

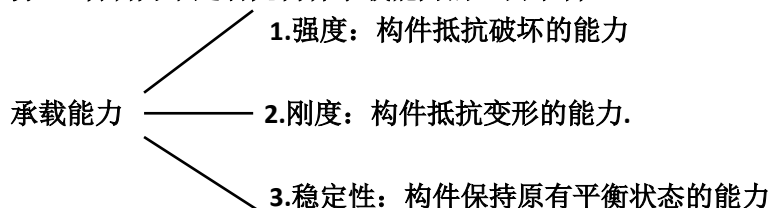
材料力学复习

第一章 绪 论

来自《材料力学》PPT（有删减）

§ 1-1 材料力学的任务及研究对象

一、任务 材料力学是研究构件承载能力的一门学科。



二、研究对象 1.构件 2.构件的分类：板、壳、块体

材料力学以“梁、杆”为主要研究对象

§ 1-2 变形固体的基本假设

一、连续性假设：物质密实地充满物体所在空间，毫无空隙。

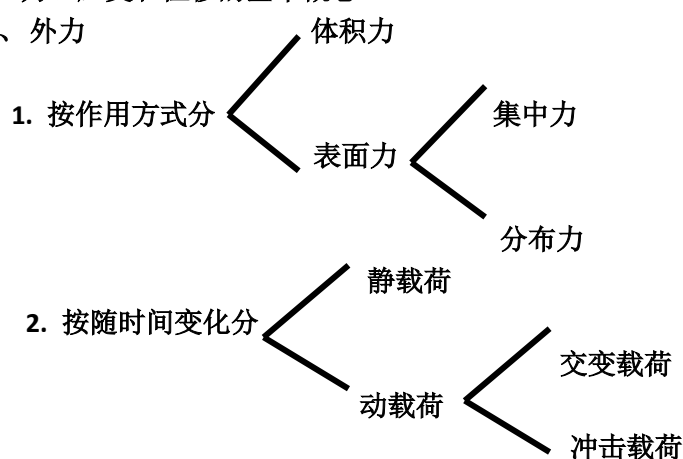
二、均匀性假设：物体内部，各处的力学性质完全相同。

三、各向同性假设：组成物体的材料沿各方向的力学性质完全相同。

四、小变形假设：材料力学所研究的构件在载荷作用下的变形与原始尺寸相比甚小，故对构件进行受力分析时可忽略其变形。

§ 1-3 力、应力、应变和位移的基本概念

一、外力



二、内力

1. 定义：指由外力作用所引起的、物体内部相邻部分之间相互作用力（附加内力）。

2. 内力的求法 —— 截面法 步骤：

① 截开：在所求内力的截面处，假想地用截面将杆件一分为二。

② 代替：任取一部分，其弃去部分对留下部分的作用，用作用在截面上相应的内力（力或力偶）代替。

③ 平衡：对留下的部分建立平衡方程，根据其上的已知外力来计算杆在截开面上的未知内力（此时截开面上的内力对所留部分而言是外力）。

三、应力

1. 定义 (Definition): 由外力引起的内力的集度

2. 应力

① 平均应力

$$p_m = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

② 全应力 (总应力)

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

③ 全应力分解为

垂直于截面的应力称为“正应力”

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_N}{\Delta A} = \frac{dF_N}{dA}$$

位于截面内的应力称为“切应力”

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} = \frac{dT}{dA}$$

四、变形和位移

1. 变形: 在外力作用下物体形状和尺寸发生改变

2. 位移: 变形前后物体内一点位置的变化

3. 应变: 度量构件一点处的变形程度

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta s}{\Delta x} \quad \text{平均线应变}$$

$$\text{线应变} \quad \varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$$

$$\text{角应变} \quad \gamma = \alpha + \beta \quad \gamma = \lim_{\substack{OC \rightarrow 0 \\ OD \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - \angle C'OD' \right)$$

§ 1-4 杆件变形的基本形式

1. 轴向拉伸和压缩 2. 剪切 3. 扭转 4. 弯曲

• 第二章 拉伸、压缩与剪切

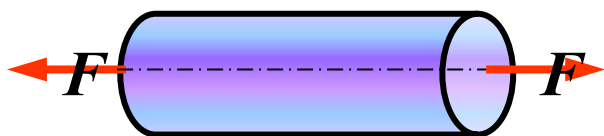
§ 2-1 轴向拉压的概念及实例

一、工程实例

二、受力特点: 外力的合力作用线与杆的轴线重合

三、变形特点: 沿轴向伸长或缩短

四、计算简图



§ 2-2 内力计算

一、求内力 设一等直杆在两端轴向拉力 F 的作用下处于平衡,欲求杆件 横截面 $m-m$ 上的内力.

1.截面法 (1) 截开 在求内力的截面 $m-m$ 处, 假想地将杆截为两部分.

(2) 代替 取左部分部分作为研究对象.弃去部分对研究对象的作用以截开面上的内力代替, 合力为 F_N .

(3) 平衡 对研究对象列平衡方程 $F_N = F$ 式中: F_N 为杆件任一横截面 $m-m$

上的内力.与杆的轴线重合, 即垂直于横截面并通过其形心,称为轴力

(若取右侧为研究对象, 则在截开面上的轴力与部分左侧上的轴力数值相等而指向相反.)

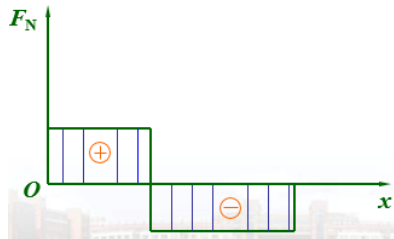
2.轴力符号的规定

(1) 若轴力的指向背离截面, 则规定为正的, 称为 **拉力**.

(2) 若轴力的指向指向截面, 则规定为负的, 称为 **压力**

二、轴力图

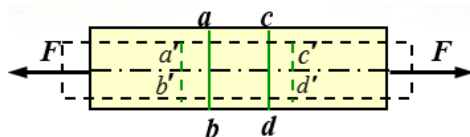
用平行于杆轴线的坐标表示横截面的位置,用垂直于杆轴线的坐标表示横截面上的轴力数值,从而绘出表示轴力与横截面位置关系的图线,称为轴力图. 将正的轴力画在 x 轴上侧,负的画在 x 轴下侧.



§ 2-3 应力及强度条件

一、横截面上的正应力

1.变形现象



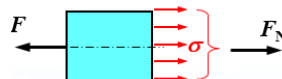
(1) 横向线 ab 和 cd 仍为直线,且仍然垂直于轴线;

(2) ab 和 cd 分别平行移至 $a'b'$ 和 $c'd'$, 且伸长量相等.

结论: 各纤维的伸长相同,所以它们所受的力也相同.

2.平面假设: 变形前原为平面的横截面,在变形后仍保持为平面,且仍垂直于轴线.

3.内力的分布: 均匀分布



4.正应力公式

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

式中, F_N 为轴力, A 为杆的横截面面积, σ 的符号与轴力 F_N 的符号相同.

