

## ТЕМА 1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ, ВИДИ ТА ЗАВДАННЯ АНАЛІЗУ ДИНАМІЧНИХ РЯДІВ

Динамічні процеси, які відбуваються в економічних, виробничих та технічних системах, у багатьох випадках можуть бути подані у вигляді ряду значень (спостережень) деякого показника (явища), послідовно розташованих у хронологічному порядку. Зміни цього показника відображають хід розвитку досліджуваного процесу.

Послідовність спостережень одного показника (ознаки), впорядковану залежно від послідовно зростаючих чи спадних значень іншого показника, називають **динамічним рядом або рядом динаміки**.

Спостереження за деяким явищем, характер якого змінюється з часом, породжує впорядковану послідовність, яку називають **часовим рядом**. Оскільки впорядкування зазвичай відбувається за часом, то наведені терміни будемо розглядати як рівнозначні.

Елементами динамічних рядів є значення (спостереження) досліджуваного показника, які називають **рівнями ряду**, та моменти або інтервали часу, яким вони відповідають. Тобто часовий ряд може бути заданий за допомогою двох систем:

- 1)  $t_1, t_2, \dots, t_N$  – системи часових параметрів,  $t_i - t_{i-1} = h$ ,  $h = \text{const}$ ;
- 2)  $\{u(t_i)\} = \{u_i; i = \overline{1, N}\}$  – системи спостережень (рівні ряду).

Якщо  $u_i$  – вектори, отримуємо багатовимірний часовий ряд.

**Довжиною ряду** вважають час, що минув від моменту першого спостереження до останнього ( $t_N - t_1$ ), або кількість рівнів ряду  $N$ .

Класифікацію часових рядів проводять за такими ознаками:

1) за часом (моментні та інтервалальні). Часові ряди, у яких значення показника відповідає конкретним моментам часу, називають **моментними**. Наприклад, температурні показники за кожен день місяця. Якщо рівні часового ряду утворюються накопиченням, усередненням або будь-яким іншим методом агрегування за певний проміжок часу, такі ряди є **інтервалальні**. Наприклад, ряд показників обсягу продукції підприємства в окремі місяці року. Різниця моментних рядів від інтервалних полягає в тому, що сума рівнів інтервалального ряду є цілком реальним показником – загальний обсяг продукції за рік, а сума рівнів моментного ряду не має реального змісту;

2) формою подання рівнів – ряди **абсолютних** (кількість пацієнтів), **відносних** (індекси цін) або **середніх** (середня заробітна плата) величин;

3) відстанню між моментами, у які фіксують спостереження, – повні та неповні часові ряди. **Повні часові ряди** мають місце, коли дати фіксування або закінчення періодів йдуть одна за одною з рівними інтервалами, **неповні** – коли принцип рівних інтервалів порушується.

Часовий ряд має суттєві відмінності від вибірки:

- 1) порядок елементів у послідовності  $\{u_i\}$  суттєвий;
- 2) значення  $\{u_i\}$  залежні, що дає можливість прогнозування;

3) часовий ряд нестационарний;

4) змінна часу може бути неперервною, тоді послідовність  $\{u(t_i)\}$  буде нескінченною, на відміну від вибірки, яка завжди скінчена.

Динамічний ряд можна подати у вигляді деякої детермінованої функції  $f(t)$ , яка визначає основну складову ряду, та випадкової складової:

$$u(t) = f(t) + \xi_t \text{ або } u(t) = f(t) * \xi_t, \quad (1.1)$$

де  $\xi_t$  – залишки ряду або нерегулярні флуктуації, для яких виконуються умови

$$M\{\xi_t\} = 0, \quad \text{corr}(\xi_t, \xi_{t+k}) = 0. \quad (1.2)$$

Існує два підходи до аналізу часових рядів: класичний, або регресійний, та адаптивний. За регресійного підходу функцію  $f(t)$  представляють у вигляді трьох складових:

$T(t)$  – ліній тренд, що показує глобальні зміни досліджуваного явища;

$S(t)$  – сезонності, яка відображає коливання відносно тренда, обумовлені зовнішніми впливами;

$A(t)$  – циклічності (автоколивання) – більш-менш регулярних коливань відносно тренда, обумовлених внутрішньою природою досліджуваного явища. Про наявність автоколивань свідчить умова  $\text{corr}(u_t, u_{t+k}) \neq 0$ .

Часовий ряд може бути подано у вигляді суми відповідних компонент, тоді отримуємо адитивну форму моделі:

$$f(t) = T(t) + S(t) + A(t) + \xi_t, \quad (1.3)$$

або у вигляді добутку відповідних компонент, тоді отримуємо мультиплікативну форму моделі:

$$f(t) = T(t) * S(t) * A(t) * \xi_t. \quad (1.4)$$

У деяких випадках застосовують змішану форму

$$f(t) = T(t) * S(t) * A(t) + \xi_t. \quad (1.5)$$

У разі адаптивних методів функцію  $f(t)$  представляють у вигляді

$$f(t) = f(a_{1t}, a_{2t}, a_{kt}, t).$$

Цей підхід доцільно застосовувати під час аналізу коротких часових рядів. Проте в прогнозуванні він дає меншу точність.

У випадку застосування регресійного підходу можна виділити такі базові моделі.

1. Гладкий ряд – зростаючий (рис. 1.1) чи спадний, у якому відсутні сезонні, випадкові та циклічні коливання. Прикладами таких є демографічні ряди, а також ряди у сфері виробництва та торгівлі, пов’язані з демографічним фактором. Так, зубну паству не припиняють купувати навіть у разі втрати роботи.

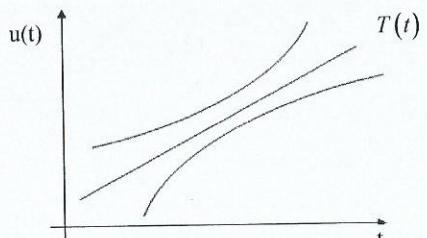


Рис. 1.1. Гладкий зростаючий часовий ряд

2. Часовий ряд із сезонними коливаннями (рис. 1.2). Одночасно з тривалими тенденціями в динамічних рядах мають місце більш або менш регулярні коливання – періодичні складові рядів динаміки. Якщо період коливань не перевищує 1 рік (12 місяців), тоді їх називають сезонними. Вважають, що найчастіше їх обумовлюють природно-кліматичні умови. Інколи сезонні коливання мають соціальний характер. Наприклад, збільшення закупівель у передсвяткові періоди, збільшення платежів у кінці кварталу.

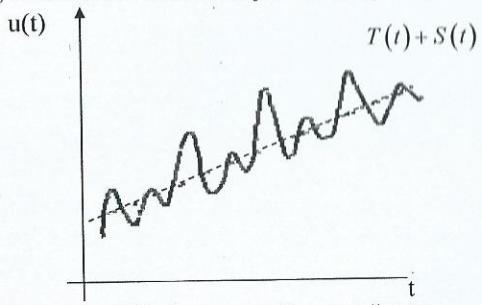


Рис. 1.2. Зростаючий часовий ряд із сезонними коливаннями

3. Наявність цикліческих коливань за відсутності сезонних (рис. 1.3). Коли період коливань значно більший за 12 місяців або не пов'язаний із природно-кліматичними умовами, вважають, що має місце циклічна складова. Прикладами можуть бути демографічні або інвестиційні цикли. Приклад на рис. 1.3 штучний. Важко навести приклади динамічного ряду з цикліческими коливаннями одночасно без сезонних.

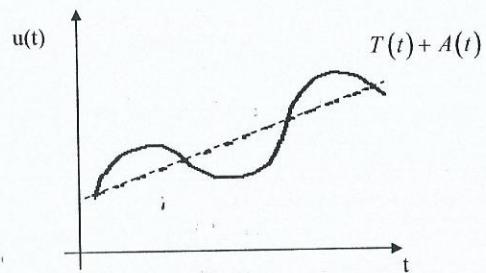


Рис. 1.3. Часовий ряд із цикліческими коливаннями

4. Наявність сезонних та цикліческих коливань (рис. 1.4). Досить часто динамічні ряди мають цикли різної довжини.

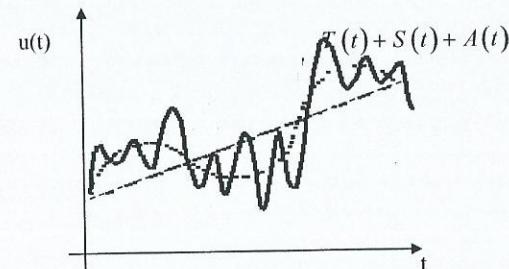


Рис. 1.4. Зростаючий часовий ряд із сезонними та цикліческими коливаннями

5. Наявність сезонних, цикліческих та випадкових коливань. Фактори, під дією яких формується нерегулярна компонента, бувають двох видів. По-перше, різкої, раптової дії (стихійні лихи, епідемії) – катастрофічні коливання. Вони викликають більш значні відхилення, ніж коливання другого типу – випадкові коливання, що є результатом дії великої кількості побічних причин. Вплив окремих факторів незначний, але їх сумарний вплив істотно відчувається.

