矩阵理论初步
——逆矩阵、矩阵的初等变换

陈树伟

swchen@swjtu.edu.cn

逆矩阵

问题：对矩阵是否有除法?

首先回忆数的除法 $a \div b \ (b \neq 0)$ ，事实上是乘法 $a \times \frac{1}{b}$

即除一个数相当于乘其倒数。$b\,(b \neq 0)$ 与其倒数 $\frac{1}{b}$ 满足

$$b \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \times b = 1$$

对于矩阵来说单位矩阵 E 相当于数中1的地位. 故对于矩阵A

若存在矩阵B满足 $AB = BA = E$, 则可以引入矩阵乘法的逆运算。

可逆矩阵与逆矩阵的概念

定义1 设A是n阶方阵，如果存在n阶方阶B，使得

$$AB = BA = E \quad (*)$$

则称矩阵A是**可逆**的，并称矩阵B是A的**逆矩阵**，记矩阵A的逆矩阵为 A^{-1}，

即 $$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

对A不存在矩阵满足 $(*)$ 则称A是**不可逆**的。

例 方阵 $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ 计算可得

$AB = BA = E$，故A是可逆的，且A的逆矩阵 $A^{-1} = B$

零矩阵不可逆（为什么？）

可逆矩阵与逆矩阵的概念

注 (1) 只有方阵才可能讨论它的可逆性

(2) A 的逆矩阵是 B, 则 B 也是可逆的且 B 的逆矩阵是 A

即 A 与 B 互为逆矩阵。

(3) A 是可逆的，则 A 的逆矩阵是唯一的 .

设 B, C 均为 A 的逆矩阵, 则

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$$

（4）若 A 是可逆的且 $AB = AC$ (或 $BA = CA$) 则有 $B = C$

即当A是可逆时消去律成立. (证明它)

但即使 A 是可逆时，由$AB = CA$ 也不能得到 $B = C$.

方阵的伴随矩阵

定义2 设 A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式，称方阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为A的伴随矩阵。

注：**行的代数余子式作成伴随矩阵的列**

方阵的伴随矩阵

例　已知 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$　求其伴随矩阵 A^*

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1 \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1 \quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix}=0 \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}=2 \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}=0 \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}=-2 \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}=4$$

故　$A^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&-2\\1&-2&4\end{pmatrix}$

伴随矩阵的性质

定理1 设A是n阶方阵，A^* 是A的伴随矩阵,则

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} = |A|E$$

证明: $$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

伴随矩阵的性质

$$A^*A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

即 $$AA^*=A^*A=\begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix}=|A|E$$

伴随矩阵的性质

例 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&-2\\1&-2&4\end{pmatrix}$ $|A|=2$

$$AA^*=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&-2\\1&-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$A^*A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&-2\\1&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

矩阵可逆的条件

1：必要条件

如果 A 可逆，那么由 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ 得

$$|A|\cdot|A^{-1}|=|AA^{-1}|=|E|=1$$

所以**可逆矩阵的行列式不等于零。**

2: 充分条件

若 A 的行列式不等于零，即 $|A|\neq 0$

由 $AA^{*}=A^{*}A=|A|E$ 可得，$\dfrac{1}{|A|}AA^{*}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}A=E$

即 $$A\left(\frac{1}{|A|}A^{*}\right)=\left(\frac{1}{|A|}A^{*}\right)A=E$$

由可逆定义知道 A可逆, 且 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}$

逆矩阵的计算

综上所述:

定理2 设A是n阶方阵, 则A可逆的充分必要条件为 $|A| \neq 0$,

而A的逆矩阵为 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^*$.

