第四节 特征值与特征向量

1. 填空题.

（1）已知方阵 A 的一个特征值为 λ，其对应的一个特征向量为 α，则 kA 的一个特征值为 $\underline{k\lambda}$； A^2 的一个特征值为 $\underline{\lambda^2}$； A^2-2A+E 的一个特征值为 $\underline{\lambda^2-2\lambda+1}$.

（2）已知可逆矩阵 A 的一个特征值为 λ，其对应的一个特征向量为 α，则其逆矩阵 A^{-1} 的一特征值为 $\underline{\frac{1}{\lambda}}$；其伴随矩阵 A^* 的一个特征值为 $\underline{\frac{|A|}{\lambda}}$.

【解题过程】 $\because \lambda$ 是可逆矩阵 A 的特征值

$\therefore \frac{1}{\lambda}$ 是矩阵 A^{-1} 的特征值

$\because A^*=|A|A^{-1}$

$\therefore \frac{|A|}{\lambda}$ 为 A^* 的特征值.

（3）已知三阶矩阵 A 的特征值分别为 2,3,5，则 $|A|=\underline{30}$， $|A^*|=\underline{900}$.

【解题思路】 设 A 为 n 阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值，则 $\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

【解题过程】

$$|A|=2\times3\times5=30,|A^*|=|A|^{3-1}=900.$$

（4）$A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&Y&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$ 相似，则 $x=\underline{4}$， $y=\underline{5}$.

【解题思路】 相似矩阵的迹相同，行列式的值相等.

【解题过程】$\because A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$与

$B=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&y&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$相似

$\therefore traceA=1+x+1=traceB=5+y-4$

$\therefore |A|=\begin{vmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{vmatrix}=-15x-40$

$=|B|=\begin{vmatrix}5&0&0\\0&y&0\\0&0&-4\end{vmatrix}=-20y$

综上，$\begin{cases}1+x+1=5+y-4\\-15x-40=-20y\end{cases}$. 由此可得，

$x=4, y=5.$

（5）n阶方阵A的特征值为$0,1,2,\cdots,n-1$，

方阵B与A相似，则$|B+E|=\underline{n!}$.

【解题过程】n阶方阵A的特征值为$0,1,2,\cdots,n-1$，则$B+E$的特征值为$1,2,\cdots,n-1,n$，于是$|B+E|=1\times2\times\cdots\times n=n!$.

2. 求下列方阵的特征值与特征向量.

（1）$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

【解题过程】$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$的特征多项式

为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

所以A的特征值为1，1，-1.

先求 A 的属于特征值 1 的特征向量，解齐次

线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$，求得基础解系为

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，所以 A 的属于特征值 1 的全部特

征向量为 $\xi = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + k_1\varepsilon_3$，其中 k_1, k_2

不全为零

再求 A 的属于特征值-1 的特征向量，解齐次

线性方程组$\begin{cases} -x_1 - x_3 = 0 \\ -2x_2 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$，求得基础解系为

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，所以 A 的属于特征值-1 的全部特征

向量为 $\xi_1 = k\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_3\right)$，其中 $k \neq 0$.

（2）$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

【解题过程】 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ 的特征多

项式为

$$\left|\lambda E - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 \\ -4 & 8 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \left(\lambda+2\right)\left(\lambda-1\right)^2$$

所以 A 的特征值为-2，1，1.

先求 A 的属于特征值-2 的特征向量，解齐次

线性方程组$\begin{cases} -5x_1 - x_2 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 = 0 \\ -4x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases}$，求得基础解系

为$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，所以$A$的属于特征值-2的全部特征向量为$\xi = k\varepsilon_3$，其中$k \neq 0$；

再求A的属于特征值1的特征向量，解齐次线性方程组$\begin{cases}-2x_1 - x_2 = 0\\4x_1 + x_2 = 0\\-4x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 0\end{cases}$，求得基础解系为$\begin{pmatrix}3\\-6\\20\end{pmatrix}$，所以$A$的属于特征值1的全部特征向量为$\xi_1 = k_1\left(3\varepsilon_1 - 6\varepsilon_2 + 20\varepsilon_3\right)$，其中$k_1 \neq 0$.

3.设$A = \begin{pmatrix}7 & 4 & -1\\4 & 7 & 7-1\\-4 & -4 & a\end{pmatrix}$，已知它的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 12$，求$a$的值.

【解题思路】 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为方阵$A = \left(a_{ij}\right)$的$n$个特征值，则$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|; \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

【解题过程】

$\because traceA = 7 + 7 + a = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 18$

$\therefore a = 4$.

