线性代数部分测验参考答案（共 40 分）

一、计算行列式：

（计算过程可能会不一样）

$$D_5=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

解：

按第一列展开（也可以按第一行展开），

$$D_5=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2D_4+\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=2D_4-D_3=2(2D_3-D_2)-D_3=3D_3-2D_2$$

$$=3(2D_2-D_1)-2D_2=4D_2-3D_1=12-6=6$$

（法二）由$D_5=2D_4-D_3$，

得$D_5-D_4=D_4-D_3=D_3-D_2=D_2-D_1=3-2=1$，

进而可得$D_5=D_4+1=D_3+2=D_2+3=6.$

二、判定下列矩阵是否可逆，若可逆，求其逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

解：

(1) 法一：$|A|=2$，故 A^{-1}存在

$A_{11}=-4$　　$A_{21}=2$　　$A_{31}=0$

而　$A_{12}=-13$　　$A_{22}=6$　　$A_{32}=-1$

$A_{13}=-32$　　$A_{23}=14$　　$A_{33}=-2$

故 $\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2}\\ -16 & 7 & -1\end{pmatrix}$

法二（初等变换方法）：

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -14 & 6 & -5 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-7r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 16 & -7 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 13 & -6 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 16 & -7 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-r_3]{-\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -16 & 7 & -1\end{array}\right)，故 A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2}\\ -16 & 7 & -1\end{pmatrix}$$

(2) $\quad |A|=24$，故 A^{-1} 存在

$$A_{21}=A_{31}=A_{41}=A_{32}=A_{42}=A_{43}=0$$

$$A_{11}=24 \qquad A_{22}=12 \qquad A_{33}=8 \qquad A_{44}=6$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=-12 \qquad A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=-12$$

$$A_{14}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=3 \qquad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=-4$$

$$A_{24}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&3\\1&2&1\end{vmatrix}=-5 \qquad A_{34}=(-1)^7\begin{vmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&1\end{vmatrix}=-2$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{8}&-\frac{5}{24}&-\frac{1}{12}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

法二（初等变换方法）：

$$(A|E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&2&0&0&0&1&0&0\\2&1&3&0&0&0&1&0\\1&2&1&4&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-2r_1}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&2&0&0&-1&1&0&0\\0&1&3&0&-2&0&1&0\\0&2&1&4&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&3&0&-2&0&1&0\\0&2&1&4&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&3&0&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&1&4&0&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&4&0&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_4-r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&4&\frac{1}{2}&-\frac{5}{6}&-\frac{1}{3}&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&0\\ 0&0&0&1&\frac{1}{8}&-\frac{5}{24}&-\frac{1}{12}&\frac{1}{4}\end{array}\right)$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}&\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}&-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}&\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}&\mathbf{0}\\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}&-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{24}}&-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}&\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\end{pmatrix}$

三、设$A=\begin{pmatrix}3&-2&3&6&-1\\3&2&0&5&0\\1&6&-4&-1&4\\2&0&1&5&-3\end{pmatrix}$，用初等行变换将$A$先化为阶梯形，再化为行最简形，并求矩阵$A$的秩：

解：（初等变换的过程可能不一样）

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&3&6&-1\\3&2&0&5&0\\1&6&-4&-1&4\\2&0&1&5&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_4}\begin{pmatrix}1&-2&2&1&2\\3&2&0&5&0\\1&6&-4&-1&4\\2&0&1&5&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-3r_1\\ r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&-2&2&1&2\\0&8&-6&2&-6\\0&8&-6&-2&2\\0&4&-3&3&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-\frac{1}{2}r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&-2&2&1&2\\0&8&-6&2&-6\\0&0&0&-4&8\\0&0&0&2&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&-2&2&1&2\\0&8&-6&2&-6\\0&0&0&-4&8\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\text{（阶梯形）}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{4}r_3]{\frac{1}{8}r_2}\begin{pmatrix}1&-2&2&1&2\\0&1&-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-\frac{1}{4}r_3]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&-2&2&0&4\\0&1&-\frac{3}{4}&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} & \mathbf{0} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$ （行最简形）

矩阵的秩$R(\boldsymbol{A})=\mathbf{3}.$

四、求解线性方程组$\begin{cases}\boldsymbol{x_1+x_2+x_3-2x_4=4} \\ \boldsymbol{2x_1-x_2+x_3-x_4=2} \\ \boldsymbol{4x_1-6x_2-2x_3+2x_4=4} \\ \boldsymbol{3x_1+6x_2+7x_3-9x_4=9}\end{cases}$. **（本题 10 分）**

解： 对非齐次线性方程组的增广矩阵作初等行变换化为行最简形（过程略）：

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & -9 & 9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因$R(A)=R(\bar{A})=3<4$, 方程组有无穷多解。

方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 \\ 3 \\ -3 \\ 0\end{pmatrix}, \qquad k\in R\,.$$