向量组的秩

陈树伟

swchen@swjtu.edu.cn

向量组的秩

- 等价向量组
- 极大线性无关组
- 向量组的秩
- 矩阵在向量组研究中的应用

等价向量组

定义1. 如果向量组A中的每一个向量都能由向量组B中的向量线性表示，则称**向量组A能由B线性表示，**或称**向量组B能线性表示A**。

若向量组B与向量组A能相互线性表示，则称**向量组A和向量组B等价**。

例1 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\gamma=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\delta=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 考察向量组 $M=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ 与

$N=\{\alpha,\beta,\delta\}$ 的关系。

解： 显然向量组N能由M线性表示。又 $\gamma=2\alpha-\beta$, 故向量组M 能由N线性表示。所以两个向量组等价。

等价向量组

例2. 证明向量组 $M=\{\alpha,\beta,\alpha+\beta,\alpha-\beta\}$ 和向量组 $N=\{\alpha,\beta\}$ 等价。

例3. 设向量组 $M=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 和向量组 $N=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中

$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$。证明它们等价。

证明： 显然向量组M 能表示N；

又 $\alpha_1=\dfrac{1}{2}(\beta_1+\beta_3-\beta_2)\,,\alpha_2=\dfrac{1}{2}(\beta_1+\beta_2-\beta_3)\,,\alpha_3=\dfrac{1}{2}(\beta_3+\beta_2-\beta_1)\,,$

即向量组N 能表示M，故向量组M与N等价。

（二）性质

定理1. 设有向量组M, N, T则

（1）自反性. $M \sim M$

（2）对称性. 若 $M \sim N$, 则 $N \sim M$

（3）传递性. 若 $M \sim N$, $N \sim T$, 则 $M \sim T$

极大线性无关组

定义2： 给定向量组M,如果其中若干向量构成的子集 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 满足

(1) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关;

(2) M 中的任何一个向量(如果有)都能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示;

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组M的一个**极大线性无关组**，简称**极大无关组**。

性质：

(1) 极大线性无关组与向量组M等价，故由向量组M能线性表示的向量必能由其极大线性无关组线性表示。

(2) 向量组M 是线性无关的**当且仅当**M 的极大无关组就是其本身。

极大线性无关组

例4. 设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\delta=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

向量组 $\{\alpha,\beta,\delta\}$ 是无关的，且 $\gamma=2\alpha-\beta$ 。故 $\{\alpha,\beta,\delta\}$ 是 $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ 的一个极大无关组。

又向量组 $\{\beta,\gamma,\delta\}$ 是无关的，且 $\alpha=\frac{1}{2}(\gamma+\beta)$。故 $\{\beta,\gamma,\delta\}$ 是 $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ 的另一个极大无关组。

定理2 一向量组的任意两个极大无关组的**向量个数相同**。

参考教材定理2.2.10

向量组的秩

(一) 定义

定义3. 一个向量组M 的极大无关组中所含向量的个数，称为**向量组M 的秩**，

记为 $R(M)$.

注: (1) 定义的合理性。

(2) 显然: $R(M)\le |M|$ ，即向量组的秩不会超过向量组中的向量个数。

(3) $R(M)=|M| \Leftrightarrow$ 向量组M线性无关。

$R(M)<|M| \Leftrightarrow$向量组M线性相关。

(4) 只含零向量的向量组的秩为0。

向量组的秩

（二）性质

定理3. 若向量组A可由向量组B表示，则 $R(A) \le R(B)$.

推论1. 若向量组A与向量组B等价，则$R(A)=R(B)$.

推论2. 等价的线性无关向量组所含向量个数相等。

有了向量组秩的概念，我们给出向量组能表示一个向量的充分必要条件。

定理4. 向量 β 能被向量组M线性表示 $\Leftrightarrow R(M \cup \beta) = R(M)$

向量组的秩

定理5. 向量组的秩等于它所构成矩阵的秩。

证明： 设向量组为 $M=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots\alpha_m\}$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是其极大无关组。

故 $R(M)=r$。构造矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_r^T\\ \alpha_{r+1}^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_r^T\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{阶梯形}]{\text{化成}}\begin{pmatrix}\gamma_1^T\\ \vdots\\ \gamma_r^T\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

由前r行没有零行，故$R(A)=r$.