当轴力为正号时 (拉伸), 正应力也为正号, 称为拉应力;

当轴力为负号时 (压缩), 正应力也为负号, 称为压应力.

二、斜截面上的应力

1. 斜截面上的应力

$$p_{\alpha} = \frac{F_{\alpha}}{A_{\alpha}}, \quad A_{\alpha} = \frac{A}{\cos \alpha}, \quad F_{\alpha} = F, \quad p_{\alpha} = \frac{F_{\alpha}}{A_{\alpha}} = \frac{F}{A} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha$$

将应力 p_{α} 分解为两个分量：

$$\text{沿截面法线方向的正应力 } \sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cdot \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha$$

$$\text{沿截面切线方向的切应力 } \tau_{\alpha} = p_{\alpha} \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

2. 符号的规定

(1) α 角



(2) 正应力： 拉伸为正 压缩为负

(3) 切应力 对研究对象任一点取矩

顺时针为正
逆时针为负

三、强度条件

杆内的最大工作应力不超过材料的许用应力

1. 数学表达式 $\sigma_{\max} = \frac{F_{N\max}}{A} \leq [\sigma]$

2. 强度条件的应用

(1) 强度校核

$$\frac{F_{N\max}}{A} \leq [\sigma]$$

(2) 设计截面

$$A \geq \frac{F_{N\max}}{[\sigma]}$$

(3) 确定许可荷载

$$F_{N\max} \leq [\sigma]A$$

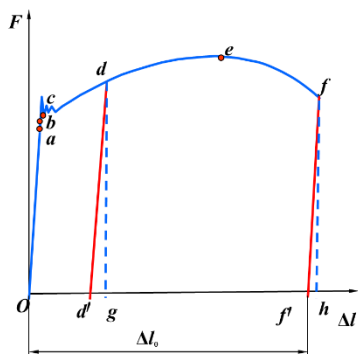
§ 2-4 材料在拉伸和压缩时的力学性能

二、拉伸试验

(2) 拉伸图 ($F-\Delta l$ 曲线)

表示 F 和 Δl 关系的曲线，称为 **拉伸图**

拉伸图与试样的尺寸有关。为了消除试样尺寸的影响，把拉力 F 除以试样的原始面积 A ，得正应力；同时把 Δl 除以标距的原始长度 l ，得到应变。



(3) 应力应变图

表示应力和应变关系的曲线，称为应力-应变图

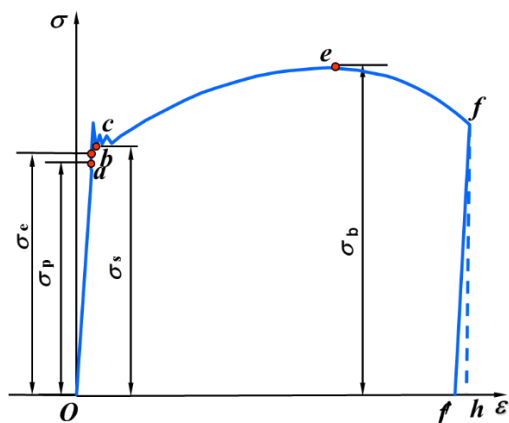
(a) **弹性阶段**

胡克定律 $\sigma = E\varepsilon$

(b) **屈服阶段**

(c) **强化阶段**

(d) **局部变形阶段**



(4) 伸长率和端面收缩率

试样拉断后，弹性变形消失，塑性变形保留，试样的长度由 l 变为 l_1 ，横截面积原为 A ，断口处的最小横截面积为 A_1 。

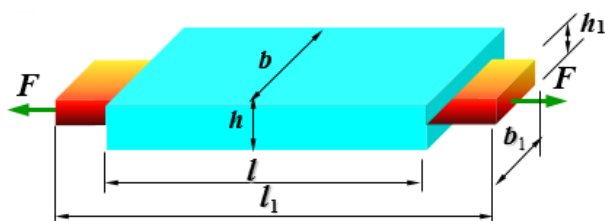
$$\text{伸长率 } \delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\% \quad \text{断面收缩率 } \psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\%$$

$\delta \geq 5\%$ 的材料，称作塑性材料

$\delta < 5\%$ 的材料，称作脆性材料

补充

§ 2-5 拉压杆的变形计算



一、纵向变形

1. 纵向变形 $\Delta l = l_1 - l$

2. 纵向应变 $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$

二、横向变形

1. 横向变形 $\Delta b = b_1 - b$

2. 横向应变 $\varepsilon' = \frac{b_1 - b}{b} = \frac{\Delta b}{b}$

三、泊松比

$$\varepsilon' = -\mu \varepsilon \quad \mu \text{ 称为泊松比}$$

三、胡克定律

实验表明工程上大多数材料都有一个弹性阶段，在此弹性范围内，正应力与线应变成正比。

$$\text{由} \quad \sigma = E\varepsilon \quad \frac{F_N}{A} = \sigma \quad \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$$

$$\text{上式改写为} \quad \Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

式中 E 称为**弹性模量** (modulus of elasticity) , EA 称为**抗拉(压)刚度**(rigidity)。

§ 2-7 剪切变形

1. 工程实例 (1) 螺栓连接 (2) 铆钉连接 (3) 键块联接 (4) 销轴联接

2. 受力特点: 以铆钉为例/构件受两组大小相等、方向相反、作用线相互很近的平行力系作用。

3. 变形特点: 构件沿两组平行力系的交界面发生相对错动。

二、剪切的应力分析

1. 内力计算

$$\sum F_x = 0 \quad F_S - F = 0 \quad F_S = F \quad F_S - \text{剪力}$$

2. 切应力

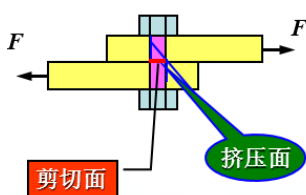
$$\tau = \frac{F_S}{A} \quad \text{式中, } F_S - \text{剪力, } A - \text{剪切面的面积}$$

3. 强度条件

$$\tau = \frac{F_S}{A} \leq [\tau] \quad [\tau] \text{ 为材料的许用切应力}$$

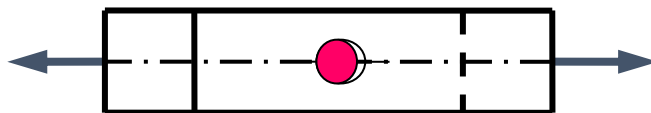
$$[\tau] = \frac{\tau_u}{n} \quad \tau_u - \text{剪切极限应力} \quad n - \text{安全因数}$$

三、挤压的应力分析



1. 挤压力 (Bearing force) $F = F_S$

2. 挤压破坏的两种形式: (1) 螺栓压扁、(2) 钢板在孔缘压成椭圆



3. 挤压应力:

$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}}$$

F —挤压力、 A_{bs} —挤压面的面积

当接触面为圆柱面时, 挤压面积 A_{bs} 为实际接触面在直径平面上的投影面积

$$A_{bs} = d \times h$$

d 为圆柱直径

四、强度条件的应用

1. 校核强度 $\tau \leq [\tau]$ $\sigma_{bs} \leq [\sigma_{bs}]$
2. 设计截面 $A \geq \frac{F_s}{[\tau]}$ $A_{bs} \geq \frac{F}{[\sigma_{bs}]}$
3. 求许可载荷 $F_s \leq [\tau]A$ $F \leq [\sigma_{bs}]A_{bs}$
4. 破坏条件 $\tau \geq \tau_u$

• 第三章 扭转

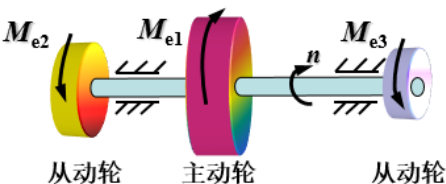
§ 3-1 扭转的概念及实例

二、受力特点: 杆件的两端作用两个大小相等、方向相反、且作用平面垂直于杆件轴线的力偶.