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 由 $|A| = 2 \neq 0$ 可知A可逆. 又 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

由 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^*$ 得 $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}$

注: 逆矩阵是否计算正确可以验证

逆矩阵的计算

例1 求矩阵X使之满足
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

解: 令 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ 计算可得 $|A|=1\neq 0$

故A可逆， 计算得 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$

故 $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&0\\3&0\end{pmatrix}$

可逆矩阵的性质

性质1 设 A, B 都是n阶方阵，且$AB=E$，则 A, B 可逆，且 $A^{-1}=B, B^{-1}=A.$

证明 由 $AB=E$ 可得 $1=|E|=|AB|=|A||B|,$

故有 $|A|\neq 0, |B|\neq 0,$ 故 A, B 可逆，即 A^{-1}, B^{-1} 存在。

由 $AB=E$ 可得 $A^{-1}(AB)=A^{-1}E,$ 可得 $(A^{-1}A)B=A^{-1},$

即有 $$A^{-1}=EB=B.$$

同理可得 $$B^{-1}=A.$$

注：注意性质1与矩阵可逆的定义的区别. 它是证明矩阵是否可逆的重要工具.

可逆矩阵的性质

例2 设方阵A满足 $A^2-2A-3E=0,$ 证明

$A, A-2E, A+2E, A-4E$ 都是可逆矩阵, 并求它们的逆.

证明: $A^2-2A-3E=0 \Rightarrow A^2-2A=3E \Rightarrow A(A-2E)=3E \Rightarrow$

$$\begin{cases} A\left[\dfrac{1}{3}(A-2E)\right]=E \\ \dfrac{1}{3}A(A-2E)=E \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A \text{ 是可逆矩阵} & A^{-1}=\dfrac{1}{3}(A-2E) \\ A-2E \text{ 是可逆矩阵} & (A-2E)^{-1}=\dfrac{1}{3}A \end{matrix}$$

注意到 $(A+2E)(A-4E)=A^2-2A-8E=-5E$ 故有

$$\begin{cases} (A+2E)\left[\dfrac{1}{-5}(A-4E)\right]=E \\ \left[\dfrac{1}{-5}(A+2E)\right](A-4E)=E \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A+2E \text{ 可逆且} & (A+2E)^{-1}=\dfrac{1}{-5}(A-4E) \\ A-4E \text{ 可逆且} & (A-4E)^{-1}=\dfrac{1}{-5}(A+2E) \end{matrix}$$

可逆矩阵的性质

性质2 若A可逆，则 A^{-1} 也可逆，并且 $(A^{-1})^{-1}=A$

性质3 若A可逆， 则 A^T 也可逆，并且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

性质4 若A可逆， 则 A^* 也可逆，并且 $(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$

注： 若A不可逆， 则 A^* 也不可逆，

证明 (反证法) 若 A^* 可逆，由 $AA^*=|A|E$ 得

$$A=|A|\left(A^*\right)^{-1} \quad (1)$$

由A不可逆得 $|A|=0$ (2) 由(1)(2)得 $A=0$

从而 $A^*=0$，这与 A^* 可逆矛盾，故 A^* 不可逆。

可逆矩阵的性质

性质5 若A可逆， 数 $k \neq 0$，则 kA 可逆，并且

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

性质6 若n阶方阵A与B都可逆， 则AB也可逆， 并且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

性质7 若A可逆， 则 $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$

可逆矩阵的性质

例3 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $AB+E=A^2+B$ 求B.

解 $AB+E=A^2+B\Rightarrow AB-B=A^2-E\Rightarrow (A-E)B=A^2-E$

注意到 $|A-E|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$, 故 $A-E$ 可逆。从而有

$$(A-E)^{-1}(A-E)B=(A-E)^{-1}(A^2-E)$$

即 $B=(A-E)^{-1}(A^2-E)=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)=(A+E)$

故 $B=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$

矩阵的初等变换

一：矩阵的初等变换与初等矩阵

(一) 矩阵的初等变换

(二) 初等矩阵

（三）矩阵的初等变换与初等矩阵

二：矩阵与阶梯形矩阵

(一) 阶梯形矩阵概念

(二) 矩阵与阶梯形矩阵关系

(三) 可逆矩阵与单位矩阵关系

矩阵的初等变换

(一) 矩阵的初等变换

定义1 下面三种变换称为矩阵的初等行变换

(1) 对换矩阵A的 i, j 两行，称为**对换**，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$

