线性空间自测题

一、　选择题.

1.设向量组（1）：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与向量组（2）：β_1,β_2 等价，则（　A　）.

（A）向量组（1）线性相关

（B）向量组（2）线性无关

（C）向量组（1）线性无关

（D）向量组（2）线性相关

【解题过程】

若向量组(1)：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与向量组(2)：β_1,β_2 等价，则 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(\beta_1,\beta_2)$. 那么 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=R(\beta_1,\beta_2)\le 2$，由此一定可得向量组（1）线性相关.

2.设 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则（ D ）.

（A）向量组中增加一个向量后仍线性无关

（B）向量组中去掉一个向量后仍线性无关

（C）向量组中每个向量都去掉第一个分量后仍线性无关

（D）向量组中每个向量任意增加一个分量后仍线性无关

3.设 $A:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是一组 n 维向量，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则（　D　）.

（A）A 的秩等于 4

（B）A 的秩等于 n

（C）A 的秩等于 1

（D）A 的秩小于等于 3

【解题过程】 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则

$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\le 2$, 于是 A 的秩小于等于 3.

4.设 β 不能由非零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，则（ D ）.

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关

（B）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关

（C）β 与某个 α_i 线性相关

（D）β 与任一 α_i 都线性无关

【解题过程】若 β 与任一 α_i 都线性相关，则 β 能由非零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，与条件矛盾.

二、填空题.

1.设 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则向量组 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ 的秩 r $\underline{\le 2}$.

【解题过程】

$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$, 则向量组 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ 线性相关，于是 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ 的秩 $r\le 2$.

2.向量组 α,β,γ 线性相关的充分必要条件为 $\underline{r\le 2}$.

3.设 α_1,α_2 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 $\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3$ 的极大无关组为 $\underline{\alpha_1,2\alpha_2}$.

【解题过程】 α_1,α_2 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则 $\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3$ 中 $\alpha_1,2\alpha_2$ 线性无关且 $3\alpha_3$ 可由 $\alpha_1,2\alpha_2$ 线性表示. 于是

$\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3$ 的极大无关组为 $\alpha_1, 2\alpha_2$.

4.已知 $\alpha_1=(1,3,2,4), \alpha_2=(2,6,k,8)$ 线性相关，则 $k=\underline{4}$.

【解题过程】 $\alpha_1=(1,3,2,4), \alpha_2=(2,6,k,8)$ 线性相关，则 $\alpha_2=(2,6,k,8)=2\alpha_1$, 即 $k=4$.

5.已知向量组 α,β,γ 线性相关，而向量组 β,γ,δ 线性无关，则向量组 α,β,γ 的秩为 $\underline{r=2}$.

【解题过程】 若向量组 β,γ,δ 线性无关，则向量组 β,γ 线性无关. 向量组 α,β,γ 线性相关，则向量组 α,β,γ 的秩为 2.

三、判断题（正确的在括号里打“√”，错误的打“×”）

1.如果向量组 α,β,γ 只有一个极大无关组，则 α,β,γ 一定线性无关.(×)

【解题过程】 举出反例：

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \gamma=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

2.设 α,β 线性相关，$\gamma\neq 0$, 则 $\alpha+\gamma$ 与 $\beta+\gamma$ 线性相关. (×)

【解题过程】 举出反例：

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \gamma=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

3.如果 $\alpha-\beta+2\gamma\neq 0$, 则 α,β,γ 线性无关.

(×)

【解题过程】 举出反例：

$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$

4.向量组的秩就是它的极大线性无关组的个数. （×）

【解题过程】向量组的秩就是它的极大线性无关组所含向量的个数.

5.如果向量组 $\alpha_1=(a,b),\alpha_2=(c,d)$ 线性无关，那么向量组 $\beta_1=(a,c),\beta_2=(b,d)$ 一定线性无关. （√）

【解题过程】若向量组 $\alpha_1=(a,b),\alpha_2=(c,d)$ 线性无关，则 $\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}=ad-bc\neq0.$ 假设存在实数 k_1,k_2，使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2=0$，即 $\begin{cases}ak_1+bk_2=0\\ck_1+dk_2=0\end{cases}.$

$\begin{cases}ak_1+bk_2=0\\ck_1+dk_2=0\end{cases}.$ 的系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},|A|=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc\neq0$，于是 $\begin{cases}ak_1+bk_2=0\\ck_1+dk_2=0\end{cases}$ 仅有非零解，即 $\beta_1=(a,c),\beta_2=(b,d)$ 线性无关.

四、已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一组基，证明 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

【解题过程】反证法：若 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性相关，则存在不全为零的实数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$，

即

$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$

即

$\left(k_1+k_3\right)\alpha_1+\left(k_1+k_2\right)\alpha_2+\left(k_2+k_3\right)\alpha_3=0.$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一组基

$\therefore k_1=0,k_2=0,k_3=0.$ 与 k_1,k_2,k_3 为不全为零的实数矛盾，于是 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

五、已知 $\begin{cases}\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3\\ \beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3\end{cases}$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 等价.