三、变形特点: 杆件的任意两个横截面都发生绕轴线的相对转动.

§ 3-2 扭转的内力的计算

一、外力偶矩的计算

$$\{M_e\}_{N \cdot m} = 9549 \frac{\{P\}_{kW}}{\{n\}_{r/min}}$$


从动轮 主动轮 从动轮

M_e —作用在轴上的力偶矩 (N · m) n —轴的转速 (r/min) P —轴传递的功率 (kW)

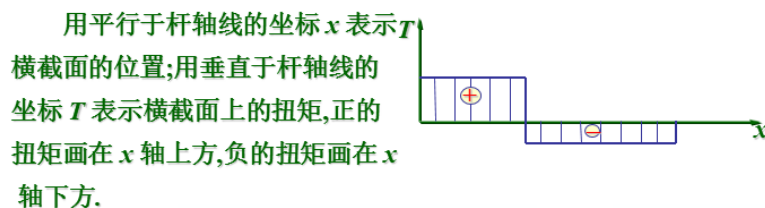
二、内力的计算

1. 求内力——截面法 在 $n-n$ 截面处假想将轴截开取左侧为研究对象

$$\sum M_x = 0 \quad T = M_e$$

2. 扭矩 **符号的规定**——采用右手螺旋法则, 当力偶矩矢的指向背离截面时扭矩为正, 反之为负.

3. 扭矩图



• § 3-3 薄壁圆筒的扭转

$$\delta \leq \frac{1}{10} r_0$$

薄壁圆筒：壁厚

(r_0 —圆筒的平均半径)

3. 推论 (1) 横截面上无正应力，只有切应力；
(2) 切应力方向垂直半径或 与圆周相切。

圆周各点处切应力的方向于圆周相切，且数值相等，近似的认为沿壁厚方向各点处切应力的数值无变化。

4. 推导

$$\int_A \tau dA \cdot r = \tau \cdot r \int_A dA = \tau \cdot r (2\pi \cdot r \cdot \delta) = T$$
$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 \cdot \delta}$$

此式为薄壁圆筒扭转时横截面上切应力的计算公式。

薄壁筒扭转时横截面上的切应力均匀分布，与半径垂直，指向与扭矩的转向一致。

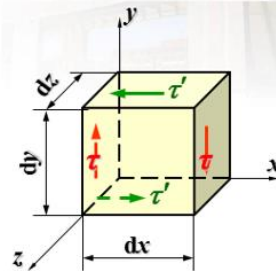
• 二、切应力互等定理

1. 在单元体左、右面（杆的横截面）只有切应力，其方向于 y 轴平行。由平衡方程

$$\sum F_y = 0$$

两侧面的内力元素 $\tau dy dz$

大小相等，方向相反，将组成一个力偶。
其矩为 $(\tau dy dz) dx$



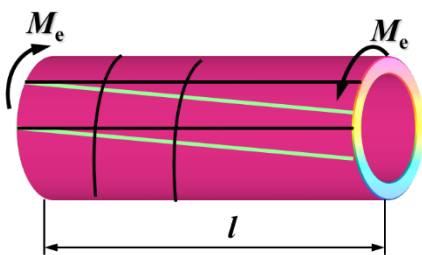
2. 要满足平衡方程 $\sum M_z = 0$ $\sum F_x = 0$
在单元体的上、下两平面上必有大小相等，指向相反的一对内力元素它们组成力偶，其矩为 $(\tau' dx dy) dz$ 此力偶矩与前一力偶矩 $(\tau dy dz) dx$ 数量相等而转向相反，从而可得： $\tau' = \tau$

3. 切应力互等定理

单元体两个相互垂直平面上的切应力同时存在，且大小相等，都指相（或背离）该两平面的交线。

4. 纯剪切单元体 单元体平面上只有切应力而无正应力，则称为纯剪切单元体。

三、剪切胡克定律



由图所示的几何关系得到

$$\gamma = \frac{r\phi}{l}$$

式中， r 为薄壁圆筒的外半径。

薄壁圆筒的扭转试验发现，当外力偶 M_e 在某一范围内时，与 M_e （在数值上等于 T ）成正比。

$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 \delta} \quad \gamma = \frac{r\phi}{l} \quad \tau = G\gamma \quad \text{剪切胡克定律} \quad G - \text{剪切弹性模量}$$

$$\text{三个弹性常数的关系 } G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

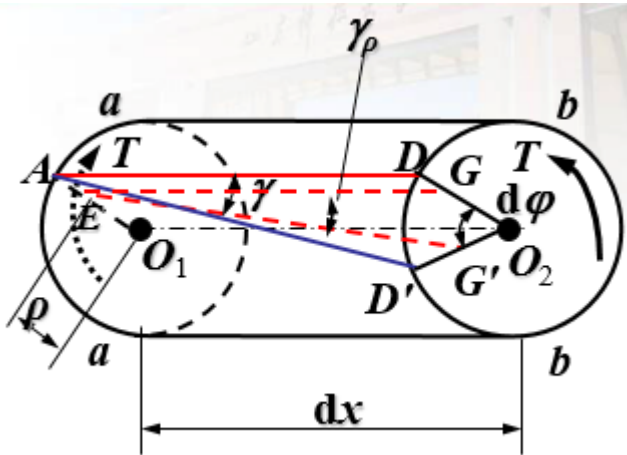
• • • § 3-4 圆杆扭转的应力分析 • 强度条件

一、变形几何关系

1. 变形现象：
 - (1) 轴向线仍为直线, 且长度不变;
 - (2) 横截面仍为平面且与轴线垂直;
 - (3) 径向线保持为直线, 只是绕轴线旋转.

2. 平面假设 变形前为平面的横截面, 变形后仍保持为平面.

3. 几何关系 倾角 γ 是横截面圆周上任一点 A 处的切应变, $d\varphi$ 是 $b-b$ 截面相对于 $a-a$ 截面象刚性平面一样绕杆的轴线转动的一个角度.



$$\gamma_{\rho} \approx \tan \gamma_{\rho} = \frac{\overline{GG'}}{\overline{EG}} = \frac{\rho d\varphi}{dx}$$

由剪切胡克定律

$$\tau = G\gamma$$

$$\tau_{\rho} = G\gamma_{\rho} = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

二、物理关系

同一圆周上各点切应力 τ_{ρ} 均相同, 且其值与 ρ 成正比, τ_{ρ} 与半径垂直.

