $\because |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$\therefore A$ 可逆

$\because AA^{*}BA = |A|BA = 2ABA - 12A$

$\therefore |A|BA = -2BA = 2ABA - 12A$

$\therefore BA + ABA = 6A$

$\therefore B = 6(E+A)^{-1}$

$\because E + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore (E+A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\therefore B = 6(E+A)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10.设 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆方阵，求 $\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}$.

【解题过程】

$\because \ A\left(A^{\ 1} + B^{-1}\right)B = B + A,$

且$A, B, A + B$都可逆

$\therefore \ A\left(A^{-1} + B^{-1}\right)B\left(B + A\right)^{-1} = E$

$\therefore \ \left(A^{-1} + B^{-1}\right) = A\left(B + A\right)^{-1} B.$

11.设 A, B 分别是 m, n 阶方阵，（1）给出分块

矩阵$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$可逆的充分必要条件，在可逆情况下求出其逆矩阵.

【解题过程】分块矩阵$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$可逆的充分必要条件为$A, B$均为可逆矩阵.

$\because$ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$分别是$\boldsymbol{m}$阶和$\boldsymbol{n}$阶可逆矩阵

$\therefore$ A, B的逆矩阵分别为A^{-1}, B^{-1}.

设$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{M} \end{pmatrix}$

由逆矩阵的定义知：

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & D \\ F & M \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} AF & AM \\ BC & BD \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

其中E_m, E_n分别为m阶和n阶单位矩阵

于是$AF = E_n, AM = O, BC = O, BD = E_s$

即 $F = A^{-1}, M = O, C = O, D = B^{-1}$.

所以$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

（2）设$A=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$a_1 \cdots a_n \neq 0$, 求A^{-1}.

【解题过程】 由（1）可知，令 $A=\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$，

则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

12.设为 n 阶可逆方阵，A_1 为 $n\times 1$ 阶矩阵，b 为常数，$P=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -A_1^T A^* & |A| \end{pmatrix}$，

$Q=\begin{pmatrix} A & A_1 \\ A_1^T & b \end{pmatrix}$.

（1）计算 PQ.

【解题过程】

$$PQ=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -A_1^T A^* & |A| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A_1 \\ A_1^T & b \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} A & A_1 \\ -A_1^T A^* A+|A| A_1^T & -A_1^T A^* A_1+|A| b \end{pmatrix}$$

$\because A^* A=|A| E$

$\therefore -A_1^T A^* A+|A| A_1^T=0$

$$PQ=\begin{pmatrix} A & A_1 \\ 0 & -A_1^T A^* A_1+|A| b \end{pmatrix}.$$

（2）证明:Q 可逆的充要条件是

$A_1^T A^{-1} A_1 \neq b.$

【解题过程】

$\Rightarrow$ 若 Q 可逆

$\because A$ 为可逆矩阵

$\therefore P$ 可逆

$\because P,Q$ 可逆

$$\therefore |PQ| = \begin{vmatrix} A & A_1 \\ 0 & -A_1^T A^* A_1 + |A|b \end{vmatrix}$$
$$= |A|\left|-A_1^T A^* A_1 + |A|b\right|$$
$$= |A|^2 \left(-A_1^T A^{-1} A_1 + b\right) \neq 0$$

即 $A_1^T A^{-1} A_1 \neq b$

$\Leftarrow \because A_1^T A^{-1} A_1 \neq b$

$$\therefore |PQ| = \begin{vmatrix} A & A_1 \\ 0 & -A_1^T A^* A_1 + |A|b \end{vmatrix}$$
$$= |A|\left|-A_1^T A^* A_1 + |A|b\right|$$
$$= |A|^2 \left(-A_1^T A^{-1} A_1 + b\right) \neq 0$$

$\therefore |Q| \neq 0$，即 Q 可逆.

13. 已知 $P = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 且 $P^{-1}AP = \Lambda$, 计算 A^{10}.

【解题过程】

$\because P^{-1}AP = \Lambda$

$\therefore A = P\Lambda P^{-1}$

对 (P,E) 施行初等行变换变为行最简形

$$\begin{pmatrix}-1&-4&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}-1&-4&1&0\\0&-3&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+4r_2]{-\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}-1&0&-\dfrac{1}{3}&-\dfrac{4}{3}\\0&1&-\dfrac{1}{3}&-\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_1}\begin{pmatrix}1&0&\dfrac{1}{3}&\dfrac{4}{3}\\0&1&-\dfrac{1}{3}&-\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$$

故 $P^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}&\dfrac{4}{3}\\-\dfrac{1}{3}&-\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$.

$$A^{10}=\left(P\Lambda P^{-1}\right)^{10}=P\Lambda^{10}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}^{10}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}&\dfrac{4}{3}\\-\dfrac{1}{3}&-\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-4\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{10}&0\\0&2^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}&\dfrac{4}{3}\\-\dfrac{1}{3}&-\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^{10}&0\\0&2^{10}\end{pmatrix}.$$