对换获得的矩阵记作 $A(r_i \leftrightarrow r_j)$

(2) 用数 $k \neq 0$ 乘矩阵的第 i 行，称为**倍乘**，记作 kr_i

倍乘获得的矩阵记作 $A(kr_i)$

(3) 把矩阵的第i行的k倍加到第j行上去，称为**倍加**，记作

$r_j + kr_i$ 倍加获得的矩阵记作 $A(r_j + kr_i)$

矩阵的初等变换

类似地，可定义矩阵的初等列变换，并依次记为

(1) $C_i \leftrightarrow C_j$ 获得的矩阵记作 $A(C_i \leftrightarrow C_j)$;

(2) kC_i 获得的矩阵记作 $A(kC_i)$;

(3) $C_j + kC_i$ 获得的矩阵记作 $A(C_j + kC_i)$.

初等行变换与初等列变换统称为矩阵的**初等变换。**

2 矩阵的等价

定义2 若矩阵A经过有限次初等变换变成矩阵 B,

则称矩阵 A 与 B 是**等价的**（**equivalent**), 记作 $A \sim B$

思考: 证明矩阵的等价关系是**等价关系**即

(1) 反身性：$A \sim A$

(2) 对称性：若 $A \sim B$ 则 $B \sim A$

(3) 传递性：若 $A \sim B$ 且 $B \sim C$ 则 $A \sim C$

初等矩阵

(二)初等矩阵

定义3 由单位矩阵E经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵.**

三种初等行变换对应着三种初等矩阵

1) 对换单位矩阵E的i, j两行 $r_i \leftrightarrow r_j$ 所得初等矩阵记为

$$E(r_i \leftrightarrow r_j)$$

例如 $$E_3(r_1 \leftrightarrow r_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

初等矩阵

2) 用非零数k乘单位矩阵E的第i行 kr_i，所得初等矩阵记为$E(kr_i)$

例如 $$E_3(2r_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

3) 把单位矩阵E的第i行的k倍加到第j行上所得初等矩阵记为

$$E(r_j+kr_i)$$

例如 $$E_3(r_1+3r_2)=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

初等矩阵

三种初等列变换也对应着三种初等矩阵，

$$E(C_i \leftrightarrow C_j)\,; \qquad E(kC_i)\,; \qquad E(C_i + kC_j)$$

注(1)

$$E(r_i \leftrightarrow r_j) = E(C_i \leftrightarrow C_j)\,;$$

$$E(kr_i) = E(kC_i)\,;$$

$$E(r_j + kr_i) = E(C_i + kC_j)$$

(2)给出一个矩阵要能判断其是否是初等矩阵,

若是, 初等矩阵那么既可以是单位矩阵通过一次**行**变换获得,

也可以是单位矩阵通过一次**列**变换获得. 要能写出实施的变换.

初等矩阵

例 $E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ 不是初等矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=E(r_2\leftrightarrow r_4)=E(C_2\leftrightarrow C_4)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=E(2r_3)=E(2C_3)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=E(r_1+3r_4)$$
$$=E(C_4+3C_1)$$

初等矩阵

定理1 对一个 $m\times n$ 矩阵A作一次初等行变换就相当于在A的左边乘上相应的 m 阶初等矩阵;对A作一次初等列变换就相当于在A的右边乘上相应的n阶初等矩阵。

即

$$A(r_i \leftrightarrow r_j) = E(r_i \leftrightarrow r_j)A \qquad A(C_i \leftrightarrow C_j) = AE(C_i \leftrightarrow C_j)$$

$$A(kr_i) = E(kr_i)A \qquad A(kC_i) = AE(kC_i)$$

$$A(r_j + kr_i) = E(r_j + kr_i)A \qquad A(C_j + kC_i) = AE(C_j + kC_i)$$

注: (1) 定理把矩阵的初等变换与矩阵乘法两种不同的概念联系起来,

即矩阵的初等变换可以通过矩阵的乘法实现。

(2) 初等矩阵在**左**边则应视它为单位矩阵施行**行**变换获得的,

初等矩阵在**右**边则应视它为单位矩阵施行**列**变换获得的

初等矩阵

例 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -12 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & -7 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