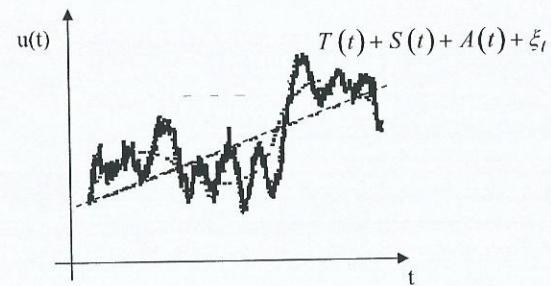


Рис. 1.5. Зростаючий часовий ряд із сезонними, цикліческими та випадковими коливаннями

Залежно від довжини ряду  $N$  вирізняють короткі ( $N \leq 20$ ), середні ( $20 < N \leq 50$ ) та довгі ( $N > 50$ ) часові ряди.

Основне завдання аналізу часових рядів полягає у виділенні на основі відомого відрізка часового ряду детермінованої та випадкової компоненти, а також в оцінці їх характеристик. Отримавши оцінки цих складових, можна прогнозувати як сам ряд, так і його складові.

Виділяють короткотермінові (від 1 до 5 кроків), середньотермінові (від 6 до 10 кроків) та довгі (більше 10 кроків) прогнози.

Довгі прогнози, як правило, є неадекватні. Прогноз буде мати цінність, якщо  $D\{\xi_t\} \ll D\{u_t\}$ .

Для успішного дослідження динаміки процесу необхідно, щоб інформація була повною та часовий ряд мав достатню довжину. Для визначення сезонних коливань бажано мати інформацію не менше ніж за 3 періоди.

Застосування певного математичного апарату накладає обмеження на довжину часових рядів. Так, застосування регресійного аналізу потребує, щоб довжина ряду в декілька разів перевищувала кількість незалежних змінних.

#### *Контрольні питання і завдання до теми*

1. Дайте визначення динамічного ряду.
2. Що являє собою «часовий ряд»?
3. Чим часовий ряд відрізняється від вибірки?
4. Як можна отримати часовий ряд, якщо початковий ряд даних  $y(t) \neq y(i \cdot h)$ ?
5. Назвіть задачі аналізу часових рядів.
6. Які часові ряди розглядає математична статистика?
7. Які ви знаєте складові часового ряду?
8. Як математично можна представити часовий ряд?

## **ТЕМА 2. ДОСЛІДЖЕННЯ ЧАСОВОГО РЯДУ НА ВИПАДКОВІСТЬ**

Нехай задано впорядковану послідовність  $u_1, u_2, \dots, u_N$ . Необхідно визначити, чи являють ці дані результати спостереження деякої випадкової величини (тобто вибірки з генеральної сукупності) або часовий ряд.

Вимоги до критеріїв перевірки на адекватність.

1. Критерій по можливості не повинен залежати від розподілу випадкової величини  $\xi_t$ .
2. Критерій повинен бути простий для обчислення.
3. Із всіх критеріїв обирають той, у якого альтернативною буде гіпотеза, що збігається з очікуваними властивостями часового ряду.

#### *Критерій екстремальних точок*

Критерій екстремальних точок має найбільшу потужність, коли як альтернативну гіпотезу обирають гіпотезу про циклічність.

Критерій екстремальних точок ґрунтуються на розрахунку кількості «піків» і «ям» у масиві даних. Екстремальною точкою («піком» або «ямою») називають значення, більше або менше і за попереднє, і за наступне значення. Якщо існує два або більше однакових екстремальних значень, розташованих поруч, то враховуємо лише одне значення. Інтервал між екстремальними точками називають фазою.

Максимальна кількість «піків» та «ям» на одиницю менша за кількість інтервалів монотонності.

Для визначення екстремальної точки потрібні три послідовні спостереження. Коли ряд випадковий, ці три величини могли б з'явитися в будь-якому порядку: всього шість варіантів. Наприклад, 1, 2, 3; 1, 3, 2; 3, 1, 2; 3, 2, 1; 2, 1, 3; 2, 3, 1. Тільки у чотирьох із них 1, 3, 2; 3, 1, 2; 2, 1, 3; 2, 3, 1 є екстремальна точка. Отже, ймовірність появи екстремальної точки у випадку трьох спостережень є  $2/3$ .

Розглянемо головну гіпотезу

$H_0$ : про випадковість часового ряду з альтернативою

$H_1$ : про циклічність ряду.

Введемо індикатор екстремальної точки

$$x_i = \begin{cases} 1, & u_{i-1} < u_i > u_{i+1} \text{ або } u_{i-1} > u_i < u_{i+1}, \\ 0, & \text{у протилежному разі.} \end{cases}$$

$E = \sum_{i=2}^{N-1} x_i$  – загальна кількість екстремальних точок.

$$M\{E\} = \sum_{i=2}^{N-1} M\{x_i\} = \frac{2}{3}(N-2), \quad D\{E\} = \frac{16N-29}{90}.$$

Якщо  $N \rightarrow \infty$ , то розподіл величини  $E$  збігається до нормального розподілу. Тому обчислимо статистику  $S = \frac{E - M\{E\}}{\sqrt{D\{E\}}}$  та порівняємо її з

квантилем  $u_{\alpha/2}$  нормального розподілу з параметрами  $m=0$ ,  $\sigma=1$  та рівнем значущості  $\alpha$ . Якщо  $|S| \leq u_{\alpha/2}$ , то приймаємо основну гіпотезу, тобто ряд є випадковий, інакше приймаємо альтернативну гіпотезу про циклічність ряду.

#### *Критерій, що ґрунтується на знаках різниці*

Критерій, що ґрунтується на знаках різниці, найбільш потужний та ефективний, коли як альтернативу застосовують гіпотезу про наявність тренда.

$H_0$ : про випадковість часового ряду з альтернативою

$H_1$ : про наявність тренда.

Задано ряд  $u_1, u_2, \dots, u_N$ . Як індикатор обираємо

$$x_i = \begin{cases} 1, & u_i < u_{i+1}, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ 0, & u_i \geq u_{i+1}, \end{cases}$$

Ті  $u_i$ , для яких  $x_i = 1$ , називають точками росту.  $C = \sum_{i=1}^{N-1} x_i$  – загальна

кількість точок росту;  $M\{C\} = \frac{N-1}{2}$ ;  $D\{C\} = \frac{N+1}{12}$ ;  $K = \frac{C - M\{C\}}{\sqrt{D\{C\}}}$  – нормована

випадкова величина, що має асимптотично нормальній розподіл з параметрами  $N \square(0;1)$ . Порівнюємо  $K$  з  $u_{\alpha/2}$  – квантилем  $N \square(0;1)$  із заданим рівнем значущості  $\alpha$ .

Якщо  $|K| \leq u_{\alpha/2}$ , то приймаємо гіпотезу  $H_0$ , тобто ряд є випадковий.

Якщо  $K < -u_{\alpha/2}$ , то має місце гіпотеза  $H_1$  з тенденцією ряду до спадання.

Якщо  $K > u_{\alpha/2}$ , то має місце гіпотеза  $H_1$  з тенденцією ряду до зростання.

### Критерій рекордних значень

Критерій рекордних значень найбільш потужний та ефективний, коли як альтернативу застосовують гіпотезу про наявність тренда.

Критерій запропонували Ф.Фостер та А.Стюарт, він ґрунтуються на дослідженні рекордних значень, які визначають шляхом порівняння рівнів ряду. Спостереження  $u_i$  – верхнє (нижнє) рекордне значення, якщо його рівень більший (менший), ніж усі попередні значення, рівні ряду.

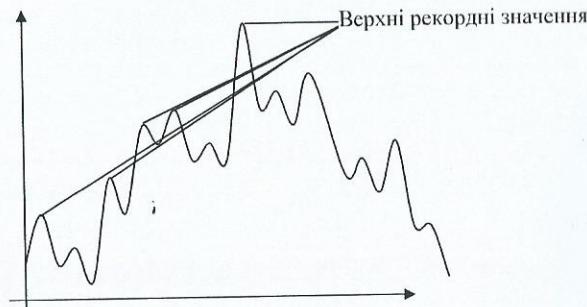


Рис. 2.1. Рекордні значення

Реалізація критерію рекордних значень передбачає перевірку головної статистичної гіпотези  $H_0$  з альтернативною гіпотезою  $H_1$  у такому вигляді:

$H_0$ : ряд випадковий;

$H_1$ : наявність тренда.

Введемо два індикатори:

$$l_i = \begin{cases} 1, & u_i < u_1 \wedge \dots \wedge u_i < u_{i-1}, \\ 0, & \text{у протилежному разі,} \end{cases} \quad m_i = \begin{cases} 1, & u_i > u_1 \wedge \dots \wedge u_i > u_{i-1}, \\ 0, & \text{у протилежному разі,} \end{cases} \quad i = \overline{2, N},$$

де  $l_i$  – нижні рекордні значення;  $m_i$  – верхні рекордні значення;  $L = \sum_{i=2}^N l_i$  –

загальна кількість нижніх рекордних значень;  $M = \sum_{i=2}^N m_i$  – загальна кількість верхніх рекордних значень.

