欧几里德空间与二次型自测题

一、单项选择题.

1.设α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n是R^n的一组标准正交基，A是n阶矩阵，R^n的向量组β_1，$\beta_2,\cdots$，β_n满足$(\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_n)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_n)A$，则以下选项不正确的是（ A ）.

（A）A为可逆矩阵时，向量组β_1，$\beta_2,\cdots$，β_n是标准正交基

（B）A为正交矩阵时，向量组β_1，$\beta_2,\cdots$，β_n是标准正交基

（C）向量组β_1，$\beta_2,\cdots$，β_n是标准正交基时，A是可逆矩阵

（D）向量组β_1，$\beta_2,\cdots$，β_n是标准正交基时，A是正交矩阵

【解题过程】由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵，反过来，若第一组基是标准正交基，同时过渡矩阵是正交矩阵，则第二组基一定是标准正交基.由此可知，A为可逆矩阵时，A不一定为正交矩阵，则向量组β_1，$\beta_2,\cdots$，β_n不一定是标准正交基.

2.设 A 为四阶实对称矩阵，且 $A^2 + A = O$,

若 A 的秩为 3，则 A 相似于（ D ）.

（A）$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

（B）$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

（D）$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

【解题过程】设 λ 是 A 的任一特征值，ε 是属于 λ 的特征向量，则有

$$-\lambda\varepsilon = -A\varepsilon = A^2\varepsilon = A\left(A\varepsilon\right) = \lambda^2\varepsilon,$$

即 $\left(-\lambda - \lambda^2\right)\varepsilon = 0.$

$\because \varepsilon \neq 0$

$\therefore \lambda = 0$ 或-1

$\because A$ 为四阶实对称矩阵，且 A 的秩为 3

$\therefore$ 存在正交矩阵 T，使得

$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$，于是 A 相似

于$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

3. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，且二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 正定，则下列结论不正确的是（ D ）.

（A） A 的特征值全为正

（B） A 的一切顺序主子式全为正

（C） A 的主对角线上的元素全为正

（D）对一切 n 维列向量，x^TAx 全为正

【解题过程】（D）：正确说法：若 A 为 n 阶实对矩阵，且二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 正定，则对一切 n 维列向量 $x\neq 0, x^TAx$ 全为正.

4.设 A,B 均为 n 阶矩阵，那么（ B ）.

（A）若 A,B 合同，则 A,B 相似

（B）若 A,B 相似，则 A,B 等价

（C）若 A,B 等价，则 A,B 合同

（D）若 A,B 相似，则 A,B 合同

【解题思路】A,B 合同当且仅当存在可逆矩阵 P, 使得 $P^TAP=B$； A,B 相似当且存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$； A 经过一系列初等变换得到 B, 称 A,B 等价，也就是存在可逆矩阵 P,Q 使得 $PAQ=B$.

【解题过程】由解题思路可知， A,B 合同，不可推出 A,B 相似； A,B 相似，不可推出 A,B 合同； A,B 等价，不可推出 A,B 合同.

二、填空题.

1. 向 量 组 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,t,1)^T$，$\alpha_3=(-1,u,v)^T$ 是正交向量组，那么 $t=\underline{-2}$，$u=\underline{0}$，$v=\underline{1}$.

【解题思路】 欧氏空间中一组非零向量，如果它们两两正交，就称为一正交向量组.

【解题过程】 $\because$ 向量组 $\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,t,1)^T$，$\alpha_3=(-1,u,v)^T$ 是正交向量组

$$\therefore\begin{cases}(\alpha_1,\alpha_2)=1+t+1=0\\(\alpha_1,\alpha_3)=-1+u+v=0\\(\alpha_2,\alpha_3)=-1+ut+v=0\end{cases}，即\begin{cases}t=-2\\u=0\\v=1\end{cases}.$$

2.若 A 为正定矩阵，且 $A^TA=E$，则 $|A|=\underline{1}$.

【解题过程】 若矩阵 A 满足 $A^TA=E$，则矩阵的特征值 λ 满足 $\lambda^2=1$，故 λ 的值可能为 1 或－1，又因为 A 为正定矩阵，则 A 的特征值只能为 1，于是 $|A|=1$.

3.若二阶矩阵 A 的特征值为-1 和 1，则 $A^{2018}=\underline{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}$.

【解题过程】 若二阶矩阵 A 的特征值为-1 和 1，则存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad A=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}.$$

于是 $A^{2018}=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}^{2018}P^{-1}$

$$=P\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

4.二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=2x_1x_2-ax_3x_4$ 的秩为 2，则 $a=\underline{0}$.

【解题过程】

二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=2x_1x_2-ax_3x_4$ 的

矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{a}{2} \\ 0 & 0 & -\dfrac{a}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$\because$ 二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=2x_1x_2-ax_3x_4$

的秩为 2

$\therefore R(A)=2$，则 $a=0$.

5.二次型

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1+x_2\right)^2+\left(x_2-x_3\right)^2+\left(x_3+x_1\right)^2$

的秩为 $\underline{2}$.

$\therefore R(A)=2$，则 $a=0$.

5.二次型

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1+x_2\right)^2+\left(x_2-x_3\right)^2+\left(x_3+x_1\right)^2$

的秩为 $\underline{2}$.

【解题过程】二次型

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1+x_2\right)^2+\left(x_2-x_3\right)^2+\left(x_3+x_1\right)^2$

$=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

将 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$ 进行初等行变换得：

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&2&-1\\2&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&-3\\0&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得：$R(A)=2$, 即二次型的秩为 2.

