矩阵理论初步
——方阵的行列式

陈树伟

swchen@swjtu.edu.cn

方阵的行列式

为了深入研究方阵，我们将给出方阵一个重要的量（数）

-------方阵的行列式。 它在探讨方阵的可逆性、

矩阵的初等变换、矩阵的秩、特殊线性方程组是否有唯一

等许多方面有很多应用。

方阵行列式

一 方阵行列式的概念

二 方阵行列式性质

三 方阵行列式计算

行列式的定义

引例

二阶行列式：
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式：
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

例

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=-8+5+9+30-6-2$$

$$=28.$$

所得六项的代数和就是三阶行列式的展开式.

排列与逆序数

定义. 由1, 2, …,n 组成的一个有序数组称为一个**排列**。

定义. 在一个排列中，如果有一对数的前后位置是大数排在小数之前，则称这一对数构成一个**逆序**，一个排列中逆序的总数，称为该排列的**逆序数**，

记为：$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$

定义. 逆序数为奇的排列称为**奇排列**，逆序数为偶的排列称为**偶排列**。

例. 1、**2431**是一个四级排列，**τ(2431)=4**，偶排列;

2、**45321**是一个五级排列，**τ(45321)=9**，奇排列;

3、**n,n-1,…,1**是一个n级排列，**τ(n,n-1,…,1)=n(n-1) /2**;

排列与逆序数

定义. 交换一个排列中的两个数，其余的数不动，称为一个**对换**。

定理：对换改变排列的**奇偶性**。

定理：任一排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都可由自然排列 $12\cdots n$ 经若干次对换得到，

且对换次数与 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 具有**相同的奇偶性**。

例　偶排列 2431 经一个对换得到排列 2134，排列 2134

必然是奇排列。事实上 $\tau(2134)=1$.

行列式的定义

定义 $n\times n$ 方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

的**行列式**定义为数 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 取遍所有 n 级排列， 记为 $\det A$, 或者

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶方阵的行列式简称为**n阶行列式**。

行列式的定义

注（1）只有方阵才有行列式，不是方阵的矩阵没有行列式

（2）要把方阵$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$和其行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

区别开来！ 前者代表一组数， 后者代表**一个数**。

（3） 一阶方阵的行列式就是该方阵的元素（而不是绝对值）。

行列式的定义

例　上三角形行列式（即上三角方阵的行列式）

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解

$$\det A = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n!-1}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

即　上三角形行列式等于主对角线元素乘积。

特别的对角行列式等于主对角线元素乘积。

行列式的定义

例. 主对角线以上的元素全是零的行列式称为**下三角行列式**

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 求其值。

解

$$D_n = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

下（上）三角行列式等于主对角线上元素的乘积

行列式的定义

定理　$n\times n$ 方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_2j_n}$$

推论1　$\det A=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_2n}$

推论2　$\det A=\det A^T$　（亦称行列式的转置）

行列式的性质

1、行列式的转置

定义. 设行列式D为 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，把行列式$D$的**行**和**列互换**后，

得到的行列式：$D^T \overset{\Delta}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

称为**行列式D的转置**，**简称为D的转置**，记为：D^T

行列式的性质

定理. 行列式转置其值不变，即 $D^T = D$

注： 定理表明，在行列式中**行与列地位对等**，从而关于行(列)成立的性质，对列(行)也成立。

行列式的性质

2、线性性质:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质

交错性：若方阵A有两行（列）相同，则其行列式 $\det A = 0$

规范性：单位方阵的行列式为 1，即 $\det E = 1$

推论： （1）若方阵A有两行（列）成比例，则其行列式为0.