Якщо знайдено рекордне значення, яке мало місце раніше, його не враховують, а загальна кількість  $N$  зменшується на одиницю.

Далі обчислимо статистичні характеристики  $D$  та  $S$ .

Характеристика  $D = M - L$  визначає перший критерій Фостера–Стюарта.

Характеристика  $S = M + L$  визначає другий критерій Фостера–Стюарта.

Величини  $D$  та  $S$  нормальню розподілені, проте з різними параметрами.

За допомогою величини  $D$  визначають тенденцію зміни середнього, а величини  $S$  – тенденцію зміни середньоквадратичного. Для цього окремо розглядають гіпотези

$$H_0: D = 0, \quad H_1: D \neq 0$$

та

$$H_0: S = \mu, \quad H_1: S \neq \mu.$$

Якщо основна гіпотеза для першої пари є правильна, то  $M\{D\} = 0$ ,

$$D\{D\} = \sum_{i=2}^N \frac{2}{i} = \mu.$$

$$\text{Для другої пари гіпотез } M\{S\} = D\{D\} = \mu, \quad D\{S\} = \sum_{i=2}^N \left( \frac{2}{i} - \frac{4}{i^2} \right).$$

$$\text{Обчислюємо } T_1 = \frac{D - M\{D\}}{\sqrt{D\{D\}}} \quad \text{та} \quad T_2 = \frac{S - M\{S\}}{\sqrt{D\{S\}}}.$$

Статистичні характеристики  $T_1$  та  $T_2$  мають нормальний розподіл з параметрами  $(0; 1)$ .

Якщо  $|T_1| \leq u_{\alpha/2}$ , то приймаємо основну гіпотезу, і тенденції в зміні середнього немає, тобто тренда немає.

Якщо  $T_1 > u_{\alpha/2}$ , то існує тенденція до зростання середнього рівня.

Якщо  $T_1 < -u_{\alpha/2}$ , то існує тенденція до спадання середнього рівня.

Якщо  $|T_2| \leq u_{\alpha/2}$ , то приймаємо основну гіпотезу, тенденції в зміні дисперсії немає.

Якщо  $T_2 > u_{\alpha/2}$ , то існує тенденція до зростання дисперсії.

Якщо  $T_2 < -u_{\alpha/2}$ , то існує тенденція до спадання дисперсії.

$u_{\alpha/2}$  – квантиль нормального розподілу  $N\{0; 1\}$  із заданим рівнем значущості  $\alpha$ .

Іноді замість нормального розподілу застосовують  $t$ -розподіл Стьюдента з  $N - 1$  числом ступенів вільності.

### Ранговий критерій Спірмена

Реалізація рангового критерію Спірмена передбачає перевірку головної статистичної гіпотези  $H_0$  з альтернативною гіпотезою  $H_1$  у такому вигляді:

$H_0$ : ряд випадковий з альтернативою

$H_1$ : про наявність тренда.

Нехай задано послідовність  $u_1, u_2, \dots, u_N$ . Визначимо матрицю індикаторів:

$$\{h_{i,j}; i = \overline{1, N-1}, j = \overline{i+1, N}\} = \begin{cases} 1, & u_i < u_j, \\ 0,5, & u_i = u_j, \\ 0, & u_i > u_j. \end{cases} \quad (2.1)$$

Розглянемо всі пари чисел, для яких  $i < j$ , тобто тільки частину матриці, вищу за головну діагональ. Застосовуючи матрицю індикаторів, обчислимо статистику:

$$V = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (j-i) h_{ij}. \quad (2.2)$$

Коефіцієнт рангової кореляції  $\tau_C$  між порядком величин у часі та порядком за величиною  $u$  має нормальний розподіл. Коефіцієнт  $\tau_C$  визначають як

$$\tau_C = 1 - \frac{12V}{N(N^2-1)}. \quad (2.3)$$

Для випадкового ряду виконуються такі умови:  $M\{\tau_C\} = 0$ ,  $D\{\tau_C\} = \frac{1}{N-1}$ .

Тому для перевірки основної гіпотези обчислимо статистику

$$S = \frac{\tau_C}{\sqrt{D\{\tau_C\}}}, \quad (2.4)$$

яка має нормальнний розподіл з параметрами  $m = 0$ ,  $\sigma = 1$ .

Якщо  $|S| \leq u_{\alpha/2}$ , то приймаємо гіпотезу  $H_0$ , тобто ряд є випадковий.

Якщо  $S < -u_{\alpha/2}$ , то має місце гіпотеза  $H_1$  з тенденцією ряду до зростання.

Якщо  $S > u_{\alpha/2}$ , то має місце гіпотеза  $H_1$  з тенденцією ряду до спадання.

$u_{\alpha/2}$  – квантиль нормального розподілу  $N(0;1)$  із заданим рівнем значущості  $\alpha$ .

### Ранговий критерій Манна

Критерій Манна застосовують для перевірки статистичної гіпотези

$H_0$ : про випадковість ряду з альтернативою

$H_1$ : про наявність тренда.

У послідовності  $u_1, u_2, \dots, u_N$  підраховують величину  $T_n$  як кількість випадків, коли більш раннє значення часового ряду  $u_i$  менше одного з більш пізніх значень  $u_j$ , тобто кількість нерівностей  $u_i < u_j$  за  $i < j$ . Якщо два поруч розташовані спостереження мають однакове значення, то до величини  $T_n$  додають 0,5 замість 1. Застосовуючи матрицю індикаторів з попереднього критерію, отримуємо

$$T_n = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N h_{i,j}.$$

У послідовності з  $N$  елементів з урахуванням умови  $i < j$  можна утворити лише  $N(N-1)/2$ , а ймовірність того, що в парі  $u_i$  буде менше, ніж  $u_j$  за  $i < j$ , дорівнює  $1/2$  (рівність не враховуємо, розглядаємо як дискретний випадок). З огляду на

$$M\{T_n\} = \frac{N(N-1)}{2} \cdot \frac{1}{2}; \quad D\{T_n\} = \frac{(2N+5)N(N-1)}{72}.$$

У випадку, коли основна гіпотеза  $H_0$  є правильна, величина  $T_n$  має нормальнний розподіл із вказаними параметрами. Тому для перевірки основної гіпотези обчислюємо нормовану величину

$$U = \frac{T_n - M\{T_n\} + 0,5}{\sqrt{D\{T_n\}}}.$$

Поправка 0,5 у формулі для обчислення  $U$  враховує рівність  $u_i = u_j$ .

Якщо  $|U| \leq u_{\alpha/2}$ , приймаємо гіпотезу  $H_0$  і ряд є випадковий.

Якщо  $U < -u_{\alpha/2}$ , має місце гіпотеза  $H_1$  з тенденцією ряду до спадання.

Якщо  $U > u_{\alpha/2}$ , має місце гіпотеза  $H_1$  з тенденцією ряду до зростання.

### Критерій випадковості, що ґрунтується на серіальній кореляції

Якщо ряд невипадковий, то існує залежність між рівнями ряду. Характеристикою, що свідчить про наявність будь-якої залежності, є кореляція між послідовними рівнями часового ряду.

Нехай задано часовий ряд  $u_1, u_2, \dots, u_N$ . Серіальною кореляцією  $r_k$  із запізненням  $k$  (або лагом  $k$ ) називають кореляцію між елементами часового ряду, розташованими на відстані  $k$  одиниць один від одного.

$$r_1 = \text{corr}(u_1, u_2, \dots, u_{N-1}; u_2, u_3, \dots, u_N),$$

$$r_2 = \text{corr}(u_1, u_2, \dots, u_{N-2}; u_3, u_4, \dots, u_N),$$

...

$$r_{N/2} = \text{corr}(u_1, u_2, \dots, u_{N/2}; u_{N/2+1}, \dots, u_N),$$

де  $\text{corr}(x, y) = \frac{\bar{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{D_x D_y}}$ ;  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{xy}$  – відповідні середні значення;  $D_x$ ,  $D_y$  – вибіркові дисперсії,  $r_0 = 1$ .

