向量的线性关系

陈树伟

swchen@swjtu.edu.cn

向量的线性关系

- 向量的线性关系
- 向量组的线性组合、线性表示
- 线性相关与线性无关

向量的线性关系

定义1：一个n元有序数组称为一个***n*维向量**.

n维向量α可以用1×n的行矩阵表示为 $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ 称为**行向量**。

n维向量也可以用n ×1的列矩阵表示为 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为**列向量**。

其中第i个数 a_i 称为向量α的**第*i*个坐标**或**第*i*个分量**，分量的个数称为**向量α的维数**。

定义2: 坐标都是零的向量称为**零向量**, 记为： $\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T$

定义3: 两个n维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ **相等**，记为

$$\alpha=\beta,\text{ 如果：} a_i=b_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

注： 若 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 则 $\alpha^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$

故 $\alpha\neq\alpha^T$

向量的线性关系

定义4：设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是两个$n$ 维向量, $\lambda\in R$,

(1)**向量的加法**: α与 β的和(记为$\alpha+\beta$)是一个n 维向量，定义为：

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n),$$

(2)**数乘向量**：数λ与向量α 的乘积(记为$\lambda\ \alpha$)是一个n维向量，定义为:

$$\lambda\alpha=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)$$

向量的加法与数乘运算统称为**向量的线性运算**。

向量的线性关系

注：若$\lambda=-1$时，记$(-1)\alpha$ 为$-\alpha$. 即

$$-\alpha=(-1)\alpha=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$$

将 $\alpha+(-1)\beta$ 记作：$\alpha-\beta$，称为向量α与β的**差**，即

$$\alpha-\beta=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n),$$

运算规律

向量的加法与数乘是**矩阵**的加法与数乘运算的**特例**。

它们有以下**运算规律**：

$$1)\ (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \qquad 2)\ \alpha+0=\alpha$$

$$3)\ \alpha+(-\alpha)=0 \qquad 4)\ \alpha+\beta=\beta+\alpha$$

$$5)\ 1\cdot\alpha=\alpha \qquad 6)\ \lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$$

$$7)\ \lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta \qquad 8)\ (\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$$

向量组的线性组合、线性表示

定义5. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是n维向量组, $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是一组数，则称

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个**线性组合**。也称向量β能由

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ **线性表示**。

例1. 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1) 由 $2\alpha+3\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, 所以 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ 是α,β 的一个线性组合。

(2) 易知 $\gamma = 2\alpha-\beta$, 所以 γ是α,β 的一个线性组合，或γ能由α,β线性表示。

标准基

定义6. 在n维向量集合 R^n中，如下n个向量 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ $\cdots$ $e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

称为 R^n 的**标准基**。

R^n 中任意一个向量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$， $x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$ (*)

称(*)式为向量x关于标准基$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$的**线性表示**， $x_1,x_2,\cdots,x_n$

称为向量x在标准基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$下的**坐标**。

注. 向量在标准基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$下的坐标就向量的**分量**。

标准基

例2. $$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 - 2e_2 + 3e_3 - 4e_4$$

线性相关与线性无关

定义7. 对于向量组$M=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$，若存在**不全为零**的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$$

则称向量组M **线性相关**，否则称M **线性无关**。

例3. 讨论向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}$ 的线性相关性。

解：设有数 k_1,k_2,k_3 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\mathbf{0}$，即有齐次方程组

$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&3\\1&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=0$。而其系数矩阵行列式 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&2&3\\1&5&6\end{vmatrix}=0$,

由克莱姆法则知道方程组有非零解，故向量组线性相关。

线性相关与线性无关

例4. 讨论向量组 $\alpha_1=(1\quad 2\quad 0),\ \alpha_2=(0\quad 2\quad 1),\ \alpha_3=(0\quad 0\quad -1)$ 的线性相关性。

解：齐次线性方程组 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{pmatrix}=0$ 系数矩阵行列式：$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0$

方程组只有零解，故向量组线性无关。

例5. R^n 中标准基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 线性无关。

例6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，并设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1.$

证明：β_1,β_2,β_3 线性无关。

证明： 设有数 k_1,k_2,k_3 ，使得：$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=\mathbf{0}$ ，即

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=\mathbf{0}$$

整理得：$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=\mathbf{0}$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关可得 $\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$ 方程组的系数行列式

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$ 所以 k_1,k_2,k_3 只能为零，故 β_1,β_2,β_3 线性无关。

线性相关与线性无关

注： （1）$M=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 线性无关，且有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$

则必有 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0.$

(2) $M=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 线性相关　当且仅当　齐次方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\mathbf{0}$$ **有非零解；**

