线性代数综合测试题二

一、填空题.（每小题 4 分，共 20 分）

1. 已知 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 是关于 x 的一次多项式，该式中 x 的系数为 $\underline{1}$.

【解题过程】 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 9 + x$, 该式中 x 的系数为 1.

2. 已 知 $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, 且 A 的 秩 $R(A)=3$, 则 $k = \underline{-3}$.

【解题过程】 $\because$ A 的秩 $R(A)=3$, 且 A 为四阶矩阵

$\therefore |A| = (k+3)(k-1)^3 = 0$，即 $k = -3$ 或 1

但 $k = 1$ 不满足题意，于是 $k = -3$.

3. 设 A, B 为三阶矩阵，$|A| = -1, |B| = 2$, 则 $\left|2\left(A^T B^{-1}\right)^2\right| = \underline{2}$.

【解题过程】

$\left|2\left(A^T B^{-1}\right)^2\right| = 2^3 \left|\left(A^T B^{-1}\right)^2\right|$

$$=2^3\left|\left(A^T\right)^2\right|\left|B^{-1}\right|^2=2^3\left|A\right|^2\frac{1}{\left|B\right|^2}=2.$$

4.设 A 满足 $\left|A\right|=3$ 且有特征值 2，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 A^* 必有一个特征值是 $\underline{\frac{3}{2}}$.

【解题过程】 $\left|A\right|=3$，则 A 可逆.

$A^*=\left|A\right|A^{-1}=3A^{-1}$

A 有特征值 2，则 A^{-1} 有特征值 $\frac{1}{2}$, 于是 A^* 必有一个特征值是 $\frac{3}{2}$.

5.若二次型

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+ax_2x_3$

是正定二次型，则 a 的取值范围 $\underline{-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}}$.

【解题过程】二次型

$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+ax_2x_3$

的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{a}{2} \\ 0 & \frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$\because f\left(x_1,x_2,x_3\right)$

$=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+ax_2x_3$

是正定二次型

$$\therefore A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & \frac{a}{2}\\ 0 & \frac{a}{2} & 1\end{pmatrix}$$的所有顺序主子式都大于零

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & \frac{a}{2}\\ 0 & \frac{a}{2} & 1\end{pmatrix}$$的一阶顺序主子式$2>0$;

二阶顺序主子式$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1>0$;三阶顺序主子式 $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & \frac{a}{2}\\ 0 & \frac{a}{2} & 1\end{vmatrix}=1-\frac{a^2}{2}>0$, 即

$-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$.

二、选择题.（每小题 4 分，共 20 分）

1.设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$,

$$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},$$

则必有（ C ）.

（A）$AP_1P_2=B$　　（B）$AP_2P_1=B$

（C）$P_1P_2A=B$　　（D）$P_2P_1A=B$

2.设 A 是四阶矩阵，且 A 的行列式 $|A|=0$，则 A 中（ B ）.

（A）必有一列元素全为 0

（B）必有一列向量是其余向量的线性组合

（C）必有两列元素成比例

（D）任意列向量是其余列向量的线性组合

【解题思路】排除法.

【解题过程】$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，排除 A、C、D.

3. n 元线性方程组 $Ax=0$ 有两个不同的解 ξ,η，且 $R(A)=n-1$，则方程组的通解为（ D ）.

（A）$k\xi$　　（B）$k\eta$

（C）$k(\xi+\eta)$　　（D）$k(\xi-\eta)$

【解题过程】$\because$ n 元线性方程组 $Ax=0$ 有两个不同的解 ξ,η

$\therefore \xi-\eta \neq 0$

$\because A(\xi-\eta)=0$

$\therefore \xi-\eta$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的非零解

$\because R(A)=n-1$

$\therefore \xi-\eta$ 可做线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系

于是方程组的通解为 $k(\xi-\eta)$.

4.下列说法正确的是（ D ）.

（A）ξ 是 A 的特征向量，则对任意实数 k, $k\xi$ 也是 A 的特征向量

（B）ξ,η 分别是 A 的不同特征值的特征向量，则 $\xi+\eta$ 也是 A 的特征向量

（C）任何可相似对角化的矩阵 A，一定可以找到正交矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵

（D）n 阶矩阵 A，其秩为 n，则 0 一定不是矩阵 A 的特征值

【解题过程】（D）：反证法：若 0 是矩阵 A 的特征值，则 $|A|=0$, 与 A 秩为 n 矛盾，于是 0 一定不是矩阵 A 的特征值.

5. 设 A 是 n 阶对称矩阵，B 是 n 阶反对称矩阵，则下列矩阵中，可用正交变换化为对角矩阵的矩阵为（ A ）.

（A）BAB　（B）ABA　（C）$(AB)^2$

（D）AB^2

【解题过程】$\because A$ 是 n 阶对称矩阵，B 是 n 阶反对称矩阵

$\therefore A^T=A, B^T=-B$

$\therefore (BAB)^T=B^TA^TB^T=BAB$，即 BAB 为对称矩阵

于是 BAB 可用正交变换化为对角矩阵.

三、解答题（本题共 54 分）

1.（10 分）设 n 阶矩阵 A 和 B 满足条件：$A+B=AB$.

（1）证明：$A-E$ 是可逆矩阵，其中 E 是 n 阶单位矩阵；

（2）已知 $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求矩阵 A.