Послідовність  $r_0, r_1, \dots, r_{N/2}$  називають корелограмою. Графік залежності  $r_k$  від  $k$  також називають корелограмою. Для довгих часових рядів ( $N > 50$ ) для обчислення  $r_k$  застосовують спрощену формулу:

$$r_k = \frac{\frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (u_i - \bar{u})(u_{i+k} - \bar{u})}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})^2}, \quad \bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i.$$

Для коротких та середніх часових рядів застосовують формулу

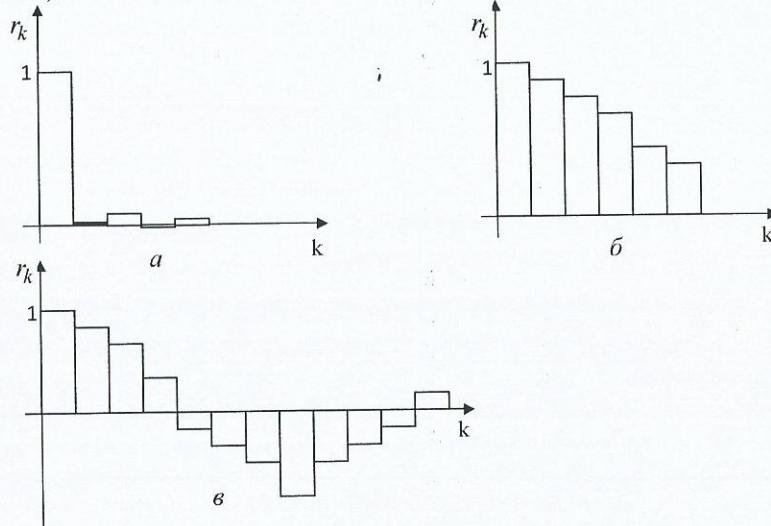
$$r_k = \frac{\frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} \left( u_i - \frac{1}{N-k} \sum_{j=1}^{N-k} u_j \right) \left( u_{i+k} - \frac{1}{N-k} \sum_{j=1}^{N-k} u_{j+k} \right)}{\left( \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} \left( u_i - \frac{1}{N-k} \sum_{j=1}^{N-k} u_j \right)^2 \right) \left( \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} \left( u_{i+k} - \frac{1}{N-k} \sum_{j=1}^{N-k} u_{j+k} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Для випадкових часових рядів усі  $r_i$ , крім  $r_0$ , статистично дорівнюють нулю. Виходячи з цього перевірка ряду на випадковість полягає в перевірці на значущість коефіцієнтів кореляції. За наявності тренда коефіцієнти кореляції є значущі. Статистика для перевірки на значущість  $k$ -го коефіцієнта

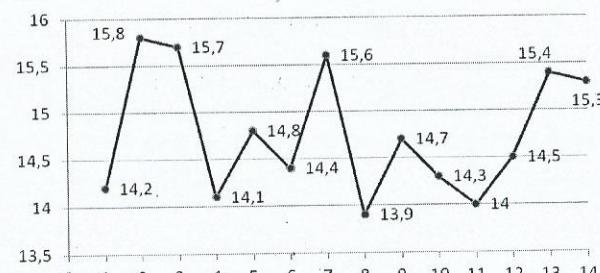
$$t_k = \frac{r_k \sqrt{N-k-2}}{\sqrt{1-r_k^2}}$$

має розподіл Стьюдента з числом ступенів вільності  $\nu = N - k - 2$ . Якщо  $|t_k| \leq t_{\nu, \alpha/2}$ , то коефіцієнт є незначущий.

Корелограми динамічних рядів з різними складовими наведено нижче (рис. 2.2).



Приклад. Перевірити ряд 14,2; 15,8; 15,7; 14,1; 14,8; 14,4; 15,6; 13,9; 14,7; 14,3; 14,0; 14,5; 15,4; 15,3 (рис. 2.3) на випадковість за допомогою критерію екстремальних точок.



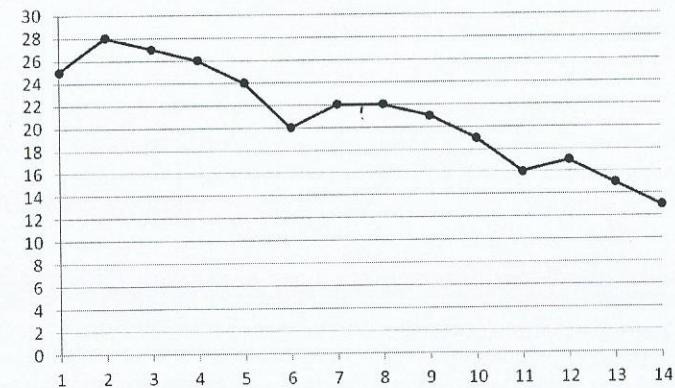
Екстремальні точки: «піки» – 15,8; 14,8; 15,6; 14,7;  
 «ями» – 14,1; 14,7; 13,9.

Загальна кількість – E=7,  $M\{E\} = \frac{2}{3}(N-2)=8$ ;  $D\{E\} = \frac{16N-29}{90}=1,81$ .

$$S = \frac{E - M\{E\}}{\sqrt{D\{E\}}} = -0,75.$$

За умови  $\alpha = 0,05$ ,  $u_{\alpha/2} = 1,96$ .  $|S| = |-0,75| = 0,75$ .  $0,75 < 1,96$ . Отже, ряд є випадковий.

Приклад. Перевірити ряд 25, 28, 27, 26, 24, 20, 22, 22, 21, 19, 16, 17, 15, 13, 12, 14, 13, 11 (рис. 2.4) на випадковість за допомогою критерію Спірмена.



Обчислимо за формулою (2.1) матрицю індикаторів:

$$\{h_{ij}\} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Далі проведемо розрахунки за формулами (2.2) – (2.4).

$$V = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1 = 13,5.$$

$$\tau_C = 1 - \frac{12 \cdot 13,5}{14(14^2 - 1)} = 1 - 0,059 = 0,941, D\{\tau_C\} = \frac{1}{13} = 0,077, S = \frac{0,941}{\sqrt{0,077}} = 3,393.$$

За умови  $\alpha = 0,05$ ,  $u_{\alpha/2} = 1,96$ .  $|S| = 3,393$ .  $3,393 > 1,96$ . Отже, ряд не випадковий і має тенденцію до спадання.

#### Контрольні питання і завдання до теми

1. Які часові ряди розглядає математична статистика?
2. Що являє собою стаціонарний (нестаціонарний) ряд, випадковий (невипадковий) ряд?
3. Що являє собою тренд?
4. Дайте визначення корелограмми. Які висновки можна зробити в ході її аналізу?
5. Назвіть критерії, за допомогою яких можна перевірити гіпотезу про наявність сезонних або циклічних коливань.
6. За допомогою якого критерію перевіряють існування тенденції в зміні середньоквадратичного відхилення рівнів ряду від лінії тренда?
7. Який критерій дозволяє одночасно визначити наявність тренда та сезонних або циклічних коливань? Чи можна за його допомогою визначити період?
8. Дайте визначення квантиля розподілу.
9. З якою метою нормують статистику, що має нормальній розподіл?
10. Порівняйте потужності різних критеріїв.

## ТЕМА 3. МЕТОДИ ЗГЛАДЖУВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Пошук та аналіз тенденції динамічного ряду в багатьох випадках здійснюють за допомогою його згладжування (вирівнювання). Також інколи необхідно попередньо обробити часовий ряд для вилучення аномальних значень ряду. Це також можна зробити шляхом згладжування. Аномальні значення часового ряду не відповідають досліджуваному явищу, їх наявність під час побудови трендової моделі може сильно викривити результати дослідження. Якщо причини появи аномальних значень є технічні помилки під час отримання, обробки та пересилки інформації, такі помилки називають помилками першого роду. Їх можна виявити та усунути причини появи. Крім того, аномальні рівні ряду можуть з'являтись через вплив об'єктивних факторів, що рідко мають місце. Такі помилки називають помилками другого роду, їх усунути неможливо. У цьому випадку необхідно виключити з подальшого розгляду ці аномальні значення.

По суті різні прийоми згладжування полягають у заміщенні фактичних рівнів часового ряду розрахованими рівнями, які мають менші коливання. Це

сприяє більш чіткому прояву тенденції розвитку. Інколи згладжування є попередній етап перед застосуванням інших методів пошуку тенденції.

#### Згладжування за допомогою ковзного середнього

Метод ковзного середнього (MA – moving average) передбачає перехід від початкових значень часового ряду до їх середніх значень на деякому інтервалі часу, довжину якого називають **шириною вікна**.

Цей інтервал на кожному кроці зміщується, начебто рухається уздовж ряду. У ході обчислення значення нового рівня ряду використовують тільки частину початкового ряду, що потрапляє у вікно.

Ковзне середнє дозволяє згладити як випадкові, так і періодичні коливання, виявити тенденцію розвитку процесу, тому являє собою важливий інструмент для фільтрації компонент часового ряду.

Як зазначено вище, на кожному кроці серед елементів початкового ряду  $\{u_i\}$ ,  $i = \overline{1, N}$  обирають по  $l$  елементів. Зазвичай у процедурах ковзного середнього  $l$  обирають непарним ( $l = 2m + 1$ ) та з метою спростити обчислення перенумерують елементи таким чином:

$$u_{-m}, u_{-(m-1)}, \dots, u_0, \dots, u_{m-1}, u_m. \quad (3.1)$$

У цьому випадку нове обчислене значення буде відповідати центральному значенню  $u_0$ .

Серед процедур ковзного середнього розрізняють:

- процедури простого ковзного середнього;
- процедури зваженого ковзного середнього.

