线性代数综合测试题五

一、选择题.（每小题 4 分，共 20 分）

1．设 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}$，则 D 中所有元素的代数余子式之和为（　A　）.

（A）1　　（B）-1　　（C）-4　　（D）4

【解题思路】

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{ij}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$
$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in};$$

在行列式中，一行的元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和为零.

【解题过程】 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$

$$\because D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=1$$

$$A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=0$$
$$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=0$$
$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0$$

$\therefore \sum_{i,j=1}^{4} A_{ij} = 1.$

2. 设 A,B,C 均为 n 阶方阵，$AB=BA, AC=CA,$ 则 $ABC=$（ C ）.

（A）ACB　　（B）CBA

（C）BCA　　（D）CAB

【解题过程】 $ABC=BAC=BCA.$

3.设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,则下列向量组线性相关的是（　B　）.

（A）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3$

（B）$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

（C）$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_3$

（D）$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

【解题过程】

$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_3-\alpha_1=0.$

4. 已知非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$ 有无穷多解，$R(A)=r<n,$ 则该线性方程组线性无关的解向量的个数最多有（　D ）个.

（A）$n-r$　　（B）r

（C）$r+1$　　（D）$n-r+1$

【解题过程】 非齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=b$ 有无穷多解，$R(A)=r<n,$ 则该线性方程

组导出组的基础解系含有解向量个数为 $n-r$ 个，假设为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-r}$. 非齐次线性方程组的一个特解为 ξ，易知 $\xi,\xi+\varepsilon_1,\xi+\varepsilon_2,\cdots,\xi+\varepsilon_{n-r}$ 为线性无关的解向量，且其它解向量都可由其线性表示，于是线性方程组线性无关的解向量的个数最多有 $n-r+1$ 个.

5. 下列四个矩阵中，与 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 相似的是（ D ）.

（A）$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

【解题过程】 A 与 B 相似，则 A 与 B 的特征多项式相同，特征值相同，行列式相同，$tr(A)=tr(B)$. 排除（A）、（B）、（C）.

二、填空题.（每小题 4 分，共 20 分）

6. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1+x \\ 3 & 2+x & 1 \\ 3+x & 2 & 1 \end{vmatrix}$，则 $f(x)=0$ 的根为 $\underline{0，0，-6}$.

【解题过程】

$$f(x)=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1+x\\ 3 & 2+x & 1\\ 3+x & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+2+3+x & 2 & 1+x\\ 1+2+3+x & 2+x & 1\\ 1+2+3+x & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(1+2+3+x)\begin{vmatrix}1 & 2 & 1+x\\ 1 & 2+x & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(x+6)\begin{vmatrix}1 & 0 & x\\ 1 & x & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-x^2(x+6)=0$$，则

$f(x)=0$ 的根为 0，0，-6.

7.设 A,B 均为二阶可逆矩阵，则分块矩阵

$\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\underline{\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ O & B^{-1}\end{pmatrix}}$.

【解题过程】 设 $\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为

$\begin{pmatrix}C & D\\ F & H\end{pmatrix}$,

则 $\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C & D\\ F & H\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AC & AD\\ BF & BH\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & O\\ O & E\end{pmatrix}$

即 $AC=E,AD=O,BF=O,BH=E$

$\because A,B$ 均为二阶可逆矩阵

$\therefore C=A^{-1},D=O,F=O,H=B^{-1}$

$\therefore \begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ O & B^{-1}\end{pmatrix}$.

8. 设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4$，向量 $b=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，则方程组 $Ax=b$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

【解题过程】 $\because b=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$

$\therefore A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=b$，即 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 是方程组 $Ax=b$ 的一个特解

$\because$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关

$\therefore Ax=b$ 的导出组的基础解系所含解向量的个数为 1 个

$\because \alpha_1=\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4$

$$\therefore A\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=0$$

$\therefore \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是 $Ax=b$ 的导出组的基础解系

于是方程组 $Ax=b$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

9. 设二维列向量 α 在向量空间 R^2 的基 $B_1:\alpha_1=(1,1)^T,\alpha_2=(1,-1)^T$ 下的坐标为-1，1，则 α 在向量空间 R^2 的基 $B_2:\beta_1=(2,1)^T,\beta_2=(0,1)^T$ 下的坐标为 0，-2.

【解题过程】

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

$$\alpha=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},$$

由此可得 $x_1=0,x_2=-2$.

10. 设 n 阶方阵 A 有特征值 3,且 $|A|=3$,则 A^* 必有特征值 1.

【解题过程】 $A^*=|A|A^{-1}=3A^{-1}$

$\because A$ 有特征值 3

$\therefore A^{-1}$ 有特征值 $\dfrac{1}{3}$

$\therefore A^*$ 必有特征值 1.

三、计算题（本题共 52 分）

11.（8 分）求向量组

$$A:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\6\end{pmatrix}$$

的秩和一个极大线性无关组.

【解题过程】设 A 为以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为列向量组构成的矩阵，并对矩阵 A 作初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4\\1&-1&3&-2\\2&1&3&5\\3&1&5&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&-2&2&-6\\0&-1&1&-3\\0&-2&2&-6\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&-2&2&-6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得：$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$ 且最大无关组为：

$\alpha_1,\alpha_2.\ \alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2;\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2.$

12.（8 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，且 $A^*B=2B+3A^*$，求矩阵 B.

【解题过程】将 $A^*B=2B+3A^*$ 左乘矩阵 A 得：$AA^*B=2AB+3AA^*$

$\because AA^*=|A|E,|A|=1$

$\therefore B=2AB+3E$

$\therefore (E-2A)B=3E$

$\because E-2A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},|E-2A|\neq 0$

$\therefore E-2A$ 可逆

$\therefore B=3(E-2A)^{-1}E=3(E-2A)^{-1}$

由$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -4\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)$

可得：$(E-2A)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$,

于是$B=3(E-2A)^{-1}=3\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

13.（10 分）求]方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{n\times n}$ 的特征值与特征向量.

