第二节　向量组的秩

1. 判断题.（正确的在括号里打“√”，错误的打“×”）

（1）若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则任一向量 $\alpha_i\left(1\le i\le m\right)$ 可由其余向量线性表出.（ × ）

【解题过程】若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则其中某一个向量 $\alpha_i\left(1\le i\le m\right)$ 可由其余向量线性表出.

（2）对任意一组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，有 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.（ √ ）

【解题过程】向量组线性相关的定义：存在一组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，有 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关. 对任意一组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，有 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 必线性相关.

（3）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 亦线性相关，则有不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，

使 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$，$\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$ 同时成立．（×）

【解题过程】若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 亦线性相关，则有不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m;l_1,l_2,\cdots,l_m$，

使 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$，

$l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_m\beta_m=0$ 同时成立，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m;l_1,l_2,\cdots,l_m$ 不一定相同.

（4）若有不全为 0 的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1$$
$$+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_m\beta_m=0$$

成立，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 亦线性相关.（×）

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 亦线性相关.（×）

【解题过程】举出反例：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},$$

有 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta_1+\beta_2+\beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，有

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$亦线性无关.

2.选择题.

（1）n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (3\le s\le n)$线性无关的充分必要条件是（ D ）.

（A）存在不全为零的数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，使$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s\ne 0$

（B）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意两个向量线性无关

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中存在一个向量，它不能用其余向量线性表出

（D）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任意一个向量都不能用其余向量线性表出

【解题过程】向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关的充要条件是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中有一个向量是其余向量的线性组合；由此可知，$n$维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (3\le s\le n)$线性无关的充要条件是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任一个向量都不能由其余向量的线性表示.

（2）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$均为$n$维向量，那么下列结论正确的是（ B ）.

（A）若$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关。

（B）对任意一组不全为零的数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，有$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s\ne 0$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关。

（C）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则对任意一组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，有 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=0$。

（D）因为 $0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots 0\alpha_m=0$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关。

【解题过程】对任意一组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，有 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s\neq 0$，则不存在一组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，有 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s=0,$ 于是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关。

（3）设有任意两个 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，若存在两组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使 $(\lambda_1+k_1)\alpha_1+(\lambda_2+k_2)\alpha_2+\cdots+(\lambda_m+k_m)\alpha_m$

$+(\lambda_1-k_1)\beta_1+(\lambda_2-k_2)\beta_2+\cdots+(\lambda_m-k_m)\beta_m=0$

则（ D ）.

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都线性相关

（B）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都线性无关

（C）$\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m$，$\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性无关

（D）$\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m$，$\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性相关

【解题过程】

$$(\lambda_1+k_1)\alpha_1+(\lambda_2+k_2)\alpha_2+\cdots+(\lambda_m+k_m)\alpha_m$$

$$+(\lambda_1-k_1)\beta_1+(\lambda_2-k_2)\beta_2+\cdots+(\lambda_m-k_m)\beta_m=0$$

即 $\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\lambda_2(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+\lambda_m(\alpha_m+\beta_m)$

$+k_1(\alpha_1-\beta_1)+k_2(\alpha_2-\beta_2)+\cdots+k_m(\alpha_m-\beta_m)=0$

$\because \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零

$\therefore \alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m$， $\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性相关

（4）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是（ C ）.

（A） $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

（B） $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

（C） $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

（D） $\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_3$

【解题过程】

$\alpha_1-\alpha_2=-\left[\left(\alpha_2-\alpha_3\right)+\left(\alpha_3-\alpha_1\right)\right]$.

（5）若向量组α,β,γ线性无关，α,β,δ线性相关，则（ C ）.

（A）α必可由β,γ,δ线性表示

（B）β必不可由α,β,δ线性表示

（C）δ必可由α,β,γ线性表示

（D）δ必不可由α,β,γ线性表示

【解题过程】α,β,γ线性无关，则α,β线性无关.又α,β,δ线性相关，则δ必可由α,β线性表示，于是δ必可由α,β,γ线性表示.

（6）设A是n阶矩阵，且$|A|=0$，则矩阵A中（ B ）

（A）必有一列元素全为零

（B）必有一列向量是其余列向量的线性组合

（C）必有两列元素对应成比例

（D）任一列向量都是其余列向量的线性组合

【解题思路】排除法.

【解题过程】$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, 排除A、C、D.

