第三节　基与维数

1.证明：由$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$构成$R^3$的一个基，并求$\beta=\begin{pmatrix}5\\9\\-2\end{pmatrix}$在这个基下的坐标.

【解题思路】我们称$B=\left(v_1,\cdots,v_n\right)$是线性空间$V$的一组基如果：（1）$B$线性无关，（2）$V=span\left(v_1,\cdots,v_n\right)$；$B=\left(v_1,\cdots,v_n\right)$是线性空间$V$的一组基当且仅当$V$中的任一向量$w$可以唯一地写为$B$的线性组合$w=x_1v_1+\cdots+x_nv_n=BX$.我们将此$n$维实向量$X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$称作向量$w$在基$B=\left(v_1,\cdots,v_n\right)$下的坐标.

【解题过程】要证向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$构成$R^3$的一组基，则要证$\alpha_1,\cdots,\alpha_3$线性无关；设存在实数$k_1,\cdots,k_3$，使得$k_1\alpha_1+\cdots+k_3\alpha_3=0$，即

$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\2k_1+2k_2=0\\3k_1=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\k_3=0\end{cases}$，由此可知，

$\alpha_1,\cdots,\alpha_3$线性无关，易知

$R^3 = span\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_3\right)$，故 $\alpha_1, \cdots, \alpha_4$ 是 R^4 的一组基；

设存在实数 $l_1, \cdots, l_3$，使得 $l_1\alpha_1 + \cdots + l_3\alpha_3 = \beta$，即 $\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 5 \\ 2k_1 + 2k_2 = 9 \\ 3k_1 = -2 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} k_1 = -\dfrac{2}{3} \\ k_2 = \dfrac{31}{6} \\ k_3 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$，

故 $\beta = -\dfrac{2}{3}\alpha_1 + \dfrac{31}{6}\alpha_2 + \dfrac{1}{2}\alpha_3$，

β 在这组基下的坐标为 $\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{31}{6} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$，

$V_1 = span\left\{\alpha_1, \alpha_2\right\}, V_2 = span\left\{\beta_1, \beta_2\right\}$，证明：$V_1 = V_2$.

【解题过程】 要证 $V_1 = V_2$，只需证向量组

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 与向量组

$\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 等价即可

$\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta_1+3\beta_2),\ \alpha_2=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$，于是

α_1,α_2 可由 β_1,β_2 线性表示；$\beta_1=3\alpha_2-\alpha_1$，

$\beta_2=\alpha_1-\alpha_2$，于是 β_1,β_2 可由 α_1,α_2 线性表

示，则 α_1,α_2 与 β_1,β_2 等价.

即证：$V_1=V_2$.

3.已知 R^3 的两组基：

（A）$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$；

（B）$\beta_1=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$，

（1）求由基（A）到（B）的过渡矩阵；

【解题过程】

设基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为 P，即 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 且 P 可逆

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{vmatrix}\neq 0,$$

则 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}$ 可逆，故

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

由$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&3&7&0&1&0\\1&3&1&0&0&1\end{array}\right)$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-18&7&5\\0&1&0&5&-2&-1\\0&0&1&3&-1&-1\end{array}\right)$$

可 知 ， $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}-18&7&5\\5&-2&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}$

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

$$=\begin{pmatrix}-18&7&5\\5&-2&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}.$$

（2）向量γ在基（A）下的坐标为

$x=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，求它在基（B）下的坐标.

【解题过程】设γ基（B）下的坐标为$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,

即$\gamma=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\gamma=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

$$\because(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

$$\therefore\gamma=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$\therefore P^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{747}{4}\\-\dfrac{59}{2}\\\dfrac{405}{4}\end{pmatrix}.$$