矩阵理论初步

——矩阵的秩

陈树伟

swchen@swjtu.edu.cn

矩阵本质特征的一种刻画

Why？

从另外一个角度研究矩阵，简化求解线性方程组

How？

矩阵的秩的定义→矩阵的秩的计算→利用秩来判定线性方程组的解的存在性

矩阵的秩

一、矩阵秩的概念

定义1　在一个 $m \times n$ 矩阵A中，任意取出k个行和k个列，位于这些行及列的交叉处的元素按原来的位置组成一个k阶行列式，称其为矩阵A的一个**k阶子式**。

例:　矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的秩

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

取A的1、2、3行和A的1、2、4列得到A的一个3阶子式为

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix}=-6$$

取A的1、2、3、4行和A的1、2、3、4列得到A的一个4阶子式

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

注 对一个 $m\times n$ 矩阵显然有

$$k\le\min\{m,n\}$$

一共有 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个k阶子式

矩阵的秩

定义2：矩阵A的不等于零的子式的最高阶数称为A的**秩**，

记作秩为rank(A)或$R(A)$，并**规定零矩阵的秩是0。**

例 $$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵A的所有4阶子式全为0（为什么？）

有一个3阶子式不为0，故 $R(A)=3$

矩阵的秩

注：（1）事实上矩阵A是阶梯形矩阵，它的秩等于其非零行的个数。

这对一般的阶梯形矩阵也成立。

（2）$m \times n$ 矩阵秩显然有

$$0 \le R(A) \le \min\{m, n\}$$

即一个矩阵的秩肯定小于等于矩阵行数和列数的最小者

（3）$R(A) \le r \Leftrightarrow$ A中**所有** $r+1$阶子式全为零

$R(A) \le r \Leftrightarrow$ A中所有大于 r 阶子式全为零

$R(A) \ge r \Leftrightarrow$ A中有**一个** r 阶子式不为零

矩阵的秩

例1 求矩阵A的秩，已知 $$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & -4 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

解: 首先考查A的最高阶子式(这里为4阶且只有一个)，即

$$|A| = -4 \neq 0$$

故 $$R(A)=4$$

矩阵的秩

定理1　n阶方阵A可逆的充分必要条件是秩

$$\boldsymbol{R(A)=n}$$

注 (1) n阶方阵A秩为n $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$ $\Leftrightarrow$ n阶方阵A可逆

(2) n阶方阵A的秩$R(A) < n$ $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$ $\Leftrightarrow$ n阶方阵A不可逆

当n阶方阵A的秩为n时，也称A为**满秩矩阵**，

否则称A为**降秩矩阵**。

矩阵的秩

例 2 试证对任意矩阵A，总有 $R(A)=R(A^T)$

例 3 设A，B都是 $m\times n$ 型矩阵， 令

$$C_{m\times 2n}=(A \vdots B)$$

证明不等式 $\max(R(A),R(B))\le R(C)\le R(A)+R(B)$

注 乘积矩阵的秩有如下性质，这里先罗列出来一些，证明后面给出

（1） $R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$

（2） 若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$，则 $R(A_{m\times n})+R(B_{n\times l})\le n$

利用初等变换求矩阵的秩

定理2　矩阵经初等变换后其秩不变

即　$A \sim B$, 则 $R(A) = R(B)$.

证明:　先证明: 若 A 经一次初等行变换变为B, 有

$$R(A) \le R(B).$$

设 $R(A) = r$, 则 A 有某个 r 阶子式记为 D_r 且 $D_r \neq 0$

(1) 当 $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$ 或 $A \xrightarrow{kr_i} B$ 时,

则在 B 中总能找到与 D_r 相对应的r 阶子式 $\overline{D_r}$

满足 $\overline{D}_r = D_r$ 或 $\overline{D}_r = -D_r$, 或 $\overline{D}_r = kD_r$, 因此 $\overline{D}_r \neq 0$,

从而　$r \le R(B)$

(2) 当 $A \xrightarrow{r_i+kr_j} B$ 时,

由于对换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 时结论成立，故只需考虑 $A \xrightarrow{r_1+kr_2} B$ 这一特殊情况.