【解题过程】 $\begin{cases}\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3\\ \beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3\end{cases}$，即 β_1,β_2,β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示;

易知：

$\alpha_3=\beta_2-\beta_1,\alpha_2=\beta_1-2\beta_2+\beta_3,\alpha_3=\beta_1+\beta_2-\beta_3,$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 β_1,β_2,β_3 线性表示.于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 等价.

六、设 n 维向量组（1）：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r_1；（2）：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的秩为 r_2；（3）：$\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_s+\beta_s$ 的秩为 r_3. 证明 $r_1+r_2\geq r_3$.

【解题思路】 若 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关且可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表出，则 $s\leq t$.

【解题过程】设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的极大线性无关组为$\delta_1,\cdots,\delta_{r_1}$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$的极大线性无关组为$\phi_1,\cdots,\phi_{r_2}$，$\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_s+\beta_s$的极大线性无关组为$\varphi_1,\cdots,\varphi_{r_3}$

$\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_s+\beta_s$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出，则$\varphi_1,\cdots,\varphi_{r_3}$可以由$\delta_1,\cdots,\delta_{r_1}$和$\phi_1,\cdots,\phi_{r_2}$线性表出，故$r_3\le r_1+r_2$.

七、判断下列向量组的线性相关性，并说明理由.

(1) $\alpha_1=(2,4,7),\alpha_2=(0,2,5),\alpha_3=(1,1,1)$.

(2) $\gamma_1=(1,2,3),\gamma_2=(0,2,3),\gamma_3=(1,3,2)$.

【解题过程】

（1）$\alpha_1=(2,4,7),\alpha_2=(0,2,5),\alpha_3=(1,1,1)$线性相关，理由如下：假设存在实数$k_1,k_2,k_3$,使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$,即

$\begin{cases}2k_1+k_3=0\\4k_1+2k_2+k_3=0\\7k_1+5k_2+k_3=0\end{cases}$，$\begin{cases}2k_1+k_3=0\\4k_1+2k_2+k_3=0\\7k_1+5k_2+k_3=0\end{cases}$的系数矩阵为$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\4&2&1\\7&5&1\end{pmatrix},|A|=\begin{vmatrix}2&0&1\\4&2&1\\7&5&1\end{vmatrix}=0,$

于是 $\begin{cases} 2k_1 + k_3 = 0 \\ 4k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ 7k_1 + 5k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，即

$\alpha_1 = (2,4,7), \alpha_2 = (0,2,5), \alpha_3 = (1,1,1)$ 线性相关.

（2） $\gamma_1 = (1,2,3), \gamma_2 = (0,2,3), \gamma_3 = (1,3,2)$ 线性无关，理由如下：假设存在实数 k_1, k_2, k_3，使得 $k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + k_3\gamma_3 = 0$，即

$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ 3k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases}$，$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ 3k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases}$ 的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$$

于是 $\begin{cases} 2k_1 + k_3 = 0 \\ 4k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ 7k_1 + 5k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$ 仅有非零解，即

$\gamma_1 = (1,2,3), \gamma_2 = (0,2,3), \gamma_3 = (1,3,2)$ 线性无关.

八、已知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 及 β 都是 n 维向量，且 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s$. 证明：向量组 $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \cdots, \beta - \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

【解题过程】 $\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \cdots, \beta - \alpha_s$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示；

$\alpha_1 = \beta - \alpha_2 + \cdots + \beta - \alpha_s$,

$\alpha_2 = (\beta - \alpha_1) + (\beta - \alpha_3) \cdots + (\beta - \alpha_s), \cdots,$

$\alpha_s=(\beta-\alpha_1)+(\beta-\alpha_3)\cdots+(\beta-\alpha_{s-1})$，

即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_s$ 线性表示.于是 $\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_s$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价.

且 $\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_s$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的向量个数相等，则向量组 $\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

九、已知 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s$ 线性表示，但不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示.证明 α_s 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$ 线性表示，而不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示.

【解题过程】 $\because\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s$ 线性表示

$\therefore$ 存在实数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{s-1}\alpha_{s-1}+k_s\alpha_s$$

$\because\beta$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示

$\therefore k_s\neq 0$

$$\therefore\alpha_s=-\frac{k_1}{k_s}\alpha_1-\frac{k_2}{k_s}\alpha_2-\cdots-\frac{k_{s-1}}{k_s}\alpha_{s-1}+\frac{1}{k_s}\beta,$$

于是 α_s 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1},\beta$ 线性表示

假设 α_s 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示，与条件矛盾.于是 α_s 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 线性表示.