线性映射自测题

一、单项选择题.

1.若n阶非奇异矩阵A的各行元素之和均为常数a，则$\left(\frac{1}{2}A^2\right)^{-1}$一特征值为（ C ）.

（A）$2a^2$　　（B）$-2a^2$

（C）$2a^{-2}$　　（D）$-2a^{-2}$

【解题过程】$\because A$的各行元素之和均为常数a

$\therefore A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，即$a$是矩阵$A$的一个特征值

$\therefore \left(\frac{1}{2}A^2\right)^{-1}$的一个特征值为

$\left(\frac{1}{2}a^2\right)^{-1}=2a^{-2}$.

2.若λ为四阶矩阵A的特征多项式的三重根，则A对应于的特征向量最多有（ A ）个线性无关.__________________

（A） 3个　　（B）1个

（C）2个　　（D）4个

3.设α是矩阵A对应于其特征值λ的特征向量，则$P^{-1}AP$对应于λ的特征向量为（ A ）.

（A）$P^{-1}\alpha$　　（B）$P\alpha$

（C）$P^T\alpha$　　（D）α

【解题过程】$\because \alpha$ 是矩阵 A 对应于其特征值 λ 的特征向量

$\therefore A\alpha = \lambda\alpha$

$\because P^{-1}APP^{-1}\alpha = P^{-1}A\alpha = P^{-1}\alpha$

$\therefore P^{-1}\alpha$ 是 $P^{-1}AP$ 对应于 λ 的特征向量

4.设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶方阵，且 $R(A) = n-1$，α_1, α_2 是 $Ax = 0$ 的两个不同的解向量，k 为任意常数，则 $Ax = 0$ 的通解为（ C ）.

（A） $k\alpha_1$ （B）$k\alpha_2$

（C）$k(\alpha_1 - \alpha_2)$ （D）$k(\alpha_1 + \alpha_2)$

【解题过程】$\because \alpha_1, \alpha_2$ 是 $Ax = 0$ 的两个不同的解向量

$\therefore \alpha_1 - \alpha_2$ 是 $Ax = 0$ 的一个非零解向量

$\because R(A) = n-1$

$\therefore \alpha_1 - \alpha_2$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系

$\therefore$ $Ax = 0$ 的通解为 $k(\alpha_1 - \alpha_2)$.

5.当（ D ）时，齐次线性方程组 $A_{m\times n}x = 0$ 一定有非零解.

（A）$m \neq n$ （B）$m = n$

（C）$m > n$ （D）$m < n$

【解题过程】齐次线性方程组中，方程个数少于未知量个数时，必有非零解.

6.方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ 的系数矩阵记为 A，若存在三阶方阵 $B \neq 0$，使得

$AB=O$，则（　　）.

（A）$\lambda=1$ 且 $|B|=0$

（B）$\lambda\neq1$ 且 $|B|\neq0$

（C）$\lambda\neq1$ 且 $|B|=0$

（D）$\lambda=1$ 且 $|B|\neq0$

【解题过程】由题可知 $Ax=0$ 有非零解，于是有 $|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=0$，解得 $\lambda=1$. 反证法：假设 $|B|\neq0$. $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$.

$\because |B|\neq0$

$\therefore B$ 存在逆矩阵，使得 $A=O$, 与

$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$ 矛盾

$\therefore |B|=0.$

7.设 A 为 $n(n\geq2)$ 阶奇异方阵，A 中有一元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\neq0$，则方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含的向量个数为（　B　）.

（A）i　　　　（B）1

（C）j　　　　（D）n

【解题过程】$\because A$ 为 $n(n\geq2)$ 阶奇异方阵

$\therefore R(A)<n$

$\because A$ 中有一元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij} \neq 0$

$\therefore R(A) \geq n-1$

于是 $R(A)=n-1$, 即方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含的向量个数为 1.

8.设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $Ax=b$ 的三个解向量,

$R(A)=3$, $\alpha_1=(1,2,3,4)^T$,

$\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$, k 为任意常数,则的通解为(C).

(A) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

【解题过程】 $\because R(A)=3$

$\therefore Ax=b$ 的导出组的基础解系所含解向量个数为 1

$\because A\left(2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)\right)=0$

$\therefore 2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ 是 $Ax=b$ 的导出组的基础解系

于是 $Ax=b$ 的通解为 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$.

一、填空题.

1.已知 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&x\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 A^* 有一特征值为-2，则 $x=$ -1 或-2.

【解题过程】 $|A|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&x\end{vmatrix}=2x$, 易知 A 的特征值为 2，1， x.

$\because$ 若 λ 为矩阵 A 的特征值，则对应 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda}$

$\therefore$ A^* 的特征值为 $x,2x,2$

于是， $x=$-1 或-2.

2.若二阶矩阵 A 的特征值为-1 和 1，则 $A^{2018}=$ E.

【解题过程】 若二阶矩阵 A 的特征值为-1 和 1，则存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}$.

于是 $A^{2018}=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}^{2018}P^{-1}$

$=P\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}=E$

3. n 阶方阵 A 的特征值均为负，且 $A^2=E$，则其特征值必为 1.

