相似矩阵

陈树伟

swchen@swjtu.edu.cn

相似矩阵

- 特征值与特征向量

- 相似矩阵

特征值与特征向量

（一） 特征值特征向量的概念

定义. 设A是n阶方阵，如果存在**数**λ和**非零向量**x使

$$Ax = \lambda x \quad (1)$$

则称λ为矩阵A的**特征值**；非零x向量称为A的对应于特征值λ的**特征向量**。

A的所有特征值的全体称为**矩阵A的谱**，记为 $\sigma(A)$

特征值与特征向量

例1. 请找出n阶单位矩阵 E_n 及n阶零矩阵 0_n 的特征值及所对应的特征向量。

解： n阶单位矩阵特征值为1，即 $\sigma(E)=\{1\}$，且1所对应的特征向量为**非零**n维向量全体。n阶零矩阵的特征值为0, $\sigma(0)=\{0\}$

且0所对应的特征向量为**非零**n维向量全体。

特征值与特征向量

（二）特征值与特征向量的求法

定理1. λ是矩阵A的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$

记 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$，则 $f(\lambda)$是一个关于λ的n次多项式，称 $f(\lambda)$ 是矩阵A的**特征多项式**。称方程 $f(\lambda) = 0$ 是矩阵A的**特征方程**。

注：λ是矩阵A的**特征值**当且仅当λ是矩阵A的特征方程 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = 0$ 的**根**。

由 $(\lambda E - A)x = 0$，即
$$\begin{cases} (\lambda - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n = 0 \\ -a_{21}x_1 + (\lambda - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (\lambda - a_{1n})x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

特征值与特征向量

定理2. A的对应于特征值λ的**特征向量**x就是齐次方程组（2）的**非零解向量**。

A的对应于特征值λ的全部特征向量和零向量一起构成n维空间的一个向量子空间，称为**特征子空间**。

例. 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求$A$的特征值和特征向量.

解： (1)**求矩阵特征值**: $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

由$f(\lambda)=0$得A特征值为$\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$，即$\sigma(A)=\{2,1\}$

特征值与特征向量

(2) **求矩阵特征向量**

当$\lambda_1=2$时，解齐次方程组$(2E-A)x=0$, $(2E-A)=\begin{pmatrix}3&-1&0\\4&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解系 $p_1=(0,0,1)^T$。故$\lambda_1=2$的特征向量的全体为$\{kp_1\mid k\neq 0\}$

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，解齐次方程组$(E-A)x=0$, $(E-A)=\begin{pmatrix}2&-1&0\\4&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

得基础解系 $p_2=(-1,-2,1)^T$ 故$\lambda_2=\lambda_3=1$的特征向量的全体为$\{kp_2\mid k\neq 0\}$

特征值与特征向量

例 设$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$，求$A$的特征值和特征向量.

解：(1)求矩阵特征值：$f(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&6&0\\-3&-5-\lambda&0\\-3&-6&1-\lambda\end{vmatrix}=-(2+\lambda)(1-\lambda)^2$

由$f(\lambda)=0$得A特征值为$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$，即 $\sigma(A)=\{-2,1,1\}$

(2)求矩阵特征向量

当$\lambda_1=-2$时，解齐次方程组$(A+2E)x=0$

$$(A+2E)=\begin{pmatrix}6&6&0\\-3&-3&0\\-3&-6&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_1=(-1,1,1)^T$ 故$\lambda_1=-2$的特征向量的全体为$\{kp_1\,|\,k\neq 0\}$

特征值与特征向量

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，解齐次方程组 $(A-E)x=0$

$$(A-E)=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $p_2=(0,0,1)^T, p_3=(-2,1,0)^T$

故$\lambda_2=\lambda_3=1$的特征向量的全体为 $\{k_1p_2+k_2p_3 \mid k_1^2+k_2^2\neq 0\}$

特征值与特征向量

（三）特征值与特征向量的性质

(1)若向量α是矩阵A的特征向量，则对任意**非零常数**$k(k \neq 0)$, $k\alpha$也是矩阵A的**特征向量**。

(2)设λ_0是A的特征值，则$a\lambda_0$是aA的特征值,λ_0^m是A^m的特征值。一般地若λ_0是A的特征值，则$a_0+a_1\lambda_0+a_2\lambda_0^2+\cdots+a_k\lambda_0^k$是$a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_kA^k$的**特征值**。

特征值与特征向量

(3)设n阶方阵A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$， 则（推广的韦达定理）

1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

其中，矩阵A的所有特征值之和称为**矩阵A的迹**,记为$Tr(A)$. 即

$$Tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$$

故：(1) 矩阵A的迹就为矩阵主对角线上元素之和;

(2) 方阵A可逆当且仅当A的特征值均不为0。

(4) 设n阶方阵A可逆, λ是A的特征值，则λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值。

(5) 矩阵A的对应于**不同特征值**的**特征向量**是**线性无关**的。

证明： 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是A的m个互不相同的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是相应的特征向量， 则 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,m)$

