矩阵自测题

一、单项选择题.

1. 方 程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & x \\ 0 & 4 & 9 & x^2 \\ 0 & -8 & 27 & x^3 \end{vmatrix} = 0$ 的 根 为

（ B ）.

（A）1，-2，3　　　　（B）0，-2，3

（C）0，2，-3　　　　（D）-1，2，-3

【解题过程】由

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & x \\ 0 & 4 & 9 & x^2 \\ 0 & -8 & 27 & x^3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\left[5\left(x^3 - 4x\right) - 5\left(x^2 + 2x\right)\right] = 0$$

得：$x(x+2)(x-3) = 0$, 于是方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & x \\ 0 & 4 & 9 & x^2 \\ 0 & -8 & 27 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$ 的根为 0，-2，3.

2.若 A 为 n 阶可逆矩阵，则下列结论不正确的是（ D ）.

（A）$\left(A^{-1}\right)^k = \left(A^k\right)^{-1}$

（B）$\left(A^T\right)^k = \left(A^k\right)^T$

（C）$\left(A^*\right)^k = \left(A^k\right)^*$

（D）$(kA)^* = kA^*$

【解题过程】对于（D），举出反例：

$$\left(2\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right)^* \neq 2\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}^*.$$

3. A,B 均为三阶可逆矩阵，则下列等式成立的是（ A ）.

（A）$\left|(AB)^{-1}\right| = |A|^{-1}|B|^{-1}$

（B）$|-A| = |A|$

（C）$\left|A^2 - B^2\right| = |A-B||A+B|$

（D）$|2A| = 2|A|$

【解题过程】(B)：$|-A| = (-1)^3|A| = -|A|$;

(C)：举出反例：$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$;

(D)：$|2A| = 2^3|A| = 8|A|$.

4.设 A,B 均为 n 阶矩阵，A^*,B^* 均是伴随矩阵，$C=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$,则 $C^*=$（ C ）.

（A）$\begin{pmatrix}|A|A^* & O\\ O & |B|B^*\end{pmatrix}$

（B）$\begin{pmatrix}|B|B^* & O\\ O & |A|A^*\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}|B|A^* & O\\ O & |A|B^*\end{pmatrix}$

（D）$\begin{pmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$

【解题过程】

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} |A||B|E & O \\ O & |A||B|E \end{pmatrix}.$$

5. 设 A,B 均为 n 阶矩阵，则必有（　B　）.

（A） A 或 B 可逆，则 AB 可逆

（B） A 或 B 不可逆，则 AB 不可逆

（C） A 或 B 都可逆，则 $A+B$ 可逆

（D） A 或 B 都不可逆，则 $A+B$ 不可逆

【解题过程】 A 或 B 不可逆，则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$, 于是 $|AB|=0$, 即 AB 不可逆.

6.已知 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, 矩阵 P 按列分块为 $P=(P_1,P_2,P_3)$, 设 $Q=(P_1+P_2,P_2,P_3)$,

则 $Q^{-1}AQ=$（　A　）.

（A）$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \\ 15 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

（B）$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 14 & 5 & 6 \\ 23 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

（D）$\begin{pmatrix} -6 & -3 & -3 \\ 9 & 5 & 6 \\ 15 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

【解题过程】$\because$ 矩阵 P 按列分块为

$P=\left(P_1,P_2,P_3\right),\ Q=\left(P_1+P_2,P_2,P_3\right),$

$$\therefore Q=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}P^{-1}AP\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \\ 15 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

7.设 $R\left(A_{3\times5}\right)=3,$ 那么 $A_{3\times5}$ 满足（　D　）.

（A）三阶子式全为零

（B）至少有一个四阶子式不为零

（C）二阶子式全为零

（D）至少有一个二阶子式不为零

【解题过程】（A）：三阶子式全为零，则 $R\left(A_{3\times5}\right)<3,$ 与 $R\left(A_{3\times5}\right)=3$ 矛盾；（B）至

少有一个四阶子式不为零，则 $R\left(A_{3\times5}\right)\geq 4,$

与 $R\left(A_{3\times5}\right)=3$ 矛盾；矛盾；（C）二阶子式

全为零，, 则 $R\left(A_{3\times5}\right)<2,$ 与 $R\left(A_{3\times5}\right)=3$ 矛

盾.

