第一章 矩阵

第一节、第二节 矩阵的概念及运算

1.判断题（正确的在括号里打“√”，错误的打“×”）

（1）对矩阵 A 与 B，若矩阵 $AB=BA$, 则 AB 与 BA 必为同阶方阵.　　　　（√）

【解题过程】 设 A 为 $s\times t$ 矩阵， B 为 $m\times n$ 矩阵

AB 需 A 的列数等于 B 的行数， BA 需 B 的列数等于 A 的行数，即 $t=m,s=n$.则矩阵 A 为 $s\times t$ 矩阵， B 为 $t\times s$ 矩阵， AB 为 s 阶方阵， BA 为 t 阶方阵.

$\because AB=BA$　$\therefore AB$ 与 BA 必为同阶方阵.

（2）设 A 与 B 均为 n 阶方阵，则 $(AB)^k=A^kB^k\ (k\in N)$.　　　　（×）

【解题过程】

$\because (AB)^k=ABAB\cdots AB, BA\neq AB$

$\therefore (AB)^k\neq A^kB^k\ (k\in N)$.

（3）设 A 与 B 均为 n 阶方阵，则

$(A\pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$. （×）

【解题过程】

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$$
$$= A^2 + BA + AB + E^2;$$

$$(A-B)^2 = (A-B)(A-B)$$
$$= A^2 - BA - AB + E^2;$$

$\because BA \neq AB$

$\therefore (A\pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$.

（4）设 A 为 n 阶方阵，则

$(A\pm E)^2 = A^2 \pm 2A + E$. （√）

【解题过程】

$$(A+E)^2 = (A+E)(A+E)$$
$$= A^2 + EA + AE + E^2 = A^2 + 2A + E;$$

$$(A-E)^2 = (A-E)(A-E)$$
$$= A^2 - EA - AE + E^2 = A^2 - 2A + E;$$

$$(A\pm E)^2 = A^2 \pm 2A + E.$$

（5）设 A 与 B 均为 n 阶方阵，则

$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$. （×）

【解题过程】

$\because (A+B)(A-B)$
$= A^2 + BA - AB - B^2, BA \neq AB$

$\therefore (A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

（6）设 A 为 n 阶方阵，则

$(A+E)(A-E) = A^2 - E$. （√）

【解题过程】

$$(A+E)(A-E)$$
$$= A^2 + EA - AE - E^2 = A^2 - E.$$

（7）若 n 阶方阵 A 满足 $A^2=O,$，则 $A=O.$

（×）

【解题过程】举出反例：$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

（8）若 n 阶方阵 A 满足 $A^2=A,$，则 $A=O$ 或 $A=E.$ （×）

【解题过程】举出反例：$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

（9）若矩阵 A,B,C 满足 $AB=AC$ 且 $A\neq O,$，则 $B=C.$ （×）

【解题过程】举出反例：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

（10）每一个方阵都可以写成对称矩阵与反对称矩阵的和.　　　（√）

【解题过程】 设 A 为任意方阵，

$\because \left(A + A^T\right)^T = A + A^T$

$\therefore A + A^T$ 为对称矩阵

$\because \left(A - A^T\right)^T = A^T - A = -\left(A - A^T\right)$

$\therefore A - A^T$ 为反对称矩阵

A 表示为：$A = \dfrac{A + A^T}{2} + \dfrac{A - A^T}{2}$, 其中 $\dfrac{A + A^T}{2}$ 为对称矩阵，$\dfrac{A - A^T}{2}$ 为反对称矩阵.

2.选择题.

（1）设 A,B,C 均为 n 阶方阵，$AB = BA$, $AC = CA$, 则 $ABC =$（ C ）.

（A）ACB　　　　（B）CBA

（C）BCA　　　　（D）CAB

【解题过程】 $ABC = BAC = BCA$. 正确答案为 C.

（2）设 A 为方阵，$f(x)=x^2-x-2$, 则 $f(A)$ 为（ B ）.

（A）A^2-A-2

（B）A^2-A-2E

（C）$(A+2E)(A-E)$

（D）不能确定

【解题过程】矩阵的多项式是一种特殊多项式，与矩阵多项式不同，它指的是以矩阵代替文字所得的多项式。设 $f(x)=a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ 是数域 P 上的多项式，A 是 P 上的 n 阶矩阵，则 $f(A)=a_m A^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1 A+a_0 E.$

正确答案为 B.

3.设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, 计算：（1）$\frac{1}{2}A-3B$;（2）$AB^T$;（3）$A^T B$.

【解题过程】

$$(1)\ \frac{1}{2}A-3B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 0\\ 1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 3 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{13}{2} & 1\\ -\frac{7}{2} & 3\\ 4 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix};$$

$$(2)AB^T=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\2&-1&1\\-4&-1&1\end{pmatrix};$$

$$(3)A^TB=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5&3\\-7&3\end{pmatrix}.$$

4.计算：（1）$\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$;

（2）$\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$;（3）$\begin{pmatrix}-2&-4&-6\\-1&-2&-3\\1&2&3\end{pmatrix}^{2018}$.