（I） D_r 不含第A的第1行,

这时 D_r 也是B 的r阶非零子式, 故 $r \leq R(B)$

（II） D_r 含第A第1行,

$$\overline{D}_r = \begin{vmatrix} r_1 + kr_2 \\ r_p \\ \cdots \\ r_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_p \\ \cdots \\ r_q \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} r_2 \\ r_p \\ \cdots \\ r_q \end{vmatrix} = D_r + k\hat{D}_r,$$

若 $p = 2$ 则 $\overline{D}_r = D_r \neq 0$

若 $p \neq 2$ $\hat{D}_r$ 也是B的r阶子式，由 $\overline{D}_r - k\hat{D}_r = D_r \neq 0$

知 $\overline{D}_r$ 与 $\hat{D}_r$ 不同时为0. 总之B 中存在的r阶非零子式 $\overline{D}_r$ 或 $\hat{D}_r$

故 $r \leq R(B)$

利用初等变换求矩阵的秩

以上证明了若 A 经一次初等行变换变为 B , 则 $R(A) \le R(B)$.

由于 B 亦可经一次初等行变换变为A，故也有 $R(B) \le R(A)$.

因此 $R(A) = R(B)$.

经一次初等行变换矩阵的秩不变, 即可知经有限次初等行变换矩阵的秩仍不变．对列变换同理可证明．故矩阵经初等变换后其秩不变

推论1　一个矩阵的阶梯形中非零行的个数就是原矩阵的秩。

为了计算矩阵A的秩，只要用初等变换把A变成阶梯形即可。

利用初等变换求矩阵的秩

注　　由矩阵经初等变换后其秩不变可知道：

“两个矩阵等价则这两个矩阵的秩相等”。

事实上反之也对，即：

“两个同型矩阵若秩相等那么这两矩阵也等价”。

也就是我们有

定理　两个同型矩阵等价当且仅当它们秩相等.

事实上任何秩为r的$m\times n$矩阵通过初等变换化为

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix},$$

即它们都与同一个矩阵等价，故它们之间也等价。

利用初等变换求矩阵的秩

例3　求矩阵A的秩，已知 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\1&0&1&1\\2&-4&0&1\\1&0&3&4\end{pmatrix}$

解:　**法二**

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\1&0&1&1\\2&-4&0&1\\1&0&3&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&2&1&1\\0&0&0&1\\0&2&3&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-r_2}\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&2&1&1\\0&0&0&1\\0&0&2&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&2&1&1\\0&0&2&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

故　$R(A)=4$

利用初等变换求矩阵的秩

例4 已知 $n(>1)$ 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$ 求 $R(A)$

(2)

解: $$A \xrightarrow[k=2,3,\cdots,n]{r_k - r_1} \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1+\sum_{j=2}^{n} c_j} \begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}$$

当 $a+(n-1)b \neq 0$

矩阵已经变为阶梯型

$$R(A)=\begin{cases} n, & a \neq b \\ 1, & a = b \end{cases}$$

当 $a+(n-1)b = 0$

$$R(A)=\begin{cases} 0, & a-b=0 \\ n-1, & \text{其他} \end{cases}$$

矩阵秩的应用----线性方程组有解的判定

有了矩阵的秩的概念，我们能给出线性方程组解的判定定理，

进一步利用矩阵理论我们还可以求出线性方程组的解。

（一）线性方程组的一些基本概念

1 线性方程组相关定义

形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

的方程组称为m个方程的**n元线性方程组**

矩阵秩的应用----线性方程组有解的判定

n元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

$x_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$ 代表未知量；

$a_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 称为方程组的系数；

$b_i\,(i = 1, 2, \cdots, m)$ 方程组的常数项，若 $b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$,

那么此方程组为**齐次**方程组，否则称为**非齐次线性方程组**。

若 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$ 使得方程组的m个等式均成立，

则称它们为方程的**一个解**，记为向量 $(c_1, c_2, \cdots c_n)^T$

故称一个解为一个**解向量**。

矩阵秩的应用----线性方程组有解的判定

方程组的解的全体称为方程组的**解集合**或**解向量集合，**

求解方程组是求方程组的**全体解**.

如果两个方程组有相同的解集合，则称它们是**同解方程组**。

2 线性方程组研究的主要内容

（1）给定的线性方程组是否有解？

（2）如果方程组有解，它有多少解？

（3）如果方程组有许多解，这些解之间有什么联系？

（4）如何求出方程组的全部解？

矩阵秩的应用----线性方程组有解的判定

齐次线性方程组一定有解----零解，故对于齐次线性方程组

讨论的主要问题：

（1）齐次线性方程组是否有非零解?