初等矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -14 \end{pmatrix}$$

初等矩阵

证明： 以 $E(r_i \leftrightarrow r_j)A = A(r_i \leftrightarrow r_j)$ 为例证明

$AE(C_j + kC_i) = A(C_j + kC_i)$

$$E(r_i \leftrightarrow r_j)A = \begin{array}{r} \\ \\ i \to \\ \\ j \to \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_j^T \\ \vdots \\ e_i^T \\ \vdots \\ e_m^T \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e_1^T A \\ \vdots \\ e_j^T A \\ \vdots \\ e_i^T A \\ \vdots \\ e_m^T A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} = A(r_i \leftrightarrow r_j)$$

初等矩阵

$$AE(C_j + kC_i) = A\left(e_1, \cdots, e_j + ke_i, \cdots, e_n\right)$$

$$= \left(Ae_1, \cdots, A\left(e_j + ke_i\right), \cdots, Ae_n\right)$$

$$= \left(Ae_1, \cdots, Ae_j + kAe_i, \cdots, Ae_n\right)$$

$$= \left(A_1, \cdots, A_j + kA_i, \cdots, A_n\right)$$

$$= A(C_j + kC_i)$$

初等矩阵的逆矩阵

性质　初等矩阵都是可逆的, 且

$$E(r_i \leftrightarrow r_j)^{-1} = E(r_i \leftrightarrow r_j)$$

$$E(kr_i)^{-1} = E(\frac{1}{k} r_i)$$

$$E(r_j + kr_i)^{-1} = E(r_j - kr_i)$$

$$E(C_i \leftrightarrow C_j)^{-1} = E(C_i \leftrightarrow C_j)$$

$$E(kC_i)^{-1} = E(\frac{1}{k} C_i)$$

$$E(C_j + kC_i)^{-1} = E(C_j - kC_i)$$

注: (1)请证明初等矩阵都是可逆的;

(2) **初等矩阵的逆矩阵也是初等矩阵**.

初等矩阵

性质　　初等矩阵都是可逆的, 且

$$E(r_i \leftrightarrow r_j)^{-1} = E(r_i \leftrightarrow r_j) \qquad E(C_i \leftrightarrow C_j)^{-1} = E(C_i \leftrightarrow C_j)$$

$$E(kr_i)^{-1} = E(\frac{1}{k}r_i) \qquad E(kC_i)^{-1} = E(\frac{1}{k}C_i)$$

$$E(r_j + kr_i)^{-1} = E(r_j - kr_i) \qquad E(C_j + kC_i)^{-1} = E(C_j - kC_i)$$

证明　$E(r_i \leftrightarrow r_j)E(r_i \leftrightarrow r_j)$ 相当于交换第二个矩阵的第i行和第j行,

故 $E(r_i \leftrightarrow r_j)E(r_i \leftrightarrow r_j) = E,$ 　故 $E(r_i \leftrightarrow r_j)^{-1} = E(r_i \leftrightarrow r_j)$

$E(\frac{1}{k}r_i)E(kr_i)$ 相当于第二个矩阵的第i行乘以k,

故 $E(\frac{1}{k}r_i)E(kr_i) = E,$ 　故 $E(kr_i)^{-1} = E(\frac{1}{k}r_i)$

初等矩阵

性质　　初等矩阵都是可逆的, 且

$$E(r_i \leftrightarrow r_j)^{-1} = E(r_i \leftrightarrow r_j) \qquad E(C_i \leftrightarrow C_j)^{-1} = E(C_i \leftrightarrow C_j)$$

$$E(kr_i)^{-1} = E(\frac{1}{k} r_i) \qquad E(kC_i)^{-1} = E(\frac{1}{k} C_i)$$

$$E(r_j + kr_i)^{-1} = E(r_j - kr_i) \qquad E(C_j + kC_i)^{-1} = E(C_j - kC_i)$$

证明　$E(r_j - kr_i)E(r_j + kr_i)$ 相当于第二个矩阵的第i行乘以-k

加到第j列,　故　$E(r_j - kr_i)E(r_j + kr_i) = E$

即　$E(r_j + kr_i)^{-1} = E(r_j - kr_i)$

右边的类似。

阶梯形矩阵

我们的目标是在等价矩阵中找出比较简单的矩阵来，亦即通过初等变换将矩阵化为比较简单的矩阵。

(一)阶梯形矩阵概念

引例. 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2\,, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4\,, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