向量组的秩

注. (1) 矩阵 $A_{m\times n}=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix}$ 的行向量形成的向量组 $M=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m\}$ 的秩

称为**矩阵的行秩。**

由定理证明可知：**矩阵的行秩等于矩阵的秩。**

(2) 类似地矩阵列向量形成的向量组的秩称为**矩阵的列秩。**因为

$R(A)=R(A^T)=$ 矩阵A^T的行秩=矩阵A列秩。故

矩阵的列秩也等于矩阵的秩，进而**矩阵的行秩等于其列秩。**

向量组的秩

例. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$ 的秩 $R(A)=2$，则行向量组 $M=\{(1\quad 2\quad -1),(0\quad 3\quad 1)\}$

的秩 $R(M)=R(A)=2$。列向量组 $N=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ 的秩 $R(N)=R(A)=2$

例. 已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ 的秩为2。

则矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 6 & 2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 6\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$ 的秩均为2。

矩阵在向量组研究中的应用

1、求向量组的秩，及利用秩判断向量组的相关性

(1) 将向量作成**矩阵**(作成行也可以,作成列也可以)

(2) 通过矩阵的初等变换(行列变换都可用)化为**阶梯矩阵**

(3) 阶梯矩阵非零行的**个数**为**向量组**的**秩**；用向量组的**秩**与向量组中**向量个数**做比较决定向量组的线性相关性

矩阵在向量组研究中的应用

例4. 已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}$ 判断向量组 $M=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 相关性。

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&5\\1&3&6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&5\\0&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&5\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(M)=2$，所以 $R(M)<|M|$，故向量组线性相关。

矩阵在向量组研究中的应用

2、求向量组的一个极大无关组

(1) 将向量作成矩阵的**列，**

(2) 通过矩阵的**初等行变换**，将矩阵化为**阶梯矩阵**，

(3) 由阶梯矩阵得到向量组的**秩**与**极大无关组（主元对应的向量）**.

(4) 接着化为**行最简形**，可得其他向量由**极大无关组**线性表示的表示式

（行最简形对应列的元素即为线性表示式中的系数）

初等行变换不改变列向量组的线性关系.

例5. 求 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\-3\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\\-4\end{pmatrix}$ $\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\2\\-6\\3\end{pmatrix}$ 的秩和一个极大无关组。

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\4&5&0&2\\1&-1&-3&-6\\0&-3&-4&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-4&2\\0&0&0&-8\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ 向量组的秩为3,

$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\}$ 是一个极大无关组；$\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}$ 也是一个极大无关组。

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{3}&0\\0&1&\frac{4}{3}&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ $\alpha_3=-\dfrac{5}{3}\alpha_1+\dfrac{4}{3}\alpha_2.$

矩阵在向量组研究中的应用

例6. 设A，B是两个矩阵，证明 $R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$

证明： 设$A_{m\times s}=(\alpha_1,\ \cdots\ ,\alpha_i\ ,\cdots\ ,\alpha_s)$，$C=A_{m\times s}B_{s\times n}=(\gamma_1,\ \cdots\ ,\gamma_i\ ,\cdots\ ,\gamma_n)$

作向量组 $M=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$；$N=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$，则 $R(A)=R(M)$；$R(C)=R(N)$

$$A_{m\times s}B_{s\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}=\left(\sum_{k=1}^{s}b_{k1}\alpha_k,\ \cdots\ ,\sum_{k=1}^{s}b_{ki}\alpha_k\ ,\cdots\ ,\sum_{k=1}^{s}b_{kn}\alpha_k\right)$$

即 $\gamma_i=\sum_{k=1}^{s}b_{ki}\alpha_k\ (1\le i\le n)$ 得向量组M表示N，故 $R(N)\le R(M)$；得

$$R(C)\le R(A)$$

$$R(AB)=R\left((AB)^T\right)=R\left(B^TA^T\right)\le R\left(B^T\right)=R(B)$$

综上所述：$R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$