三、判断题.

1.实对称矩阵 A 的非零特征值的个数等于它的秩.　　（ √ ）

【解题过程】设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

$\because$ A 为实对称矩阵

$\therefore$ 存在正交矩阵 T, 使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

$\because$ 可逆矩阵不改变矩阵的秩

$$\therefore R(A)=R\left(\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\right),$$

于是实对称矩阵 A 的非零特征值的个数等于它的秩.

2.二次型 $f=x^TAx$ 在正交变换 $x=Py$ 下一定化为标准形.　　（ × ）

【解题过程】 二次型只有通过适当的正交

变换 $x = Py$ 后，才能将二次型化为标准形.

3.若 α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n 线性无关且都是 A 的特征向量，则将它们先正交化，再单位化后仍为 A 的特征向量.　（ × ）

【解题过程】 虽然 α_1，$\alpha_2,\cdots$，α_n 都是 A 的特征向量，但它们不一定属于 A 的同一个特征值的特征向量，所以它们正交化后不一定是 A 的特征向量.

4. 已知 A 为 n 阶矩阵，x 为 n 维列向量，如果 A 不对称，则 $x^T Ax$ 不是二次型.（ × ）

【解题过程】 举出反例：$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$$f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1x_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

是二次型.

四、已知 A 为实对称矩阵，试证明二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = x^T Ax$ 与二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = x^T A^{-1}x$ 具有相同的规范数.

【解题思路】 两个二次型的矩阵分别为 A,B，若 A,B 合同，则两个二次型具有相同规范形，即具有相同的规范数.

【解题过程】 $\because$ A 为实对称矩阵

$\therefore A^T = A$

$\therefore \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T = A^{-1}$，即 A^{-1} 为实对称矩阵

$\because \left(A^{-1}\right)^T AA^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} = A^{-1}$

$\therefore A^{-1}$ 与 A 合同

$\therefore$ 二次型 $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = x^T Ax$ 与二次型 $f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = x^T A^{-1} x$ 具有相同的规范数.

五、已知 $a > 0$, 且二次型

$$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3$$

通过正交变换化为标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 求参数 a 的值及所用的正交变换矩阵.

【解题思路】任一实二次型 $f\left(x\right) = x^T Ax$，其中 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$，存在正交变换 $x = Py$，其中 P 是正交矩阵，使得 $f\left(x\right)$ 化为标准形，即

$$f\left(x\right) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

其中，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

【解题过程】

$\because f\left(x_1, x_2, x_3\right)$
$= 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 \left(a > 0\right)$

$\therefore f$ 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}$

由题意可知，A 的特征值为 1,2,5.

$$\because \left|\lambda E - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & -a \\ 0 & -a & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)\left[(\lambda - 3)^2 - a^2\right]$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5)$$

$\therefore a^2 = 4$

$\because a > 0$

$\therefore a = 2$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$的特征多项式为

$$\left|\lambda E - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5)$$

有特征值$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$

当$\lambda_1 = 1$时，解齐次方程组

$$(E - A)x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

得基础解系$\xi_1 = (0, 1, -1)^T$.

将$\xi_1 = (0, 1, -1)^T$单位化得

$$\beta_1 = \frac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T.$$

当$\lambda_2 = 2$时，解齐次方程组

$$(2E-A)x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

得基础解系 $\xi_2=(1,0,0)^T$.

将 $\xi_2=(1,0,0)^T$ 单位化得

$$\beta_2=\frac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2=(1,0,0)^T.$$

当 $\lambda_3=5$ 时，解齐次方程组

$$(5E-A)x=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

得基础解系 $\xi_3=(0,1,1)^T$.

将 $\xi_3=(0,1,1)^T$ 单位化得

$$\beta_3=\frac{1}{\|\xi_3\|}\xi_3=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T.$$

令 $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,

则 P 是正交矩阵，且

$$P^TAP=P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

故作可逆正交变换 $x=Py$ 得

$$\begin{aligned}f(x)&=x^TAx=y^TP^TAPy\\&=y^T\Lambda y=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2.\end{aligned}$$

六、设二次型

$$f=2\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)^2+\left(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right)^2,$$

记

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

（1）证明：二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$;

（2）若 α,β 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

【解题思路】 任一实二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=x^TAx,A^T=A\in R^{n\times n}$, 都可以经过正交的线性替换变成平方和 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$, 其中平方项的系数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值.

【解题过程】

（1）证明：

$$f=2\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=2\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \\ +\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\because \alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore f=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\left(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

即证：二次型 f 对应的矩阵为

$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$.

（2）设 $A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$,

$A^T=\left(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T\right)^T=A$

$\because \alpha,\beta$ 正交且均为单位向量

$\therefore \alpha^T\alpha=1,\beta^T\beta=1,(\alpha,\beta)$
$=\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=0$

$\because A\left(\alpha\alpha^T\right)=2\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T+\beta\beta^T\alpha\alpha^T$
$=2\alpha\left(\alpha^T\alpha\right)\alpha^T+\beta\left(\beta^T\alpha\right)\alpha^T=2\alpha\alpha^T$

$A\left(\beta\beta^T\right)=2\alpha\alpha^T\beta\beta^T+\beta\beta^T\beta\beta^T$
$=2\alpha\left(\alpha^T\beta\right)\beta^T+\beta\left(\beta^T\beta\right)\beta=\beta\beta^T$

$\therefore 1,2$ 是 A 的特征值

又 $\because A^T=A$

$\therefore f$ 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.