（2）若方阵A有零行（列），则其行列式为0。

1　矩阵的初等变换

定义.　下面三种变换称为矩阵的**初等行变换**

（1）对换矩阵A的 i, j 两行，称为**对换**，　记作 $r_i \leftrightarrow r_j$

对换获得的矩阵记作　$A(r_i \leftrightarrow r_j)$

（2）用数 $k \neq 0$ 乘矩阵的第 i 行，称为**倍乘**，　记作 kr_i

倍乘获得的矩阵记作 $A(kr_i)$

（3）把矩阵的第 i 行的 k 倍加到第 j 行上去，称为**倍加**，

记作 $r_j + kr_i$　倍加获得的矩阵记作 $A(r_j + kr_i)$

矩阵的初等变换

类似地，可定义矩阵的**初等列变换**，并依次记为

(1) $c_i \leftrightarrow c_j$ 获得的矩阵记作 $A(c_i \leftrightarrow c_j)$

(2) kc_i 获得的矩阵记作 $A(kc_i)$

(3) $c_j + kc_i$ 获得的矩阵记作 $A(c_j + kc_i)$

初等行变换与初等列变换统称为矩阵的**初等变换**。

矩阵的初等变换对其行列式的影响

定理

（1） $\det A(kr_i) = k\det A(r_i)$

（2） $\det A(r_i \leftrightarrow r_j) = -\det A$

（3） $\det A(r_j + kr_i) = \det A$

（1） $\det A(kc_i) = k\det A(c_i)$

（2） $\det A(c_i \leftrightarrow c_j) = -\det A$

（3） $\det A(c_j + kc_i) = \det A$

证明 （1）由线性性质可得。

（2）设

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换对其行列式的影响

$$0=\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_i+A_j \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_{j-1} \\ A_i+A_j \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_{j-1} \\ A_i \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_{j-1} \\ A_j \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_j \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_{j-1} \\ A_i \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_j \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_{j-1} \\ A_j \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_{j-1} \\ A_j \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}}_{\det A} + \underbrace{\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_j \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_{j-1} \\ A_i \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}}_{\det A(r_i \leftrightarrow r_j)}$$

矩阵的初等变换对其行列式的影响

$$\det A(r_j + kr_i) = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_{j-1} \\ A_j + kA_i \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_{j-1} \\ A_j \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_{j-1} \\ kA_i \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ A_i \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_{j-1} \\ A_j \\ A_{j+1} \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \det A$$

行列式按某行（列）展开

注意到 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

三（高）阶矩阵与二（低）阶矩阵行列式有上述联系，

能否推广到一般情形呢？ ---能，需要一个概念。

行列式按某行（列）展开

余子式、代数余子式的概念：

定义2. 方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$中划去a_{ij}所在的第i行和第j列后，留下的n-1阶行列式，

称为 a_{ij} **的余子式，**记为 M_{ij}. 设 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

称 A_{ij} 为 a_{ij} 的**代数余子式.**

注：（1）行列式的余子式阶比原行列式小1。

（2）注意余子式与代数余子式的区别与联系。

行列式按某行（列）展开

引理1：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} == \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

定理6：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

注（1） 定理6称为行列式按某行（列）展开定理。

行列式按某行（列）展开

特别的当 $i \neq j$ 时

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n2} \end{vmatrix}=0$$

同理有：当 $i \neq j$ 时有

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0$$

行列式按某行（列）展开

综上所述有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}\det A & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

推论

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}\det A & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

行列式按某行（列）展开

例: 设 $D=\begin{vmatrix}1&0&0&3\\2&2&0&0\\0&0&0&1\\3&3&3&0\end{vmatrix}$ A_{ij}为行列式元素 a_{ij} 的代数余子式.

计算: $(1)\,3A_{41}+3A_{42}+3A_{43}$ $(2)\,2A_{41}+2A_{42}$

$(3)\,A_{31}+A_{32}+A_{33}+2A_{34}$ $(4)\,2A_{12}+4A_{22}+6A_{42}$

解 $(1)\,3A_{41}+3A_{42}+3A_{43}=3A_{41}+3A_{42}+3A_{43}+0A_{44}$

$$=a_{41}A_{41}+a_{42}A_{42}+a_{43}A_{43}+a_{44}A_{44}=D$$

又 $D=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&3&3\end{vmatrix}=-(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&0\\3&3\end{vmatrix}=-6$

故 $3A_{41}+3A_{42}+3A_{43}=-6$

行列式按某行（列）展开

例: 设 $D=\begin{vmatrix}1&0&0&3\\2&2&0&0\\0&0&0&1\\3&3&3&0\end{vmatrix}$ A_{ij}为行列式元素 a_{ij} 的代数余子式.