Якщо досліджуване явище має лінійний характер, застосовують просте ковзне середнє.

*Алгоритм згладжування простим ковзним середнім має такі кроки.*

Крок 1. Визначити довжину вікна (інтервалу згладжування)  $l$ .

Крок 2. Розбити весь період спостережень на інтервали, що містять  $l$  елементів та розташовані один відносно одного із зсувом 1.

Крок 3. Для кожного інтервалу розрахувати середнє арифметичне рівнів ряду, що потрапили в інтервал

$$\hat{u}_0 = \frac{1}{l} \sum_{i=-m}^m u_i.$$

Крок 4. Замінити фактичне значення  $u_0$  на відповідне значення  $\hat{u}_0$ .

Наслідком процедур згладжування є повне усунення періодичних коливань у часовому ряді, коли ширина вікна дорівнює або кратна довжині циклу чи періоду коливань. Тобто для усунення сезонних коливань необхідно обирати ширину вікна 4 або 12 ( $l = 2m$ ), але при цьому втрачається перевага непарної ширини вікна. У цьому випадку для розрахунку обирають непарну ширину вікна, що на 1 більша за період коливань, але перше та останнє значення, що потрапили у вікно, враховують із вагою 0,5. Середнє арифметичне рівнів обчислюють за формулою

$$\hat{u}_0 = \frac{\frac{1}{2}u_{-m} + \sum_{i=-(m-1)}^{m-1} u_i + \frac{1}{2}u_m}{2m}.$$

Будь-який метод згладжування за методом ковзного середнього має суттєвий недолік – неможливість отримати згладжені значення в перших та останніх  $m$  точках. Це явище має назву **крайовий ефект**.

Для методу простого ковзного середнього, щоб усунути крайовий ефект, обчислюють середній приріст  $\Delta u$  на останньому інтервалі:

$$\overline{\Delta u} = \frac{u_m - u_{-m}}{l-1}.$$

Отримати останні  $m$  згладжених значень у кінці часового ряду можна шляхом послідовного збільшення попереднього згладженого рівня на величину  $\overline{\Delta u}$ .

Якщо для досліджуваного процесу характерний нелінійний розвиток, то застосування простого ковзного середнього може спричинити суттєві помилки. У цьому випадку більш надійне зважене ковзне середнє.

У процедурі зваженого ковзного середнього на кожному інтервалі згладжування значення центрального рівня  $u_0$  замінюють на зважене середнє арифметичне:

$$\hat{u}_0 = \frac{1}{l} \sum_{i=-m}^m w_i u_i, \quad \sum_{i=-m}^m w_i = 1.$$

Зважене ковзне середнє ставить у відповідність рівню ряду вагу, яка залежить від відстані між даним рівнем та рівнем, що знаходиться в середині вікна згладжування.

Процедура зваженого ковзного середнього ґрунтуються на методі найменших квадратів (МНК). У разі застосування МНК кожен відрізок вихідного ряду (3.1), що складається з  $l=2m+1$  елементів, буде згладжуватись за допомогою полінома (степінь полінома менший за  $l$ ):

$$\hat{u}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_p t^p. \quad (3.2)$$

Як згладжене значення беруть значення полінома в середині його області застосування ( $t=0$ ). Розглянемо поліном 3-го степеня:

$$u_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3. \quad 47 \quad (3.3)$$

Знайдемо оцінки коефіцієнтів  $a_0, a_1, a_2, a_3$  за МНК із системи рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{t=-m}^m (u_t - a_0 - a_1 t - \dots - a_p t^p)^2 = 0, \quad j = \overline{0, p},$$

які можна записати у вигляді

$$a_0 \sum_{t=-m}^m t^j + a_1 \sum_{t=-m}^m t^{j+1} + \dots + a_p \sum_{t=-m}^m t^{j+p} = \sum_{t=-m}^m t^j u_t, \quad j = \overline{0, p}. \quad (3.4)$$

За методом Крамера знайдемо  $a_0$ :

$$a_0 = c_1 u_{-m} + c_2 u_{-(m-1)} + \dots + c_m u_0 + \dots + c_{2m+1} u_m, \quad (3.5)$$

де всі  $c_i$  залежать лише від  $m$  та  $p$ .

Формули для обчислення  $a_1, a_2, a_3$  будуть подібні до (3.5).

Згідно з (3.3) значення полінома в середині області згладжування ( $t=0$ ) дорівнює  $a_0$  ( $u_t = a_0$ ), у той же час  $a_0$  визначають за формулою (3.5), звідси випливає, що значення полінома в точці  $t=0$  дорівнює зваженому середньому початкових рівнів ряду.

Розглянемо апроксимацію кубічним поліномом за сьома точками ( $l=7, m=3, p=3, t=-3, \dots, 3$ ). Якщо підставити ці значення в систему (3.4), то отримаємо

$$\begin{cases} 7a_0 + 28a_2 = \sum_{t=-3}^3 u_t, \\ 28a_1 + 196a_3 = \sum_{t=-3}^3 tu_t, \\ 28a_0 + 196a_2 = \sum_{t=-3}^3 t^2 u_t, \\ 196a_1 + 1588a_3 = \sum_{t=-3}^3 t^3 u_t. \end{cases} \quad (3.6)$$

Звідки знаходимо вираз для  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{1}{21} \left( 7 \sum_{t=-3}^3 u_t - \sum_{t=-3}^3 t^2 u_t \right) = \frac{1}{21} (-2u_{-3} + 3u_{-2} + 6u_{-1} + 7u_0 + 6u_1 + 3u_2 - 2u_3).$$

Існує символічний запис цієї формулі:  $\frac{1}{21}[-2, 3, 6, 7, 6, 3, -2]$ . Якщо коефіцієнти симетричні, можна записати так:  $\frac{1}{21}[-2, 3, 6, 7]$ .

Не рекомендовано обирати ширину вікна більшу, ніж чверть значень досліджуваного ряду. Чим ширше вікно, тим більш гладкий ряд отримаємо після згладжування.

Для усунення крайового ефекту, тобто розрахунку згладжених значень часового ряду в останніх  $m$  точках ряду, можна підставити в поліном (3.2) замість  $t$  1, 2, ...,  $m$ . Для цього необхідно із системи (3.4) отримати вирази для обчислення  $a_j, j = \overline{1, p}$  та підставити їх разом з  $a_0$  у вираз (3.2). Для перших  $m$  точок ряду обчислення аналогічні, лише  $t = -1, -2, \dots, -m$ .

Для нашого випадку

$$a_1 = \frac{1}{1512} \left( 397 \sum_{t=-m}^m tu_t - 49 \sum_{t=-m}^m t^3 u_t \right) = \frac{1}{252} [22, -67, -58, 0, 58, 67, -22],$$

$$a_2 = \frac{1}{84} \left( -4 \sum_{t=-m}^m u_t + \sum_{t=-m}^m t^2 u_t \right) = \frac{1}{84} [5, 0, -3, -4, -3, 0, 5],$$

$$a_3 = \frac{1}{216} \left( -7 \sum_{t=-m}^m tu_t + \sum_{t=-m}^m t^3 u_t \right) = \frac{1}{36} [-1, 1, 1, 0, -1, -1, 1],$$

$$u_1 = \frac{1}{126} [117, 24, -12, -12, 3, 12, -6],$$

$$u_2 = \frac{1}{126} [24, 57, 48, 18, -12, -21, 12],$$

$$u_3 = \frac{1}{126} [-12, 48, 57, 36, 6, -12, 3],$$

$$u_{N-2} = \frac{1}{42} [1, -4, 2, 12, 19, 16, -4],$$

$$u_{N-1} = \frac{1}{42} [4, -7, -4, 6, 16, 19, 8],$$

$$u_N = \frac{1}{42} [-2, 4, 1, -4, -4, 8, 39].$$

Інший варіант зваженого ковзного середнього можна отримати шляхом подвійного усереднення. Так, перша операція усереднення приводить до часового ряду

$$v_1 = \frac{1}{l} (u_1 + u_2 + \dots + u_l), \quad v_2 = \frac{1}{l} (u_2 + u_3 + \dots + u_{l+1}), \dots$$

Друга операція усереднення приводить до такого ряду:

$$w_1 = \frac{1}{l} (v_1, v_2, \dots, v_l), \dots$$

$$\text{Якщо } l = 4, \text{ то } w_1 = \frac{1}{16} (u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 4u_4 + 3u_5 + 2u_6 + u_7) = \frac{1}{16} [1, 2, 3, 4],$$

тобто подвійне усереднення за 4 значеннями приводить до зваженого усереднення початкових рівнів ряду за 7 значеннями.

Існує ще два різновиди ковзного середнього: медіанне та експоненціальне згладжування. Основою медіанного згладжування є обчислення ковзної медіані рівнів ряду, що потрапили до вікна. Медіанне згладжування стікне до викидів.

