线性代数综合测试题一

一、填空题.（每小题 4 分，共 20 分）

1．已知 A 为三阶方阵，且 $|A|=\dfrac{1}{8}$，则

$$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8A^{*}\right|=\underline{64}.$$

【解题过程】

$$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8A^{*}\right|=\left|3A^{-1}-8|A|A^{-1}\right|$$

$$=\left|2A^{-1}\right|=2^{3}\frac{1}{|A|}=64.$$

2.已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&0\\3&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\\1&0\end{pmatrix}$，设矩阵 X 满足 $AX=B$，则 $X=\underline{\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{11}{2}&\frac{5}{2}\\-\frac{7}{2}&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}}$.

【解题过程】 $\because |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&0&0\\3&0&1\end{vmatrix}=-4\neq 0$

$\therefore A$ 可逆

$\because AX=B$

$\therefore X=A^{-1}B$

由 $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&0&0&0&1&0\\3&0&1&0&0&1\end{array}\right)$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

可得，$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

3. 设 A 是 4×3 阶矩阵，且 $R(A)=2$. 设

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix},\text{则 } R(AB)=\underline{2}.$$

【解题过程】 $\because |B|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}=10\neq0$

$\therefore B$ 可逆

$\because$ A 右乘可逆矩阵 B，不改变矩阵 A 的秩

$\therefore R(AB)=R(A)=2.$

4.设齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解，其中 A 是 5×3 阶矩阵，则 $R(A_{5\times3})=\underline{3}$.

【解题过程】因为齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解，所以 $R(A_{5\times3})$ 等于未知量个数等于 3.

5. 向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\},\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\}$, $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\gamma\}$ 的秩分别为 $s,s,s+1$, 则向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\gamma-\beta\}$ 的秩为 $\underline{s+1}$.

【解题过程】

$\because\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\},\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\}$, $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\gamma\}$ 的秩分别为 $s,s,s+1$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关； β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示；$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\gamma$ 线性无关

易知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\gamma-\beta$ 与向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\gamma$ 等价，于是向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\gamma-\beta\}$ 的秩为 $s+1$.

二、选择题.（每小题 4 分，共 20 分）

1.下列选项中，选项（ C ）不是 n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件.

（A） A 可以分解为若干个初等矩阵的乘积

（B） A 的秩为 n

（C） A 与 n 阶单位矩阵合同

（D） A 与 n 阶单位矩阵等价

【解题过程】A 与 n 阶单位矩阵合同是 A 可逆的充分不必要条件.

2.设 V 是 n 维向量空间，T 是 V 上的线性算子，设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 和 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 V 的两组基，T 在这两组基下的矩阵分别为 A 和 B，则下列说法正确的是（ B ）.

（A） A 相似于 B

（B） A 合同于 B

（C） A 与 B 行等价

（D） A 与 B 列等价

【解题过程】欧氏空间中，T 在不同基下的矩阵合同.

3.下列说法正确的是（ C ）.

（A）如果 n 阶方阵 A 与 n 阶方阵 B 合同，那么 A 与 B 不一定等价

（B）设 p_1,p_2 是方阵 A 的不同特征值的特征向量，则 p_1+p_2 是 A 的特征向量

（C）任何一个矩阵都与某个标准形矩阵等价

（D）设三维向量组$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$是两两正交的向量组，则它们是线性无关的.

【解题过程】排除法:（A）A与B合同，可推出A与B等价;（B）p_1+p_2不一定A的特征向量，要对特征值进行分类讨论;（D）若$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$中有零向量，则它们线性相关.

4.已知n阶方阵A与B相似，则下列说法不正确的是（ C ）.

（A）$R(A)=R(B)$

（B）$tr(A)=tr(B)$

（C）A与B的特征向量相同

（D）$|A|=|B|$

【解题过程】 A与B相似，则A与B的特征多项式相同，特征值相同，行列式相同，$tr(A)=tr(B)$.

5.已知三阶矩阵A的三个特征值为1，-2，-3，则$|A\text{-}5E|$的值为（ B ）.

（A）6 （B）-224

（C）36 （D）-30

【解题过程】A的三个特征值为1，-2，-3，则$A\text{-}5E$的三个特征值为-4，-7，-8，于是$|A\text{-}5E|=-4\times(-7)\times(-8)=-224.$

三、解答题（本题共 55 分）

1.（11 分）已知三阶矩阵方阵 A 满足

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$$

，证明向量组 $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 线性无关，并

计算 $A^3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

【解题过程】设存在实数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0,$$

即 $\begin{cases}k_1-k_2+k_3=0\\-k_1+k_2+k_3=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\k_3=0\end{cases}$，由此

可知，向量组 $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 线性无关.

$$A^3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=A^3\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$=A^3\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+A^3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+A^3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=A^2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+A^2\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}+A^2\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$=A^2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+2A^2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+3A^2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+4A\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+9A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+27\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\34\\35\end{pmatrix}.$$

2.（12 分）a 为何值时，方程组 $\begin{cases}2x_1+ax_2-4x_3=1\\3x_1-x_2+ax_3=2\\x_1+5x_2-x_3=3\end{cases}$ 无解？有唯一解？有无穷多解？并在有无穷解时求出其全体解.