三、静力关系

1. 公式的建立

$$\int_A \rho \tau_{\rho} dA = T$$

$$\int_A \rho \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot dA = T$$

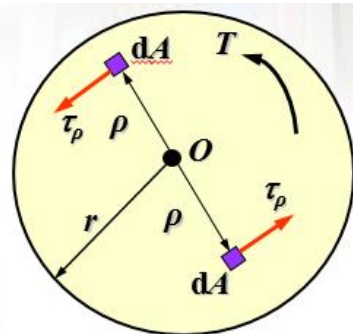
$$G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA = T$$

$$\int_A \rho^2 dA = I_p$$

结论 $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p}$

代入物理关系中得到 $\tau_{\rho} = \frac{T\rho}{I_p}$

式中: T — 横截面上的扭矩
 ρ — 求应力的点到圆心的距离
 I_p — 横截面对圆心的极惯性矩



2. τ_{\max} 的计算

$$W_t = \frac{I_p}{\rho_{\max}} \quad \text{称作抗扭截面系数, 单位为 } \text{mm}^3 \text{ 或 } \text{m}^3.$$

$$\tau_{\max} = \frac{T \rho_{\max}}{I_p} = \frac{T}{\frac{I_p}{\rho_{\max}}} = \frac{T}{W_t}$$

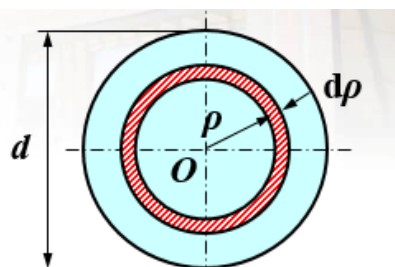
3. 极惯性矩和抗扭截面系数的计算

(1) 实心圆截面

$$dA = 2\pi\rho(d\rho)$$

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$W_t = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi d^4 / 32}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16}$$

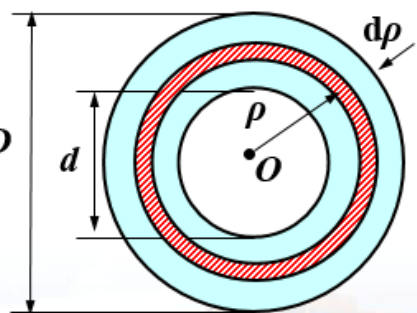


(2) 空心圆截面

$$I_p = \frac{\pi D^4 (1 - \alpha^4)}{32}$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{d}{D}$$

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$



四、强度条件

1. 数学表达式

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} \leq [\tau]$$

2. 强度条件的应用

$$\begin{aligned} &\text{强度校核} \quad \frac{T_{\max}}{W_t} \leq [\tau] \\ &\text{设计截面} \quad W_t \geq \frac{T_{\max}}{[\tau]} \\ &\text{确定许可载荷} \quad T_{\max} \leq W_t [\tau] \end{aligned}$$

§ 3-5 杆在扭转时的变形 • 刚度条件

一、扭转变形

1. 圆轴扭转时的变形是用相对扭转角 φ 来度量的

其中 $d\varphi$ 代表相距为 dx 的两横截面间的相对扭转角。

长为 l 的一段杆两端面间的相对扭转角 φ 可按下列式计算：

$$\varphi = \int_l d\varphi = \int_l \frac{T}{GI_p} dx$$

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p} \quad \begin{aligned} &\varphi \text{—扭转角} \\ &GI_p \text{ 称作抗扭刚度} \end{aligned}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p}$$

2. 单位长度扭转角

$$\varphi'_{\max} \leq [\varphi']$$

$$\varphi'_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \leq [\varphi'] \quad (\text{rad/m})$$

$[\varphi']$ 称作许可单位长度扭转角

$$\varphi' = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_p} \quad (\text{rad/m})$$

3. 刚度条件

• 第四章 弯曲内力

§ 4-1 基本概念及工程

二、基本概念

1. 弯曲变形

(1) 受力特征

外力（包括力偶）的作用线垂直于杆轴线。

(2) 变形特征

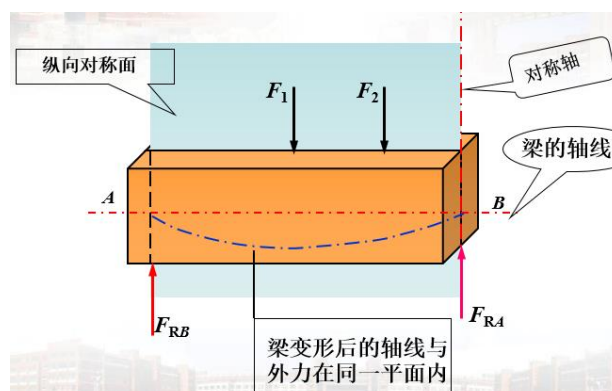
变形前为直线的轴线,变形后成为曲线。

2. 梁

以弯曲变形为主的杆件

3. 平面弯曲

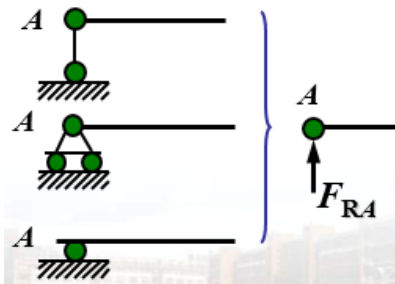
作用于梁上的所有外力都在纵向对称面内, 弯曲变形后的轴线是一条在该纵向对称面内的平面曲线, 这种弯曲称为**平面弯曲**。



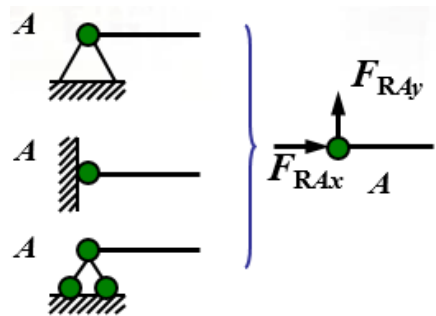
4. 梁的力学模型的简化

- (1) 梁的简化 通常取梁的轴线来代替梁
- (2) 载荷类型: 集中力、集中力偶、分布载荷
- (3) 支座的类型

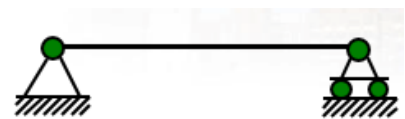
可动铰支座



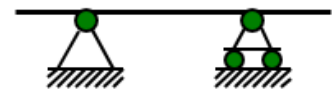
固定铰支座



固定端



简支梁



外伸梁



悬臂梁

5. 静定梁的基本形式:

• § 4-2 梁的剪力和弯矩

一、内力计算

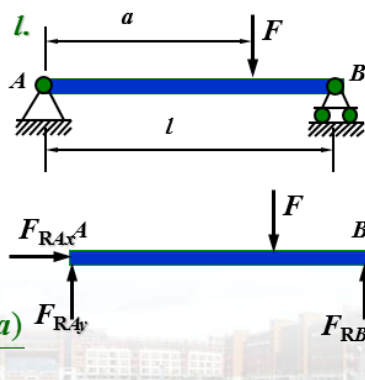
[举例] 已知 如图, F, a, l .
求距A端x处截面上内力.