8. 设 A,B 分别为 $m\times n, n\times m$ 型矩阵，且

$AB=E,$ 其中 E 为单位矩阵，则（　A　）.

（A）$R(A)=m, R(B)=m$

（B）$R(A)=m, R(B)=n$

（C）$R(A)=n, R(B)=m$

（D）$R(A)=n, R(B)=n$

【解题过程】

$\because R(A)\leq \min\{m,n\}, m=R(AB)\leq R(A)$

$\therefore R(A)=m$

同理：$R(B)=m.$

9. 已知 $R\left(A_{6\times3}\right)=2$ 且 $B=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&4\\1&0&0\end{pmatrix},$ 则

$R(AB)=$（　A　）.

（A）2　　　（B）3

（C）1　　　（D）无法确定

【解题过程】 $\because |B|=\begin{vmatrix}1&0&4\\0&1&4\\1&0&0\end{vmatrix}=4\neq 0$

$\therefore B$ 可逆

$\therefore B$ 可表示为一系列初等矩阵的乘积

AB 相当于对 A 进行一系列的初等列变换，

不改变矩阵 A 的秩，于是 $R(AB)=2$.

10.已知齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x+y+z=0 \\ \lambda x+3y+z=0 \\ -y+\lambda z=0 \end{cases}$

仅有零解，则（ A ）.

（A）$\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq 1$

（B）$\lambda \neq 0$ 或 $\lambda \neq 1$

（C）$\lambda = 0$

（D）$\lambda = 1$

【解题过程】 若齐次线性方程组

$\begin{cases} \lambda x+y+z=0 \\ \lambda x+3y+z=0 \\ -y+\lambda z=0 \end{cases}$ 仅有零解，则

$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 3 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2-2\lambda \neq 0$, 即 $\lambda \neq 0$ 且

$\lambda \neq 1$.

11.已知方程组 $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y-z=b \\ x-y+z=c \end{cases}$ 有唯一解，且

$x=1$, 那么 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$（ D ）.

（A）0　　（B）1　　（C）-4　　（D）4

【解题过程】 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(b+c)$

$\because$ 方程组 $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y-z=b \\ x-y+z=c \end{cases}$ 有唯一解，且

$x=1$

$\therefore \begin{cases} y+z=a-1 \\ y-z=b-1 \\ -y+z=c-1 \end{cases}$

$\therefore y-z+(-y)+z=b-1+c-1,$

即 $b+c=2.$

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(b+c) = 4.$

二、填空题.

1\. α 是三维列向量，且 $\alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\alpha^T\alpha =$ __3__.

【解题过程】 设 $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，

$$\alpha^T\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\because \alpha\alpha^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \alpha^T\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3.$$

2. 设四阶方阵 A,B 按列分块为 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4),B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，且 $|A|=3,|B|=-1$, $|A+B|=$ __16__.

【解题过程】

$$|A+B| = |(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)+(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)|$$
$$= |(\alpha+\beta,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4)|$$
$$= 8|(\alpha+\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)|$$
$$= 8|(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)|+8|(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)|$$
$$= 8\times 3+8\times(-1)$$
$$= 16.$$

3. A,B 均为三阶矩阵，且 $|A|=-1,|B|=2$, 则 $\left|2\left(A^TB^{-1}\right)^2\right|=$ __2__.

【解题过程】

$$\left|2\left(A^T B^{-1}\right)^2\right| = 2^3 \left|A^T\right|^2 \left|B^2\right|^{-1}$$
$$= 2^3 |A|^2 |B|^{-2} = 2.$$

4.已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, A 的所有

代数余子式之和 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij} = \underline{\quad 1 \quad}$.

【解题过程】

由 $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 2$ 可得:

$2A_{11} + 2A_{12} + \cdots + 2A_{1n}$
$= 2; A_{21} + A_{22} + \cdots + A_{2n}$
$= 0; \cdots; A_{n1} + A_{n2} + \cdots + A_{nn}$
$= 0.$

于是 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij} = 1.$

5.已知 $A^2 + A - 4E = O$, 则 $(A+2E)^{-1} =$

$\underline{\frac{1}{2}(A-E)}$.

