第七节　矩阵的秩

1.判断题（正确的在括号里打"√"，错误的打"×"）

（1）若 A 为 $m\times n$ 矩阵，$R(A)=r$，则 $r\le\min\{m,n\}$.　　（√）

（2）若 $R(A)=r$，则 A 的所有 r 阶子式都不为 0，而所有的 $r+1$ 阶子式都为 0.（×）

【解题过程】若 A 有一个 r 阶子式不为 0，而所有的 $r+1$ 阶子式都为 0，则 $R(A)=r$. 只需 A 中有一个 r 阶子式不为 0 即可，而不是所有的 r 阶子式都不为 0.

（3）若矩阵 A 存在一个 r 阶子式不为 0，则 $R(A)\ge r$.　　（√）

【解题过程】对于一个矩阵 A，如果它不为零的最高阶子式的阶数是 r，则 r 为矩阵 A 的秩.

（4）任何一个可逆矩阵都可以分解为初等方阵的乘积，且分解唯一.（×）

【解题过程】当 A 可逆时，A 可经初等行变换化为单位矩阵，即存在初等矩阵 $P_1,\cdots,P_s$ 使得 $P_1\cdots P_sA=E$. 于是 $A=(P_1\cdots P_s)^{-1}=P_s^{-1}\cdots P_1^{1}$. 把 A 化为单位矩阵 E 时，初等行变换的方法并不是唯一的，

所以 A 表示为初等初等矩阵的乘积也不是唯一的.

（5）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，且 $m>n$, 则 $|AB|=0$.　　　　（√）

【解题过程】 AB 为 m 阶方阵

$\because R(AB)\le\min\left(R(A),R(B)\right), m>n$

$\therefore R(AB)\le n$

又 $\because R(AB)=m$ 时，$|AB|\ne 0$

$\therefore |AB|=0.$

2. 已知 $a_1,\cdots,a_n$ 两两不同，且 $m\le n$, 且

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{m-1}&a_2^{m-1}&\cdots&a_n^{m-1}\end{pmatrix}, \text{求 } R(A).$$

【解题过程】 当 $m=n$ 时,

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{m-1}&a_2^{m-1}&\cdots&a_n^{m-1}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1<j<i<n}\left(a_i-a_j\right)$$

$\because a_1,\cdots,a_n$ 两两不同

$\therefore A$ 可逆，$R(A)=m=n$. 即 A 可初等变换

为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

当 $m<n$ 时，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \cdots & a_n^{m-1} \end{pmatrix}, R(A)\le m,$$

且 A 可初等变换为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \text{则 } R(A)=m.$$

3.求矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+2 & a & a+1 \\ a+1 & a+2 & a \end{pmatrix}$ 的秩.

【解题过程】用初等行变换，将矩阵 A 化为

行阶梯形矩阵:

3.求矩阵 $A=\begin{pmatrix} a+2 & a & a+1 \\ a+1 & a+2 & a \end{pmatrix}$ 的秩.

【解题过程】用初等行变换，将矩阵 A 化为行阶梯形矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+2 & a & a+1 \\ a+1 & a+2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+(-1)r_2]{r_2+(-1)r_1}$$

$$\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ a & a+1 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+(-a)r_1]{r_2+(-2)r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+\frac{1}{3}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3a+3 \end{pmatrix}$$

由此可知，当 $3a+3=0$ 时，即 $a=-1$ 时，$R(A)=2$; 当 $3a+3\neq 0$ 时，即 $a\neq -1$ 时，$R(A)=3$.

4.求下列矩阵的秩.

（1）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

【解题过程】用初等行变换，将矩阵化为行阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+\left(-\frac{1}{2}\right)r_2]{r_3+\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

故 $R\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 4.$

故 $R\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 4.$

（2） $A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix}$，其中

$a_i\,(i=1,\cdots,m)$ 不全为零，$b_j\,(j=1,\cdots,n)$ 不全为零.

【解题思路】 $R(AB) \le \min\big(R(A), R(B)\big)$

【解题过程】

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

$\because a_i\left(i=1,\cdots,m\right)$ 不全为零，

$b_j\left(j=1,2,\cdots,n\right)$不全为零

$$\therefore R\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}\right)=1, R\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\right)=1, R\left(A\right)\geq 1$$

$$\because R\left(A\right)\leq \min\left(R\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}\right), R\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\right)\right)=1$$

$\therefore R\left(A\right)=1$

5.设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，问：（1）$\lambda$ 为何值时，$R\left(A\right)$ 最大？（2）λ 为何值时，$R\left(A\right)$ 最小？

【解题过程】将矩阵 A 进行初等变换得：

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1&4\\\lambda&4&10&1\\1&7&17&3\\2&2&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3,r_2\leftrightarrow r_4}$$

$$\begin{pmatrix}1&7&17&3\\2&2&4&3\\3&1&1&4\\\lambda&4&10&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-2)r_1,r_3+(-3)r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&7&17&3\\0&-12&-30&-3\\0&-20&-50&-5\\\lambda&4&10&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&-20&-50&-5\\\lambda&4&10&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+5r_2,r_4+(-1)r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&0&0&0\\\lambda&0&0&0\end{pmatrix}$$

（1）由此可知，$\lambda\neq0$ 为何值时，$R(A)$ 最大，$R(A)=3$.