计算: $(1)\,3A_{41}+3A_{42}+3A_{43}$ $(2)\,2A_{41}+2A_{42}$

$(3)\,A_{31}+A_{32}+A_{33}+2A_{34}$ $(4)\,2A_{12}+4A_{22}+6A_{42}$

$$(2)\,2A_{41}+2A_{42}=2A_{41}+2A_{42}+0A_{43}+0A_{44}$$

$$=a_{21}A_{41}+a_{22}A_{42}+a_{23}A_{43}+a_{24}A_{44}=0$$

行列式按某行（列）展开

例: 设 $D=\begin{vmatrix}1&0&0&3\\2&2&0&0\\0&0&0&1\\3&3&3&0\end{vmatrix}$ A_{ij}为行列式元素 a_{ij} 的代数余子式.

计算: $(1)\,3A_{41}+3A_{42}+3A_{43}$ $(2)\,2A_{41}+2A_{42}$

$(3)\,A_{31}+A_{32}+A_{33}+2A_{34}$ $(4)\,2A_{12}+4A_{22}+6A_{42}$

$$(3)\,A_{31}+A_{32}+A_{33}+2A_{34}=\left(A_{31}+A_{32}+A_{33}+0A_{34}\right)+2A_{34}$$

$$=\frac{1}{3}\left(3A_{31}+3A_{32}+3A_{33}+0A_{34}\right)+2\left(0A_{31}+0A_{32}+0A_{33}+A_{34}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(a_{41}A_{31}+a_{42}A_{32}+a_{43}A_{33}+a_{44}A_{34}\right)+2\left(a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}+a_{34}A_{34}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times 0+2\times(-6)=-12$$

行列式按某行（列）展开

例: 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ A_{ij}为行列式元素 a_{ij} 的代数余子式.

计算: $(1)3A_{41}+3A_{42}+3A_{43}$　　$(2)2A_{41}+2A_{42}$

$(3)A_{31}+A_{32}+A_{33}+2A_{34}$　　$(4)2A_{12}+4A_{22}+6A_{42}$

$$(4)2A_{12}+4A_{22}+6A_{42}=2(A_{12}+2A_{22}+3A_{42})$$

$$=2(A_{12}+2A_{22}+0A_{32}+3A_{42})$$

$$=2(a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}+a_{41}A_{42})$$

$$=2\times 0=0$$

行列式按某行（列）展开

例5：已知行列式D的第一行为$(1, 2, \ldots, n)$，第二行为$(n, n-1, \ldots, 1)$，且$D=n+1$，求D 的第一行元素的代数余子式和

解：设

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} n+1 & n+1 & n+1 & \cdots & n+1 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(n+1)\left(A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}\right)$$

故 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=1$

行列式按多行（列）展开

行列式不仅可以按一行（列）展开，也可以按多行（列）展开。

这需要推广余子式与代数余子式的概念。

定义6 设 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n, 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n,$

n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 中位于第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行和第 $j_1, j_2, \cdots, j_k$

列交叉处的元素按原序排成的方阵称为 A 的一个k阶**子方阵**

其行列式称为 $\det A$ 的一个**k阶子式**。记为

$$\det A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}$$

行列式按多行（列）展开

从 A 中删除第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行和第 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列余下的元素按原序排列得到的 $n-k$ 阶行列式称为 $\det A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}$ 的**余子式**，

记为 $\det A^c\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}$

称 $(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} \det A^c\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}$

为 $\det A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}$ 的**代数余子式**，记为 $\det A^{ac}\begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}$

注（1） 前面我们定义的余子式与代数余子式是一阶子式的余子式与代数余子式.