设有常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 满足 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0\ (*)$

$(*)$乘 A 得 $A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)=0$ ，即有

$$\lambda_1k_1\alpha_1+\lambda_2k_2\alpha_2+\cdots+\lambda_mk_m\alpha_m=0 \quad (1)$$

同理，$(*)$依次乘 $A,A^2,\cdots,A^{m-1}$，得：

$$\lambda_1^{\ 2}k_1\alpha_1+\lambda_2^{\ 2}k_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m^{\ 2}k_m\alpha_m=0 \quad (2)$$

$\cdots$,

$$\lambda_1^{\ m-1}k_1\alpha_1+\lambda_2^{\ m-1}k_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m^{\ m-1}k_m\alpha_m=0 \quad (m)$$

特征值与特征向量

得：
$$(k_1\alpha_1,k_2\alpha_2,\cdots,k_m\alpha_m)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1}\end{pmatrix}=(0,0,\cdots,0)$$

又 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是m个互不相同的特征值，故范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le m}\left(\lambda_j-\lambda_i\right)\neq 0$$

故对应矩阵可逆, 从而有 $(k_1\alpha_1,k_2\alpha_2,\cdots,k_m\alpha_m)=(0,0,\cdots,0)$

又特征向量为非零向量，故 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是线性无关的。

特征值与特征向量

例. 设n阶方阵A的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=2,\cdots,\lambda_n=n-1$，问方阵$A$是否可逆? $\frac{1}{2}E-A$是否可逆? 求$\left|\frac{1}{2}E-A\right|$。

解: 由$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_n$ 得 $|A|=0$， 故A不可逆。

$\frac{1}{2}E-A$ 的特征值为 $\lambda_1=\frac{1}{2},\lambda_2=-\frac{1}{2},\cdots,\lambda_n=-n+\frac{3}{2}$,

故 $\left|\frac{1}{2}E-A\right|\neq 0$

故 $\frac{1}{2}E-A$ 可逆。

特征值与特征向量

例. 设n阶矩阵A, B满足$R(A)+R(B)<n$，证明A和B有共同的特征值，公共的特征向量。

证明: 齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x=0$，其系数矩阵的秩 $R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq R(A)+R(B)< n$

故齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x=0$ 有非零解。

即，齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 有公共非零解。

故有共同的特征值0，其共同的特征向量为

$Ax=0$ 与 $Bx=0$ 的公共非零解。

相似矩阵

定义1. 设A、B是两个n阶方阵，如果存在n阶可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP = B$$

则称***B*相似于*A*，**记为$\boldsymbol{A \sim B}$，可逆矩阵P称为将A变成B的**相似变换矩阵。**

定理1. 相似作为矩阵之间的一种关系，具有以下三条性质：

(1) 自反性：$A \sim A$；

(2) 对称性：若$A \sim B$，则$B \sim A$；

(3) 传递性：若$A \sim B$，$B \sim C$，则$A \sim C$

相似矩阵

定理2. 相似矩阵的特征多项式相同，从而相似矩阵有相同的特征值。

证明： 设A～B，则存在可逆矩阵P满足 $P^{-1}AP=B$

$$|B-\lambda E|=|P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P|=|P^{-1}(A-\lambda E)P|=|P^{-1}||A-\lambda E||P|=|A-\lambda E|$$

由此A与B有相同的特征多项式，从而有相同的特征值。

注： 有相同的特征值的矩阵不一定相似.

例： $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 有相同的特征多项式，但不相似(为什么?)

相似矩阵

例1. 设$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\ 15 & -5 & 21\\ 3 & -3 & 7\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，求$P^{-1}AP$和$A^{20}$。

解： 计算得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 5\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & -1 & 5\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\ 15 & -5 & 21\\ 3 & -3 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=\Lambda$$

$$\Lambda^{20}=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP=P^{-1}A(PP^{-1})A(P\cdots P^{-1})AP=P^{-1}A^{20}P$$

$$A^{20}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4^{20} & 0\\ 0 & 0 & (-2)^{20}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & 5\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

相似矩阵

（二）矩阵A 的对角化问题

定理3 n阶方阵A可相似对角化（A与对角阵相似）的**充要条件**是A有n个线性无关的特征向量。

证明：(1)必要性

设n阶方阵A可对角化，于是存在一个可逆方阵P使得 $P^{-1}AP=\Lambda$或 $AP=P\Lambda$ (*)

$$\text{其中}\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\text{是对角阵}$$

将矩阵P用其列向量表示为 $P=\left(p_1,p_2,\cdots,p_n\right)$，由(*)得 $AP=(Ap_1\quad Ap_2\quad\cdots\quad Ap_n)$ $=P\Lambda=(\lambda_1p_1\quad\lambda_2p_2\quad\cdots\quad\lambda_np_n)$。因而有 $Ap_i=\lambda_ip_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ $p_i\neq0$