阶梯形矩阵

求解线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

用消元法得
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_4 = -3, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

系数矩阵
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

进一步得
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_4 = -3, \\ 0 = 0, \end{cases}$$

系数矩阵
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵

即是将方程组的系数矩阵
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

通过初等行变换变成
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

再通过初等行变换变成
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵

定义4 称一个矩阵是（行）阶梯形矩阵，是指它满足如下两个条件：

（1）零行(元素全为零的行)在非零行的下方

（2）每个非零行的第一个非零元（主元）均位于上一行的第一个非零元的右边

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 阶梯形矩阵的特征: 主元下方的元素全为零

阶梯形矩阵

定义5 称一个矩阵是行最简形矩阵，是指它满足如下三个条件：

（1）它是行阶梯形的；

（2）每一个非零行的主元均是1；

（3）主元所在列的其它元素都是零。

例
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(事实上任意阶单位矩阵都是行最简形矩阵）

矩阵与阶梯形矩阵关系

定理2 任意一个非零矩阵经过有限次初等**行**变换，总可以变成阶梯形矩阵，再经过有限次初等**行**变换还可以变成行最简形矩阵。

注: (1) 自然矩阵通过初等变换可以变成行最简形矩阵

(2) 由定理1可得任何一个矩阵存在一系列初等矩阵（左）乘该矩阵，积为阶梯形矩阵.

矩阵通过初等行变换变成阶梯形矩阵方法

考察矩阵A的第一列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(1) 第一列有一个非零元:

(I) 设为 $a_{i1}\neq 0$ 作变换 $r_1\leftrightarrow r_i$ 得 $A(r_1\leftrightarrow r_i)=B=(b_{ij})$

(II) $$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow[i=2,3,\cdots,m]{r_i-\frac{b_{i1}}{b_{11}}r_1} \left(\begin{array}{c|cccc} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \hline 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{array}\right)$$

$C_{(m-1)\times(n-1)}$

(III) 对矩阵 $C_{(m-1)\times(n-1)}$ 按对矩阵A的方法讨论

矩阵通过初等行变换变成阶梯形矩阵方法

$$A=\left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) \longleftarrow A_1$$

(2) 若矩阵A的第一列是全为零:

按对矩阵A的方法讨论 A_1

矩阵通过初等行变换变成阶梯形矩阵方法

例1 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 用初等行变换把矩阵化为阶梯形矩阵和行最简形矩阵

解 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[-\frac{1}{2} r_3]{-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

矩阵通过初等行变换变成阶梯形矩阵方法

定理2　任意一个非零矩阵经过有限次初等**行**变换，总可以变成阶梯形矩阵，

再经过有限次初等**行**变换还可以变成行最简形矩阵。

事实上我们有更强的结论

定理2*　任何一个$m\times n$矩阵通过初等变换能化为

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

其中 r 就是该矩阵的**秩**。称上述矩阵为**标准形矩阵**。

注：　仅通过行变换不一定能化为上述形式。

矩阵通过初等行变换变成阶梯形矩阵方法

例 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_4 - 4c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_3 & O_{3\times 1} \end{pmatrix}$$

可逆矩阵与单位矩阵关系

引理　若方阵A与B等价，则A可逆当且仅当B可逆。

初等变换不改变矩阵的可逆性。

定理3 可逆矩阵经过初等**行**变换变成的行最简形矩阵一定是单位矩阵。

注　(1)　若A可逆，　由定理1，3可知:

