线性代数综合测试题四

一、选择题.（每小题 4 分，共 24 分）

1. n 阶矩阵 A 可逆的充要条件是（　D　）.

（A）A 的任一行向量都是非零向量

（B）A 的任一列向量都是非零向量

（C）非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解

（D）当 $x\neq 0$ 时，$Ax\neq 0$, 其中 $X=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^T$

【解题过程】举出反例：$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$不可逆，排除（A）、（B）；非齐次线性方程组 $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$有解，但$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$不可逆，排除（C）.

2. 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n},|A|=0,$ 但 A 中某元素 a_{kl} 的代数余子式 $A_{kl}\neq 0,$ 则 $Ax=0$ 的基础解系中解向量的个数是（　A　）.

（A）1　　　　（B）k

（C）l　　　　（D）n

【解题过程】 A 中某元素 a_{kl} 的代数余子式 $A_{kl}\neq 0,$ 则 $R\left(A\right)=n-1,$ 于是 $Ax=0$ 的基础解系中解向量的个数是 1.

3. 设 $A=\left(a_1,a_2,a_3\right),B=\left(b_1,b_2,b_3\right)$ 是两个

三维向量，且 $A^TB=\begin{pmatrix}3&0&2\\6&0&4\\9&0&6\end{pmatrix}$，则

$AB^T=$（　B　）.

（A）6　　　　（B）9

（C）15　　　　（D）12

【解题过程】

$AB^T=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=3+0+6=9.$

（a_1b_1,a_2b_2,a_3b_3 为 A^TB 主对角线上元素）.

4. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=O$, E 是 n 阶单位矩阵，则（　D　）.

（A）$|E-A|\neq 0$, 且 $|E+A|=0$

（B）$|E-A|=0$, 且 $|E+A|\neq 0$

（C）$|E-A|=0$, 且 $|E+A|=0$

（D）$|E-A|\neq 0$, 且 $|E+A|\neq 0$

【解题过程】$\because A^2=O$

$\therefore E-A^2=(E-A)(E+A)=E$

于是 $|E-A|\neq 0$, 且 $|E+A|\neq 0$.

5. 设矩阵 $P=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$\alpha=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}, \beta=P\alpha,$ 则向量 β 的长度等于

（ B ）.

（A）0 （B）1

（C）3 （D）$\frac{1}{3}$

【解题过程】

$$\beta=P\alpha=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\cos\theta-\frac{2}{3}\sin\theta\\ -\frac{1}{3}\sin\theta+\frac{2}{3}\cos\theta\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，向量 β 的长度等于

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\cos\theta-\frac{2}{3}\sin\theta\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\sin\theta+\frac{2}{3}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$
$=1.$

6.设矩阵 A 与矩阵 B 等价，则下列说法正确的是（ C ）.

（A） A 的秩小于 B 的秩

（B） A 的秩大于 B 的秩

（C） A 的秩等于 B 的秩

（D） A 与 B 的行列式相等

二、填空题.（每小题 3 分，共 33 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $E(3,2(3))$ 是将单位矩阵的第二行得 3 倍加至第三行所得的三阶初等方阵，则 $E(3,2(3))A=$ $\underline{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 4\\ -4 & 3 & 9\end{pmatrix}}$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}$, 则 A^{-1} 等于 $\underline{\begin{pmatrix}0 & -2 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}}$.

【解题过程】

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right),$$

由此可得 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. 设向量 $\alpha_1=(1,-1,0),\alpha_2=(2,1,3),$ $\alpha_3=(3,0,3)$, 则由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的向量空间的维数是 $\underline{2}$.

【解题过程】

令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，将 A 进行初等行变换得：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可得，$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2,$

则由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的向量空间的维数是 2.

4.设A为四阶方阵，且$R(A)=3$, 则齐次线性方程组$A^*x=0$（A^*为A的伴随矩阵）的基础解系所含解向量的个数为$\underline{3}$.

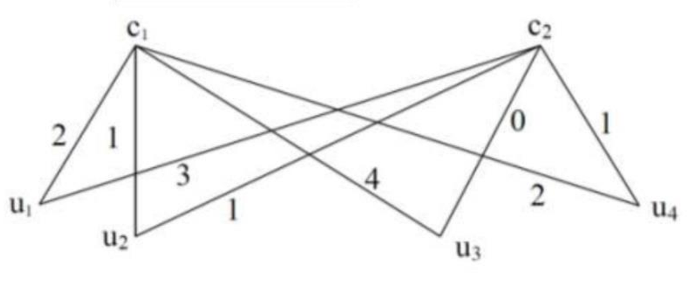
【解题过程】若B为$n(n\geq 2)$阶方阵，那么

$$秩\left(B^*\right)=\begin{cases} n & 当秩B=n, \\ 1 & 当秩B=n-1, \\ 0 & 当秩B<n-1. \end{cases}$$

由此可知，$R\left(A^*\right)=1$, 则齐次线性方程组$A^*x=0$的基础解系所含解向量的个数为3.