（2）由此可知，$\lambda=0$ 为何值时，$R(A)$ 最

小，$R(A)=2$.

6. 讨论n阶方阵$A=\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}$的秩.

【解题过程】

用初等变换将矩阵A化为行阶梯形：

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix} \xrightarrow[k=2,3,\cdots,n]{r_k-r_1}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1-a & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-a & 0 & \cdots & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[k=2,3,\cdots,n]{c_1+c_k}$$

$$\begin{pmatrix} n-1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{pmatrix}$$

当$a-1=0$时，即$a=1$时，$R(A)=1$; 当$a\neq 1$且$n-1+a=0$时，$R(A)=n-1$；当$a\neq 1$且$n-1+a\neq 0$时，$R(A)=n$.

7.已知A,B分别为$3\times 2, 2\times 3$矩阵，证明AB不可逆.

【解题思路】$R(AB)\le\min(R(A),R(B))$；

对于 n 阶方阵 AB, 若 $r(AB)<n$, 则 AB 不可逆.

【解题过程】

$\because R(AB)\le\min(R(A),R(B))$

$\therefore R(AB)\le 2$

$\therefore AB$ 不可逆

8.设 A,B 都是 n 阶方阵，且 $A^2-2AB=E$, 且求 $R(AB-BA+A)$.

【解题过程】$\because A^2-2AB=E$

$\therefore A^3-2A^2B=A, A^3-2ABA=A$

$\therefore A^3-2A^2B=A^3-2ABA$,

即 $A^2B=ABA$

$\because A^2-2AB=E$

$\therefore A(A-2B)=E$, 即 A 可逆

将 $A^2B=ABA$ 左乘 A^{-1} 得：$AB=BA$，则

$R(AB-BA+A)=R(A)=n.$

9.已知 A 为 n 阶方阵，P,Q 分别为 m 阶、n 阶方阵，且 $R(P)=m, R(Q)=n$. 证明：

$R(PA)=R(A), R(AQ)=R(A).$

【解题思路】初等变换不改变矩阵的秩；可逆矩阵可以表示成初等矩阵的乘积.

【解题过程】$\because$ P,Q 分别为 m 阶、n 阶方阵，

且 $R(P)=m, R(Q)=n$

$\therefore$ P,Q 可以表示成初等矩阵的乘积

$\therefore$ PA 相当于对 A 做若干次初等行变换，

AQ 相当于对 A 做若干次初等列变换

$\because$ 初等变换不改变矩阵的秩

$\therefore R(PA)=R(A), R(AQ)=R(A).$

10. 矩阵 A 的秩 $R(A)=1$ 的充分必要条件

是存在非零列向量 α 与 β 使得 $A=\alpha\beta^T$.

【解题过程】

$\Rightarrow$ 若 $R(A)=1$，则 A 存在一个非零行，且

其余行都是该行的倍数

设此行为 β^T，则 $A=\begin{pmatrix} k_1\beta^T \\ \vdots \\ \beta^T \\ \vdots \\ k_n\beta^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}\beta^T$

令 $\alpha=\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$，则 $A=\alpha\beta^T$；

$\Leftarrow$ 若存在非零列向量 α 与 β，

使得 $A=\alpha\beta^T$，

则 $R(\alpha)=1, R(\beta^T)=1, R(A)\ge 1$

$\because R(A)\le \min\left(R(\alpha), R(\beta^T)\right)=1$

$\therefore R(A)=1.$

11.判断非齐次方程组是否有解，有解时，求出其所有解.

（1）$\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=2, \\ 3x_1-x_2+2x_3=10, \\ 11x_1+3x_2=8; \end{cases}$

【解题过程】 $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=2, \\ 3x_1-x_2+2x_3=10, \\ 11x_1+3x_2=8; \end{cases}$ 的系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 11 & 3 & 0 \end{pmatrix}$，增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

由此可知，$R(A)=2, R(\overline{A})=3$，于是

$\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=2, \\ 3x_1-x_2+2x_3=10, \\ 11x_1+3x_2=8; \end{cases}$ 无解.