【解题过程】 $\because A^2 + A - 4E = O$

$\therefore (A+2E)(A-E) = 2E$

$\therefore (A+2E)^{-1} = \frac{1}{2}(A-E).$

6. 若 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$，那么

$P^{2017}AP^{2018}=\underline{\begin{pmatrix}3 & 4\\1 & 2\end{pmatrix}}$.

【解题过程】

$$P^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix};$$

$P^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$；易知：

$P^{2k}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}; P^{2k+1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, k\in N^*$. 那么

$$P^{2017}AP^{2018}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\1 & 2\end{pmatrix}.$$

7.设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\4 & t & 3\\3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，若有非零矩阵 B 使得 $AB=O$，则 $t=\underline{-3}$.

【解题过程】若有非零矩阵 B 使得 $AB=O$，则 $Ax=0$ 有非零解，即

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\4 & t & 3\\3 & -1 & 1\end{vmatrix}=0, \text{得 } t=-3.$$

三、判断题（正确的在括号里打“√”，错误的打“×”）.

1. n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 的展开式中含有 a_{11} 的项

数为 n. （ × ）

【解题过程】 n 阶行列式 $\left|a_{ij}\right|$ 的展开式中含有 a_{11} 的项数为 $(n-1)!$.

2.若 n 阶行列式 $\left|a_{ij}\right|$ 的每行元素之和均为零，则 $\left|a_{ij}\right|$ 等于零. （ √ ）

【解题过程】 把每一行加到第一行上，则第一行元素都是各行元素之和等于零，所以 $\left|a_{ij}\right|$ 为 0.

3.若 V 为范德蒙行列式，A_{ij} 是代数余子式，则 $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = V$. （ √ ）

【解题过程】

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} \left(x_i - x_j\right).$$

有 $A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n} = V$;

$A_{21} + A_{22} + \cdots + A_{2n} = 0$;

$\cdots; A_{n1} + A_{n2} + \cdots + A_{nn} = 0$;

于是 $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = V$.

4. 若 n 阶行列式 $\left|a_{ij}\right|$ 满足 $a_{ij} = A_{ij}, i, j = 1, \cdots, n$, 则 $\left|a_{ij}\right| > 0$. （ × ）

【解题过程】 举出反例：$A=O$.

5.若 n 阶行列式 $\left|a_{ij}\right|$ 的展开式中每一项都不为零，则 $\left|a_{ij}\right|\neq 0$.　　（ × ）

【解题过程】 举出反例：$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, 行列式 $|A|$ 的展开式中每一项都不为零，但 $\left|a_{ij}\right|=0$.

6. $A=A^{*}$ 的充分必要条件是 $A=|A|A^{-1}$.

（ × ）

【解题过程】 举出反例：$A=O$.

7. $A_{3\times 2}B_{2\times 3}$ 不可逆.　　（ √ ）

【解题过程】

$\because R(AB)\leq \min(R(A),R(B))$

$\therefore R(AB)\leq 2$

$\therefore AB$ 不可逆

8.对任意矩阵 A,B, 只要矩足 $AB=E$, 则 $B=A^{-1}$.　　（ √ ）

【解题过程】 $\because AB=E$

$\therefore |AB|=|A||B|=1$，即 A,B 可逆

将 $AB=E$ 左乘 A^{-1} 得：$B=A^{-1}$.

9. A,B 均为 n 阶非零矩阵，若 $AB=O$, 则 $|A|=|B|=0$.　　（ √ ）

【解题过程】 $\because A,B$ 均为 n 阶非零矩阵，$AB=O$

$\therefore Ax=0$有非零解

$\therefore |A|=0$

将 $AB=O$ 等式两边取转置得：$B^T A^T=O.$

同理可得：$|B^T|=|B|=0.$

$\therefore |A|=|B|=0.$

10. A 为可逆矩阵，若 A 的每行元素之和都为 a，则 A^{-1} 的每行元素之和都为 a^{-1}.

（ √ ）

【解题过程】$\because A$ 的每行元素之和均为 a

$$\therefore A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{pmatrix}$$的每行元素之和均为 a

$\because A$ 是可逆矩阵

$$\therefore A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{pmatrix}$$左乘矩阵 A^{-1} 得：

$$A^{-1}\begin{pmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

由题意可知，$a\neq 0$.

$$A^{-1}\begin{pmatrix}a\\a\\\vdots\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$等式两边同乘 $\frac{1}{a}$ 得：

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}\\\frac{1}{a}\\\vdots\\\frac{1}{a}\end{pmatrix}$$

$\therefore A^{-1}$的每行元素之和为a^{-1}.