（2） 容易看到位于第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行的*k*阶子式共有 C_n^k 个。

Laplace定理

例

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

取第1行第2行、第2列第4列得一个2阶子式

则 $\det A\begin{pmatrix}1,2\\2,4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 3\\2 & 0\end{vmatrix}$ 其余子式 $\det A^c\begin{pmatrix}1,2\\2,4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\3 & 3\end{vmatrix}$

其代数余子式 $\det A^{ac}\begin{pmatrix}1,2\\2,4\end{pmatrix}=(-1)^{(1+2)+(2+4)}\begin{vmatrix}0 & 0\\3 & 3\end{vmatrix}$

取定第1行第2行共有 $C_4^2=6$ 个2阶子式。

Laplace定理

行列式按一行（列）展开定理推广到按多行（列）展开就得到------**Laplace定理**。

定理7（ **Laplace定理**）任意取定行列式的某k行，位于这些行上C_n^k个k阶子式与各自代数余子式的乘积的和，等于原行列式.

即对任意固定的 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行有:

$$\det A = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n,} \det A \begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix} \det A^{ac} \begin{pmatrix} i_1, i_2, \cdots, i_k \\ j_1, j_2, \cdots, j_k \end{pmatrix}$$

注 也可以按多列展开: 任意取定行列式的某k列，位于这些列上的C_n^k个k 阶子式与各自代数余子式的乘积的和，等于原行列式.

Laplace定理

例 $$D=\begin{vmatrix}1&2&0&0&0\\3&7&0&0&0\\1&4&1&1&2\\3&1&0&1&0\\1&2&0&0&3\end{vmatrix}$$

取定第1行第2行，则有10个2阶子式： $\det\begin{pmatrix}1,2\\1,2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\3&7\end{vmatrix}=1$

$N_{1,2}$ 的代数余子式 $A_{1,2}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&0&3\end{vmatrix}=3 \quad \cdots$

为用Laplace定理需要计算出其余9个2阶子式及相应代数余子式，

由行列式结构特点知除 $N_{1,2}$ 外，其余2阶子式均有零列。

故 $D=N_{12}A_{12}+0\times A_{13}+\cdots+0\times A_{45}=3$

Laplace定理

例 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 计算 $\det A.$

解 按第1行第2行展开，则有10个2阶子式：

$$\det\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1,$$ 其余9个2阶子式为零（为什么）

相应代数余子式 $$\det A^{ac}\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad \cdots$$

故 $$\det A = \det\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix}\det A^{ac}\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,2 \end{pmatrix} + \underbrace{0+\cdots+0}_{9} = 3$$

Laplace定理

一般的有， $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$

即 $$\det\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} = \det A \det B$$

其中, A, B分别为n阶和m阶方阵,C 为任意$m\times n$阶矩阵， O 为 $n\times m$ 阶零矩阵.

同理有 $$\det\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det A \det B$$

其中A, B 分别为n阶和m阶方阵，C 为任意 $n\times m$ 阶矩阵，O 为 $m\times n$ 阶零矩阵。

Laplace定理

定理8 设 A, B 均是 n 阶方阵，则

$$\det(AB) = \det A \det B$$

例 设 $A = \begin{pmatrix} -12 & 1 & 4 \\ 7 & 238 & 189 \\ 57 & 11 & -45 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 789 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 189 \\ 0 & 0 & 126 \end{pmatrix}$ 计算 $\det(AB)$

解 $\det(AB) = \det A \det B = (\det A) \times 0 = 0$

方阵行列式的计算

(一)降阶计算(按某行或列展开)

用降阶方法计算行列式即是利用公式

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=D$$

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=D$$

按某一行或某一列展开.

为了减少代数余子式的计算, 可以**利用初等变换将某一行或某一列零元变多.**

方阵行列式的计算

例6 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$$D \xlongequal[r_4-r_1]{r_2+r_1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第二列展开}} 1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-2r_2} -\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一列展开}} -2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = 48$$

方阵行列式的计算

例7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\2&1&3&1\\1&2&1&3\end{vmatrix}$$

$$D\xlongequal[k=2,3,4]{r_1+r_k}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&2&1&1\\2&1&3&1\\1&2&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\2&1&3&1\\1&2&1&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[k=2,3,4]{C_k-C_1}6\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\2&-1&1&-1\\1&1&0&2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一行展开}}6\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\1&0&2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一行展开}}6\begin{vmatrix}1&-1\\0&2\end{vmatrix}=12$$