解: 求支座反力

$$\sum F_x = 0, \quad F_{R4x} = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad F_{RB} = \frac{Fa}{l}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{R4y} = \frac{F(l-a)}{l}$$



$$\sum F_y = 0, \quad F_S = F_{R4y} = \frac{F(l-a)}{l}$$

$$\sum M_C = 0, \quad M = F_{R4y} \cdot x$$

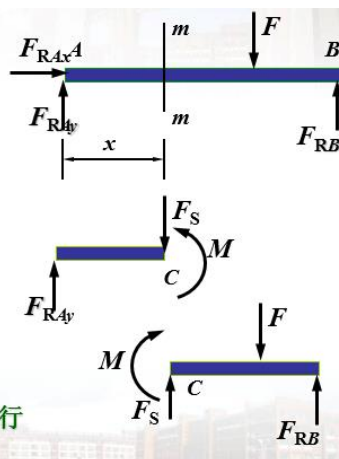
弯曲构件内力 $\begin{cases} \text{剪力} \\ \text{弯矩} \end{cases}$

1. 弯矩 M

构件受弯时, 横截面上其作用面垂直于截面的内力偶矩.

2. 剪力 F_S

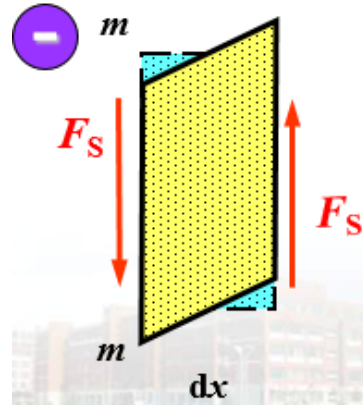
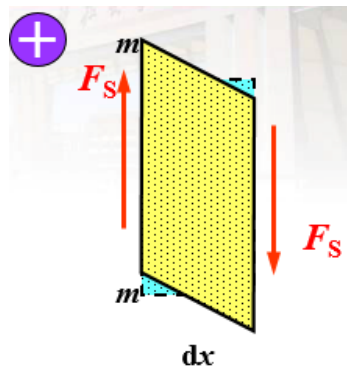
构件受弯时, 横截面上其作用线平行于截面的内力.



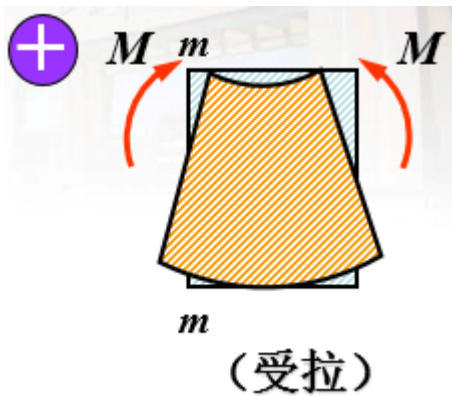
求内力——截面法

二、内力的符号规定

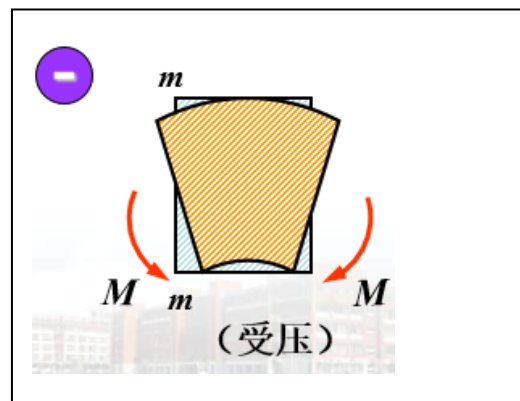
1. 剪力符号



2. 弯矩符号



当 dx 微段的弯曲下凸（即该段的下半部受拉）时，横截面 $m-m$ 上的弯矩为正；



当 dx 微段的弯曲上凸（即该段的下半部受压）时，横截面 $m-m$ 上的弯矩为负。

三、计算规律

1. 剪力

$$F_S = \sum_{i=1 \text{ 左 (右)}}^n F_i$$

左侧 梁段：向上的外力引起正值的剪力
向下的外力引起负值的剪力
右侧 梁段：向下的外力引起正值的剪力
向上的外力引起负值的剪力

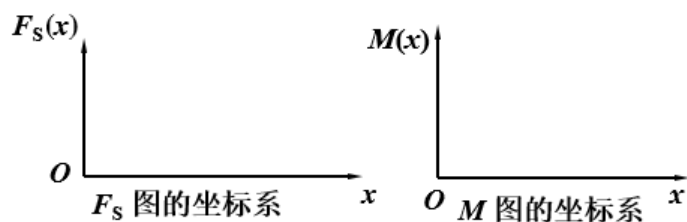
2. 弯矩

$$M = \sum_{i=1 \text{ 左 (右)}}^n F_i a_i + \sum_{k=1 \text{ 左 (右)}}^m M_k$$

不论在截面的左侧或右侧向上的外力均将引起正值的弯矩，而向下的外力则引起负值的弯矩。

左侧梁段 顺时针转向的外力偶引起正值的弯矩
逆时针转向的外力偶引起负值的弯矩
右侧梁段 逆时针转向的外力偶引起正值的弯矩
顺时针转向的外力偶引起负值的弯矩

二、剪力图和弯矩图



剪力图为正值画在 x 轴上侧, 负值画在 x 轴下侧

弯矩图为正值画在 x 轴上侧, 负值画在 x 轴下侧

小结

1. 取梁的左端点为坐标原点, x 轴向右为正; 剪力图向上为正; 弯矩图向上为正.
2. 以集中力、集中力偶作用处、分布荷载开始或结束处, 及支座截面处为界点将梁

分段. 分段写出剪力方程和弯矩方程, 然后绘出剪力图和弯矩图.

