第四章 欧几里德空间与二次型

第一节 欧式空间的定义与基本性质

1.设 α,β 均是 n 维向量，且 $\alpha\perp\beta$, 证明

$\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$.

【解题思路】向量 α 的长度 $\|\alpha\|$ 定义为非负

实数 $\|\alpha\|^2=(\alpha,\alpha)$.

【解题过程】

$$\begin{aligned}&\|\alpha+\beta\|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)\\&=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)\end{aligned}$$

$\because\alpha\perp\beta$

$\therefore(\alpha,\beta)=0$

$\therefore\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$.

2.证明：

$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\forall\lambda\in R,\|\alpha+\lambda\beta\|=\|\alpha-\lambda\beta\|$.

【解题过程】

$\Rightarrow$ 若 $\alpha\perp\beta$,

$$\begin{aligned}&\forall\lambda\in R,\|\alpha+\lambda\beta\|^2\\&=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\lambda\beta)+(\lambda\beta,\lambda\beta)\\&=\|\alpha\|^2+\lambda^2\|\beta\|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|\alpha-\lambda\beta\|^2\\&=(\alpha,\alpha)-2(\alpha,\lambda\beta)+(\lambda\beta,\lambda\beta)\\&=\|\alpha\|^2+\lambda^2\|\beta\|^2,\end{aligned}$$

于是 $\forall\lambda\in R,\|\alpha+\lambda\beta\|^2=\|\alpha-\lambda\beta\|^2$.

即 $\forall\lambda\in R,\|\alpha+\lambda\beta\|=\|\alpha-\lambda\beta\|$.

$\Leftarrow$若 $\forall\lambda\in R,\|\alpha+\lambda\beta\|=\|\alpha-\lambda\beta\|$,

则$\forall\lambda\in R,\|\alpha+\lambda\beta\|^2$
$=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\lambda\beta)+(\lambda\beta,\lambda\beta)$
$=\|\alpha-\lambda\beta\|^2$
$=(\alpha,\alpha)-2(\alpha,\lambda\beta)+(\lambda\beta,\lambda\beta)$.

即 $4(\alpha,\lambda\beta)=4\lambda(\alpha,\beta)=0.\ (\alpha,\beta)=0$,

即 $\alpha\perp\beta$.

3. 在 R^4 中求向量 α,β 的夹角，

$$\alpha=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\2\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

【解题思路】 内积按通常定义：在线性空间

R^n 中，对于向量 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$,定义

内积$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

定义非零向量α,β 间的夹角为

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|},0\le\langle\alpha,\beta\rangle\le\pi.$$

【解题过程】

$\because(\alpha,\beta)=2\times1+1\times2+3\times(-2)+2\times1=0$

$\therefore \langle \alpha, \beta \rangle = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}.$

4.在 R^3 中，设 $e_1=(1,1,1), e_2=(1,1,0)$, $e_3=(1,0,0)$，向量 $\alpha=3e_1-5e_2-2e_3$, $\beta=6e_1+4e_2$, 求 (α,β).

【解题过程】

$\alpha=3e_1-5e_2-2e_3=(-4,-2,3)$,

$\beta=6e_1+4e_2=(10,10,6)$,

$(\alpha,\beta)=-4\times10-2\times10+3\times6=-42.$

5.证明：合同关系为等价关系.

【解题思路】矩阵 A,B 合同的充分必要条件为存在可逆矩阵 P, 使得 $P^T AP=B$. 矩阵 A,B 等价的充分必要条件为存在可逆矩阵 Q,S 使得 $QAS=B$.

【解题过程】若矩阵 A,B 合同，则存在可逆矩阵 P, 使得 $P^T AP=B$. 即 A 可以经过一系列初等变换得到矩阵 B, 于是矩阵 A,B 等价.

即证：合同关系为等价关系.