必存在一系列初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 满足

$$P_m \cdots P_2 P_1 A = E \quad (*)$$

（2）由 $(*)$ 知　$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_m^{-1}$

又初等矩阵的逆矩阵也是初等矩阵，故有

可逆矩阵等于一系列初等矩阵的乘积

推论：　一个矩阵可逆当且仅当它是一系列初等矩阵的乘积

可逆矩阵与单位矩阵关系

(3) 由(2) **“可逆矩阵等于一系列初等矩阵的乘积”** 可得

可逆矩阵$\boldsymbol{A}$左乘$\boldsymbol{B}$，其积$\boldsymbol{AB}$可由$\boldsymbol{B}$做一系列行变换而得到;

可逆矩阵$\boldsymbol{A}$右乘$\boldsymbol{B}$，其积$\boldsymbol{BA}$可由$\boldsymbol{B}$做一系列列变换而得到.

(4) 若A可逆, 则存在可逆矩阵B满足

$$AB = E$$

由B可逆知存在一系列初等矩阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_m$ 满足

$$B = Q_1 Q_2 \cdots Q_m$$

故 $$AQ_1 Q_2 \cdots Q_m = E \quad (**)$$

定理3*： 可逆矩阵能用初等**列**变换变成单位矩阵

可逆矩阵与单位矩阵关系

（5） 由 $P_m \cdots P_2 P_1 A = E \quad (*)$ 得

$$A^{-1} = P_m \cdots P_2 P_1$$

即 $$A^{-1} = P_m \cdots P_2 P_1 E \qquad (***)$$

由 $$\begin{cases} P_m \cdots P_2 P_1 A = E & (*) \\ P_m \cdots P_2 P_1 E = A^{-1} & (***) \end{cases}$$ 有

“把可逆矩阵A变成单位矩阵的一系列行变换可把单位矩阵变成A的逆矩阵”． 即

$$P_m \cdots P_2 P_1 (A \vdots E) = (P_m \cdots P_2 P_1 A \vdots P_m \cdots P_2 P_1 E) = (E \vdots A^{-1})$$

用初等行变换求逆矩阵

这提供了一个用初等**行**变换来求逆矩阵的方法：

(I) 作分块矩阵 $\left(A \;\vdots\; E\right)$

(II) 用初等**行**变换矩阵 $\left(A \;\vdots\; E\right)$ 把左边一半变成E时，右边的一半就是A^{-1}，即

$$(A, E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E, A^{-1})$$

事实上这种方法也可以判定矩阵是否可逆：

“用初等行变换将 $\left(A \quad E\right)$ 左边一半变成行最简形时左边的部分不是单位矩阵则不可逆”

特别强调的是该方法对 $\left(A \quad E\right)$ **只能实施行变换** （为什么）

用初等行变换求逆矩阵

例2 用初等行变换求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

$$(A\,\vdots\,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\1&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&0&0\\0&2&-1&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&1&-1\\0&2&0&-1&0&1\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&1&-1\\0&1&0&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)$$

故 $$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

用初等行变换求解方程

求解矩阵方程 $AX = B$

若矩阵 A 可逆，则矩阵方程有惟一解

$$X = A^{-1}B$$

又 $$A^{-1}(A \vdots B) = \left(A^{-1}A \vdots A^{-1}B\right) = \left(E \vdots A^{-1}B\right)$$

故作分块矩阵

$$(A \vdots B) \xrightarrow{\text{用初等行变换}} (E \vdots A^{-1}B)$$

用初等行变换求解方程

例3 解矩阵方程 $AX=B$ 其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&3\\1&-1\end{pmatrix}$

解: 计算可知 $|A|\neq 0$ 所以矩阵A可逆

$$(A \vdots B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&0&0&-1\\2&2&1&-1&3\\2&1&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&0&0&-1\\0&1&0&-2&4\\2&1&1&1&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&4&-9\\0&1&0&-2&4\\2&1&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_3-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&4&-5\\0&1&0&-2&4\\0&0&1&-5&13\end{array}\right)$$