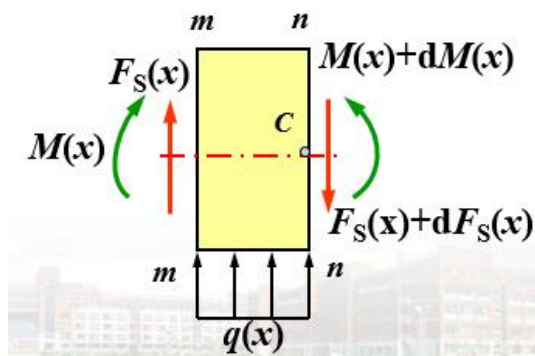
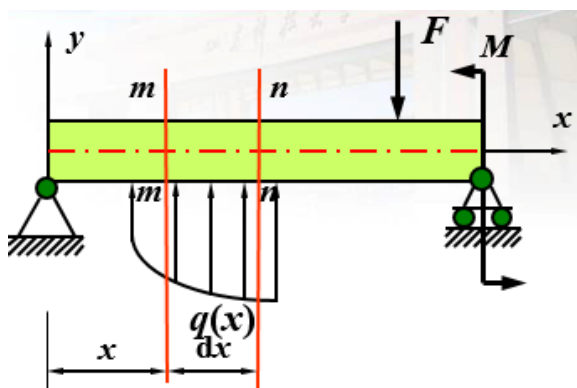
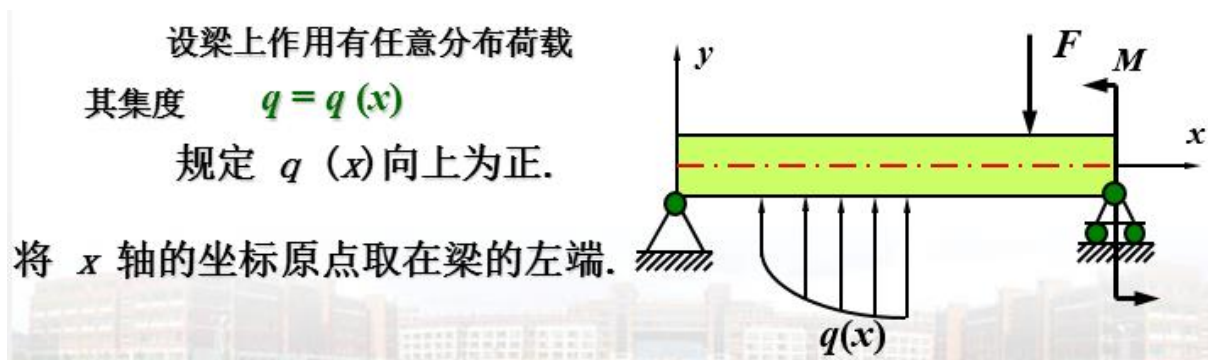
3. 梁上集中力作用处左、右两侧横截面上, 剪力 (图) 有突变, 突变值等于集中力的数值. 在此处弯矩图则形成一个尖角.

4. 梁上集中力偶作用处左、右两侧横截面上的弯矩 (图) 有突变, 其突变值等于集中力偶矩的数值. 但在此处剪力图没有变化.

5. 梁上的 $F_{S\max}$ 发生在全梁或各梁段的边界截面处; 梁上的 M_{\max} 发生在全梁或各梁段的边界截面, 或 $F_S = 0$ 的截面处.

• § 4-4 剪力、弯矩与分布荷载集度间的关系

一、弯矩、剪力与分布荷载集度间的微分关系



写出微段梁的平衡方程：

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad F_s(x) - [F_s(x) + dF_s(x)] + q(x)dx = 0 \\ \sum M_c = 0 & \quad \text{得到} \quad \frac{dF_s(x)}{dx} = q(x) \\ [M(x) + dM(x)] - M(x) - F_s(x)dx - q(x)dx \frac{dx}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x)$$

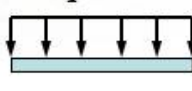

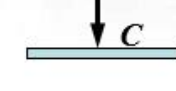





$$\frac{dM(x)}{dx} = F_s(x)$$

公式的几何意义：

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x)$$

- 度的大小；
大小；
- (1) 剪力图上某点处的切线斜率等于该点处荷载集度的大小；
 - (2) 弯矩图上某点处的切线斜率等于该点处剪力的大小；
 - (3) 根据 $q(x) > 0$ 或 $q(x) < 0$ 来判断弯矩图的凹凸性。

表 4-1 在几种荷载下剪力图与弯矩图的特征

一段梁上的外力情况	向下的均布荷载 $q < 0$	无荷载	集中力 F	集中力偶 M
剪力图的特征	向下倾斜的直线 	水平直线 	在C处有突变 	在C处无变化 
弯矩图的特征	上凸的二次抛物线 	一般斜直线 或 	在C处有转折 	在C处有突变 
M_{\max} 所在截面的可能位置	在 $F_s = 0$ 的截面		在剪力突变的截面	在紧靠C的某一侧截面

三、分布荷载集度、剪力和弯矩之间的积分关系

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q(x)$$

若在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处两个横截面无集中力则

$$\int_{x_1}^{x_2} dF_s(x) = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx$$

若横截面 $x=x_1$, $x=x_2$ 间无集中力偶作用则得：

$$M(x_2) - M(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} F_s(x)dx$$

式中 $M(x_1)$, $M(x_2)$ 分别为在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处两个横截面上的弯矩。

等号右边积分的几何意义是 x_1 , x_2 两个横截面间剪力图的面积。

§ 4-5 按叠加原理作弯矩图

一、叠加原理

$$F_s(F_1, F_2, \dots, F_n) = F_{s1}(F_1) + F_{s2}(F_2) + \dots + F_{sn}(F_n)$$

$$M(F_1, F_2, \dots, F_n) = M_1(F_1) + M_2(F_2) + \dots + M_n(F_n)$$

二、适用条件： 所求参数（内力、应力、位移）必然与荷载满足线性关系. 即在弹性限度内满足胡克定律.

三、步骤：（1）分别作出各项荷载单独作用下梁的弯矩图；

（2）将其相应的纵坐标叠加即可（注意：不是图形的简单拼凑）

§ 4-6 平面刚架和曲杆的内力图 （此项省略, 详见书本 P 125）

• 第五章 弯曲应力 •

§ 5-1 引言

一、弯曲构件横截面上的应力

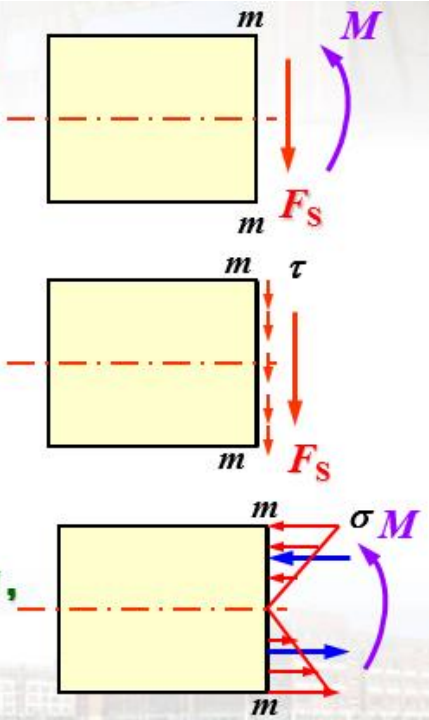
当梁上有横向外力作用时，一般情况下，梁的横截面上既有弯矩 M ，又有剪力 F_s 。

内力 $\begin{cases} \text{剪力 } F_s \longrightarrow \text{切应力 } \tau \\ \text{弯矩 } M \longrightarrow \text{正应力 } \sigma \end{cases}$

