第三章 线性映射

第一节 线性映射

1.定义线性空间 R^4 到 R^3 的映射如下：

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ -2x_2 + 2x_3 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

T 是一个线性映射，并求 T 在下列基下的矩阵

R^4 中的基

$$:\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

R^3 中的基: $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

【解题思路】我们称线性空间 V 到线性空间 W 的映射 $T:V \to W$ 为线性映射，如果 T 与 V 和 W 上的加法和数乘运算兼容：即对任意的 $v_1, v_2 \in V$，$c \in R$，

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2), T(cv_1) = cT(v_1).$$

以及考查线性映射的矩阵定义.

【解题过程】设任意的

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in V, c \in R$$

$$T(v_1 + v_2) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3) + (x_4 + y_4) \\ -2(x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3) \\ -(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3) + (x_4 + y_4) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-x_1+x_2+2x_3+x_4\\-2x_2+2x_3\\-x_1-x_2+3x_3+x_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-y_1+y_2+2y_3+y_4\\-2y_2+2y_3\\-y_1-y_2+3y_3+y_4\end{pmatrix}$$

$$=T(v_1)+T(v_2)$$

$$T(cv_1)=T\begin{pmatrix}cx_1\\cx_2\\cx_3\\cx_4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-cx_1+cx_2+2cx_3+cx_4\\-2cx_2+2cx_3\\-cx_1-cx_2+3cx_3+cx_4\end{pmatrix}$$

$$=c\begin{pmatrix}-x_1+x_2+2x_3+x_4\\-2x_2+2x_3\\-x_1-x_2+3x_3+x_4\end{pmatrix}=cT(v_1);$$

由此可知，T 是一个线性映射；

$$T(\eta_1)=T\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix},T(\eta_2)=T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix},$$

$$T(\eta_3)=T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix},T(\eta_4)=T\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\7\end{pmatrix}$$

$$T(\eta_1)=\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$T(\eta_2)=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$$

$$T(\eta_3)=\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$T(\eta_4)=\begin{pmatrix}5\\4\\7\end{pmatrix}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\begin{pmatrix}6\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

由此可知，

$$T(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)$$
$$=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 6\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -1\\ -\frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} & -2\end{pmatrix},$$

故 T 在 R^4 中的基

$$:\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\eta_4=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

和 R^3 中的基

下的矩阵为$\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 6\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -1\\ -\frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} & -2\end{pmatrix}$.