第六节 矩阵的初等变换

1.填空题或选择题.

（1）已知 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $P_1AP_2=\underline{\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32}+a_{33} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12}+a_{13} & a_{13} \end{pmatrix}}$.

【解题过程】

$$P_1AP_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32}+a_{33} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12}+a_{13} & a_{13} \end{pmatrix}.$$

（2）$AE\left(r_3+2r_1\right)=$ __C__ .

（A）$A\left(r_3+2r_1\right)$

（B）$A\left(c_3+2c_1\right)$

（C）$A\left(c_1+2c_3\right)$

【解题过程】矩阵 A 右乘初等矩阵，相当于对 A 进行列变换，将 A 的第三列的 2 倍加到

第一列.正确答案为 C.

（3）已知$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&-1&1\end{pmatrix}$，

则$\begin{pmatrix}1&0&1\\3&2&2\\1&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\2&-1&1\end{pmatrix}}$.

【解题思路】

$$E\left(r_i\leftrightarrow r_j\right)^{-1}=E\left(r_i\leftrightarrow r_j\right);$$

$$E\left(r_i+kr_j\right)^{-1}=E\left(r_i+(-k)r_j\right).$$

【解题过程】

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\3&2&2\\1&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\2&-1&1\end{pmatrix}.$$

2.用初等行变换将下列矩阵化为行最简矩阵，

再用初等变换化为标准形.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

【解题过程】

行阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-2)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-2)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 由此可知，

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的行阶梯形为

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

行最简形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+(-2)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$的行最简形为

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

标准形：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4+3c_3]{c_4+(-5)c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$的标准形为

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$;

【解题过程】

行阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-2)r_1]{r_2+\left(-\frac{3}{2}\right)r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$的行阶梯形为

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

行最简形：

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2r_3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+3r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$的行最简形为

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

标准形：

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4+(-3)c_3]{c_4+(-5)c_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$的标准形为

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

【解题过程】

行阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-2)r_1]{r_2+(-3)r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4+(-3)r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+\left(-\frac{5}{4}\right)r_2]{r_3+\left(-\frac{3}{4}\right)r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$的行阶梯形为$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

行最简形：

$$\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\3&-3&5&-4&1\\2&-2&3&-2&0\\3&-3&4&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&-4&8&-8\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\left(-\frac{1}{4}\right)r_2}\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+(-3)r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&2&-3\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可知，$\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\3&-3&5&-4&1\\2&-2&3&-2&0\\3&-3&4&-2&-1\end{pmatrix}$的行最简形为$\begin{pmatrix}1&-1&0&2&-3\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

标准形：

$$\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\3&-3&5&-4&1\\2&-2&3&-2&0\\3&-3&4&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&2&-3\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4+2c_3,\,c_5+(-2)c_3]{c_2+c_1,\,c_4+(-2)c_1,\,c_5+3c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$的标准形

为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

【**解题过程**】行阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-3)r_1,\, r_4+(-2)r_1]{r_2+(-2)r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+(-7)r_2]{r_3+(-8)r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4+(-1)r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$的行阶

由此可知，$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$的行阶梯形为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

行最简形：

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+(-1)r_3,\, r_1+2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+(-2)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$的行最简形为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

标准形：

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+c_2,c_5+(-3)c_2,c_5+(-4)c_4]{c_3+(-2)c_1,c_5+2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$的标准形为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.判断下列矩阵是否可逆，若可逆求出其逆矩阵.

（1）$A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&0&1&2\\1&1&0&-1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

【解题思路】 $(A,E)\to(E,A^{-1})$

【解题过程】 $\because\ |A|=\begin{vmatrix}1&2&0&0\\2&0&1&2\\1&1&0&-1\\1&0&0&0\end{vmatrix}=2$

$\therefore\ A$可逆

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&0&1&0&0&0\\2&0&1&2&0&1&0&0\\1&1&0&-1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\2&0&1&2&0&1&0&0\\1&1&0&-1&0&0&1&0\\1&2&0&0&1&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_4+(-1)r_1]{r_2+(-2)r_1,\,r_3+(-1)r_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&2&0&1&0&-2\\0&1&0&-1&0&0&1&-1\\0&2&0&0&1&0&0&-1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&2&0&1&0&-2\\0&1&0&-1&0&0&1&-1\\0&2&0&0&1&0&0&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&2&0&0&1&0&0&-1\\0&1&0&-1&0&0&1&-1\\0&0&1&2&0&1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&0&0&1&-1\\0&0&1&2&0&1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+(-1)r_2,r_4+2r_3,}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&-1&-\frac{1}{2}&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0&-1&1&2&-3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0&-1&1&2&-3\\0&0&0&-1&-\frac{1}{2}&0&1&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0&-1&1&2&-3\\0&0&0&1&\frac{1}{2}&0&-1&\frac{1}{2}\end{array}\right).$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

（2）$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

【解题过程】

$$\because |A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$\therefore A$ 可逆

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+(-2)r_2} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+(-1)r_3} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \cdots \xrightarrow{r_{n-1}+(-1)r_n} \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_1} \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\therefore\ A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.利用初等变化求解下列矩阵方程.

（1）$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

【解题过程】$\because \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$

$\therefore \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$可逆

$$\therefore\ X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+(-1)r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3+(-1)r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+(-2)r_1,r_3+(-1)r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

由此可知，

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & -8 \\ -4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$，于是

$$X=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3&-1&5\\5&2&-8\\-4&-1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&2\\-15&-3\\12&4\end{pmatrix}.$$

（2）$X\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-3&1\end{pmatrix}.$

【解题过程】

$$\because\begin{vmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{vmatrix}=1$$

$$\therefore\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{pmatrix}\text{可逆}$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\2&-1&3\\-3&3&-4\end{pmatrix}^{-1}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&2&1&1&0&0\\2&-1&3&0&1&0\\-3&3&-4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&2&1&1&0&0\\2&-1&3&0&1&0\\-1&2&-1&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+2r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2+(-1)r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+(-2)r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3+(-2)r_2,\, r_3+r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 5 & -11 & -7 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 11 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -6 & -4 \end{array}\right).$$

由此可知，

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 11 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix},$$

于是

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 11 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$