只有与切应力有关的切向内力元素 $dF_s = \tau dA$ 才能合成剪力；

只有与正应力有关的法向内力元素 $dF_N = \sigma dA$ 才能合成弯矩。

所以，在梁的横截面上一般既有正应力，又有切应力。



二、分析方法：

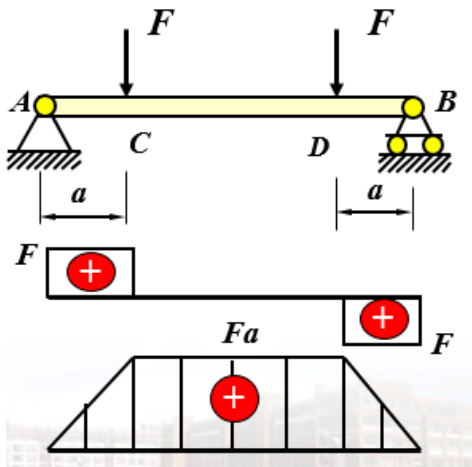
平面弯曲时横截面

纯弯曲梁（横截面上只有 M 而无 F_s 的情况）

平面弯曲时横截面

横力弯曲（横截面上既有 F_s 又有 M 的情况）

三、纯弯曲



压，只受单向拉压。



若梁在某段内各横截面的弯矩为常量，剪力为零，则该段梁的弯曲就称为纯弯曲。

简支梁 CD 段任一横截面上，剪力等于零，而弯矩为常量，所以该段梁的弯曲就是纯弯曲。

§ 5-2 纯弯曲时的正应力

一、实验

2. 提出假设

(a) **平面假设**：变形前为平面的横截面变形后仍保持为平面且垂直于变形后的梁轴线；

(b) **单向受力假设**：纵向纤维不相互挤压，只受单向拉压。

推论：必有一层变形前后长度不变的纤维——中性层

* **中性轴** \perp **横截面对称轴**

二、变形几何关系

应变分布规律：直梁纯弯曲时纵向纤维的应变与它到中性层的距离成正比。

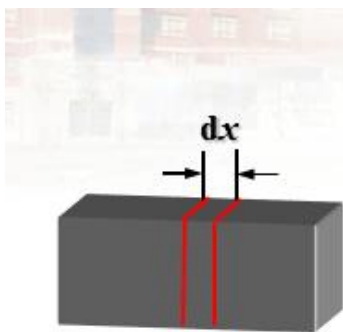


图 (a)

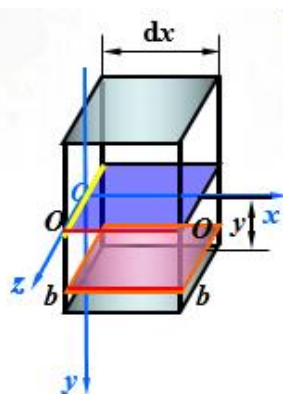


图 (b)

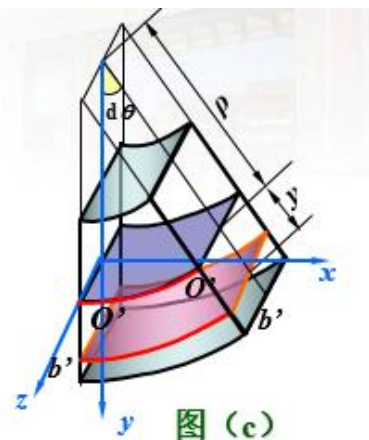


图 (c)

$$\widehat{b'b'} = (\rho + y)d\theta$$

$$\overline{bb} = dx = \overline{OO} = \widehat{O'O'} = \rho d\theta$$

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

三、物理关系

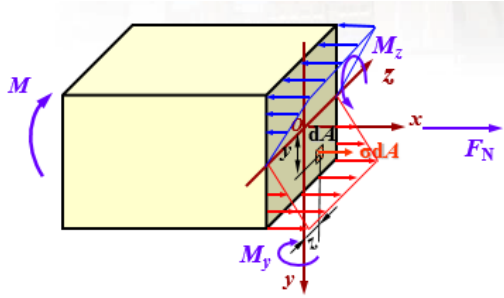
$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{所以} \quad \sigma = E \frac{y}{\rho}$$

应力分布规律：

直梁纯弯曲时横截面上任意一点的正应力，与它到中性轴的距离成正比。

四、静力关系

内力与外力相平衡可得：



$$F_N = \int_A dF_N = \int_A \sigma dA = 0 \quad (1)$$

$$M_{iy} = \int_A dM_y = \int_A z \sigma dA = 0 \quad (2)$$

$$M_{iz} = \int_A dM_z = \int_A y \sigma dA = M \quad (3)$$

将应力表达式代入 (1) 式，得

$$F_N = \int_A E \frac{y}{\rho} dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \Rightarrow S_z = \int_A y dA = 0$$

⇒ 中性轴通过横截面形心

将应力表达式代入 (2) 式，得

$$M_{iy} = \int_A z E \frac{y}{\rho} dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A yz dA = 0 \Rightarrow I_{yz} = \int_A yz dA = 0$$

⇒ 自然满足

将应力表达式代入 (3) 式，得

$$M_{iz} = \int_A y E \frac{y}{\rho} dA = M \Rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M \Rightarrow \frac{E}{\rho} I_z = M$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

将 $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$ 代入 $\sigma = E \frac{y}{\rho}$

得到纯弯曲时横截面上正应力的计算公式： $\sigma = \frac{My}{I_z}$

M 为梁横截面上的弯矩；

y 为梁横截面上任意一点到中性轴的距离；

I_z 为梁横截面对中性轴的惯性矩。

(1) 应用公式时，一般将 My 以绝对值代入。根据梁变形的情况直接判断 σ 的正负号。以中性轴为界，梁变形后凸出边的应力为拉应力 (σ 为正号)，凹入边的应力为压应力 (σ 为负号)；

(2) 最大正应力发生在横截面上离中性轴最远的点处。

$$\sigma_{\max} = \frac{M y_{\max}}{I_z}$$

引用记号 $W = \frac{I_z}{y_{\max}}$ — 抗弯截面系数

则公式改写为 $\sigma_{\max} = \frac{M}{W}$

(1) 当中性轴为对称轴时

实心圆截面 $W = \frac{I_z}{d/2} = \frac{\pi d^4 / 64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}$

矩形截面 $W = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^3 / 12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$

空心圆截面 $W = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$ $\alpha = \frac{d}{D}$

(2) 对于中性轴不是对称轴的横截面

应分别以横截面上受拉和受压部分距中性轴最远的距离 y_{cmax} 和 y_{tmax} 直接代入公式

$\sigma = \frac{My}{I_z}$

$\sigma_{tmax} = \frac{My_{tmax}}{I_z}$

$\sigma_{cmax} = \frac{My_{cmax}}{I_z}$

§ 5-3 横力弯曲时的正应力

- 二、公式的应用范围：
1. 在弹性范围内
 2. 具有切应力的梁
 3. 平面弯曲
 4. 直梁

$$l/h \geq 5$$

三、强度条件： 梁内的最大工作应力不超过材料的许用应力。

1. 数学表达式

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \leq [\sigma]$$

2. 强度条件的应用

(1) 强度校核 $\frac{M_{max}}{W} \leq [\sigma]$ (2) 设计截面 $W \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}$

