第二章　线性空间

第一节　线性空间与子空间

1. 判断下列集合对于所指定的运算是否构成实线性空间.

（1）全体n阶实对称矩阵，对于矩阵的加法和数乘；　（是）

【解题思路】本题考查线性空间的定义：我们称一个非空集合V为实数域上的线性空间，如果在它上面有如下的加法运算和数乘运算：加法：对任意$v,w\in V$，有$v+w\in V$. 并且加法满足（1）结合律：$\left(v+w\right)+u=v+\left(w+u\right)$；（2）交换律：$v+w=w+v$；（3）存在加法单位$0\in V$，满足对任意的$v\in V$，$0+v=v$，我们称其为零向量；（4）对于每一个$v\in V$，存在加法逆，亦即存在$w\in V$，使得$v+w=0$；数乘：对任意$v\in V,k\in R$，有$kv=vk\in V$.并且数乘满足：对任意的$v,w\in V$，$k,l\in V$，（5）$1v=v$;（6）$k\left(lv\right)=\left(kl\right)v$;（7）$\left(k+l\right)v=kv+lv$;（8）$k\left(v+w\right)=kv+kw$.

【解题过程】全体n阶实对称矩阵，对于矩阵的加法和数乘满足线性空间的定义，构成线性空间.

（2）全体行列式等于零的n阶矩阵的集

合，对于矩阵的加法和数乘；（否）

【解题过程】全体行列式等于零的 n 阶方阵所构成的集合，关于矩阵的加法和数乘，不构成线性空间；理由：令

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},|A|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0,B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

$$|B|=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0,|A+B|\neq 0$$

（3）非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解的集合 $W=\left\{\alpha \middle| A\alpha=b\ \right\}$，对于向量的加法与数乘；（否）

【解题过程】不构成线性空间；理由：

$\alpha_1,\alpha_2\in W$，$A\left(\alpha_1+\alpha_2\right)=2\beta$，

$\alpha_1+\alpha_2\notin W$。

（4）$R^+=\left\{a\in R\middle|a>0\right\}$，定义加法和数乘运算为 $a\oplus b=ab,k\circ a=a^k$.（是）

【解题过程】如果定义加法和数乘为

$$a\oplus b=ab,k\circ a=a^k$$

构成 R^+ 为实线性空间；理由：加法：对任意 $a,b\in R^+$，有 $a\oplus b=ab\in V$.并且加法对任意 $a,b,c\in R^+$ 满足（1）结合律：$\left(a\oplus b\right)\oplus c=abc=a\oplus\left(b\oplus c\right)$；（2）交换律：$a\oplus b=ab=ba=b\oplus a$；（3）存在加

法单位$1\in R^{+}$，满足对任意的$a\in R^{+}$，$1\oplus a=a$；（4）对于每一个$a\in R^{+}$，存在加法逆，亦即存在$\frac{1}{a}\in R^{+}$，使得$a\oplus\frac{1}{a}=1$；

数乘：对任意$a\in R^{+},k\in R$，有$k\circ a=a^{k}\in R^{+}$.并且数乘满足：对任意的$a,b\in R^{+}$，$k,l\in R$，（5）$1\circ a=a$;（6）$k\circ\left(l\circ a\right)=a^{l^{k}}=\left(k\circ l\right)\circ a$（7）$\left(k\oplus l\right)\circ a=a^{kl}=k\circ a\oplus l\circ a$;（8）$k\circ\left(a\oplus b\right)=\left(ab\right)^{k}=a^{k}b^{k}=k\circ a\oplus k\circ b.$

2. 证明：$V=\left\{\left(x,y,z\right)\middle|x+2y+3z=0\right\}$是$R^{3}$的子空间.

【解题思路】本题考查子空间的定义：线性空间V的一个子集W成为一个子空间如果（1）零向量$0\in w$；（2）若$w_{1},w_{2}\in W$,那么$w_{1}+w_{2}\in W$；（3）若$w\in W$，那么任意数乘$kw\in W$.

【解题过程】易知$V=\left\{\left(x,y,z\right)\middle|x+2y+3z=0\right\}$是$R^{3}$的子集，且$0=\left(0\quad 0\quad 0\right)\in V$；若$v_{1}=\left(x_{1}\quad y_{1}\quad z_{1}\right)\in V,v_{2}=\left(x_{2}\quad y_{2}\quad z_{2}\right)\in V,$分别满足$x_{1}+2y_{1}+3z_{1}=0$，

$x_2+2y_2+3z_2=0$，两式相加得：$(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)+3(z_1+z_2)=0$，即 $v_1+v_2\in W$；$\forall k\in R, kv_1=(kx_1 \quad ky_1 \quad kz_1)$

满足：$kx_1+2ky_1+3kz_1=0$，即 $kv_1\in W$；

由此可知，$V=\{(x,y,z)|x+2y+3z=0\}$ 是 R^3 的子空间.

3. 设

$V_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in R, x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$,

$V_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in R, x_1+x_2+\cdots+x_n\neq 0\}$,

问 V_1,V_2 是不是向量空间？为什么？

【解题过程】

$V_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\in R, x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$

是向量空间；理由：加法：对任意 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V_1,(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in V_1$，有

$$\begin{aligned}&(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)\\&=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)\in V_1\end{aligned}$$

并且加法对任意 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V_1,(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in V_1,(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in V_1$

满足结合律，交换律；存在加法单位 $(0,0,\cdots.0)\in V_1$，满足对任意的 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V_1$，

$\left(0,0,\cdots.0\right)+\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$

对于每一个$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in V_1$，存在加法逆，

亦 即 存 在 $\left(-x_1,-x_2,\cdots,-x_n\right)\in V_1$， 使 得

$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)+\left(-x_1,-x_2,\cdots,-x_n\right)$

$=\left(0,0,\cdots,0\right)$；

数乘：对任意$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in V_1,k\in R$，有

$k\cdot\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\left(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n\right)\in V_1$.

并且数乘满足：对任意的

$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in V_1,\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)\in V_1,$，

$k,l\in R$，

$1\cdot\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$;

$k\cdot\left(l\cdot\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\right)=kl\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$;

$$\left(k+l\right)\cdot\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$$
$$=k\cdot\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)+l\cdot\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right);$$

$$k\cdot\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)+\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)\right)$$
$$=k\cdot\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)+k\cdot\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right).$$

$V_2=\left\{\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\middle|x_i\in R,x_1+x_2+\cdots+x_n\neq 0\right\}$

不是向量空间；理由：

$(1,0,\cdots,0)\in V_2,(-1,0,\cdots,0)\in V_2$,

但$(1,0,\cdots,0)+(-1,0,\cdots,0)=\left(0,0,\cdots,0\right)\notin V_2$.