【解题过程】（1）证明：$\because A+B=AB$

$\therefore E=AB-A-B+E=(A-E)(B-E)$

$\therefore (A-E)^{-1}=B-E$

即证：$A-E$ 是可逆矩阵.

（或将 $E=(A-E)(B-E)$ 左右两边取行列式得：$|E|=|A-E||B-E|=1\neq 0$，由此可知，$A-E$ 是可逆矩阵.）

（2）$\because A+B=AB$

$\therefore E=(A-E)(B-E)$

$\because |E|=|A-E||B-E|=1\neq 0$

$\therefore B-E$ 是可逆矩阵

$\therefore A=(B-E)^{-1}+E$

$$B-E=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

由

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

可 得 ， $(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 于 是

$$A=(B-E)^{-1}+E=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

2.（10 分）问 a_1,a_2,a_3,a_4 满足什么条件，线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ x_3-x_4=a_3 \\ x_4-x_1=a_4 \end{cases}$ 有解？在有解的情况下求出通解.

【解题过程】线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ x_3-x_4=a_3 \\ x_4-x_1=a_4 \end{cases}$ 的系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 增广矩阵为 $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{pmatrix}$

将 $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{pmatrix}$ 进行初等行变换得：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_1+a_4 \end{pmatrix}$$

$$
\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a_1+a_2+a_4 \end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4 \end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & a_1+a_2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4 \end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & a_1+a_2+a_3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & a_2+a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4 \end{pmatrix}
$$

由此可知，当 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$ 时，线性

方程组有解.其通解为

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 \\ a_2+a_3 \\ a_3 \\ a_1+a_2+a_3+a_4 \end{pmatrix}.
$$

3.（10 分）已知三维线性空间的一组基底为 $\alpha_1=(1,1,0),\alpha_2=(1,0,1),\alpha_3=(0,1,1)$，求向量 $\beta=(2,0,0)$ 在上述基底下的坐标.

【解题过程】设存在实数 l_1,l_2,l_3，使得

$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3$，即$\begin{cases} l_1 + l_2 = 2 \\ l_1 + l_3 = 0 \\ l_2 + l_3 = 0 \end{cases}$，解得

$\begin{cases} l_1 = 1 \\ l_2 = 1 \\ l_3 = -1 \end{cases}$，即$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$，于是向量

$\beta=(2,0,0)$ 在上述基底下的坐标为

$(1,1,-1)$.

4.（12 分）求一个正交变换 $x = Py$ 把二次型

$f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形，其中

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

【解题过程】

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
$+4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$的特征多项式为

$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

$=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$

A 的特征值为：5,-1,-1.

当 $\lambda=5$ 时，$(5E-A)x=0$, 将其系数矩阵

进行初等行变换得：

$$5E-A=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&-2&4\\-2&4&-2\\4&-2&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\-2&4&-2\\4&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&6&-6\\0&-6&6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&6&-6\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得，A 的属于特征值 5 的特征向量为

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, 单位化后为 $\xi_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

当 $\lambda=-1$ 时，$(-E-A)x=0$, 将其系数矩

阵进行初等行变换得：

$$-E-A=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得，A 的属于特征值-1 的特征向量为

$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, 单位化、正交化后为

$$\xi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};\xi_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

为正交矩阵，令 $x=Py$，则

$f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$ 为所求的标准形.

5.（12 分）设有向量组 $M=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$，

其中 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\\-2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}$，

求由向量组 M 生成的子空间的维数，并给出子空间的一个基.

【解题过程】设 A 为以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为列向量组构成的矩阵，并对矩阵 A 作初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & -2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&0&-2&1\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得：向量组 M 生成的子空间的维数为 3，且子空间的一个为基：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

四、证明题（本题 6 分）

设 A 是 n 阶矩阵，如果存在正整数 k，使得 $A^k=O$（O 为 n 阶零矩阵），则 A 是 n 阶幂零矩阵.

（1）（3 分）如果 A 是 n 阶幂零矩阵，则矩阵 A 的特征值全为 0.

（2）（3 分）如果 $A\neq O$ 是 n 阶幂零矩阵，则矩阵 A 不与对角矩阵相似.

【解题过程】（1）证明：设 A 的特征值为 λ，属于 λ 的特征向量为 $\alpha\neq 0$，有 $A\alpha=\lambda\alpha$

由 $A\alpha=\lambda\alpha$ 可得，

$$A^k\alpha=A^{k-1}\left(A\alpha\right)=A^{k-1}\lambda\alpha=\cdots=\lambda^k\alpha=0,$$

于是 $\lambda=0$. 即证：矩阵 A 的特征值全为 0.

（2）反证法：假设矩阵 A 与对角矩阵相似，

则存在可逆矩阵 P, 使得

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix}P,$$

有 $A^k = P^{-1}\begin{pmatrix} a_1^{\ k} & & & \\ & a_2^{\ k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{\ k} \end{pmatrix} P = O$

将 $P^{-1}\begin{pmatrix} a_1^{\ k} & & & \\ & a_2^{\ k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{\ k} \end{pmatrix} P = O$ 左乘矩阵 P, 右乘矩阵 P^{-1} 得：

$$\begin{pmatrix} a_1^{\ k} & & & \\ & a_2^{\ k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{\ k} \end{pmatrix} = O,$$

即 $a_1 = 0, a_2 = 0, \cdots, a_n = 0$. 于是 $A = O$. 与 $A \neq O$ 矛盾.

即证：矩阵 A 不与对角矩阵相似.