# 西南交通大学 2022－2023 学年第(二)学期考试试卷

课程代码 MATH012312 课程名称 微积分 II 考试时间 120 分钟

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总成绩 |
|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | |

阅卷教师签字：

密封装订线 姓 名 学 号 班 级

**一、选择题** (4 个小题，每小题 5 分，共计 20 分)

(1) 下列说法正确的是( B )

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}=1.$ (B) $\lim\limits_{n\to\infty}n\tan\frac{1}{n}=1.$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\tan\frac{1}{n}$ 不存在. (D) $\lim\limits_{n\to\infty}n\tan\frac{1}{n}$不存在.

(2) 关于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3}}$的收敛性，如下判断正确的是 ( A ).

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛

(C) 无法判定 (D) 发散

(3) 已知$D=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2 & -1\\ 3 & 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=48$，则$6A_{41}+2A_{42}-4A_{43}+2A_{44}=$（ D ），其中$A_{ij}$表示$D$的第$i$行$j$列的代数余子式。

(A) 0 (B) 24 (C) 48 (D) 96

(4) 设$S=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$是一组 $n$ 维非零向量，且$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，则下列叙述正确的是（ B ）。

(A) 向量组$S$的秩等于 3 (B) 向量组$S$的秩大于等于 3

(C) 向量组$S$的秩等于 4 (D) 向量组$S$的秩小于等于 3

**二、填空题** (4 个小题，每小题 5 分，共计 20 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n=$ $e^2$.

(2) 定积分 $\int_0^1 x^2e^xdx=$ $e-2$.

(3) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$ $\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 2\\ 0 & 1/2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$。

(4) 已知向量$\eta=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$是矩阵$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&a&-2\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量，则$a=$__2__，$b=$__-4__。

三、**计算题** (4 个小题，共计 30 分)

(1) 计算反常积分 $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ (7 分)

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$=\tan^{-1}(x+1)|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

(2) 计算定积分 $\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}dx$ (9 分)

**解：原积分**$=2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$，

令 $x=\sin t$， $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，当 $x=0$ 时，$t=0$； $x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$

$$2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=2(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t)$$

$$=2(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{8}.$$

(3) 计算数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}$ (7 分)

当$x=0$，原极限=0

当$x\neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}x\cdot\sin\frac{x}{2^n}/\frac{x}{2^n}=x$

(4) 计算数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{2n-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{3}}{\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}\right)^{\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}\right)^{\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}\right)^{\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\cdot\mathbf{4}}=\boldsymbol{e}^{\mathbf{4}}$$

## 四、解答题 (4 个小题，共计 30 分)

(1) 判断交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ \frac{n^3}{n^4+1}$的收敛性. (6 分)

Since the series is alternating, we use the Alternating Series Test.

First to show $a_n=\frac{n^3}{n^4+1}$ is decreasing.

Let $f(x)=\frac{x^3}{x^4+1}$, we have $f'(x)=\frac{x^2(3-x^4)}{(x^4+1)^2}$.

When $x>\sqrt[4]{3}$, $3-x^4<0$, $f'(x)<0$. So, $a_{n+1}<a_n$ when $n\geq 2$.

Second, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^4+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/n}{1+1/n^4}=0$

Therefore, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ \frac{n^3}{n^4+1}$ is (conditionally) convergent.

Conditionally, because $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^4+1}$ is divergent due to the fact that $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^4+1}/\frac{1}{n}=1$, and harmonic series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ is divergent.

(2) 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}2ne^{-n^2}$的收敛性. (6 marks)

Since the integral $\int_1^{\infty}2xe^{-x^2}dx$ is easily evaluated, we use the Integral Test.

$$\int_1^{\infty}2xe^{-x^2}dx=-\int_1^{\infty}e^{-x^2}d(-x^2)=-e^{-x^2}\Big|_1^{\infty}=e^{-1}$$

So $\sum_{n=1}^{\infty}2ne^{-n^2}$ is convergent.

The Ratio Test also works.

$$a_{k+1}/a_k=\frac{2(k+1)e^{-(k+1)^2}}{2ke^{-k^2}}=\left(1+\frac{1}{k}\right)e^{-(2k+1)}\to 0$$

(3) 求向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\3\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\2\\5\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_5=\begin{pmatrix}4\\6\\5\\9\end{pmatrix}$的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表出。 （9 分）

解：构造矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$ 并作初等行变换.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&3&3&4\\1&3&2&-1&6\\1&2&2&1&5\\2&3&5&4&9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&3&3&4\\0&1&-1&-2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B.$$

因此，向量组的秩=3

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个极大线性无关组。

接着化成行最简形

$$B\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 5 & 3\\0 & 1 & 0 & -2 & 1\\0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

且有 $\alpha_4=5\alpha_1-2\alpha_2$，$\alpha_5=3\alpha_1+\alpha_2$.

(4) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & 0\\2 & 0 & -2\end{pmatrix}$, 求一个可逆矩阵$P$，将矩阵$A$相似对角化.　　（9 分）

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\0 & \lambda-2 & 0\\-2 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-2)^2$

因此 $A$的特征根为：$\lambda_1=-3,\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=-3$时，解方程组 $(A+3E)x=0$

由$(A+3E)=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\0 & 5 & 0\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

得线性无关的特征向量

$\xi_1=(-\frac{1}{2},0,1)^T$ ；

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$时，解方程组 $(A-2E)x=0$

由$(A-2E)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\\2 & 0 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

得线性无关的特征向量

$\xi_2=(0,1,0)^T$，$\xi_3=(2,0,1)^T$.

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，即为所求相似变换矩阵.