### Експоненціальне згладжування

Експоненціальне згладжування – один із найпростіших та найпоширеніших підходів до вирівнювання ряду. В його основі лежить розрахунок експоненціальних середніх. Нехай задано часовий ряд

$$\{u_t; t = \overline{1, N}\}. \quad (3.7)$$

Експоненціальне згладжування відбувається за рекурентною формулою:

$$S_t = \alpha u_t + \beta S_{t-1}, \quad (3.8)$$

де  $S_t$  – значення експоненціального середнього в момент часу  $t$ ;  $\alpha$  – параметр згладжування,  $\alpha = \text{const}$ ,  $0 < \alpha < 1$ ;  $\beta = 1 - \alpha$ .

Вираз (3.8) можна переписати таким чином:

$$S_t = \alpha u_t + (1 - \alpha) S_{t-1} = S_{t-1} + \alpha(u_t - S_{t-1}). \quad (3.9)$$

У виразі (3.9) експоненціальне середнє на момент часу  $t$  представлене як сума експоненціального середнього попереднього моменту та частки  $\alpha$  від різниці між поточним спостереженням та експоненціальним середнім попереднього моменту.

Якщо послідовно застосовувати рекурентне співвідношення (3.8), то отримаємо вираз для обчислення  $S_t$  через значення рівнів ряду (3.7):

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha u_t + \beta S_{t-1} = \alpha u_t + \alpha \beta u_{t-1} + \beta^2 S_{t-2} = \dots = \\ &= \alpha u_t + \alpha \beta u_{t-1} + \beta^2 u_{t-2} + \dots + \alpha \beta^i u_{t-i} + \dots + \beta^N S_0 = \alpha \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i u_{t-i} + \beta^N S_0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

де  $S_0$  – визначає умови для першого застосування формулі (3.8), коли  $t = 1$ .

Враховуючи, що  $\beta < 1$ , за  $N \rightarrow \infty$   $\beta^N \rightarrow 0$ , а сума коефіцієнтів  $\alpha \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i \rightarrow 1$ .

Тоді

$$S_t = \alpha \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i u_{t-i}.$$

Таким чином, величина  $S_t$  – зважена сума всіх елементів ряду. При цьому коефіцієнти (ваги) зменшуються експоненціально залежно від «віку» спостереження. Тому  $S_t$  і називають експоненціальним середнім. Наприклад, нехай  $\alpha = 0,3$ . Поточне спостереження буде мати вагу 0,3. Ваги попередніх спостережень відповідно 0,21; 0,147; 0,1029 і т.д.

Розглянемо ряд, утворений моделлю

$$u_t = \alpha_1 + \varepsilon_t,$$

де  $\alpha_1 = \text{const}$ ;  $\varepsilon_t$  – випадкові неавтокорельовані відхилення, або шум із середнім значенням 0 та дисперсією  $\sigma^2$ .

Застосуємо до нього процедуру експоненціального згладжування (3.8). Тоді

$$S_t = \alpha \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i u_{t-i} = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i (\alpha_1 + \varepsilon_{t-i}) = \alpha_1 + \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \varepsilon_{t-i}.$$

Знайдемо математичне сподівання та дисперсію  $S_t$ .

$$\begin{aligned} M(S_t) &= M(u_t) = \alpha_1, \\ D(S_t) &= M[(S_t - \alpha_1)^2] = M\left[\left(\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \varepsilon_{t-i}\right)^2\right] = \alpha^2 \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{2i} \sigma^2 = \frac{\alpha}{2 - \alpha} \sigma^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Враховуючи  $0 < \alpha < 1$ ,  $D(S_t) < D(u_t) = \sigma^2$ .

Таким чином, експоненціальне середнє  $S_t$  має таке саме математичне сподівання, що й початковий ряд, але меншу дисперсію. Із виразу (3.11) видно, що чим менше значення  $\alpha$ , тим більше скорочується дисперсія. Відповідно тим більше фільтруються, згладжуються коливання початкового ряду.

Експоненціальне вирівнювання завжди потребує попереднього значення експоненціального середнього. Коли процес розпочинається, необхідна величина  $S_0$ , яку буде застосовано для обчислення  $S_1$ . Якщо є попередні дані до початку

згладжування, тоді як  $S_0$  можна взяти арифметичне середнє наявних значень або деякої їх частини. В іншому випадку потрібне припущення початкового рівня ряду.

Припущення можна зробити, врахувавши апріорні знання про процес або порівнюючи його зі схожими процесами. Після  $k$  кроків вага початкового значення буде дорівнювати  $(1-\alpha)^k$ . Якщо є впевненість у правильності початкового значення  $S_0$ , тоді коефіцієнт  $\alpha$  можна взяти малий. Якщо такої впевненості не має, тоді  $\alpha$  має бути великий, щоб зменшити вплив початкового значення. Але велике значення  $\alpha$  може стати причиною великої дисперсії коливань  $S_t$ . Тому після достатнього зсуву від початкового моменту часу величину  $\alpha$  можна зменшити.

Для того щоб зменшити вплив великого значення вагового коефіцієнта початкової величини, можна модифікувати процедуру згладжування таким чином. Для початкового моменту часу запишемо

$$S'_0 = \alpha S_0,$$

$$S'_1 = \alpha u_1 + (1-\alpha)S'_0 = \alpha u_1 + \alpha(1-\alpha)S_0,$$

де  $S_0$  – початкова оцінка рівня ряду. Враховуючи, що тепер  $\alpha + \alpha(1-\alpha) \neq 1$ , необхідно ввести додатковий множник.

Таким чином, модифікованим експоненціальним середнім для  $t=1$  буде

$$\tilde{S}_1 = S'_1 \frac{1}{\alpha + \alpha(1-\alpha)} = [\alpha u_1 + (1-\alpha)S'_0] \frac{1}{\alpha + \alpha(1-\alpha)}.$$

Для решти

$$\tilde{S}_t = S'_t \frac{1}{\sum_{i=0}^t \alpha(1-\alpha)^i} = [\alpha u_t + (1-\alpha)S'_{t-1}] \frac{1}{\sum_{i=0}^t \alpha(1-\alpha)^i}.$$

Дана модифікація дозволяє пропорційно розподілити між елементами ряду зйому вагу вагового коефіцієнта початкового значення  $S_0$ .

Щоб скоротити час обчислень, доцільно повернутися до звичайного експоненціального згладжування, коли  $\sum_{i=0}^t \alpha(1-\alpha)^i \rightarrow 1$ . Р. Вейд рекомендує

виконувати такий перехід, коли сума коефіцієнтів  $\sum_{i=0}^t \alpha(1-\alpha)^i = 0,995$ . Для певного значенні  $\alpha$  можна заздалегідь визначити, на якому кроці необхідно повернутися до звичайної моделі.

Експоненціальне середнє  $S_t$  є приклад асиметричного ковзного середнього, у якому враховано ступінь «старіння» даних.

#### Контрольні питання і завдання до теми

1. З якою метою здійснюють згладжування часового ряду?
2. Чи обов'язкове згладжування?

3. Який основний принцип методу ковзного середнього?

4. Дайте визначення ширини вікна.

5. Вплив яких компонент часового ряду зменшується за допомогою ковзного середнього?

6. Які бувають процедури ковзного середнього?

7. Як обчислюють згладжені значення простого ковзного середнього, коли ширина вікна є парною?

8. Як розраховують коефіцієнти згладжування методу зваженого ковзного середнього?

9. У яких випадках доцільно застосовувати процедури простого ковзного середнього, а в яких – зваженого ковзного середнього?

10. Яка проблема постає в процесі виконання згладжування на початку та в кінці ряду?

11. У чому полягає принцип експоненціального згладжування?

12. Укажіть, як обирають початкове значення для експоненціального згладжування.

## ТЕМА 4. РЕГРЕСІЙНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ. ВІДЛЕННЯ ТРЕНДА

**Тенденція** – деяка стійка систематична зміна впродовж тривалого часу. Тенденцію часового ряду, або ряду динаміки, представлена гладкою кривою, що має аналітичний вигляд, називають **трендом**, а саму гладку криву – **траекторією або кривою зростання**. Розрізняють три види тенденцій:

- тенденцію зміни середнього (у вигляді функції, яка згладжує часовий ряд і навколо якої розташовані початкові спостереження);
- тенденцію зміни дисперсії (зміни у відхиленнях емпіричних значень від значень, обчислених за трендом);
- тенденцію автокореляції (зміни у зв'язках між рівнями часового ряду).

Задача виділення тренда  $T(t)$  полягає в знаходженні деякої аналітичної функції

$$T(t, a_1, \dots, a_k) : \|u_t - T(t, a_1, \dots, a_k)\| \rightarrow \min_{a_1, \dots, a_k}.$$

У класичних регресійних методах функцію тренда знаходять одним із методів: лінійної регресії та нелінійної регресії, методом ковзного середнього, у вигляді сплайнів.