故 $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}4&-5\\-2&4\\-5&13\end{pmatrix}$

用初等列变换求逆矩阵

思考： 能否只用初等列变换求可逆矩阵的逆

若A可逆, 则存在一系列初等矩阵 $Q_m,\cdots,Q_2,Q_1$ 满足

$$AQ_1Q_2\cdots Q_m = E \quad (**)$$

(I) 构造分块矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{pmatrix}$

(II) $\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{pmatrix} Q_1Q_2\cdots Q_m = \begin{pmatrix} AQ_1Q_2\cdots Q_m \\ \cdots\cdots \\ EQ_1Q_2\cdots Q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ \cdots \\ A^{-1} \end{pmatrix}$

用初等列变换求逆矩阵

求解矩阵方程　$XA = B$

若矩阵 A 可逆，则矩阵方程有惟一解

$$X = BA^{-1}$$

又

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline B \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} AA^{-1} \\ \hdashline BA^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ \hdashline BA^{-1} \end{pmatrix}$$

故作分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{用初等列变换}} = \begin{pmatrix} E \\ \hdashline BA^{-1} \end{pmatrix}$$

用初等列变换求逆矩阵

例: 解矩阵方程 $XA=B$ 其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&3\end{pmatrix}$

解 易知A可逆, 且 $X=BA^{-1}$

$$\begin{pmatrix}A\\ \hdashline B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&1\\2&1&1\\ \hdashline 1&0&-1\\2&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{C_2-2C_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-2&1\\2&-3&1\\ \hdashline 1&-2&-1\\2&-4&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3\leftrightarrow C_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\2&1&-3\\ \hdashline 1&-1&-2\\2&3&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{C_3+2C_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&1&-1\\ \hdashline 1&-1&-4\\2&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow{-C_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&1&1\\ \hdashline 1&-1&4\\2&3&-2\end{pmatrix}$$

用初等列变换求逆矩阵

例： 解矩阵方程 $XA=B$ 其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&3\end{pmatrix}$

$$X=BA^{-1}\qquad \begin{pmatrix}A\\ \hdashline B\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&1&1\\ \hdashline 1&-1&4\\2&3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[C_1-2C_3]{C_2-C_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\\ \hdashline -7&-5&4\\6&5&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1-2C_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\ \hdashline 3&-5&4\\-4&5&-2\end{pmatrix}$$

则 $X=\begin{pmatrix}3&-5&4\\-4&5&-2\end{pmatrix}$

用初等列变换求逆矩阵

例: 解矩阵方程 $XA=B$ 其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&3\end{pmatrix}$

解 $XA=B \Leftrightarrow (XA)^T=B^T \Leftrightarrow A^TX^T=B^T$

得 $X^T=\left(A^T\right)^{-1}B^T$

易知 A^T 可逆, 作分块矩阵

$$\left(A^T \vdots B^T\right)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&2&1&2\\2&2&1&0&0\\0&1&1&-1&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&2&1&2\\0&-2&-3&-2&-4\\0&1&1&-1&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&2&1&2\\0&1&1&-1&3\\0&-2&-3&-2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1&2\\0&1&1&-1&3\\0&0&-1&-4&2\end{pmatrix}$$

用初等列变换求逆矩阵

例: 解矩阵方程 $XA=B$ 其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&0&3\end{pmatrix}$

解 $X^T=\left(A^T\right)^{-1}B^T$

$$\left(A^T \vdots B^T\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&2&1&2\\0&1&1&-1&3\\0&0&-1&-4&2\end{array}\right)\xrightarrow{-r_3}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&2&1&2\\0&1&1&-1&3\\0&0&1&4&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&2&0&-7&6\\0&1&0&-5&5\\0&0&1&4&-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&3&-4\\0&1&0&-5&5\\0&0&1&4&-2\end{array}\right)$$

故 $X^T=\begin{pmatrix}3&-4\\-5&5\\4&-2\end{pmatrix}$ 则 $X=\begin{pmatrix}3&-5&4\\-4&5&-2\end{pmatrix}$