【**解题过程**】 $A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&\cdots&-1\\-1&\lambda-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-1&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$$

所以 A 的特征值为 n，0（$n-1$ 重根）.

先求 A 的属于特征值 n 的特征向量，解齐次线性方程组 $\begin{cases}(n-1)x_1-x_2-\cdots-x_n=0\\-x_1+(n-1)x_2-\cdots-x_n=0\\\cdots\cdots\\-x_1-x_2-\cdots+(n-1)x_n=0\end{cases}$，

求得基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，所以 A 的属于特征值 n 的全部特征向量为 $\xi=k(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n)$，其中 $k\neq0$；

再求 A 的属于特征值 0 的特征向量，解齐次线性方程组 $\begin{cases}-x_1-x_2-\cdots-x_n=0\\-x_1-x_2-\cdots-x_n=0\\\cdots\cdots\\-x_1-x_2-\cdots-x_n=0\end{cases}$，求得基

础解系为$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，所以$A$的

属于特征值 0 的全部特征向量为

$\xi_1=k_1\left(-\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)+k_2\left(-\varepsilon_1+\varepsilon_3\right)+\cdots+k_{n-1}\left(-\varepsilon_1+\right.$

,其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$不全为零.

14.（12 分）已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=0\\3x_1+\left(2+\lambda\right)x_2+\left(4+\mu\right)x_3+4x_4=1\end{cases}$$

且$\left(1,-1,1,-1\right)^T$是它的一个解，试求方程组的全部解.

【解题过程】$\because\left(1,-1,1,-1\right)^T$是线性方程组的一个解

$\therefore\begin{cases}1-\lambda+\mu-1=0\\3-\left(2+\lambda\right)+\left(4+\mu\right)-4=1\end{cases}$，即$\lambda=\mu$

线性方程组

$$\begin{cases}x_1+\lambda x_2+\lambda x_3+x_4=0\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=0\\3x_1+\left(2+\lambda\right)x_2+\left(4+\lambda\right)x_3+4x_4=1\end{cases}$$

的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&\lambda&\lambda&1\\2&1&1&2\\3&2+\lambda&4+\lambda&4\end{pmatrix},$$

增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & \lambda & \lambda & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1\end{pmatrix}$$

将 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & \lambda & \lambda & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1\end{pmatrix}$

进行初等行变换得：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & \lambda & \lambda & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & \lambda & \lambda & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

线性方程组与 $\begin{cases}x_1=x_3-\frac{1}{2}x_4-\frac{1}{2}\\x_2=-3x_3-x_4+1\end{cases}$ 同解，于

是通解为 $k_1\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}$；

当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$ 时，

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&3&1&1\\0&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&1&0&0\\0&1&3&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&1&0&0\\0&0&2&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&1&0&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

由此可知，线性方程组与$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2} \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$同解，于是通解为$k\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. （14 分）设二次型

$$f = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

求一个正交变换，将二次型化为标准形，并写出该标准形.

【解题过程】二次型

$$f = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$$

的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&4\\-2&6&2\\4&2&3\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}3&-2&4\\-2&6&2\\4&2&3\end{pmatrix}$$的特征多项式为：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&-4\\2&\lambda-6&-2\\-4&-2&\lambda-3\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda+2)(\lambda-7)^2$$

当 $\lambda=-2$ 时，$(-2E-A)x=0$，将其系数矩阵 $-2E-A$ 进行初等行变换得：

$$-2E-A=\begin{pmatrix}-5&2&-4\\2&-8&-2\\-4&-2&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-8&-2\\-5&2&-4\\-4&-2&-5\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&-4&-1\\-5&2&-4\\-4&-2&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-4&-1\\0&-18&-9\\0&-18&-9\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&-4&-1\\0&-18&-9\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-4&-1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得，A 的属于特征值-2 的特征向量为

$$\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$，单位化后为 $\xi_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=7$ 时，$(7E-A)x=0$，将其系数矩阵 $7E-A$ 进行初等行变换得：

$$7E-A=\begin{pmatrix}4&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&2&-4\\2&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&-2\\2&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得，A 的属于特征值 7 的特征向量为

$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$，正 交 化 和 单 位 化 后 为

$$\xi_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\xi_3=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}.$$

令 $P=\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}\\\frac{2}{3}&0&\frac{5}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}$

为正交矩阵，则所求的正交变换为 $x=Py$，

此 时 ， 二 次 型 的 标 准 形 为

$f=-2y_1^2+7y_2^2+7y_3^2$.

四．证明题（本题 8 分）

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，证明向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也是 $Ax=0$ 的基础解系.

【解题思路】齐次线性方程组的一组能表示所有解的线性无关解.

【解题过程】

$$\because \alpha_1=\frac{1}{2}\left[(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_1)\right]$$

$$\alpha_2=\frac{1}{2}\left[(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_2+\alpha_3)-(\alpha_3+\alpha_1)\right]$$

$$\alpha_3=\frac{1}{2}\left[-(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_1)\right]$$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性表示

又$\because$ $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 等价，

即 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关

$\because A(\alpha_1+\alpha_2)=0, A(\alpha_2+\alpha_3)=0,$
$A(\alpha_3+\alpha_1)=0$

$\therefore \alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 是 $Ax=0$ 的解，且 $Ax=0$ 的其它解都可由 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性表示

即证：向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也是 $Ax=0$ 的基础解系.