线性空间（向量空间）

陈树伟

swchen@swjtu.edu.cn

线性空间（向量空间）

- 向量空间及子空间
- 生成空间
- 基与坐标
- 矩阵的初等变换

向量空间及子空间

定义1. 设V是一个非空向量集合，如果（封闭性）

(1) $\forall \alpha, \beta \in V$, 有 $\alpha + \beta \in V$;

(2) $\forall \alpha \in V$, $\forall k \in R$, 有 $k\alpha \in V$;

则称V是一个实数域上的**向量空间（或线性空间）**。

注：(1) (2) $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in V$, $\forall k_1, k_2 \in R$, 有 $k_1\alpha + k_2\beta \in V$.

例1. n维向量集合R^n是一个向量空间，称为***n*维向量空间。**

例2. 判定下面集合是否构成向量空间：

$V_1 = \{(0, x_2, x_3, \cdots, x_n) | x_i \in R, i = 2,3\ldots n\}$ $V_2 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$

$V_3 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1 + x_2 + \ldots x_n = 1\}$

运算规律

向量的加法与数乘满足以下**运算规律**：

$1)\ (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

$2)\ \alpha+0=\alpha$

$3)\ \alpha+(-\alpha)=0$

$4)\ \alpha+\beta=\beta+\alpha$

$5)\ 1\cdot\alpha=\alpha$

$6)\ \lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$

$7)\ \lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$

$8)\ (\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$

向量空间及子空间

注： (1) 任何一个向量空间必含有**零向量**。

(2) R上的向量空间含有多少个向量？

(i) 要么一个：$V=\{0\}$

(ii) 要么无穷多个：$V\neq\{0\}$.

定义2 . 设V是向量空间V^*的一个非空子集，如果V对线性运算是封闭的，则称V是V^*的一个**子空间**。

任何向量空间V必有两个子空间：**V自身**和**零空间**。统称为向量空间V的**平凡子空间**。

向量空间及子空间

例3. 任何n维向量所形成的向量空间都是 R^n 的子空间。

例4. 判定下面集合是否为 R^n 的子空间.

$V_1 = \{(0, x_2, x_3, \cdots, x_n) | x_i \in R, i = 2,3\ldots n\}$ $V_2 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$

$V_3 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1 + x_2 + \ldots x_n = 1\}$

例5. 给定两个n维向量 α, β, 则 α, β 的所有线性组合构成的集合

$V = \{k_1\alpha + k_2\beta \,|\, k_1, k_2 \in R\}$ 是一个向量空间。

一般地向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的所有线性组合构成的集合

$$V = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m \,|\, k_1, k_2, \cdots k_m \in R\}$$

是一个向量空间。

向量空间及子空间

定义3. R^n 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的所有线性组合构成的向量空间V称为由此向量组**生成的向量空间**，记作 $span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$，即

$$span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\} = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots k_m\alpha_m \mid k_1, k_2, \cdots k_m \in R\}$$

注： $span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$是包含 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的**最小**的向量空间。

例6. R^n 是由 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 生成的空间，即 $R^n = span\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$.

例7. 给定R^3中两个向量 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，写出$V = span\{e_1, e_2\}$.

解： $V = span\{e_1, e_2\} = \{x_1e_1 + x_2e_2 \mid x_i \in R\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \end{pmatrix}^T \mid x_i \in R\right\}$，即由 $\{e_1, e_2\}$ 所生成的空间是 R^3 里的 xy 平面。

生成子空间

定理1. 若向量组 $N=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$ 与 $M=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 等价，则

$$Span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}=Span\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}.$$

证明： 对 $\forall\alpha\in Span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$，则 α 能被向量组 $M=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 线性表示。

又向量组 $N=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$ 与 $M=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 等价，故 α 能被向量组 $N=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$ 线性表示。 即，$\alpha\in Span\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$，从而有

$$Span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}\subseteq Span\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$$

同理得

$$Span\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}\supseteq Span\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$$

例8. 给定向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\beta_3=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$，求 $V=span\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}.$

解： 注意到 $e_1=\frac{1}{3}(2\beta_1-\beta_2), e_2=\beta_3-\beta_1, e_2=\frac{1}{3}(2\beta_2-\beta_1)$，即

$$span\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}\supseteq span\{e_1,e_2\}.$$

显然 $span\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}\subseteq span\{e_1,e_2\}.$

故 $span\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}=span\{e_1,e_2\}.$

基与坐标

定义4. 设V是向量空间，V的任意一个极大无关组称为向量空间V的一个**基**，极大无关组中向量个数r，称为向量空间V的**维数**，记为$\dim V=r$。V是r维向量空间。特别地，零向量空间维数为零。

注：V的一个基就是把向量空间视为向量组时向量组的一个**极大无关组**，其**维数**就是作为向量空间组时的**秩**.

例9. 对 R^n 来说 (1) $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是线性无关的，

(2) R^n 中任何向量都能由 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性表示，故 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 R^n 的一个极大无关组，故 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是向量空间 R^n 的一个基（标准基）。

故 $\dim R^n = n$

思考： $e_1+e_2, e_2, \cdots, e_n$ 是否是 R^n 的一个基。

基与坐标

例11. $V = span\{e_1, e_2\}$，其中 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\{e_1, e_2\}$ 是线性无关的，显然 V 中向量

都能被 $\{e_1, e_2\}$ 表示，故 $\{e_1, e_2\}$ 为 V 的一个基。故 $\dim V = 2$

定理： 若向量空间 $V = span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$，则

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的**极大无关组**是 V 的**基**。

(2) $\dim V = R(\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\})$.

基与坐标

定义5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是向量空间V的基，则V中任意一个向量 α 都能被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 唯一线性表示，记为 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m$

则称 $(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m)^T$ 是向量 α **在基** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ **下的坐标**。

例12.向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 在标准基 e_1, e_2, e_3 下的坐标为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 在基 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 下的坐标为：由 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 知

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 在基 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的坐标为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

例13. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\beta=\begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix}$。证明$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 是 R^3 的基，

并求β 在该基下的坐标。

证明： 由 $|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&1&1\\0&3&2\end{vmatrix}=-6\neq 0$

故 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性无关，且 $|\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}|=3=\dim R^3$

故 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$是 R^3的基。

基与坐标

设 $\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$，即 $\begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+2x_2+3x_3\\-x_1+x_2+x_3\\3x_2+2x_3\end{pmatrix}$

得：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$，即 β 在该基下的坐标为 $(2 \quad 3 \quad -1)^T$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix}$$

矩阵初等变换的应用

1、**求逆矩阵、解矩阵方程**：

$$(A|E)\overset{行}{\sim}(E|A^{-1}) \quad (A|B)\overset{行}{\sim}(E|A^{-1}B) \quad \begin{pmatrix} A \\ \hline E \end{pmatrix}\overset{列}{\sim}\begin{pmatrix} E \\ \hline A^{-1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A \\ \hline B \end{pmatrix}\overset{列}{\sim}\begin{pmatrix} E \\ \hline BA^{-1} \end{pmatrix}$$

理由：初等矩阵的性质

2、**求矩阵（向量组）的秩，判断向量组的线性相关性**：$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\overset{行、列}{\sim}$ 阶梯型

理由：初等变换不改变矩阵的秩；矩阵可通过初等变换化为阶梯型；阶梯型矩阵的秩为其非零行个数；向量组的秩等于其构成矩阵的秩。

3、**求向量组的极大线性无关组**：$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\overset{行}{\sim}$ 行最简形

理由：初等行变换不改变列向量组的线性关系。