4. 设$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\d & e & f\end{pmatrix}$.，已知$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$为$A$的特征向量，求$a, b, c, d, e, f$的值.

【解题过程】 向量$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$是矩阵

$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$的分别属于$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$特征

向量，则$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$分别是线性方程组

$(\lambda_1E-A)x=0,(\lambda_2E-A)x=0,(\lambda_3E-A)x=0$

的解，故$(\lambda_1E-A)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0,(\lambda_2E-A)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=0,$

$(\lambda_3E-A)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=0$

$\because(\lambda_1E-A)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0,(\lambda_2E-A)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=0,$

$(\lambda_3E-A)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=0$

$\therefore\begin{pmatrix}\lambda_1-1&-1&-1\\-a&\lambda_1-b&-c\\-d&-e&\lambda_1-f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0,$

$\begin{pmatrix}\lambda_2-1&-1&-1\\-a&\lambda_2-b&-c\\-d&-e&\lambda_2-f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=0,$

$\begin{pmatrix}\lambda_3-1&-1&-1\\-a&\lambda_3-b&-c\\-d&-e&\lambda_3-f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=0$

由此可以解得，$a=b=c=d=e=f=1$.

5.证明：若$A^2=E$，则A的特征值只能是

1或-1.

【解题过程】若矩阵 A 满足 $A^2=E$,则矩阵的特征值 λ 满足 $\lambda^2=1$,故 λ 的值只能为 1 或-1.

即证：A 的特征值只能是 1 或 -1.

6.设 p_1,p_2 是方阵 A 的对应两个不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，讨论 $\lambda_1p_1+\lambda_2p_2$ 是否为 A 的特征向量.

【解题过程】当 λ_1,λ_2 都不为零时，$\lambda_1p_1+\lambda_2p_2$ 不是 A 的特征向量；当 λ_1,λ_2 当其中之一为零时，$\lambda_1p_1+\lambda_2p_2$ 是 A 的特征向量.理由如下：反证法：若 $\lambda_1p_1+\lambda_2p_2$ 是 A 的特征值 λ 对应的特征向量，即

$$A(\lambda_1p_1+\lambda_2p_2)=\lambda(\lambda_1p_1+\lambda_2p_2)$$

当 λ_1,λ_2 都不为零时，

$\because p_1,p_2$ 是方阵 A 的对应两个不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量

$\therefore Ap_1=\lambda_1p_1,Ap_2=\lambda_2p_2$

$$\because A(\lambda_1p_1+\lambda_2p_2)=\lambda_1^2p_1+\lambda_2^2p_2$$
$$=\lambda(\lambda_1p_1+\lambda_2p_2)$$

$\therefore \lambda=\lambda_1=\lambda_2$，与 λ_1,λ_2 为不同的特征值矛盾，$\lambda_1p_1+\lambda_2p_2$ 不是 A 的特征向量.

易知，当 λ_1,λ_2 当其中之一为零时，$\lambda_1p_1+\lambda_2p_2$ 是 A 的特征向量.

7.证明 A^T 与 A 有相同的特征值.

【解题过程】$\because \left|\lambda E-A^{T}\right|=\left|\lambda E-A\right|$

$\therefore A^{T}$ 与 A 有相同的特征多项式，即 A^{T} 与 A 有相同的特征值.

8.证明：若 $A^{T}A=E$，$|A|=-1$，则 -1 是 A 的特征值.

【解题过程】$\because A^{T}A=E$

$\therefore A^{T}\left(-E-A\right)=-E-A^{T}=\left(-E-A\right)^{T}$

在上式两边取行列式得：

$\left|A^{T}\left(-E-A\right)\right|=\left|\left(-E-A\right)^{T}\right|=\left|-E-A\right|$

$\because |A|=-1$

$\therefore -\left|-E-A\right|=\left|-E-A\right|$, 即 $\left|-E-A\right|=0$

$\therefore -1$ 是 A 的特征值.

9.求 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{n\times n}$ 的特征值与特征向量.

【解题过程】$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 的特征多项式为

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$=\left(\lambda-n\right)\lambda^{n-1}$

所以 A 的特征值为 n，0（$n-1$ 重根）.