(3) 确定许可载荷 $M_{max} \leq W[\sigma]$

§ 5-4 梁的切应力及强度条件

一、梁横截面上的切应力 1. 矩形截面梁

(1) 两个假设

- (a) 切应力与剪力平行；
- (b) 切应力沿截面宽度均匀分布（距中性轴等距离处切应力相等）

- (2) 分析方法
(3) 公式推导

略

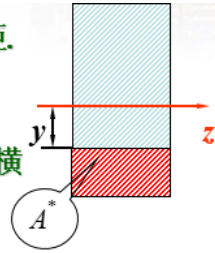
课本 P147~149

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$

I_z ——整个横截面对中性轴的惯性矩。

b ——矩型截面的宽度。

S_z^* ——距中性轴为 y 的横线以外部分横截面面积对中性轴的静矩。



2. 工字形截面梁 P150

§ 5-5 提高梁强度的主要措施

按强度要求设计梁时，主要是依据梁的正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

一、降低梁的最大弯矩值

1. 合理地布置梁的荷载
2. 合理地设置支座位置

二、增大 W_z

1. 合理选择截面形状（在面积相等的情况下，选择抗弯模量大的截面）
2. 合理的放置

三、根据材料特性选择截面形状

四、采用等强度梁 梁各横截面上的最大正应力都相等，并均达到材料的许用应力，则称为等强度梁。

• 第六章 弯曲变形 •

§ 6-1 基本概念及工程实例

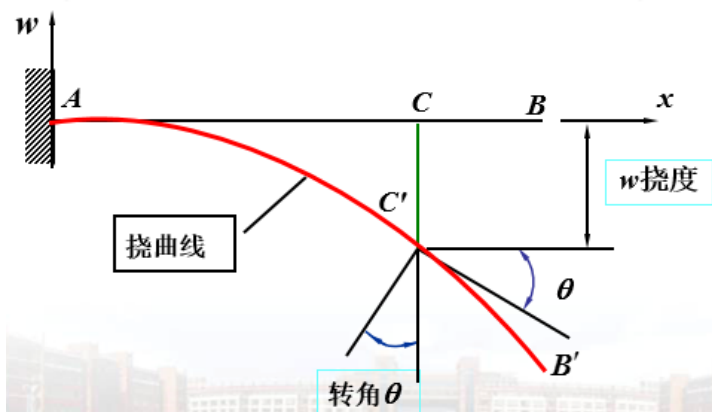
二、基本概念

1. **挠度**——横截面形心 C （即轴线上的点）在垂直于 x 轴方向的**线位移**，称为该截面的挠度。用 w 表示。

2. **转角**——横截面对其原来位置的角位移，称为该截面的转角。用 θ 表示

3. **挠曲线**——挠曲线方程

$$w = f(x)$$



4. 挠度与转角的关系

$$\theta \approx \tan \theta = w' = w'(x)$$

5. 挠度和转角符号的

规定

挠度向上为正, 向下为负.

转角自 x 转至切线方向, 逆时针转为正, 顺时针转为负.

§ 6-2 挠曲线的微分方程

一、推导公式

1. 纯弯曲时曲率与弯矩的关系

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI}$$

2. 由数学得到平面曲线的曲率

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{|w''|}{(1 + w'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI}$$

梁的挠曲线近似微分方程

$$w'' = \frac{M(x)}{EI} \quad w'^2 \text{ 与 } 1 \text{ 相比十分微小而可以忽略不计}$$

近似原因 :

(1) 略去了剪力的影响; (2) 略去了 w'^2 项;

(3) $\theta \approx \tan \theta = w' = w'(x)$

§ 6-3 用积分法求弯曲变形

一、微分方程的积分

$$w'' = \frac{M(x)}{EI}$$

若为等截面直梁, 其抗弯刚度 EI 为一常量上式可改写成

$$EIw'' = M(x)$$

1. 积分一次得转角方程

$$EIw' = \int M(x)dx + C_1$$

2. 再积分一次, 得挠度方程

$$EIw = \iint M(x)dx dx + C_1x + C_2$$

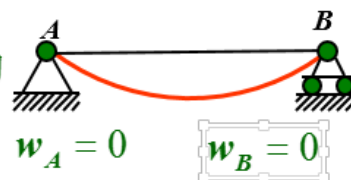
二、积分常数的确定

1. 边界条件

2. 连续条件

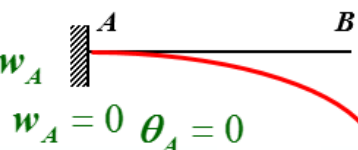
在简支梁中, 左右两铰支座处的

挠度 w_A 和 w_B 都等于0.



在悬臂梁中, 固定端处的挠度 w_A

和转角 θ_A 都应等于0.



§ 6-4 用叠加法求弯曲变形

一、叠加原理 (课本 P184)

1. 载荷叠加 —— 多个载荷同时作用于结构而引起的变形等于每个载荷单独作用于结构而引起的变形的代数和.

$$\begin{aligned}\theta(F_1, F_2, \dots, F_n) &= \theta_1(F_1) + \theta_2(F_2) + \dots + \theta_n(F_n) \\ w(F_1, F_2, \dots, F_n) &= w_1(F_1) + w_2(F_2) + \dots + w_n(F_n)\end{aligned}$$

2. 结构形式叠加 (逐段刚化法)

二、刚度条件

1. 数学表达式

$$\begin{aligned}w_{\max} &\leq [w] \\ \theta_{\max} &\leq [\theta]\end{aligned}$$

$[w]$ 和 $[\theta]$ 是构件的许可挠度和转角.

2. 刚度条件的应用:

- (1) 校核刚度
- (2) 设计截面尺寸
- (3) 求许可载荷

§ 6-5 静不定梁的解法

一、基本概念

1. 超静定梁——单凭静力平衡方程不能求出全部支反力的梁, 称为超静定梁
2. “多余”约束——多于维持其静力平衡所必需的约束
3. “多余”反力——“多余”与相应的支座反力
4. 超静定次数——超静定梁的“多余”约束的数目就等于其超静定次数
 $n = \text{未知力的个数} - \text{独立平衡方程的数目}$

二、求解超静定梁的步骤

1. 画静定基建立相当系统: 将可动铰链支座看作多余约束, 解除多余约束代之以约束反力 R_B , 得到原超静定梁的基本静定系.

2. 列几何方程——变形协调方程

超静定梁在多余约束处的约束条件, 梁的变形协调条件

$$w_B = 0$$

根据变形协调条件得变形几何方程:

变形几何方程为:

$$(w_B)_q + (w_B)_{F_{RB}} = 0$$
$$w_B = (w_B)_q + (w_B)_{F_{RB}}$$

3. 列物理方程——变形与力的关系

4. 建立补充方程

5. 求解其它问题 (反力, 应力, 变形等)

(课本 P 191)

§ 6-6 提高弯曲刚度的措施

一、增大梁的抗弯刚度 EI

二、减小跨度或增加支承

三、改变加载方式和支座位置

$EIw'' = M(x)$ 为了减小梁的位移, 可采取下列措施

(1) 增大梁的抗弯刚度 EI

工程中常采用工字形, 箱形截面

(2) 调整跨长和改变结构

设法缩短梁的跨长, 将能显著地减小其挠度和转角. 这是提高梁的刚度的一个很有效的措施.