方阵行列式的计算

例8 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$D_n \xlongequal[\text{列展开}]{\text{按第一}} a(-1)^{1+1}\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & & & \\ & a & b & & \\ & & a & \ddots & \\ & & & \ddots & b \\ & & & & a \end{vmatrix}_{n-1}}_{\text{上三角}} + b(-1)^{n+1}\underbrace{\begin{vmatrix} b & & & & \\ a & b & & & \\ & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & b \end{vmatrix}_{n-1}}_{\text{下三角}}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1} b^n$$

方阵行列式的计算

例9 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}$$

$$D_n \xlongequal[i=1,3,4,\cdots,n]{r_i-r_2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-2 \end{vmatrix}$$

方阵行列式的计算

$$D_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一行展开}}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{上三角}} -2\times(n-2)!$$

(二)转化为容易计算的行列式

上（下）三角形行列式其值等于主对角线上元素的积，容易计算，故我们可以利用初等变换将所要计算的行列式，转化为三角形行列式进行计算。事实上任何行列式利用初等变换都可以转化为三角形行列式。

另外有一些特殊的行列式有计算公式如范德蒙行列式，我们根据具体情况进行转化。

1 一般情形

例10 计算

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

方阵行列式的计算

$$D=\begin{vmatrix}-1&1&2&1\\1&-1&2&1\\2&4&2&-1\\3&-2&-2&1\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3+2r_1\\ r_4+3r_1}]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}-1&1&2&1\\0&0&4&2\\0&6&6&1\\0&1&4&4\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}-\begin{vmatrix}-1&1&2&1\\0&1&4&4\\0&6&6&1\\0&0&4&2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-6r_2}-\begin{vmatrix}-1&1&2&1\\0&1&4&4\\0&0&-18&-23\\0&0&4&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+\frac{4}{18}r_3}-\begin{vmatrix}-1&1&2&1\\0&1&4&4\\0&0&-18&-23\\0&0&0&-\dfrac{28}{9}\end{vmatrix}=56$$

方阵行列式的计算

例11 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

$$D \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

方阵行列式的计算

$$\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

$$\cdots = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{上三角}} = 1$$

2 箭形行列式转化为三角行列式

例12 $$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 其中 $a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}\neq 0$

$$D_n \xlongequal{C_1-a_{21}\frac{C_2}{a_{22}}} \begin{vmatrix} a_{11}-a_{21}\frac{a_{12}}{a_{22}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

方阵行列式的计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{21}\dfrac{a_{12}}{a_{22}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{C_1-a_{31}\frac{C_3}{a_{33}}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} a_{11}-a_{21}\dfrac{a_{12}}{a_{22}}-a_{31}\dfrac{a_{13}}{a_{33}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

方阵行列式的计算

$$\begin{vmatrix} a_{11}-a_{21}\dfrac{a_{12}}{a_{22}}-a_{31}\dfrac{a_{13}}{a_{33}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[k=4,\cdots,n]{C_1-a_{k1}\frac{C_k}{a_{kk}}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{a_{1k}a_{k1}}{a_{kk}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left(a_{11}-\sum_{k=2}^{n}\frac{a_{1k}a_{k1}}{a_{kk}}\right)a_{22}\cdots a_{nn}$$

方阵行列式的计算

例 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$$

$$D_n \overset{r_k-r_1}{\underset{k=2,\cdots,n}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

方阵行列式的计算

$$D_n = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} \xlongequal[k=2,\cdots,n]{C_1+\frac{C_k}{k}}$$

$$\begin{vmatrix} (x+1)+\sum_{j=2}^{n}\frac{x}{j} & x & x & \cdots & x \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \left[(x+1)+\sum_{j=2}^{n}\frac{x}{j}\right]\times n!$$

方阵行列式的计算

例13 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$$

解法二（加边法）：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & x+1 & x & \cdots & x \\ 0 & x & x+2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$$

方阵行列式的计算

$$D_n \overset{\text{加边}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & x+1 & x & \cdots & x \\ 0 & x & x+2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix} \overset{r_k - r_1}{\underset{k=2,\cdots,n+1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_1 + \frac{C_k}{k-1}}{\underset{k=2,\cdots,n+1}{=\!=}} \begin{vmatrix} (1+x)+\sum_{j=2}^{n}\frac{x}{j} & x & x & \cdots & x \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \left[(x+1)+\sum_{j=2}^{n}\frac{x}{j}\right]\times n!$$