（2）$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+x_4=1, \\ x_1+x_2+x_3-x_4=2, \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=3; \end{cases}$

【解题过程】

$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+x_4=1, \\ x_1+x_2+x_3-x_4=2, \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=3; \end{cases}$ 的系数矩阵为

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&1&2&1&1\\1&1&1&-1&2\\1&1&2&1&3\end{pmatrix}$$

用初等行变换，将矩阵 $\overline{A}$ 化为行最简形矩阵:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&1&2&1&1\\1&1&1&-1&2\\1&1&2&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&-1&2\\2&1&2&1&1\\1&1&2&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-2)r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&-1&2\\0&-1&0&3&-3\\0&0&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&2&-1\\0&-1&0&3&-3\\0&0&1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+(-1)r_3]{-r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&-2\\0&1&0&-3&3\\0&0&1&2&1\end{pmatrix}$$

由此可知，$R(A)=R(\overline{A})=3<4$，

$\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3+x_4=1,\\x_1+x_2+x_3-x_4=2,\\x_1+x_2+2x_3+x_4=3;\end{cases}$ 有无穷多解，其解

为 $\begin{cases}x_1=-2\\x_2=3x_4+3\\x_3=-2x_4+1\end{cases}$,其中 x_4 为自由未知量，可

以取任意实数。

（3）$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1,\\4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2,\\2x_1+x_2-x_3-x_4=1;\end{cases}$

【解题过程】 $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1,\\4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2,\\2x_1+x_2-x_3-x_4=1;\end{cases}$ 的

系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\4&2&-2&1\\2&1&-1&-1\end{pmatrix}$, 增广矩

阵为 $\overline{A}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\4&2&-2&1&2\\2&1&-1&-1&1\end{pmatrix}$

用初等行变换，将矩阵 $\overline{A}$ 化为行最简形矩阵:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\4&2&-2&1&2\\2&1&-1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-2)r_1}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-2)r_2]{r_1+r_2}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_2]{\frac{1}{2}r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

由此可知，$R\left(A\right)=R\left(\overline{A}\right)=2<4,$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ 4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2, \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4=1; \end{cases}$$ 有无穷多解，其

解为$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2} \\ x_4=0 \end{cases}$，其中$x_2,x_3$为

自由未知量，可以取任意实数。

12.解方程组

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3+\cdots+a_1^{n-1}x_n=1 \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3+\cdots+a_2^{n-1}x_n=1 \\ \cdots\cdots \\ x_1+a_nx_2+a_n^2x_3+\cdots+a_n^{n-1}x_n=1 \end{cases},$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$两两不同.

【解题过程】

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3+\cdots+a_1^{n-1}x_n=1 \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3+\cdots+a_2^{n\ 1}x_n=1 \\ \cdots\cdots \\ x_1+a_nx_2+a_n^2x_3+\cdots+a_n^{n-1}x_n=1 \end{cases}$$

的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$\because |A|=\prod_{1\le j<i\le n}\left(a_i-a_j\right)\neq 0$$

$\therefore$ 方程组有唯一解

易知 $(1,0,0,\cdots 0)^T$ 是方程组的解，于是方程

$$组\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3+\cdots+a_1^{n-1}x_n=1\\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3+\cdots+a_2^{n-1}x_n=1\\ \cdots\cdots\\ x_1+a_nx_2+a_n^2x_3+\cdots+a_n^{n-1}x_n=1\end{cases}$$

的解为 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T$.

13. 当 k 取何值时，方程组

$$\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=0\\ x_1+kx_2-x_3=0\\ 2x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$$ 有非零解？并求出其所有非零解.

【解题过程】 $\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=0\\ x_1+kx_2-x_3=0\\ 2x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$ 的系数矩

阵为 $A=\begin{pmatrix}k & 1 & 1\\ 1 & k & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

当 $|A|=\begin{vmatrix}k & 1 & 1\\ 1 & k & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=k^2-3k-4=0$ 时，

即$k=4$或$k=-1$时，方程组有非零解.

当$k=4$时，$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$,将$A$进行

初等变换得：

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 4 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+(-4)r_1,r_3+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 0 & -15 & 5\\ 0 & -9 & 3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{15}r_2}\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & -9 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(-4)r_2,r_3+9r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由此可知，方程组的非零解为

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^T=k_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}^T,k_1\neq 0;$$

当$k=-1$时，$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$,将$A$进

行初等变换得：

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_1,r_3+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&1&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可知，方程组的非零解为

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}^T=k_1\begin{pmatrix}-2&-3&1\end{pmatrix}^T,k_1\neq 0.$$

综上，$k=4$或$k=-1$时，方程组有非零解.

当$k=4$时，方程组的非零解为

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}^T=k_1\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&1\end{pmatrix}^T,k_1\neq 0;$$

当$k=-1$时，方程组的非零解为

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}^T=k_1\begin{pmatrix}-2&-3&1\end{pmatrix}^T,k_1\neq 0.$$

14. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&a\\1&a&9\end{pmatrix}$,已知齐次线性方程组 $A^*x=O$ 有非零解，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，求 a.

【解题过程】$\because$ 齐次线性方程组 $A^*x=O$ 有

非零解

$\therefore AA^*x = |A|Ex = O$ 有 非 零 解 ， 即

$$\big||A|E\big| = 0$$

$$\because \big||A|E\big| = |A|^3 = 0$$

$$\therefore |A| = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & a \\ 1 & a & 9 \end{vmatrix} = 24 + 2a - a^2 = 0$$ 得：

$a = 6$ 或 -4.