（7）设向量 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s\ (s>1)$，

而 $\beta_1=\alpha-\alpha_1,\beta_2=\alpha-\alpha_2,\cdots,\beta_s=\alpha-\alpha_s$，

则下列结论中正确的是（ A ）.

（A）$R\{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s\}=R\{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s\}$

（B）$R\{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s\}>R\{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s\}$

（C）$R\{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s\}<R\{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s\}$

（D）不能确定

【解题过程】

$\beta_1=\alpha-\alpha_1,\beta_2=\alpha-\alpha_2,\cdots,\beta_s=\alpha-\alpha_s$，则

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s>1)$ 线性表

示；

$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s=(s-1)\alpha$

$=(s-1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)$，

即 $\dfrac{1}{s-1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$.

于是 $\alpha_1=\dfrac{1}{s-1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s)-\beta_1$，

$\alpha_2=\dfrac{1}{s-1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s)-\beta_2,\cdots,$

$\alpha_s=\dfrac{1}{s-1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s)-\beta_s$，

即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s>1)$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性

表示．综上，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s>1)$ 与

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价.

$R\{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s\}=R\{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s\}$.

（8）若存在矩阵 $P,Q,$ 使

$A=PB,B=QA,$，则（ A ）.

（A） $R(A)=R(B)$

（B） $R(A)>R(B)$

（C） $R(A)<R(B)$

（D）不能确定

【解题过程】 $\because R(A)=R(PB)\leq R(B)$,

$R(B)=R(QA)\leq R(A)$

$\therefore R(A)=R(B)$.

3.用定义判断下列向量组线性相关性.

（1） $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$;

【解题过程】 设存在常数 k_1,k_2,k_3，使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，

即 $\begin{cases}-k_1+2k_2+k_3=0\\2k_1+2k_3=0\\k_1+k_2+2k_3=0\end{cases}$, $\begin{cases}-k_1+2k_2+k_3=0\\2k_1+2k_3=0\\k_1+k_2+2k_3=0\end{cases}$

的系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&0&2\\1&1&2\end{pmatrix}$,

$|A|=\begin{vmatrix}-1&2&1\\2&0&2\\1&1&2\end{vmatrix}=0$. 于是 $\begin{cases}-k_1+2k_2+k_3=0\\2k_1+2k_3=0\\k_1+k_2+2k_3=0\end{cases}$

有非零解，即 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

线性相关.

（2） $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

【解题过程】 设存在常数 k_1,k_2,k_3，使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，

即$\begin{cases}k_1-k_2+k_3=0\\k_1+2k_2-k_3=0\\3k_1+k_2=0\end{cases}$, $\begin{cases}k_1-k_2+k_3=0\\k_1+2k_2-k_3=0\\3k_1+k_2=0\end{cases}$,

的系数矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&-1\\3&1&0\end{pmatrix}$,

$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&2&-1\\3&1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$,

于是$\begin{cases}-k_1+2k_2+k_3=0\\2k_1+2k_3=0\\k_1+k_2+2k_3=0\end{cases}$ 仅有零解，

即 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$线性无关.

4.设$\beta=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$,

把β表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合，问线性

表示是否唯一？

【解题过程】设存在常数k_1,k_2,k_3，使得

$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$,即$\begin{cases}k_1+2k_3=1\\k_2+2k_3=3.\\k_1+k_3=0\end{cases}$

$\begin{cases}k_1+2k_3=1\\k_2+2k_3=3\\k_1+k_3=0\end{cases}$的系数矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$,

增广矩阵为$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&2&3\\1&0&1&0\end{pmatrix}$

将$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&2&3\\1&0&1&0\end{pmatrix}$进行初等变换得：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&2&3\\1&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&2&3\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

由此可得：$k_1=-1,k_2=1,k_3=1$. 于是

$\beta=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, 且线性表示唯一.

5.设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\t\end{pmatrix}$;，问：

（1）当 t 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关？

当 t 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关？

【解题过程】设存在常数 k_1,k_2,k_3，使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，

即 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_1+2k_2+3k_3=0\\k_1+3k_2+tk_3=0\end{cases}$

当 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_1+2k_2+3k_3=0\\k_1+3k_2+tk_3=0\end{cases}$ 仅有零解时，

即 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=t-5\neq0$ 时，$t\neq5$ 时，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关. 当 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_1+2k_2+3k_3=0\\k_1+3k_2+tk_3=0\end{cases}$

有非零解时，即 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=t-5=0$ 时，

$t=5$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

（2）当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关时，将 α_3 表示为

α_1,α_2 的线性组合.