$M=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 线性无关　当且仅当　齐次方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=\mathbf{0}$$ **只有零解。**

线性相关与线性无关

对线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$若记向量$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

我们称m维向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$是线性方程组的**系数向量组**，它们为系数矩阵的列。

线性方程组的向量表达形式：$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$

（1）方程组有解**当且仅当** β 能由向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$线性表示；

（2）方程组有唯一解**当且仅当** β 能由向量组$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$线性表示且表示法唯一。

线性相关与线性无关

定理1. 设 $M=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$有$m(m\geq 2)$个向量，则向量组$M$ **线性相关** $\Leftrightarrow$

M 中至少有一个向量能由其余m-1个向量线性表示。

证明：$\Leftarrow$ 不妨设 $\alpha_1=-l_2\alpha_2-l_3\alpha_3\cdots-l_m\alpha_m$，即 $\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+\cdots+l_m\alpha_m=\mathbf{0}$

故 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 线性相关。

$\Rightarrow$ 由$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$线性相关，可知存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$

不妨设 $k_1\neq 0$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$。故有

$$\alpha_1=-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2-\frac{k_3}{k_1}\alpha_3\cdots-\frac{k_m}{k_1}\alpha_m$$

注：若向量组线性相关，不能保证其中每一个向量都能被其余向量线性表示.

例7. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $M=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$

判断向量组M是否线性相关。

线性相关与线性无关

定理2. 若 $M=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$线性无关，而向量组$N=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta\}$线性相关，则向量$\beta$一定能被向量组$M$线性表示，且表示式是唯一的。

证明：由 $N=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta\}$线性相关，可知存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m,l$

满足 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+l\beta=\mathbf{0},$

若 $l=0,$ 则有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0},$ 又$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 线性无关，

故可得 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0,$ 这与 $k_1,k_2,\cdots,k_m,l$不全为零矛盾，

所以 $l\neq 0,$ 从而有 $\beta=-\frac{k_1}{l}\alpha_1-\frac{k_2}{l}\alpha_2-\cdots-\frac{k_m}{l}k_m\alpha_m$

线性相关与线性无关

定理2. 若$M=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$线性无关，而向量组$N=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta\}$线性相关，则向量$\beta$一定能被向量组$M$线性表示，且表示式是唯一的 .

证明：设有 $\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_{\mathrm{m}}\alpha_m$，则 $\beta=h_1\alpha_1+h_2\alpha_2+\cdots+h_{\mathrm{m}}\alpha_m$

$$\mathbf{0}=(l_1-h_1)\alpha_1+(l_2-h_2)\alpha_2+\cdots+(l_{\mathrm{m}}-h_{\mathrm{m}})\alpha_m$$

又 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 线性无关，故有

$$(l_1-h_1)=(l_2-h_2)=\cdots=(l_{\mathrm{m}}-h_{\mathrm{m}})=0$$

即

$$l_1=h_1,l_2=h_2,\cdots,l_{\mathrm{m}}=h_{\mathrm{m}}$$

即表示唯一。

线性相关与线性无关

定理3. 设两向量组M、N满足$M\subseteq N$，那么

(1) 若向量组M线性相关，则向量组N也线性相关；

(2) 若向量组N线性无关，则向量组M也线性无关。

可简述为：子向量组相关，则向量组也相关；

向量组无关，则子向量组也无关。

推论1. 含有零向量的向量组是线性相关的。

定理4. 两个向量构成的向量组线性相关的**充分必要条件**是这两个向量的对应坐标成比例。

线性相关与线性无关

定理5. 设向量组 $M=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$，用$M$ 中向量作为行向量构造矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$$ 则向量组M 线性相关**充分必要条件**是 $R(A)<m$.

例7. 讨论向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}9\\10\\11\\12\end{pmatrix}$ 的线性相关性。

推论2. n个n维向量的向量组线性相关的**充分必要条件**是此向量组构成矩阵的行列式为零。

线性相关与线性无关

推论3. n阶方阵A可逆**当且仅当**A的n个n维列(行)向量线性无关。

例 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\delta=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

向量作成列的

由 $\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\1&1&1\end{vmatrix}=0$ 可知 $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ 线性相关。

向量作成行的

由 $\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$ 可知 $\{\alpha,\beta,\delta\}$ 线性无关。

线性相关与线性无关

定理6. 设向量组$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$能由向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t\}$线性表示，且$s>t$，则向量组$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$线性相关。

定理7. 设n维向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$满足$m>n$, 则$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$线性相关。