Методи лінійної та нелінійної регресії ґрунтуються на МНК:

$$S_3^2 = \sum_{t=1}^N \delta_t (u_t - T(t, a_1, \dots, a_k))^2 \rightarrow \min_{a_1, \dots, a_k}, \quad (4.1)$$

де  $S_3^2$  – залишкова дисперсія;  $\delta_t$  – вагові коефіцієнти.

Значення параметрів  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  є розв'язком системи рівнянь:

$$\frac{\partial S_3^2}{\partial a_i} = 0, i = \overline{1, k}. \quad (4.2)$$

### Виділення тренда методом лінійної регресії

Будемо вважати, що часовий ряд утворено за законом

$$\hat{u}_t = a_0 + a_1 t + e_t = T(t, a_0, a_1) + e_t. \quad (4.3)$$

Необхідно оцінити  $a_0$  та  $a_1$  за заданими початковими рівнями ряду

$u_t, t = \overline{1, N}$ . При цьому  $\sum_{t=1}^N e_t^2 \rightarrow \min_{a_0, a_1}$ .

Згідно із МНК  $S_3^2 = \sum_{t=1}^N (u_t - a_0 - a_1 t)^2 \rightarrow \min_{a_0, a_1}$ .

Маємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_3^2}{\partial a_0} &= -2 \left[ \sum_{t=1}^N u_t - a_0 N - a_1 \sum_{t=1}^N t \right], \\ \frac{\partial S_3^2}{\partial a_1} &= -2 \left[ \sum_{t=1}^N t u_t - a_0 \sum_{t=1}^N t - a_1 \sum_{t=1}^N t^2 \right]. \end{aligned}$$

Виконавши спрощення, отримаємо

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^N a_0 + \sum_{t=1}^N a_1 t = \sum_{t=1}^N u_t, \\ \sum_{t=1}^N a_0 t + \sum_{t=1}^N a_1 t^2 = \sum_{t=1}^N u_t t, \end{cases} \text{або} \begin{cases} a_0 N + a_1 \frac{N(N+1)}{2} = \sum_{t=1}^N u_t, \\ a_0 \frac{N(N+1)}{2} + a_1 \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \sum_{t=1}^N u_t t. \end{cases}$$

Оцінки коефіцієнтів  $\hat{a}_0$  та  $\hat{a}_1$  знаходимо за методом Крамера з останньої системи рівнянь.

Лінійну регресію можна застосовувати, коли виконуються умови Гаусса–Маркова:

- 1) модель лінійна за параметрами (коєфіцієнтами), включає адитивну випадкову складову;
- 2)  $M\{e_t\} = 0, D\{e_t\} = \sigma^2 = \text{const}$ ;
- 3) значення випадкової складової мають взаємно незалежні розподіли, тобто  $\text{corr}(e_t, e_{t+k}) = 0, \forall k$ ;
- 4) значення випадкової складової  $e_t$  мають нормальній розподіл з параметрами  $(0, \sigma)$ .

Виконання цих умов забезпечує ефективність оцінок параметрів, отриманих за МНК.

### Виділення тренда методом нелінійної регресії

На практиці для опису тенденції розвитку динамічного ряду крім лінійної моделі (4.3) застосовують і інші види кривих зростання. За такого підходу зміни досліджуваного показника пов'язують лише зі впливом часу, вважають, що вплив інших факторів не суттєвий або вони мають не прямий вплив через фактор часу.

Усі криві зростання умовно можна поділити на три типи (рис. 4.1) залежно від описаного типу динаміки.

1. Функції, які описують монотонні тенденції без межі зростання.

2. Функції, що мають межу зростання в досліджуваному періоді, – **криві з насиченням**. Наприклад, явища, які описують за допомогою цього типу кривих, можуть бути пов'язані з демографічним фактором, дослідженням ефективності використання ресурсів.

3. Функції, що мають межу зростання і точку перегину, – **S-подібні криві**. Вони описують начебто два послідовні лавиноподібні процеси: один із пришвидшенням розвитку, другий – з уповільненням. Такі криві застосовують у страхових розрахунках, прогнозуванні науково-технічного прогресу, визначені попиту на новий вид продукції.

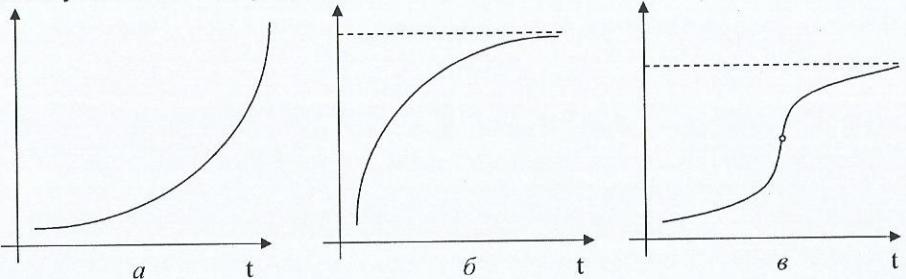


Рис. 4.1. Криві зростання:  
а – без межі зростання; б – з насиченням та без точки перегину;  
в – з насиченням і точкою перегину

Процедура виділення тренда за допомогою кривих зростання включає вибір форми кривої та оцінювання її параметрів. Правильно встановити вид кривої, тобто вид аналітичної залежності значення показника від часу – одне з найважчих завдань. Обрана функція тренда має задовільняти такі умови: бути теоретично обґрунтованою; мати якнайменшу кількість параметрів; параметри функції повинні мати економічне тлумачення; оцінені значення тренда мають якомога менше відрізнятися від відповідних фактичних спостережень часового ряду.

Вибір форми кривої певною мірою залежить від мети виділення тренда: інтерполяції або екстраполяції. У першому випадку мета полягає в досягненні найбільшої близькості до фактичних рівнів часового ряду. У другому – виявлення основної закономірності розвитку явища, стосовно якої можна припустити, що в майбутньому вона збережеться.

В основі вибору кривої лежить візуальне оцінювання графічного зображення ряду динаміки й теоретичний аналіз сутності явища, зміни якого

відображає часовий ряд. Іноді до уваги беруть міркування щодо характеру зростання рівнів ряду. Так, якщо зростання передбачається у вигляді арифметичної прогресії, то згладжування здійснюють за прямою; якщо зростання відбувається в геометричній прогресії, то згладжування виконують за експоненціальною функцією. На практиці під час попереднього аналізу часового ряду обирають, як правило, 2-3 криві зростання для подальшого дослідження і побудови трендової моделі часового ряду.

**Метод послідовних різниць (метод Тінтнера)** може бути застосовано для визначення порядку (степеня) апроксимаційного полінома, якщо, по-перше, рівні часового ряду складаються лише з двох компонент: тренда та випадкової складової, по-друге, тренд є досить гладкий, щоб його можна було згладити поліномом певного степеня.

Алгоритм застосування методу передбачає такі кроки.

1. На основі початкового ряду  $u_1, u_2, \dots, u_N$  обчислюють різниці (приrostи) до  $d$ -го порядку включно:

$$\Delta_t^1 = u_t - u_{t-1}, \quad \Delta_t^2 = \Delta_t^1 - \Delta_{t-1}^1, \dots, \Delta_t^d = \Delta_t^{d-1} - \Delta_{t-1}^{d-1}, \quad t = \overline{2, N}.$$

Зазвичай розраховують різниці до четвертого порядку.

2. Для початкового ряду та для кожного різницевого ряду обчислюють дисперсії:

$$S_0^2 = \frac{\sum_{t=1}^N u_t^2 - \frac{1}{N} \left( \sum_{t=1}^N u_t \right)^2}{N-1} \text{ — для початкового ряду;} \\ S_d^2 = \frac{\sum_{t=d+1}^N (\Delta_t^d)^2}{(N-d)c_{2d}^d} \text{ — для ряду різниць } d\text{-го порядку,}$$

де  $C_{2d}^d$  — біноміальний коефіцієнт;  $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

3. Порівнюють значення кожної наступної дисперсії із попередньою, тобто розраховують різниці  $|S_k^2 - S_{k-1}^2|$ ,  $k = \overline{1, d}$ . Якщо для будь-якого  $k$  ця величина не перевищує певної наперед заданої додатної величини, тобто порядок величин дисперсій одинаковий, то степінь апроксимаційного полінома має дорівнювати  $k-1$ .

Необхідно зазначити, що для визначення тренда в багатьох часових рядах не слід застосовувати поліноми дуже великого порядку, оскільки отримані в такий спосіб функції згладжування відображатимуть випадкові відхилення, а не детерміновану складову, що суперечить поняттю тенденції.

Розглянемо найбільш поширені криві зростання.