【解题过程】线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+ax_2-4x_3=1\\3x_1-x_2+ax_3=2\\x_1+5x_2-x_3=3\end{cases}$$

的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&a&-4\\3&-1&a\\1&5&-1\end{pmatrix}$,增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&a&-4&1\\3&-1&a&2\\1&5&-1&3\end{pmatrix}$$

对 $\overline{A}=\begin{pmatrix}2&a&-4&1\\3&-1&a&2\\1&5&-1&3\end{pmatrix}$ 做初等行变换变为

行阶梯形矩阵：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&a&-4&1\\3&-1&a&2\\1&5&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&5&-1&3\\2&a&-4&1\\3&-1&a&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&5&-1&3\\0&a-10&-2&-5\\0&-16&a+3&-7\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&5&-1&3\\0&a-10&-2&-5\\0&1&-\frac{a+3}{16}&\frac{7}{16}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -\frac{a+3}{16} & \frac{7}{16}\\ 0 & a-10 & -2 & -5\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -\frac{a+3}{16} & \frac{7}{16}\\ 0 & 0 & \frac{(a+3)(a-10)}{16}-2 & \frac{7(a-10)}{16}-5\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -\frac{a+3}{16} & \frac{7}{16}\\ 0 & 0 & \frac{(a+3)(a-10)-32}{16} & \frac{7(a-10)-80}{16}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -\frac{a+3}{16} & \frac{7}{16}\\ 0 & 0 & a^2-7a-62 & 7a-150\end{pmatrix}$$

由线性方程组有解判定定理可知，当 $a=\frac{7\pm\sqrt{297}}{2}$ 时，线性方程组无解；当 $a\neq\frac{7\pm\sqrt{297}}{2}$ 时，线性方程组有唯一解；没有无穷解的情况.

3.（14 分）用正交变换法将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

化为标准形，并求出正交变换矩阵及二次型的秩和正惯性指数.

【解题过程】

由 $f(x_1,x_2,x_3)$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

可得，二次型的矩阵为

$A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$的特征多项式为：

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&2&0\\2&\lambda+1&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda+2\right)\left(\lambda-3\right)$$

当 $\lambda=0$ 时，$-Ax=0$，将其系数矩阵进行初等行变换得：

$$-A=\begin{pmatrix}-2&2&0\\2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&2&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-2&2&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得，A 的属于特征值 0 的特征向量为

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，单位化后为 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=-2$ 时，$\left(-2E-A\right)x=0$，将其系数矩阵进行初等行变换得：

$$-2E-A=\begin{pmatrix}-4&2&0\\2&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\2&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得，A 的属于特征值-2 的特征向量为

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \text{单位化后为} \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix};$$

当 $\lambda = 3$ 时，$(3E-A)x=0$, 将其系数矩阵进行初等行变换得：

$$3E-A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得，A 的属于特征值 3 的特征向量为

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \text{单位化后为} \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix};$$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\\0&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\1&0&0\end{pmatrix}$ 为正交矩阵，则所求的正交变换为 $x=Py$, 此时，二次型的标准形为 $f=-2y_2^2+3y_3^2$, 二次型的秩为 2，正惯性指数为 1.

4.（12 分）求向量组

$\alpha_1=(1,1,1,1,2)^T$，$\alpha_2=(2,1,3,2,3)^T$，

$\alpha_3=(2,3,2,2,5)^T$, $\alpha_4=(1,3,-1,1,4)^T$

的秩和极大线性无关组，并将其他向量用极大线性无关组线性表示.

【解题过程】设 A 为以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为列向量组构成的矩阵，并对矩阵 A 作初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\1&1&3&3\\1&3&2&-1\\1&2&2&1\\2&3&5&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-1&1&2\\0&1&0&-2\\0&0&0&0\\0&-1&1&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-1&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&-1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得：$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$ 且最大无关组为：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \alpha_4=5\alpha_1-2\alpha_2$.

5.（6 分）二次型

$$tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

是负定的，求 t 的取值范围.

【解题思路】A 正定的充分必要条件是 A 的各阶顺序主子式都大于 0；A 为负定矩阵的充分必要条件是 A 的奇数阶顺序主子式小于零，偶数阶顺序主子式大于零.

【解题过程】

$tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的矩

阵为 $A=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$，其一、二、三阶主

子式为：$t, t^2-1, (t+1)^2(t-2)$

$t<0, t^2-1>0, (t+1)^2(t-2)<0$

的充分必要条件是 $t<-1$，故 $t<-1$ 时，f

负定.

四．证明题（本题 5 分）

设 $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_n\}$ 是 n 个 n 维向量，若 n

维标准基向量 $\{e_1,\ e_2,\cdots,\ e_n\}$ 能由它们线

性表示，证明 $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_n\}$ 线性无关.

【解题过程】 $\because e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为标准基向量组

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 可由 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性表示

$\because e_1, e_2, \cdots, e_n$ 能由 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$

线性表示

$\therefore$ 向量组 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 等价

$\because$ 向量组 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性无关且两个向量

组所含向量的个数都为 n

$\therefore$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.