（2）若方程组有非零解，这些解之间有什么联系？

（3）如何求出方程组的全部解（解集合）？

对非齐次线性方程组若

（1）非齐次线性方程组有解，则说它是**相容方程组**，

（2）否则称它是**不相容方程组.**

线性方程组与矩阵的关系

对n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A、$\overline{A}$ 分别称为方程组（1）的**系数矩阵与增广矩阵。**

x 称为**未知数向量**, β 称为**常数项向量**。显然有（1）等价于

$$Ax = \beta \quad (2) \qquad 且 \qquad \overline{A} = (A\ \beta)$$

线性方程组与矩阵的关系

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1) \iff Ax = \beta \quad (2)$$

记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(A) 线性方程组 $Ax = \beta$ 有解 $\iff$ 存在n维列向量 α 满足 $A\alpha = \beta$

(B) $\alpha = (c_1, c_2, \cdots c_n)^T$ 是方程 $Ax = \beta$ 的解 $\iff$ $A\alpha = \beta$

线性方程组与矩阵的关系

定理 3 线性方程组 $Ax=\beta$ 的增广矩阵 $\overline{A}=(A\ \beta)$ 通过初等**行**变换变成矩阵 $\overline{A}'=(A'\ \beta')$，则线性方程组

$$Ax=\beta$$

与线性方程组

$$A'x=\beta'$$

是同解线性方程组。

推论 1 齐次线性方程组 $Ax=O$ 的系数矩阵 A 通过初等**行**变换变成矩阵 A', 则齐次线性方程组 $Ax=O$ 与齐次线性方程组 $A'x=O$ 是同解线性方程组。

注： 消元法保持方程组解不变。

线性方程组与矩阵的关系

定理 3　线性方程组 $Ax=\beta$ 的增广矩阵 $\overline{A}=(A\ \beta)$ 通过初等行变换变成矩阵 $\overline{A}'=(A'\ \beta')$，则线性方程组 $Ax=\beta$ 与线性方程组 $A'x=\beta'$ 是同解线性方程组。

证明：　由条件可知存在可逆矩阵设为 P 使得 $P\overline{A}=\overline{A}'$，故

$$PA=A',\quad P\beta=\beta',\quad A=P^{-1}A',\quad \beta=P^{-1}\beta',$$

设 α 是 $Ax=\beta$ 的解，故有 $A\alpha=\beta$, 从而有 $PA\alpha=P\beta$，即 $A'\alpha=\beta'$，这表明 α 也是 $A'x=\beta'$ 的解。

设 α' 是 $A'x=\beta'$ 的解，故有 $A'\alpha'=\beta'$, 从而有 $P^{-1}A'\alpha'=P^{-1}\beta'$，即 $A\alpha'=\beta$，这表明 α' 也是 $Ax=\beta$ 的解。综上所述两个方程组同解。

注　若施行了列变换则不能保证方程组同解！

线性方程组有解的判定定理

定理 4 对于n元线性方程组 $A_{m\times n}x=\beta$，增广矩阵 $\overline{A}=(A\ \beta)$

（1） $A_{m\times n}x=\beta$ 无解 $\Leftrightarrow$ $R(A)<R(\overline{A})$

（2） $A_{m\times n}x=\beta$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $R(A)=R(\overline{A})=n$

（3） $A_{m\times n}x=\beta$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow$ $R(A)=R(\overline{A})<n$

推论 2 对于n元齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=O$,

（1） $A_{m\times n}x=O$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ $R(A)=n$;

（2） $A_{m\times n}x=O$ 有非零解（无穷多解） $\Leftrightarrow$ $R(A)<n$;

（3） 若 $m<n$, 则 $A_{m\times n}x=O$ 必有非零解（无穷多解）。

思考: （1） 若 $R(A)<R(\overline{A})$，是否必有 $R(\overline{A})=R(A)+1$?

线性方程组有解的判定定理

证明 对增广矩阵施行初等**行**变换得到**行最简形**矩阵.