即 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$是A的特征向量，又P可逆，故它们线性无关。

故n阶方阵A可对角化，则必有n个无关的特征向量。

相似矩阵

(2)充分性

设 n阶方阵A的n个无关的特征向量为$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 对应特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,

$$Ap_i = \lambda_i p_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$$

即，作矩阵$P = \left(p_1, p_2, \cdots, p_n\right)$,则$P$是可逆矩阵.

$$AP = A(p_1, p_2, \cdots p_n) = \left(Ap_1, Ap_2, \cdots, Ap_n\right) = (\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \cdots, \lambda_n p_n)$$

$$= (p_1, p_2, \cdots p_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = P diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

即，$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

相似矩阵

注：若可逆矩阵P可将A对角化，即 $P^{-1}AP$ 为对角阵, 则

(1) P的**每列**均为方阵**A**的**特征向量**。

(2) 与A相似的对角阵主对线上的元素，是方阵A的全体特征值。顺序由P中的特征向量顺序决定。

定理4. 若n阶方阵A有n个互不相同的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则$A$可对角化，且 $A\sim diag\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$, 相似变换矩阵$P$是由对应的特征向量作为列构成的矩阵。

即若 $P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{pmatrix}$, 则 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 分别是A的与 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 对应的特征向量。

注：n阶方阵A有n个互不相同的特征值是A可对角化充分而非必要条件。

相似矩阵

例2. 对矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$ 有特征向量 $p_1=(-1,1,1)^T$，对应的特征值为-2。

有特征向量 $p_2=(-2,1,0)^T$，$p_3=(0,0,1)^T$，对应的特征值为1。

易知 p_1, p_2, p_3 线性无关，故矩阵A可对角化。

作矩阵 $P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2 & p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则必有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & 5 & 0\\ -3 & 6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

相似矩阵

例2. 对矩阵$A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$有特征向量 $p_1=(-1,-1,1)^T$，对应的特征值为-2。

有特征向量 $p_2=(-2,1,0)^T, p_3=(0,0,1)^T$, 对应的特征值为1。

易知 p_1, p_2, p_3 线性无关，故矩阵A可对角化。

(1) 作矩阵 $P=\begin{pmatrix} p_1+p_2 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ $P^{-1}AP$ 是否是对角矩阵？

(2) 作矩阵 $P=\begin{pmatrix} p_1 & p_2+p_3 & p_3 \end{pmatrix}$ $P^{-1}AP$ 是否是对角矩阵？

(3) 作矩阵 $P=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 2p_2 \end{pmatrix}$ $P^{-1}AP$ 是否是对角矩阵？

相似矩阵

注：n阶方阵A可对角化的充要条件

(1) n阶方阵A可对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量。

(2) n阶方阵A可对角化 $\Leftrightarrow$ **每一个**特征值所拥有的线性无关的**特征向量个数等于特征值**的**重数**。

(3) 属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

相似矩阵

例3. 设矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\-4 & 3 & 0\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，方阵$A$是否可对角化，若能对角化求矩阵

P把A相似对角化。

解： (1)求矩阵A特征值，由 $f(\lambda)=(2-\lambda)(1-\lambda)^2=0$ 得特征值

$$\lambda_1=2, \lambda_2=\lambda_3=1$$

(2) 当$\lambda_1=2$时，解齐次方程组$(A-2E)x=0$，得基础解系 $p_1=(0,0,1)^T$。

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，解齐次方程组$(A-E)x=0$，

得基础解系 $p_2=(-1,-2,1)^T$

故A不能对角化。

相似矩阵

例4. 设矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 方阵A是否可对角化，若能对角化，求矩阵P把A相似对角化。

解：(1)求矩阵A特征值，由 $f(\lambda)=|A-\lambda E|=(\lambda-1)^3(\lambda+3)=0$ 得特征值：

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,\ \ \lambda_4=-3.$$

(2)当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$, 解齐次方程组$(A-E)x=0$, 得基础解系：

$$p_1=(1\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T,\ p_2=(1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)^T,\ p_3=(-1\ \ 0\ \ 0\ \ 1)^T,$$

当 $\lambda_4=-3$, 解齐次方程组$(A+3E)x=0$, 得基础解系：

$$p_4=(1\ \ -1\ \ -1\ \ 1)^T$$

故A可对角化，且作矩阵 $P=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=diag\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

例5. 设A为3阶方阵且满足 $R(A)=1,\ R(A+2E)=2$ 矩阵A能否对角化，若能，给出一个与A相似的对角矩阵.

解： 由 $R(A)=1$, 得 $|A|=0$, 即, $|A-0E|=0$, 故0是矩阵A的特征值。

由 $R(A)=1$ 可得方程组 $(A-0E)x=0$ 解空间为2维，即特征值0有两个线性无关的特征向量。

由 $R(A+2E)=2$ ，得 $|A-(-2)E|=0$，故-2是矩阵A的特征值。

-2的一个特征向量与0的两个线性无关的特征向量形成的向量组无关，故A能对角化，且相似于 $diag(0,0,-2)$