【解题过程】 当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关时，即

$t=5$ 时，存在不全为零的常数 k_1,k_2,k_3，使

得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，

即 $\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ k_1+2k_2+3k_3=0 \\ k_1+3k_2+5k_3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ k_1+2k_2+3k_3=0 \\ k_1+3k_2+5k_3=0 \end{cases}$ 的系数矩阵为

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, 将 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

进行初等变换得：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可得：$\begin{cases} k_1=k_3 \\ k_2=-2k_3 \end{cases}$；取 $k_3=1,$

则 $k_1=1,k_2=-2,$

即 $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0,\ \alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2.$

6.已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，

$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,$
$\beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\beta_4=\alpha_4-\alpha_{1.}.$

证明向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关.

【解题过程】 设存在常数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得

$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=0$，

即$\left(k_1-k_4\right)\alpha_1+\left(k_1+k_2\right)\alpha_2$

$+\left(k_2+k_3\right)\alpha_3+\left(k_3+k_4\right)\alpha_4=0$

$\because$ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关

$\therefore\begin{cases}k_1-k_4=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\\k_3+k_4=0\end{cases}$

$\because\begin{cases}k_1-k_4=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\\k_3+k_4=0\end{cases}$仅有零解

$\therefore\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关.

7.若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，问常数$l,m$需满足什么条件时，向量组$l\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,m\alpha_3+\alpha_1$线性无关？

【解题过程】设存在常数k_1,k_2,k_3，使得

$k_1\left(l\alpha_1+\alpha_2\right)+k_2\left(\alpha_2+\alpha_3\right)+k_3\left(m\alpha_3+\alpha_1\right)=0$

即$\left(k_1l+k_3\right)\alpha_1+\left(k_1+k_2\right)\alpha_2+\left(k_2+mk_3\right)\alpha_3=0$

$\because$ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

$\therefore\begin{cases}k_1l+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+mk_3=0\end{cases}$

当$\begin{cases}k_1l+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+mk_3=0\end{cases}$ 仅有零解时，

即$\begin{vmatrix}l&0&1\\1&1&0\\0&1&m\end{vmatrix}=lm+1\neq0$时，

$l\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,m\alpha_3+\alpha_1$也线性无关.因此

l,m满足条件$lm\neq-1$时，

$l\alpha_2-\alpha_1, m\alpha_3-\alpha_2, \alpha_1-\alpha_3$ 也线性无关.

8.求下列向量组的秩和一个最大无关组，并把其余向量用最大无关组线性表示.

（1）

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\6\end{pmatrix}.$$

【解题过程】设 A 为以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为列向量组构成的矩阵，并对矩阵 A 作初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\1&-1&3&-2\\2&1&3&5\\3&1&5&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&-2&2&-6\\0&-1&1&-3\\0&-2&2&-6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&-2&2&-6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得：$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$ 且最大无关组为：

α_1,α_2. $\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2;\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2$.

（2）$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\\-2\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}.$

【解题过程】设 A 为以 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 为列向量组构成的矩阵，并对矩阵 A 作初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\1&-1&-2&0\\0&-1&2&-1\\-1&2&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\0&0&-2&1\\0&-1&2&-1\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由此可得：$R\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\right)=3$ 且最大无关组为：$\beta_1,\beta_2,\beta.\ \beta_4=-\beta_1-\dfrac{1}{2}\beta_3.$

9.设向量组 $\begin{pmatrix}a\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\b\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ 的秩为 2，试求 a,b 的值.

【解题过程】设 A 为以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为列向量组构成的矩阵，并对矩阵 A 作初等行变换：

$$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)=\begin{pmatrix}a & 2 & 1 & 2\\ 3 & b & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\ 3 & b & 2 & 3\\ a & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-ar]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & b-9 & -1 & 0\\ 0 & 2-3a & 1-a & 2-a\end{pmatrix}=A_1.$$

$\because$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 2

$\therefore R\left(A\right)=R\left(A_1\right)=2$

由此可知，$2-a=0,$ 即 $a=2,$ 此时 $b=5.$

10.设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 个 n 维向量，若标准基向量组 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 能由它们线性表出，证

明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

【解题过程】 $\because e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为标准基向量组

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可由 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性表示

$\because e_1,e_2,\cdots,e_n$ 能由 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示

$\therefore$ 向量组 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 等价

$\because$ 向量组$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关且两个向量组所含向量的个数都为 n

$\therefore$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

11.设 $\begin{cases}\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n,\\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\\ \quad\cdots\cdots\\ \beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1},\end{cases}$，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 等价.