方阵行列式的计算

例　计算n阶行列式　$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

法一

$$D_n \xlongequal[k=2,\cdots,n]{r_k - r_1} \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

方阵行列式的计算

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$\underset{k=2,\cdots,n}{\overset{C_1+C_k}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= \left[x+(n-1)a\right](x-a)^{n-1}$$

方阵行列式的计算

法二

$$D_n \xlongequal[k=2,\cdots,n]{C_1+C_k} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=\left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

方阵行列式的计算

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & x & a & \cdots & a \\ 1 & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal[k=2,\cdots,n]{C_k - aC_1}$$

$$=[x+(n-1)a]\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}}_{\text{下三角}} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

方阵行列式的计算

例15 计算$n+1$阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$D_{n+1} \xlongequal[k=2,\cdots,n]{C_1+C_k} \begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n} a_i & x & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+\sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix} = (x+\sum_{i=1}^{n} a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

方阵行列式的计算

$$=(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal[k=2,\cdots,n+1]{C_k - a_{k-1}C_1}$$

$$(x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix} = (x+\sum_{i=1}^{n}a_i)\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

(三) 递推法　数学归纳法

1　递推法

例16　计算*n*阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

方阵行列式的计算

解：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{按第一列展开}}}$$

$$x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}=xD_{n-1}+a_n$$

方阵行列式的计算

$$D_n = xD_{n-1} + a_n$$

$$= x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n$$

$$= x^2 D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n$$

$$\cdots$$

$$= x^{n-2}\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} + a_3 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

(尝试按第一行展开)

方阵行列式的计算

例17 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

方阵行列式的计算

2 数学归纳法

例18：证明*n*阶范德蒙（*Vandermonde*）行列式

$$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

解: 用数学归纳法，因为 $D_2(x_1,x_2)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1$

所以当n=2时，等式成立;

现在假设等式对于n-1阶范德蒙行列式成立

方阵行列式的计算

现证等式对n阶范德蒙行列式也成立

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&&x_n^{n-2}\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}\xlongequal{r_n-x_1r_{n-1}}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&&x_n^{n-2}\\0&x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2}&\cdots&x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&&x_n^{n-2}\\0&x_2^{n-2}(x_2-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

方阵行列式的计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & & x_n^{n-3}\\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & & x_n^{n-n}\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix} \xlongequal{r_{n-1}-x_1r_{n-2}} \begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & & x_n^{n-3}\\ 0 & x_2^{n-3}(x_2-x_1) & & x_2^{n-3}(x_n-x_1)\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

方阵行列式的计算

$$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & & x_n^{n-3} \\ 0 & x_2^{n-3}(x_2-x_1) & & x_2^{n-3}(x_n-x_1) \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix} =\cdots=$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

方阵行列式的计算

$$D_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) & \cdots & (x_n - x_1) \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \\ x_2{}^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3{}^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n{}^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

方阵行列式的计算

$$D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} (x_2-x_1) & (x_3-x_1) & \cdots & (x_n-x_1) \\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \\ x_2^{\,n-2}(x_2-x_1) & x_3^{\,n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{\,n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=2}(x_i-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_2^{\,n-2} & x_3^{\,n-2} & \cdots & x_n^{\,n-2} \end{vmatrix}=\prod_{i=2}(x_i-x_1)D_{n-1}(x_2,x_3,\cdots,x_n)$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\cdot\prod_{2\le i<j\le n}(x_j-x_i)\ =\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

故等式对n阶范德蒙行列式也成立，所以结论成立.

方阵行列式的计算

例19:计算

$$D_n=\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

解: 用数学归纳法,

当 $n=2$ 时 $D_2=\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$

假设 $D_{n-1}=\cos(n-1)\theta$

方阵行列式的计算

按最后一行展开得

$$D_n = 2\cos\theta \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+(n-1)} \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

得 $D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2}$ 由假设得

$$D_n = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

$$= \cos n\theta + \cos(n-2)\theta - \cos(n-2)\theta \quad = \cos n\theta$$