【解题过程】 若矩阵 A 满足 $A^2=E$,则矩阵的特征值 λ 满足 $\lambda^2=1$,故 λ 的值只能为 1 或-1.又因为 A 的特征值均为负，于是 A 的特

征值只能是1.

4.设四阶方阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}$，且 $\beta=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$，则方程组 $Ax=\beta$ 的一个解向量为 $\underline{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}}$.

【解题过程】

$$\because \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\beta$$

$\therefore \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 为 $Ax=\beta$ 的一个解向量

5.已知方程组 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 3 & a+2\\1 & a & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 无解，则 $a=\underline{-1}$.

【解题过程】

方程组 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 3 & a+2\\1 & a & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 无解，则

$$R\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 3 & a+2\\1 & a & -2\end{pmatrix}\neq R\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\2 & 3 & a+2 & 3\\1 & a & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

将 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\2 & 3 & a+2 & 3\\1 & a & -2 & 0\end{pmatrix}$ 进行初等行变化得：

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\2 & 3 & a+2 & 3\\1 & a & -2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\0 & -1 & a & 1\\0 & a-2 & -3 & -1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\0 & -1 & a & 1\\0 & 0 & (a+1)(a-3) & a-3\end{pmatrix}$$

由此可知，方程组

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 3 & a+2\\1 & a & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$ 无解，则 $a=-1$.

三、判断题（正确的在括号里打“√”，错误的打“×”）.

1.若 $A_{n\times n}x_{n\times 1}=2x_{n\times 1}$，则 2 是 $A_{n\times n}$ 的一个特征值.（ × ）

【解题过程】 $x_{n\times 1}$ 要为非零向量.

2.若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 都是 $Ax=b$ 的解，则 $\alpha_1+4\alpha_2-3\alpha_3+6\alpha_4-8\alpha_5$ 是 $Ax=0$ 的一个解.（ √ ）

【解题过程】

$$A\left(\alpha_1+4\alpha_2-3\alpha_3+6\alpha_4-8\alpha_5\right)$$
$$=b+4b-3b+6b-8b=0.$$

3.方程组 $A_{m\times n}x=0$ 的基础解系的个数等于 $n-R\left(A_{m\times n}\right)$.（ × ）

【解题过程】 方程组 $A_{m\times n}x=0$ 的基础解系所含解向量的个数等于 $n-R\left(A_{m\times n}\right)$.

4.若 $Ax=0$ 方程组有非零解，则方程组 $Ax=b$ 必有无穷多解.（ × ）

【解题过程】 还需考察 $R(A)$ 与 $R(A|b)$ 的关系.举例：$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}x=0$ 方程组有非零

解，而$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$无解.

5. $Ax=0$与$A^TAx=0$为同解方程组.

（ √ ）

【解题过程】易知$Ax=0$的解都为

$A^TAx=0$的解；

设x_0是$A^TAx=0$的解，即$A^TAx_0=0$，

有$(Ax_0)^TAx_0=0$.设$Ax_0=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，即

$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=0$.

若A为实矩阵，则$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，

即x_0是$Ax=0$的解.

于是，A为实矩阵，$Ax=0$与$A^TAx=0$

为同解方程组.

6.方程组$Ax=b$有无穷多个解得充分必要条件是$Ax=b$有两个不同的解.（ √ ）

四、求齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_5=0\\x_1+x_2-x_3=0\\x_3+x_4+x_5=0\end{cases}$的一个基础解系.

【解题过程】$\begin{cases}x_1+x_2+x_5=0\\x_1+x_2-x_3=0\\x_3+x_4+x_5=0\end{cases}$的系数矩阵

为$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 1\\1 & 1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

将 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\1&1&-1&0&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$ 进行初等行变

换得：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\1&1&-1&0&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&-1&0&-1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&-1&0&-1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

由此可知，$\begin{cases}x_1+x_2+x_5=0\\x_1+x_2-x_3=0\\x_3+x_4+x_5=0\end{cases}$ 的基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

五、求矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&2&-5\\6&4&-9\\5&3&-7\end{pmatrix}$ 的特征值与

特征向量.

【解题过程】 $A=\begin{pmatrix}4&2&-5\\6&4&-9\\5&3&-7\end{pmatrix}$ 的特征多

项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-2&5\\-6&\lambda-4&9\\-5&-3&\lambda+7\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)$$

所以 A 的特征值为 1（2 重根），0.

先求 A 的属于特征值 1 的特征向量，解齐次线性方程组$\begin{cases}-3x_1-2x_2+5x_3=0\\-6x_1-3x_2+9x_3=0\\-5x_1-3x_2+8x_3=0\end{cases}$，求得基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以 A 的属于特征值 1 的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；

再求 A 的属于特征值 0 的特征向量，解齐次线性方程组$\begin{cases}-4x_1-2x_2+5x_3=0\\-6x_1-4x_2+9x_3=0\\-5x_1-3x_2+7x_3=0\end{cases}$，求得基础解系为$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$，所以 A 的属于特征值 0 的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$.