【解题思路】 如果 V 中的向量组 $T=(w_1,w_2,\cdots,w_t)$ 中的每一个向量 $w_i\ (i=1,2,\cdots,t)$ 都可以经向量组 $S=(v_1,v_2,\cdots,v_s)$ 线性表出，那么向量组 T 就称为可以经向量组 S 线性表出.如果两个向量组可以互相线性表出，就称它们等价.

【解题过程】 线性空间 V 中向量组 $S=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 能被向量组 $T=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 线性表出，只需证 $T=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 可以由 $S=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 线

性表出即可.将 $\begin{cases}\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n,\\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\\ \cdots\cdots\\ \beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1},\end{cases}$,

相加得:

$$\begin{aligned}&\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n\\&=(n-1)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n)\end{aligned}$$

由题意知，$n\geq 2$,

于是 $\frac{1}{n-1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)$.

$=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n$

易知,

$$\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{1}{n-1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)-\beta_1\\ \alpha_2&=\frac{1}{n-1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)-\beta_2,\\ &\vdots\\ \alpha_n&=\frac{1}{n-1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)-\beta_n\end{aligned}$$

故 $T=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 可以由 $S=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$

线性表出.即证：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 等价.

12.设向量组 $\alpha_i=(t_i,t_i^2,\cdots,t_i^n)(i=1,2,\cdots,m;m\leq n)$,

试证：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，其中

$t_1,t_2,\cdots,t_m$ 为 m 个互不相等且不为 0 的常

数.

【解题过程】 设存在实数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$,

即 $\begin{cases}k_1t_1+k_2t_2+\cdots+k_mt_m=0\\ k_1t_1^2+k_2t_2^2+\cdots+k_mt_m^2=0\\ \vdots\\ k_1t_1^n+k_2t_2^n+\cdots+k_mt_m^n=0\end{cases}$,

当 只 有 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 满 足

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0,$$

则 $\alpha_1=\begin{pmatrix}t_1\\t_1^2\\\vdots\\t_1^n\end{pmatrix},\cdots,\alpha_m=\begin{pmatrix}t_m\\t_m^2\\\vdots\\t_m^n\end{pmatrix}$ 线性无关，即只

需要证 $\begin{cases}k_1t_1+k_2t_2+\cdots+k_mt_m=0\\k_1t_1^2+k_2t_2^2+\cdots+k_mt_m^2=0\\\qquad\vdots\\k_1t_1^n+k_2t_2^n+\cdots+k_mt_m^n=0\end{cases}$ 只有零解.

$\begin{cases}k_1t_1+k_2t_2+\cdots+k_mt_m=0\\k_1t_1^2+k_2t_2^2+\cdots+k_mt_m^2=0\\\qquad\vdots\\k_1t_1^n+k_2t_2^n+\cdots+k_mt_m^n=0\end{cases}$ 的系数矩阵为

$\begin{pmatrix}t_1&t_2&\cdots&t_m\\t_1^2&t_2^2&\cdots&t_m^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\t_1^n&t_2^n&\cdots&t_m^n\end{pmatrix}$，当 $m=n$ 时，

$$\begin{vmatrix}t_1&t_2&\cdots&t_n\\t_1^2&t_2^2&\cdots&t_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\t_1^n&t_2^n&\cdots&t_n^n\end{vmatrix}=t_1t_2\cdots t_n\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\t_1&t_2&\cdots&t_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\t_1^{n-1}&t_2^{n-1}&\cdots&t_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=t_1t_2\cdots t_n\prod_{1\le j<i\le n}\left(t_i-t_j\right)\ne 0$$

此时 $\begin{cases}k_1t_1+k_2t_2+\cdots+k_mt_m=0\\k_1t_1^2+k_2t_2^2+\cdots+k_mt_m^2=0\\\qquad\vdots\\k_1t_1^n+k_2t_2^n+\cdots+k_mt_m^n=0\end{cases}$ 只有零解；