不是一般性设为

$$\bar{A}=(A\quad b)\sim\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1,n} & d_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{r,n} & d_r\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1}\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

若 $d_{r+1}\neq 0$ 这当且仅当 $R(A)<R(\overline{A})$, 方程组无解。

若 $R(A)=R(\overline{A})$, 则必有 $d_{r+1}=0.$

线性方程组有解的判定定理

若 $R(A)=R(\bar{A})=n$, 则有

$$\bar{A}=(A \,\vdots\, b)\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & d_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & d_n \end{pmatrix}$$

即方程组同解于 $\begin{cases} x_1=d_1 \\ x_2=d_2 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}=d_{n-1} \\ x_n=d_n \end{cases}$ 即方程有唯一解 $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$

线性方程组有解的判定定理

若 $r = R(A) = R(\overline{A}) < n$,

则有 $\bar{A} = (A \quad b) \sim \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1,n} & d_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{r,n} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

即方程组同解于

$$\begin{cases} x_1 + b_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + b_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{2n}x_n = d_2 \\ \cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots \\ x_r + b_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{rn}x_n = d_r \end{cases}$$

系数矩阵行阶梯矩阵每一行的第一个非零元所对应的未知数称为**非自由变量，**其余的称为**自由变量**。

线性方程组有解的判定理

当 $r = R(A) = R(\overline{A}) < n$ 时，

方程组同解于
$$\begin{cases} x_1 \quad + \quad b_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_r + \quad b_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{rn}x_n = d_r \end{cases}$$

故原方程组同解于
$$\begin{cases} x_1 = -b_{1,r+1}x_{r+1} - b_{1,r+2}x_{r+2} \cdots - b_{1n}x_n + d_1 \\ \vdots \\ x_r = -b_{r,r+1}x_{r+1} - b_{r,r+2}x_{r+2} \cdots - b_{rn}x_n + d_r \end{cases}$$

（把非自由变量留在等号左边，自由变量移到右边）

注 若系数矩阵化为了行最简形矩阵，则右边只有常数项和自由变量，

此时非自由变量完全由自由变量和常数项决定；若不是行最简形矩阵则不行。

线性方程组有解的判定定理

当 $r=R(A)=R(\overline{A})<n$ 时，

原方程组同解于

$$\begin{cases} x_1=-b_{1,r+1}x_{r+1}-b_{1,r+2}x_{r+2}\cdots-b_{1n}x_n+d_1 \\ \vdots \\ x_r=-b_{r,r+1}x_{r+1}-b_{r,r+2}x_{r+2}\cdots-b_{rn}x_n+d_r \end{cases}$$

进而原方程组也同解于

$$\begin{cases} x_1=-b_{1,r+1}x_{r+1}-b_{1,r+2}x_{r+2}\cdots-b_{1n}x_n+d_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_r=-b_{r,r+1}x_{r+1}-b_{r,r+2}x_{r+2}\cdots-b_{rn}x_n+d_r \\ x_{r+1}=\ x_{r+1} \\ \quad\vdots \\ x_n\ =\ x_n \end{cases}$$

线性方程组有解的判定定理

当 $r = R(A) = R(\overline{A}) < n$ 时，

原方程组同解于

$$\begin{cases} x_1 = -b_{1,r+1}x_{r+1} - b_{1,r+2}x_{r+2} \cdots - b_{1n}x_n + d_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_r = -b_{r,r+1}x_{r+1} - b_{r,r+2}x_{r+2} \cdots - b_{rn}x_n + d_r \\ x_{r+1} = x_{r+1} \\ \quad\vdots \\ x_n = x_n \end{cases}$$

即有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+1}\begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+2}\begin{pmatrix} -b_{2,r+2} \\ \vdots \\ -b_{2,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} -b_{1n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性方程组有解的判定定理

其中自由未知量 $x_{r+1}, x_{r+2} \cdots, x_n$ 可以取任意值，于是方程组

解为
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -b_{2,r+2} \\ \vdots \\ -b_{2,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 $k_1, k_2 \cdots, k_{n-r}$ 取任意值。

线性方程组有解的判定定理

我们已经证明了

（1） 当 $R(A) < R(\overline{A})$ 时，方程组 $A_{m\times n}x = \beta$ 无解；

（2）当 $R(A) = R(\overline{A}) = n$ 时，方程组 $A_{m\times n}x = \beta$ 有唯一解；

（3）当 $R(A) = R(\overline{A}) < n$ 时，方程组 $A_{m\times n}x = \beta$ 有无数解；

综上所述我们有

（1） $A_{m\times n}x = \beta$ 无解 $\Leftrightarrow R(A) < R\left(\overline{A}\right)$