六、求方程组$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$与$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$的非零公共解.

【解题过程】要求方程组$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$与$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$的公共解，只需求线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\\x_1-x_2+x_3=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$的解

线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$的系数矩阵

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，将其进行初等行变换化为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，方程组$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$与$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$的非零公共解为$k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中$k \neq 0$.

七、若齐次线性方程组$A_{m\times n}x=0$的解为齐次线性方程组$B_{l\times n}x=0$的解. 试证明$R(A)\geq R(B)$.

【解题过程】设$R(A)=r$, 则齐次线性方程组$A_{m\times n}x=0$的基础解系所含解向量的个数

为 $n-r$

$\because$ 齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 的解为齐次线性方程组 $B_{l\times n}x=0$ 的解

$\therefore$ $A_{m\times n}x=0$ 的基础解系所含解向量都为 $B_{l\times n}x=0$ 的解，即 $B_{l\times n}x=0$ 的基础解系所含解向量的个数大于等于 $n-r$

$\therefore R(B)\le r$

即证：$R(A)\ge R(B)$.

八、若矩阵 A 满足 $A^2-3A+2E=0$，证明 A 的特征值只能是 1 或 2.

【解题过程】 若矩阵 A 满足 $A^2-3A+2E=0$,则矩阵的特征值 λ 满足 $\lambda^2-3\lambda+2=0$,故 λ 的值只能为 1 或 2.

即证：A 的特征值只能为 1 或 2.

九、证明 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{pmatrix}$ 相似.

【解题过程】 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

所以 A 的特征值为 1，2，-1.

先求 A 的属于特征值 1 的特征向量，解齐次

线性方程组$\begin{cases}-x_1=0\\x_2-x_3=0\\-x_2+x_3=0\end{cases}$，求得基础解系为$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，所以$A$的属于特征值1的特征向量

为$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$；

再求A的属于特征值2的特征向量，解齐次线性方程组$\begin{cases}2x_2-x_3=0\\-x_2+2x_3=0\end{cases}$，求得基础解系为$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，所以$A$的属于特征值2的特征向量

为$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$；

最后求A的属于特征值-1的特征向量，解齐次线性方程组$\begin{cases}-3x_1=0\\-x_2-x_3=0\\-x_2-x_3=0\end{cases}$，求得基础解系为$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$，所以$A$的属于特征值-1的特征向量为$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$；

令$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$为可逆矩阵，有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

同 理 可 得 ， 有 可 逆 矩 阵 Q, 使 得

$$Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

于是，$P^{-1}AP=Q^{-1}BQ$，

即 $\left(PQ^{-1}\right)^{-1}A\left(PQ^{-1}\right)=B.$

即证: $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{pmatrix}$

相似.

十、设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 与对角阵相似，求 x

和 y 应满足的条件.

【解题过程】 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 与对角阵相

似，则 A 有 3 个线性无关的特征向量.

$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 的特征多项式为

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-x&\lambda-1&-y\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=\left(\lambda-1\right)^2\left(\lambda+1\right)$$

由此可知，A 的特征值为 1（2 重根），-1.

先求 A 的属于特征值 1 的特征向量，解齐次

线 性 方 程 - 组 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -xx_1 - yx_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ ，

$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -xx_1 - yx_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$ 的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

将 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 进行初等行变化得：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，A 的属于特征值 1 的特征向量要

有 2 个线性无关的特征向量，则 $x + y = 0$.

再求 A 的属于特征值-1 的特征向量，解齐次

线 性 方 程 组 $\begin{cases} -x_1 - x_3 = 0 \\ -xx_1 - 2x_2 - yx_3 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$ ，

$\begin{cases} -x_1 - x_3 = 0 \\ -xx_1 - 2x_2 - yx_3 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$ 的 系 数 矩 阵 为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

将 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 进行初等行变化得：

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，A 的属于特征值-1 的特征向量有 1 个.

综上，$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与对角阵相似，x 和 y 应满足的条件为 $x+y=0$.

十一、求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$ 的特征值与特征向量.

【解题过程】 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$$

所以 A 的特征值为 n，0（$n-1$ 重根）.

先求 A 的属于特征值 n 的特征向量，解齐次

线性方程组$\begin{cases} (n-1)x_1 - x_2 - \cdots - x_n = 0 \\ -x_1 + (n-1)x_2 - \cdots - x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ -x_1 - x_2 - \cdots + (n-1)x_n = 0 \end{cases}$，

求得基础解系为$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$，所以 A 的属于特征值 n 的全部特征向量为

$\xi = k(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)$,其中 $k \neq 0$；

再求 A 的属于特征值 0 的特征向量，解齐次线性方程组$\begin{cases} -x_1 - x_2 - \cdots - x_n = 0 \\ -x_1 - x_2 - \cdots - x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ -x_1 - x_2 - \cdots - x_n = 0 \end{cases}$，求得基础解系为$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$，所以 A 的属于特征值 0 的全部特征向量为

$\xi_1 = k_1(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + k_2(-\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + \cdots + k_{n-1}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_n)$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ 不全为零.