当 $m<n$ 时，$\begin{pmatrix}t_1&t_2&\cdots&t_m\\t_1^2&t_2^2&\cdots&t_m^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\t_1^n&t_2^n&\cdots&t_m^n\end{pmatrix}$ 可以将其看

为 $\begin{pmatrix}t_1&t_2&\cdots&t_n\\t_1^2&t_2^2&\cdots&t_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\t_1^n&t_2^n&\cdots&t_n^n\end{pmatrix}$ 的前 m 列，故

$$rank\left(\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_m \\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^n & t_2^n & \cdots & t_m^n \end{pmatrix}\right)=m$$，此时则

$$\begin{cases} k_1t_1+k_2t_2+\cdots+k_mt_m=0 \\ k_1t_1^2+k_2t_2^2+\cdots+k_mt_m^2=0 \\ \qquad\vdots \\ k_1t_1^n+k_2t_2^n+\cdots+k_mt_m^n=0 \end{cases}$$只有零解.即证：

R^n 中向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

13.设向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 的秩为 r_1，向量组 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$ 的秩为 r_2，向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$ 的秩为 r_3，证明：

$\max\{r_1,r_2\}\le r_3\le r_1+r_2$.

【解题思路】若 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关且可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表出，则 $s\le t$.

【解题过程】设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组为 $\delta_1,\cdots,\delta_{r_1}$， $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的极大线性无关组为

$\phi_1,\cdots,\phi_{r_2}$， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$

的极大线性无关组为

$\varphi_1,\cdots,\varphi_{r_3}$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$

可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出，

则 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{r_3}$ 可以由 $\delta_1,\cdots,\delta_{r_1}$ 和 $\phi_1,\cdots,\phi_{r_2}$

线性表出，故 $r_3\le r_1+r_2$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可以由 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{r_3}$ 线性表出，则

$\phi_1,\cdots,\phi_{r_2}$ 可以由 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{r_3}$ 线性表出，故

$r_2 \le r_3$

$\because r_1 \le r_3,\ r_2 \le r_3$

$\therefore \max(r_1,r_2) \le r_3$

综上所述，即证 $\max(r_1,r_2) \le r_3 \le r_1 + r_2$.

14. 设 A,B 均为 $m\times n$ 矩阵，证明：(1) $R(A+B) \le R(A)+R(B)$;

【解题过程】

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n), B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$,

则 $A+B=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$

$\because \alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表示

$$\therefore R(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n) \le R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$$

$\therefore R(A+B) \le R(A)+R(B)$.

(2) $R(A-B) \le R(A)+R(B)$.

【解题过程】

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n), B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$,

则 $A-B=(\alpha_1-\beta_1,\alpha_2-\beta_2,\cdots,\alpha_n-\beta_n)$

$\because \alpha_1-\beta_1,\alpha_2-\beta_2,\cdots,\alpha_n-\beta_n$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表示

$$\therefore R(\alpha_1-\beta_1,\alpha_2-\beta_2,\cdots,\alpha_n-\beta_n) \le R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)+R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$$

$\therefore R(A-B) \le R(A)-R(B)$.

15.设 A 为 $m\times s$ 矩阵，B 为 $s\times p$ 矩阵，证明：$R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$.

【解题过程】设

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s), B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sp} \end{pmatrix}$$

则 $AB=\begin{pmatrix} b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+\cdots+b_{s1}\alpha_s, b_{12}\alpha_1+b_{22}\alpha_2 \\ +\cdots+b_{s2}\alpha_s,\cdots,b_{1p}\alpha_1+b_{2p}\alpha_2+\cdots+b_{sp}\alpha_s \end{pmatrix}$

$\because b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+\cdots+b_{s1}\alpha_s, b_{12}\alpha_1+b_{22}\alpha_2$
$+\cdots+b_{s2}\alpha_s,\cdots,b_{1p}\alpha_1+b_{2p}\alpha_2+\cdots+b_{sp}\alpha_s$

可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示

$\therefore R\begin{pmatrix} b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+\cdots+b_{s1}\alpha_s, b_{12}\alpha_1+b_{22}\alpha_2+\cdots \\ +b_{s2}\alpha_s,\cdots,b_{1p}\alpha_1+b_{2p}\alpha_2+\cdots+b_{sp}\alpha_s \end{pmatrix}$
$\le R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

$\therefore R(AB)\le R(A)$

同理可知，$R(AB)\le R(B)$

即证：$R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$.