5. 设向量$\alpha_1=(1,-1,0),\alpha_2=(2,1,3)$, $\alpha_3=(3,0,3)$, 则由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的向量空间的维数是 2.

6.设C国的两个机场c_1,c_2, 与U国 4 个机场u_1,u_2,u_3,u_4通航，图中数字表示两机场间的每日航班数，将此图表示成二行四列的矩阵$A=\left(a_{ij}\right)$, 其中a_{ij}表示c_i与u_j间的航班数，则$A=\underline{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.



7.设对于三阶矩阵 A, 有 $|A|=2,|2A+E|=3$,

则 $|4A^2+2A|=\underline{48}$.

【解题过程】

$$|4A^2+2A|=|2A(2A+\mathrm{E})|=2^3|A||2A+E|=48.$$

8. 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 p, 向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的秩为 q, 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_i$ 的秩为 r, 则 r 与 $p+q$ 的大小关系是 $\underline{\gamma\le p+q}$.

【解题过程】 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 可由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表示，于是 $\gamma\le p+q$.

9.设向量 $\alpha_1=(-1,1,2,-1),\alpha_2=(0,3,8,-2)$,

$\alpha_3=(3,1,2,2)$, 则 $|3\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3|=\underline{\sqrt{2}}$.

【解题过程】

$$|3\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3|=|(0,1,0,1)|=\sqrt{2}.$$

10.设 $A=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-1},\alpha)$,

$B=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-1},\beta)$,

其中 $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-1}$ 是 n 维列向量，若 $|A|=a,|B|=b$, 则 $|A+B|=\underline{2^{n-1}(a+b)}$.

【解题过程】

$$
\begin{aligned}
|A+B| &= \left|\left(2\gamma_1,2\gamma_2,\cdots,2\gamma_{n-1},\alpha+\beta\right)\right| \\
&= 2^{n-1}\left(\left|\left(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-1},\alpha\right)\right|+\left|\left(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-1},\beta\right)\right|\right) \\
&= 2^{n-1}(a+b).
\end{aligned}
$$

11.设 n 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}\left(s<n\right)$

线性无关，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 $\underline{s}$.

【解题过程】向量组整体线性无关，则部分

线性无关.于是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为

s.

三、计算题（本题共 35 分）

1.（5 分）计算:

$$
D_{n+1}=\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}
$$

【解题过程】

$$
D_{n+1}=\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$=(-1)^{n+1+1}(n+1)\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n(n+1)(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

2.（6 分）设 A,B 均为三阶矩阵，且满足：

$A^2-AB-2B^2=A-2BA-B,$ 已 知 $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，且 $|A-B|\neq 0,$ 求 矩 阵 $A.$

【解题过程】

$\because A^2-AB-2B^2=A-2BA-B$

$\therefore A^2-AB+2BA-2B^2=A-B$

$\therefore A(A-B)+2B(A-B)=A-B$

$\because |A-B|\neq 0$

$\therefore A-B$ 可逆

$A(A-B)+2B(A-B)=A-B$ 等 式 左 右两边同乘 $(A-B)^{-1}$ 得：$A+2B=E$，即

$$A=E-2B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

3.（8 分）在 R^4 中，向量 α 在基：

$\alpha_1=(1,1,0,0),\alpha_2=(0,1,1,0),\alpha_3=(0,0,1,1),$
$\alpha_4=(1,0,0,1)$

下的坐标为$(2,3,1,2)$,求向量α在基:

$\beta_1=(1,2,0,0),\beta_2=(0,2,3,0),$
$\beta_3=(0,0,2,4),\beta_4=(3,0,0,2)$

下的坐标.

【解题过程】α在基:

$\alpha_1=(1,1,0,0),\alpha_2=(0,1,1,0),$
$\alpha_3=(0,0,1,1),\alpha_4=(1,0,0,1)$

下的坐标为$(2,3,1,2)$,即$\alpha=(4,5,4,3)$

假设$\alpha=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$,

即$\begin{cases}x_1+3x_4=4\\2x_1+2x_2=5\\3x_2+2x_3=4\\4x_3+2x_4=3\end{cases}$，其增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&3&4\\2&2&0&0&5\\0&3&2&0&4\\0&0&4&2&3\end{pmatrix}$$

将$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&3&4\\2&2&0&0&5\\0&3&2&0&4\\0&0&4&2&3\end{pmatrix}$进行初等行变换

得:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&3&4\\2&2&0&0&5\\0&3&2&0&4\\0&0&4&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&4\\0&2&0&-6&-3\\0&3&2&0&4\\0&0&4&2&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&4\\0&1&0&-3&-\frac{3}{2}\\0&3&2&0&4\\0&0&4&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&4\\0&1&0&-3&-\frac{3}{2}\\0&0&2&9&\frac{17}{2}\\0&0&4&2&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&4\\0&1&0&-3&-\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{9}{2}&\frac{17}{4}\\0&0&4&2&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&4\\0&1&0&-3&-\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{9}{2}&\frac{17}{4}\\0&0&0&-16&-14\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&4\\0&1&0&-3&-\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{9}{2}&\frac{17}{4}\\0&0&0&1&\frac{7}{8}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{11}{8}\\0&1&0&0&\frac{9}{8}\\0&0&1&0&\frac{5}{16}\\0&0&0&1&\frac{7}{8}\end{pmatrix}$$

由此可得，$\begin{cases}x_1=\dfrac{11}{8}\\x_2=\dfrac{9}{8}\\x_3=\dfrac{5}{16}\\x_4=\dfrac{7}{8}\end{cases}$，于是向量$\alpha$在基：

$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标为 $\left(\frac{11}{8},\frac{9}{8},\frac{5}{16},\frac{7}{8}\right)$.

4.（8 分）求 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4-x_5=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4+2x_5=0 \\ 3x_1+5x_2-x_3+x_5=0 \\ x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0 \end{cases}$ 的

通解.

【解题过程】 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4-x_5=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4+2x_5=0 \\ 3x_1+5x_2-x_3+x_5=0 \\ x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0 \end{cases}$

的系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

将 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ 进行初等行

变换得：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，线性方程的基础解系为：

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-8\\5\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}5\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-7\\4\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$. 通解为

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$, 其中 k_1,k_2,k_3 为任意实数.

5. （8 分）用正交变换将二次型 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 化为标准形.

【解题过程】

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.

的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$$

A 的特征值为：5,-1,-1.

当 $\lambda=5$ 时，$(5E-A)x=0$, 将其系数矩阵

进行初等行变换得：

$$5E-A=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&-2&4\\-2&4&-2\\4&-2&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\-2&4&-2\\4&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&6&-6\\0&-6&6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&6&-6\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得，A 的属于特征值 5 的特征向量为

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,单位化后为$\xi_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

当 $\lambda=-1$时，$\left(-E-A\right)x=0$, 将其系数矩阵进行初等行变换得：

$$-E-A=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得，A 的属于特征值-1 的特征向量为

$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, 单位化、正交化后为

$$\xi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};\xi_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

令 $P=\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

为 正 交 矩 阵 ， 令 $x=Py$, 则

$f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$ 为所求的标准形.

四．证明题（本题 8 分）

（1）（3 分）已知 n 阶矩阵 A 满足条件：

$A^k \neq O$，$A^{k+1}=O$（k 是自然数），B 是 n 阶矩阵，试证明矩阵方阵 $AX=B+X$ 存在唯一的解矩阵 X.

（2）（5 分）设有三个不共面的向量 $\alpha=\left(a_1,a_2,a_3\right),\beta=\left(b_1,b_2,b_3\right),\gamma=\left(c_1,c_2,c_3\right)$,

证 明： 存 在 唯 一 一 个 向 量 x, 使 $x\cdot\alpha=1,x\cdot\beta=2,x\cdot\gamma=3$.

【解题过程】（1）$\because A^{k+1}=O$

$\therefore -E=A^{k+1}-E$

$=\left(A-E\right)\left(A^k+A^{k-1}+\cdots+E\right)$

$\therefore A-E$ 可逆

$\because AX=B+X$

$\therefore \left(A-E\right)X=B$

将 $\left(A-E\right)X=B$ 左右两边同乘 $\left(A-E\right)^{-1}$

得：$X=\left(A-E\right)^{-1}B$.

（2）设 $x=\left(x_1,x_2,x_3\right)$，

有 $x\cdot\alpha=x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3=1,$

$x\cdot\beta=x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=2,$

$x\cdot\gamma=x_1c_1+x_2c_2+x_3c_3=3$，

即 $\begin{cases}x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3=1\\x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=2\\x_1c_1+x_2c_2+x_3c_3=3\end{cases}$, 其系数矩阵为

$A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$, 增广矩阵为

$\overline{A}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&1\\b_1&b_2&b_3&2\\c_1&c_2&c_3&3\end{pmatrix}$

$\because\alpha=\left(a_1,a_2,a_3\right),\beta=\left(b_1,b_2,b_3\right),$
$\gamma=\left(c_1,c_2,c_3\right)$

是三个不共面的向量

$\therefore R\left(A\right)=3$

于是 $R\left(A\right)=R\left(\overline{A}\right)=3$, 线性方程组有唯一解，即存在唯一一个向量 x, 使 $x\cdot\alpha=1,x\cdot\beta=2,x\cdot\gamma=3.$