四、计算行列式$\begin{vmatrix}a_1+b & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$.

【解题过程】

$$\begin{vmatrix}a_1+b & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1+a_2+\cdots+a_n+b & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1+a_2+\cdots+a_n+b & a_2+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1+a_2+\cdots+a_n+b & a_2 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}$$

$$=\left(a_1+a_2+\cdots+a_n+b\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & a_2+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_2 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}$$

$$=\left(a_1+a_2+\cdots+a_n+b\right)\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & b\end{vmatrix}$$

$$=\left(a_1+a_2+\cdots+a_n+b\right)b^{n-1}.$$

五、(1)已知$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$,计算$A^n$.

【解题过程】 当 $n=2$ 时，

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}=4E;$$

当 $n=3$ 时，

$$A^3=A^2A=4EA;$$

$\cdots;$

当 $n=2k$ 时，

$$A^{2k}=A^2A^2\cdots A^2=(4E)^k=4^kE;$$

当 $n=2k+1$ 时，

$$A^{2k+1}=A^{2k}A=4^kEA=4^kA;$$

于是 $A^n=\begin{cases}4^kE,n=2k;\\4^kA,n=2k+1.\end{cases}$

（2）若 B 满足

$A^3+A^2+AB-5A-8E=O$, 求 B.

【解题过程】 由（1）可将

$A^3+A^2+AB-5A-8E=O$ 变 形 为：

$$4A+4E+AB-5A-8E$$
$$=-A-4E+AB=O.$$

$$-A-4E+AB=O,$$

即 $AB=A+4E$

$\because A^2=4E$

$\therefore A^{-1}=\frac{1}{4}A$

$\therefore B=A^{-1}\left(A+4E\right)=\frac{1}{4}A\left(A+4E\right)$

$$=E+A=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&2&-1&-1\\1&-1&2&-1\\1&-1&-1&2\end{pmatrix}.$$

六、已知 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\2&-2&2&-2\\5&-5&5&-5\end{pmatrix}$, 计算:(1) $R\left(A\right)$;(2) A^{2018}.

【解题过程】

(1) 将 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\2&-2&2&-2\\5&-5&5&-5\end{pmatrix}$ 进行初等

变换得:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\2&-2&2&-2\\5&-5&5&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

变换得:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\2&-2&2&-2\\5&-5&5&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得: $R\left(A\right)=1$;

(2) 当 $n=2$ 时,

$$A^2=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\2&-2&2&-2\\5&-5&5&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\\2&-2&2&-2\\5&-5&5&-5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -5 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}=-A;$$

当 $n=3$ 时，

$$A^{3}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -5 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 5 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -5 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}=A;$$

$\cdots;$

当 $n=2k$ 时，

$$A^{2k}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -5 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}=-A;$$

当 $n=2k+1$ 时，

$$A^{2k+1}=A^{2k}A=-AA=A;$$

当 $n=2k+2$ 时，

$$A^{2k+2}=A^{2k+1}A=AA=-A.$$

由此可知，当 $n=2018$ 时，$A^{2018}=-A.$

七、A,B 均为三阶可逆矩阵，

$2A^{-1}B=B-4E$, 若 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A.

【解题过程】 $\because 2A^{\;1}B=B-4E$

$\therefore 2B = A(B-4E)$

$$\because |B-4E| = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

$\therefore B-4E$ 可逆

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

由此可得：

$$(B-4E)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.\text{于是}$$

$\therefore A=2B\left(B-4E\right)^{-1}$

$$=2\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\-\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\-1 & -1 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

八、判定 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\1 & -5 & 2 & 0 & 0\\-2 & 11 & -3 & 0 & 0\\1 & -5 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，求出其可逆矩阵.