（2） $A_{m\times n}x = \beta$ 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A) = R\left(\overline{A}\right) = n$

（3） $A_{m\times n}x = \beta$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow R(A) = R\left(\overline{A}\right) < n$

线性方程组有解的判定定理

注 （1）对线性方程组 $A_{m\times n}x=\beta$ 其系数矩阵的秩 $R(A)$ 是线性方程组中真正起作用方程的个数。

（2）上述证明过程也给出了解方程组 $A_{m\times n}x=\beta$ 的方法

(A) 通过初等行变换将增广矩阵 $\overline{A}$ 化为行最简形矩阵；

（只能作初等行变换将增广矩阵变为行最**简**形矩阵，只有这样才能保证新方程组与原方程组同解；不要化为一般阶梯形，要化为行最**简**形矩阵，只有这样才能保证非自由变量完全由常数项与自由变量决定。）

(B) 根据**行最简形**矩阵把非自由变量留在等号左边，

自由变量移至等号右边，按顺序补自由变量恒等式。

线性方程组有解的判定定理

例 $\bar{A}=(A \quad b)\sim\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1,n} & d_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{r,n} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

原方程组同解于 $\begin{cases} x_1=-b_{1,r+1}x_{r+1}-b_{1,r+2}x_{r+2}\cdots-b_{1n}x_n+d_1 \\ \quad\vdots \\ x_r=-b_{r,r+1}x_{r+1}-b_{r,r+2}x_{r+2}\cdots-b_{rn}x_n+d_r \\ x_{r+1}=x_{r+1} \\ \quad\vdots \\ x_n=x_n \end{cases}$

线性方程组有解的判定定理

(C) 根据同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -b_{1,r+1}x_{r+1} - b_{1,r+2}x_{r+2} \cdots - b_{1n}x_n + d_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_r = -b_{r,r+1}x_{r+1} - b_{r,r+2}x_{r+2} \cdots - b_{rn}x_n + d_r \\ x_{r+1} = x_{r+1} \\ \quad\vdots \\ x_n = x_n \end{cases}$$

方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{常数项}} + \underbrace{k_1 \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -b_{2,r+2} \\ \vdots \\ -b_{2,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{各个自由变量的系数}}$$

其中 $k_1, k_2 \cdots, k_{n-r}$ 取任意值。

线性方程组有解的判定定理

（3） 解齐次方程组 $A_{m\times n}x=O$ 方法

(A) 通过初等行变换将系数矩阵 A 化为行最简形矩阵；

（注意事项同前）

(B) 根据行最简形矩阵把非自由变量留在等号左边，自由变量移至等号右边，按顺序补自由变量恒等式。

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1,n}\\ 0 & 1 & \cdots & & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2,n}\\ & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{r,n}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

原方程组同解于:

$$\begin{cases} x_1=-b_{1,r+1}x_{r+1}-b_{1,r+2}x_{r+2}\cdots-b_{1n}x_n\\ \quad\vdots\\ x_r=-b_{r,r+1}x_{r+1}-b_{r,r+2}x_{r+2}\cdots-b_{rn}x_n\\ x_{r+1}=x_{r+1}\\ \quad\vdots\\ x_n=x_n\end{cases}$$

线性方程组有解的判定定理

(C) 根据同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -b_{1,r+1}x_{r+1} - b_{1,r+2}x_{r+2} \cdots - b_{1n}x_n \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_r = -b_{r,r+1}x_{r+1} - b_{r,r+2}x_{r+2} \cdots - b_{rn}x_n \\ x_{r+1} = x_{r+1} \\ \quad \vdots \\ x_n = x_n \end{cases}$$

方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{k_1 \begin{pmatrix} -b_{1,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -b_{2,r+2} \\ \vdots \\ -b_{2,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{各个自由变量的系数}}$$

其中 $k_1, k_2 \cdots, k_{n-r}$ 取任意值。

矩阵秩的应用----求解线性方程组

例5 求解 $\begin{cases} x_3 + \quad x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 \ - \ x_3 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

解： 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2} r_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵秩的应用----求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

方程组同解于

$$\begin{cases} x_1 = -4x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

故有

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

矩阵秩的应用----求解线性方程组

例6 求解非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

解:
$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} & -1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $R(\overline{A}) = 2 = R(A)$ 方程组有解.