先求 A 的属于特征值 n 的特征向量，解齐次

线性方程组$\begin{cases}(n-1)x_1-x_2-\cdots-x_n=0\\-x_1+(n-1)x_2-\cdots-x_n=0\\\cdots\cdots\\-x_1-x_2-\cdots+(n-1)x_n=0\end{cases}$，

求得基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，所以$A$的属于特征值

n的全部特征向量为

$\xi=k\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n\right)$,其中$k\neq0$；

再求A的属于特征值0的特征向量，解齐次

线性方程组$\begin{cases}-x_1-x_2-\cdots-x_n=0\\-x_1-x_2-\cdots-x_n=0\\\cdots\cdots\\-x_1-x_2-\cdots-x_n=0\end{cases}$，求得基

础解系为$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，所以$A$的

属于特征值0的全部特征向量为

$$\xi_1=k_1\left(-\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)+k_2\left(-\varepsilon_1+\varepsilon_3\right)$$
$$+\cdots+k_{n-1}\left(-\varepsilon_1+\varepsilon_n\right)$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$不全为零.

10. 三阶方阵A的特征值分别为$\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$，对应的特征向量为

$p_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$，求$A$.

【解题过程】设$P=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}$，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix},$$

则 $A=P\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}P^{-1}$

由

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-2&1&0&0\\2&-2&-1&0&1&0\\2&1&2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\0&1&0&\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\0&0&1&-\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\end{array}\right)$$

得，$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}$

$$A=P\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\end{pmatrix}.$$

11.设三阶方阵 A 的特征值

$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，对应的特征向量为

$p_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，向量

$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，求 $A^m\beta$.

【解题过程】设 $P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix},$$

则 $A=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}P^{-1}$

由 $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)$

$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&0&2&1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)$

$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&1\\0&0&2&1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)$

$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-1&1\\0&0&2&1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

得：$P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

$$A^m\beta=P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}^m P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^m & \\ & & 3^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1-2^m+3^m \\ -1+2^m+3^m \\ 2^m+3^m \end{pmatrix}.$$

12.若二阶矩阵 A 的特征值为-1 和 1，求 A^{2018}.

【解题过程】若二阶矩阵 A 的特征值为-1 和 1，则存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A=P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

于是

$$A^{2018}=P\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}^{2018}P^{-1}$$

$$=P\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}=E.$$

13.设 R^3 上线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$，求

（1）T 的特征值与特征向量；

（2）A 能否对角化？若能够对角化，求 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【解题过程】（1）T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$ 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$$

所以 A 的特征值为-1，-1，-1.

求 A 的属于特征值-1 的特征向量，解齐次线性方程组 $\begin{cases}-3x_1+x_2-2x_3=0\\-5x_1+2x_2-3x_3=0\\x_1+x_3=0\end{cases}$，求得基础解系为 $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，所以 A 的属于特征值-1 的全部特征向量为 $\xi=k\left(-\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3\right)$，其中 $k\neq0$.

（2）A 不能对角化，理由如下：A 的矩阵

$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$可以在某一组基下为对角形的充要条件是有3个线性无关的特征向量，

而$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$没有 3 个线性无关的特征向量，故$A$不能对角化.

14.设A,B相似，其中$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$，

$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$.

（1）求x,y；

（2）求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.

【解题过程】（1）$\because$矩阵A,B相似

$$\therefore |A|=\begin{vmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{vmatrix}=-2(x-2)$$

$$=|B|=\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{vmatrix}=-2y$$

$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$ 的 特 征 多 项 式 为 ：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&0&0\\-2&\lambda-x&-2\\-3&-1&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)\left[(\lambda-x)(\lambda-1)-2\right];$$

$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$的特征多项式为：

$$\left|\lambda E-B\right|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&0\\0&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-y\end{vmatrix}$$

$=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y)$

$\because$ 矩阵 A,B 相似

$\therefore\left|\lambda E-A\right|=(\lambda+2)\left[(\lambda-x)(\lambda-1)-2\right]$，
$=\left|\lambda E-B\right|=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y)$

即 $y=-2$.

综上，$\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}$.

（2）$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$的特征多项式为：

$$\left|\lambda E-B\right|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&0\\0&\lambda-2&0\\0&0&\lambda+2\end{vmatrix}$$

$=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+2)$

当 $\lambda=-1$时，

$$-E-A=\begin{pmatrix}[illegible]&[illegible]&[illegible]\\-2&-1&-2\\-3&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}[illegible]&[illegible]&[illegible]\\-2&-1&-2\\-2&-1&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得，A 的属于特征值-1 的特征向量为

$\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$;

当 $\lambda=2$ 时，

$$2E-A=\begin{pmatrix}4&0&0\\-2&2&-2\\-3&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&2&-2\\-3&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-2\\0&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&2&-2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此可得，A 的属于特征值 2 的特征向量

为$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$;

当$\lambda=-2$时，

$$-2E-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&-2&-2\\-3&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\-3&-1&-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\-2&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

由此可得，A 的属于特征值-2 的特征向量

为$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

综上，可逆矩阵P为：

$$P=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}，使得 P^{-1}AP=B.$$