【解题过程】

（1）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}=-1$;

（2）$\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -4 & -6\\-1 & -2 & -3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

（3）当 $n=2$ 时，

$\begin{pmatrix}-2 & -4 & -6\\-1 & -2 & -3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}^2=-\begin{pmatrix}-2 & -4 & -6\\-1 & -2 & -3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; 当

$n=3$ 时，

$\begin{pmatrix}-2 & -4 & -6\\-1 & -2 & -3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}-2 & -4 & -6\\-1 & -2 & -3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; …; 当

$n=2k-1$ 时，

$\begin{pmatrix}-2 & -4 & -6\\-1 & -2 & -3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}^{2k-1}=\begin{pmatrix}-2 & -4 & -6\\-1 & -2 & -3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; 当

$n=2k$ 时，

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{2k}$$
$$=\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$=-\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{2018}=-\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.设 $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

（1）计算 DA, AD;

【解题过程】

$$DA=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix};$$

$$AD=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}.$$

（2）若 $\lambda_i \neq \lambda_j\ (i \neq j)$，证明 $DA=AD$ 的充分必要条件是 A 为对角矩阵.

【解题过程】

$\Rightarrow$若 $\boldsymbol{DA} = \boldsymbol{AD}$，则

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\because\ \lambda_i \neq \lambda_j \left(i \neq j\right)$

$$\therefore\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

即证：A 为对角矩阵.

$\Leftarrow$若 A 为对角矩阵，则

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\because\ DA = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix};$$

$$AD = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\therefore\ DA = AD.$

6.设 A 为实对角矩阵，若 $A^2 = O$, 证明

$A = O$, 其中 O 表示零矩阵.

【解题过程】 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$\because\ A$ 为实对称矩阵

$$\therefore\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 & * & \cdots & * \\ * & a_{12}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \cdots + a_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

$$\because\ A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 & * & \cdots & * \\ * & a_{12}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \cdots + a_{nn}^2 \end{pmatrix} = O$$

$$\therefore\ a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 = 0,\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2 = 0,\ \cdots,\ a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \cdots + a_{nn}^2 = 0$$

$$\therefore\ A = O.$$

7. 设 A, B 都是 n 阶方阵，且 $A+B=E$, 证明 $AB=BA$.

【解题过程】$A+B=E$ 左乘 A 得:

$A=A(A+B)=A^2+AB$;

$A+B=E$ 右乘 A 得:

$A=(A+B)A=A^2+BA$;

由此可知，$AB=BA$.

8.设 A, B 都是对称矩阵，证明：AB 为对称矩阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

【解题过程】$\Rightarrow$

$\because$ A, B 是对称矩阵

$\therefore$ $A^T=A, B^T=B$

$\because$ AB 为对称矩阵

$\therefore$ $(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$

$\therefore$ $AB=BA$

$\Leftarrow$

$\because$ A, B 是对称矩阵

$\therefore$ $A^T=A, B^T=B$

$\therefore$ $(AB)^T=B^TA^T=BA$

$\because AB = BA$

$\therefore \left(AB\right)^T = AB$

$\therefore AB$ 为对称矩阵

9.设 n 阶方阵 $A=\left(a_{ij}\right), B=\left(b_{ij}\right)$, 且 A 与 B

的各行元素之和均为 1，α 是 $n\times 1$ 矩阵，且

每个元素都为 1，求证：

（1）$A\alpha=\alpha$;

【解题过程】

$\because A$ 的各行元素之和均为 1

$$\therefore A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$\because \alpha$ 是 $n\times 1$ 矩阵，且每个元素都是 1

$\therefore A\alpha = \alpha$

（2）AB 的各行元素之和都等于 1;

【解题过程】

$\because$ $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的各行元素之和均为1

$$\therefore\ \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

将$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$左乘矩阵$\boldsymbol{A}$得:

$$\boldsymbol{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

即证：$\boldsymbol{AB}$的各行元素之和都等于1.

（3）若A, B的各行元素之和分别为k,t,

则AB的各行元素之和都等于什么？

【解题过程】

$\because$ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的各行元素之和分别为 k, t

$$\therefore\ A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\k\\\vdots\\k\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t\\\vdots\\t\end{pmatrix}$$

将 $\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t\\\vdots\\t\end{pmatrix}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 得:

$$AB\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}t\\t\\\vdots\\t\end{pmatrix}=tA\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kt\\kt\\\vdots\\kt\end{pmatrix}$$

由此可知， $\boldsymbol{AB}$ 各行元素之和等于 kt .