矩阵秩的应用----求解线性方程组

由 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} & -1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{5}x_3 + x_4 + \frac{7}{5} \\ x_2 = \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5} \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$

故方程组解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \in R)$

矩阵秩的应用----求解线性方程组

例7 a, b为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2ax_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + bx_3 = 4 \end{cases}$

有唯一解、无解或有无穷多解? 在有无穷多解时，求解.

法一　解: $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 3 \\ 1 & 2a & 1 & 4 \\ 1 & 1 & b & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1-a & b-1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b-1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & b-1 & 2 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - ar_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & b-1 & 2 \\ 0 & 0 & a(b-1) & 1-2a \end{pmatrix}$$

矩阵秩的应用----求解线性方程组

$$\overline{A} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & b-1 & 2 \\ 0 & 0 & a(b-1) & 1-2a \end{pmatrix}$$

当 $a(b-1) \neq 0$ 即 $a \neq 0$ 且 $b \neq 1$ 时有 $R(A) = R(\overline{A}) = 3$，此时方程组有唯一解;

当$a=0$ 时, $R(A)=2$ 且 $R(\overline{A})=3$， 即 $R(A)<R(\overline{A})$, 此时方程组无解;

当 $b=1$ 时, $R(A)=2$. 此时当 $a \neq \frac{1}{2}$ 有 $R(\overline{A})=3$, 即 $R(A)<R(\overline{A})$, 此时方程组无解;

当 $b=1$ 且 $a=\frac{1}{2}$ 时，有 $R(A)=R(\overline{A})=2<3$，此时方程组有无穷多解。

矩阵秩的应用----求解线性方程组

当 $b=1$ 且 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，有 $R(A)=R(\overline{A})=2<3$, 此时方程组有无穷多解。

$$\overline{A}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 3\\ 0 & 1 & b-1 & 2\\ 0 & 0 & a(b-1) & 1-2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

有同解方程组

$$\begin{cases}x_1=-x_3+2\\ x_2=2\\ x_3=x_3\end{cases}$$

有同解方程组

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

克莱姆法则

有了前面的知识准备后，我们对一类特殊线性方程组

----方程个数与未知数个数一样多的线性方程组作部分结论。

此时线性方程组的系数矩阵为方阵。

定理3(克莱姆法则）　设 A 是n阶方阵，当 $\det A \neq 0$ 时，

线性方程组 $Ax=\beta$ 有唯一解，并且其唯一解是

$$x=\left(\frac{\det A_1}{\det A},\cdots\frac{\det A_i}{\det A},\cdots,\frac{\det A_n}{\det A}\right)^T$$

其中 A_i 是把A的第i列换成 β 所得到的方阵。

克莱姆法则

定理3 (克莱姆法则)　设A是n阶方阵，当 $\det A \neq 0$ 时，线性方程组$Ax=\beta$ 有唯一解，并且其唯一解是

$$x=\left(\frac{\det A_1}{\det A},\cdots,\frac{\det A_i}{\det A},\cdots,\frac{\det A_n}{\det A}\right)^T$$

其中 A_i 是把A 的第i 列换成 β 所得到的方阵。

证明　（解的唯一性）设 γ_1,γ_2 是方程的解，即有

$$A\gamma_1=\beta,\qquad A\gamma_2=\beta$$

从而有 $A(\gamma_1-\gamma_2)=O.$ 又 $\det A\neq 0$，故 A 的逆 A^{-1} 存在，故有

$$A^{-1}A(\gamma_1-\gamma_2)=A^{-1}O.$$

即 $\gamma_1-\gamma_2=O.$ 故方程解必唯一。

克莱姆法则

由 $\det A \neq 0$ 知 A 的逆 A^{-1} 存在．故有 $A^{-1}Ax = A^{-1}\beta$, 即

$$x = A^{-1}\beta = \frac{1}{\det A} A^{*}\beta$$

即

$$x_i = \frac{1}{\det A}\left(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots A_{ni}b_n\right) = \frac{\det A_i}{\det A} \quad \left(1 \le i \le n\right)$$

其中 A^{*} 是 A 的伴随矩阵，A_{ij} 是 $\det A$ 第i 行第j 的代数余子式，

$\beta = \left(b_1, b_2, \cdots, b_n\right)^{T}$.