【解题过程】

将 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\1 & -5 & 2 & 0 & 0\\-2 & 11 & -3 & 0 & 0\\1 & -5 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 进行分块，

取 $A_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1 & -5 & 2\\-2 & 11 & -3\\1 & -5 & 1\end{pmatrix}$，则

$$A=\begin{pmatrix}O & A_1\\A_2 & O\end{pmatrix}$$

$$\because |A|=\begin{vmatrix}O & A_1\\A_2 & O\end{vmatrix}=\left(-1\right)^{2\times 3}|A_1||A_2|=1\neq 0$$

$\therefore A$ 可逆

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

由此可得 $A_1^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 11 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

由此可得 $A_2^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

九、讨论参数 a 的值，求矩阵

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}$的秩.

【解题过程】

对 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}$做初等行变换得：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & a \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & a \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由此可知，无论 a 取何值，$R(A)=2$.

十、讨论 a,b 为何值时，方程组

$\begin{cases} x_1+ax_2+x_3=3 \\ x_1+2ax_2+x_3=4 \\ bx_1+x_2+x_3=4 \end{cases}$有唯一解？无解？有解时，求出其通解.

【解题思路】（线性方程组有解判定定理）对于线性方程组 $A_{m\times n}X=\beta$，

（1）$A_{m\times n}X=\beta$ 无解的充分必要条件是系数矩阵 A 的秩小于增广矩阵 $\overline{A}=\left(A,\beta\right)$ 的秩，即 $R\left(A\right)\le R\left(A,\beta\right)$.

（2）$A_{m\times n}X=\beta$ 有唯一解的充分必要条件是 $R\left(A\right)=R\left(A,\beta\right)=n$；

（3）$A_{m\times n}X=\beta$ 有无穷多解的充分必要条件是 $R\left(A\right)=R\left(A,\beta\right)<n$.

【解题过程】

线性方程组 $\begin{cases}x_1+ax_2+x_3=3\\x_1+2ax_2+x_3=4\\bx_1+x_2+x_3=4\end{cases}$ 的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\1&2a&1\\b&1&1\end{pmatrix}$，

增广矩阵为 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&a&1&3\\1&2a&1&4\\b&1&1&4\end{pmatrix}$

对 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&a&1&3\\1&2a&1&4\\b&1&1&4\end{pmatrix}$ 做初等行变换变为

行阶梯形矩阵：

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 3\\ 1 & 2a & 1 & 4\\ b & 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-b)r_1]{r_2+(-1)r_1}$$

$$\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 3\\ 0 & a & 0 & 1\\ 0 & 1-ab & 1-b & 4-3b\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(-1)r_2,\,r_3+br_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & a & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1-b & 4-2b\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1-b & 4-2b\\ 0 & a & 0 & b\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-a)r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1-b & 4-2b\\ 0 & 0 & a(b-1) & a(2b-4)+1\end{pmatrix}$$

由线性方程组有解判定定理可知，当 $a(b-1)\neq 0$，即 $a\neq 0$ 且 $b\neq 1$ 时，线性方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{2a-1}{a(b-1)},x_2=\frac{1}{a},x_3=\frac{1+2ab-4a}{a(b-1)};$$

当 $a=0$ 时，线性方程组无解；当 $a=\frac{1}{2}$ 且 $b=1$ 时，线性方程组有无穷多解.

当 $a=\frac{1}{2}$ 且 $b=1$ 时，

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 1 & 3\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

此时，线性方程组的解为$\begin{cases}x_1=-x_3+2\\ x_2=2\end{cases}$，其

中x_3为自由未知量，可以取任意实数.（或

表示为：

$(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T=(2 \quad 2 \quad 0)^T+k(-1 \quad 0 \quad 1)^T$.

）

十一、n阶非零矩阵A满足$A^2=E$，证明

$R(A-E)+R(A+E)=n.$

【解题思路】

$R(A+B)\le R(A)+R(B)$,

$R(A)+R(B)\le R(AB)+n$;

【解题过程】$\because A^2=E$

$\therefore A$可逆

$\because R(A+B)\le R(A)+R(B)$

$\therefore n=R(2A)\le R(A+E)+R(A-E)$

又$\because R(A)+R(B)\le R(AB)+n$

$\therefore R(A+E)+R(A-E)\le R(A^2-E)+n$

于是$R(A-E)+R(A+E)=n.$