克莱姆法则

例 解线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0, \end{cases}$$

解: 系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 7 & 5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3 + 2c_2]{c_1 - 2c_2} - \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

故方程组有唯一解.

克莱姆法则

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27$$

$$D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27$$

由 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$, $x_2=\dfrac{D_2}{D}$, $x_3=\dfrac{D_3}{D}$, $x_4=\dfrac{D_4}{D}$,

得唯一解为 $x_1=3 \quad x_2=-4$

$x_3=-1 \quad x_4=1$

克莱姆法则

定理3 (克莱姆法则） 设 A 是n阶方阵，当 $\det A \neq 0$ 时，线性方程组 $Ax=\beta$ 有唯一解，并且其唯一解是

$$x=\left(\frac{\det A_1}{\det A},\cdots\frac{\det A_i}{\det A},\cdots,\frac{\det A_n}{\det A}\right)^T$$

其中 A_i 是把A的第i列换成 β 所得到的方阵。

推论1 设A是n 阶方阵，线性方程组 $Ax=\beta$ 无解或解不唯一，则必有

$$\det A = 0.$$

克莱姆法则

形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

线性方程组叫做**齐次线性方程组**.

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

一定是它的解,这个解叫做**齐次线性方程组的零解**.

不全为零的数是齐次线性方程组的解,称这个解为**齐次线性方程组的非零解**。

故对于齐次线性方程组一定有解, 我们关心的是齐次线性方程组什么时候

只有零解? 什么时候有非零解?

克莱姆法则

定理3 (克莱姆法则) 设 A 是n阶方阵，当 $\det A \neq 0$ 时，线性方程组 $Ax=\beta$ 有唯一解，并且其唯一解是

$$x=\left(\frac{\det A_1}{\det A},\cdots\frac{\det A_i}{\det A},\cdots,\frac{\det A_n}{\det A}\right)^T$$

其中 A_i 是把A的第i列换成 β 所得到的方阵。

推论2 设A是n 阶方阵，当 $\det A \neq 0$ 时，齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解。

推论3 设A是n 阶方阵，齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解，则必有

$$\det A=0.$$

例7　a, b为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2ax_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + bx_3 = 4 \end{cases}$$

有唯一解、无解或有无穷多解？在有无穷多解时，求解.

法二　**解:**　系数行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix}$

(1)由克莱姆法则可知道 $|A| \neq 0$ 即 $a(b-1) \neq 0$ 得

$a \neq 0$ 且 $b \neq 1$ 时，方程组有唯一解.

(2) 当 $a=0$ 时,

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&3\\1&0&1&4\\1&1&b&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&0&0&1\\0&1&b-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&b-1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

故 $R(\overline{A})=3\neq 2=R(A)$, 此时方程组无解.

(3) 当 $b=1$ 时,

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&a&1&3\\1&2a&1&4\\1&1&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&a&1&3\\0&a&0&1\\0&1-a&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&a&1&3\\0&1&0&2\\0&1-a&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-(1-a)r_2}\begin{pmatrix}1&a&1&3\\0&1&0&2\\0&0&0&2a-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-ar_2}\begin{pmatrix}1&0&1&3-2a\\0&1&0&2\\0&0&0&2a-1\end{pmatrix}$$

克莱姆法则

当 $a \neq \dfrac{1}{2}$ 时, $R(\overline{A}) = 3 \neq 2 = R(A)$, 此时方程组无解.

当 $a = \dfrac{1}{2}$ 时, $R(\overline{A}) = 2 = R(A)$ 且 $R(A) = 2 < 3$

此时方程组有无穷多个解.

此时 $\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -x_3 + 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

故 $x = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^T + k\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3-2a \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-1 \end{pmatrix}$$

克莱姆法则

例　讨论 λ 为何值时, 如下线性方程组有唯一解, 并求出其解.

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

例　问 λ 取何值时, 如下齐次线性方程组有非零解?

$$\begin{cases} (5-\lambda)x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + (6-\lambda)y = 0, \\ 2x + (4-\lambda)z = 0 \end{cases}$$