### 1. Поліноміальні криві другого порядку.

Будемо вважати, що часовий ряд утворено за законом

$$\hat{u}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + e_t = T(t, a_0, a_1, a_2) + e_t.$$

Задача полягає в оцінюванні  $a_0$ ,  $a_1$  та  $a_2$  за заданими початковими рівняннями ряду  $u_t$ ,  $t = \overline{1, N}$ . При цьому  $\sum_{t=1}^N e_t^2 \rightarrow \min_{a_0, a_1, a_2}$ .

$$\text{Згідно із МНК } S_3^2 = \sum_{t=1}^N (u_t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2)^2 \rightarrow \min_{a_0, a_1, a_2}.$$

Маємо систему рівнянь:

$$\frac{\partial S_3^2}{\partial a_0} = -2 \sum_{t=1}^N (u_t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2) = 0,$$

$$\frac{\partial S_3^2}{\partial a_1} = -2 \sum_{t=1}^N (u_t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2) t = 0,$$

$$\frac{\partial S_3^2}{\partial a_2} = -2 \sum_{t=1}^N (u_t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2) t^2 = 0.$$

Виконавши спрощення, отримаємо

$$\begin{cases} a_0 N + a_1 \sum_{t=1}^N t + a_2 \sum_{t=1}^N t^2 = \sum_{t=1}^N u_t, \\ a_0 \sum_{t=1}^N t + a_1 \sum_{t=1}^N t^2 + a_2 \sum_{t=1}^N t^3 = \sum_{t=1}^N u_t t, \\ a_0 \sum_{t=1}^N t^2 + a_1 \sum_{t=1}^N t^3 + a_2 \sum_{t=1}^N t^4 = \sum_{t=1}^N u_t t^2. \end{cases}$$

Оцінки коефіцієнтів  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{a}_1$  та  $\hat{a}_2$  знаходимо за методом Крамера.

### 2. Показникова (експоненціальна) крива зростання.

Будемо вважати, що часовий ряд утворено за одним із таких законів:

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= a_0 a_1^t + e_t, \\ \hat{u}_t &= e^{a_0 + a_1 t} + e_t, \\ \hat{u}_t &= a_0 10^{a_1 t} + e_t. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Для спрощення процедури МНК для такого типу кривих необхідно виконати перетворення до лінійного вигляду. Припустимо, що ряд утворено залежністю (4.4). Зведення до лінійного вигляду відносно параметрів виконаємо таким чином:

$$u_t = a_0 a_1^t \Rightarrow \ln u_t = \ln(a_0 a_1^t) \Rightarrow \ln u_t = \ln a_0 + t \ln a_1 \Rightarrow U_t = A_0 + A_1 t.$$

Для знаходження  $A_0$ ,  $A_1$  застосовують формули лінійної регресії, при цьому початкові дані повинні бути перетворені за правилом  $U_t = \ln u_t$ .

Оцінки параметрів залежності (4.4) визначають з урахуванням спiввiдношень  $A_0 = \ln a_0$ ,  $A_1 = \ln a_1$  за формулами

$$\hat{a}_0 = e^{A_0}, \quad \hat{a}_1 = e^{A_1}.$$

### 3. Степенева (мультиплікативна) крива зростання.

Ряд утворено залежністю

$$\hat{u}_t = a_0 t^{a_1} + e_t,$$

якій можна надати лінійного вигляду таким чином:

$$u_t = a_0 t^{a_1} \Rightarrow \ln u_t = \ln(a_0 t^{a_1}) \Rightarrow \ln u_t = \ln a_0 + a_1 \ln t \Rightarrow U_t = A_0 + A_1 T_t.$$

Оцінки параметрів  $A_0$ ,  $A_1$  визначають згідно зі схемою лінійної регресії. При цьому початкові дані повинні бути перетворені за правилом  $U_t = \ln u_t$ , а також  $T_t = \ln t$ .

Оцінки параметрів  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{a}_1$  обчислюють за формулами

$$\hat{a}_0 = e^{A_0}, \quad \hat{a}_1 = A_1.$$

Форма степеневої кривої залежить від параметра  $a_1$  (рис. 4.2).

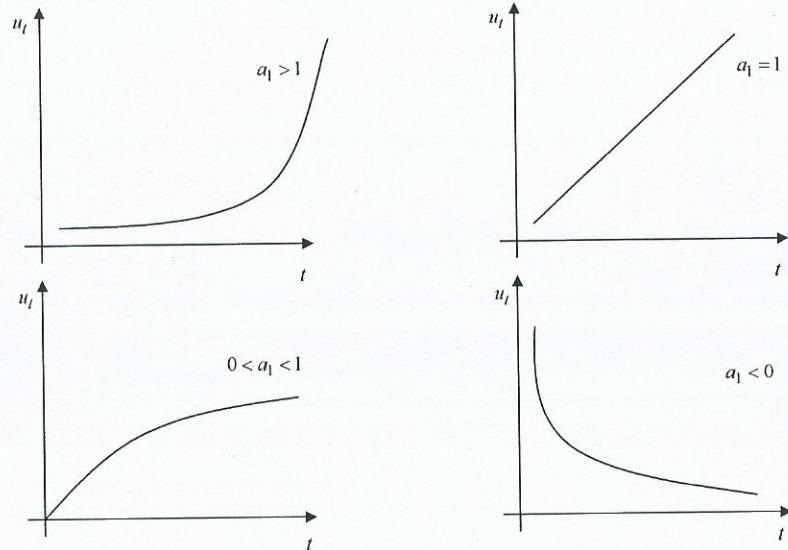


Рис. 4.2. Степенева регресія з різними параметрами

### 4. Обернена крива зростання.

Крива, задана у вигляді

$$\hat{u}_t = a_0 + \frac{a_1}{t} + e_t,$$

має назву кривої Філіпса. Вона показує залежність між середнім рівнем інфляції в країні і рівнем безробіття. Згідно з кривою Філіпса (рис. 4.3) з ростом безробіття інфляція зменшується. Дана залежність лінійна відносно коефіцієнтів, але

застосування лінійної регресії потребує перетворення початкового масиву  $\{t_i\}$ ,

$$i = \overline{1, N} \text{ за правилом } T_i = \frac{1}{t_i}.$$

Крива у вигляді  $\hat{u}_t = \frac{1}{a_0 + a_1 t} + e_t$  (крива Енгеля) показує залежність між обсягом ринку товару та платоспроможністю населення (рис. 4.3).

Для знаходження параметрів застосовують перетворення

$$\frac{1}{u_t} = a_0 + a_1 t \Rightarrow U_t = a_0 + a_1 t.$$

Знайдені оцінки параметрів лінійної регресії збігаються з параметрами нелінійної кривої.

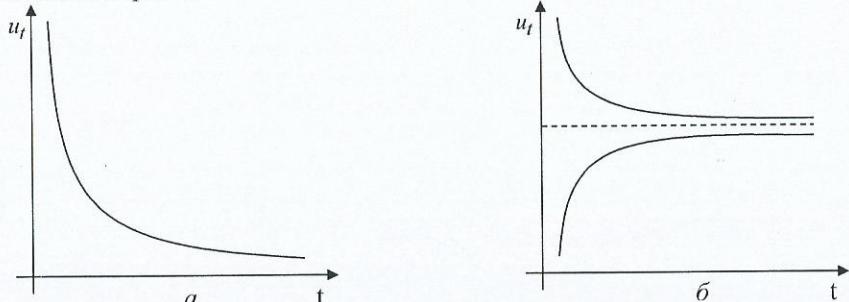


Рис. 4.3. Обернені криві зростання:  
а – крива Філіпса; б – крива Енгеля

### 5. Модифікована показникова (експоненціальна) крива.

Ряд утворено залежністю

$$\hat{u}_t = a_0 a_1^t + \gamma + e_t.$$

Припустимо, що значення параметра  $\gamma$  відоме. Тоді надамо кривій лінійного вигляду:

$$\ln(u_t - \gamma) = \ln(a_0 a_1^t) \Rightarrow \ln(u_t - \gamma) = \ln a_0 + t \ln a_1 \Rightarrow U_t = A_0 + A_1 t.$$

Отже, необхідно перетворити початковий ряд таким чином:

$$U_t = \ln(u_t - \gamma).$$

Отримавши оцінки параметрів  $A_0$  та  $A_1$ , обчислюємо

$$\hat{a}_0 = e^{A_0}, \quad \hat{a}_1 = e^{A_1}.$$

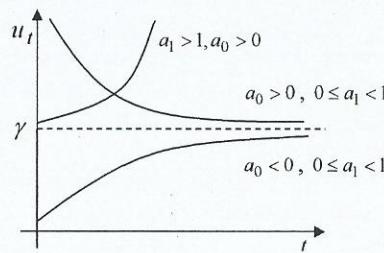


Рис. 4.4. Модифікована показникова регресія з різними значеннями параметрів

Наприклад, якщо на ринку з'являється новий товар, який супроводжує широка реклама, спочатку попит на цей товар буде досить великий і швидкість його продажу буде значна. Із часом продаж стабілізується та дійде до певного рівня насичення. У таких випадках фаза уповільненого зростання відсутня, і найкраще згладжування дасть модифікована експоненціальна крива (рис. 4.4).

Модифікована експоненціальна крива є базова крива, з якої в результаті певних перетворень отримують криву Гомперця і логістичну криву.

#### 6. Крива Гомперця.

Ряд утворено залежністю

$$\hat{u}_t = \gamma e^{-a_0 e^{-a_1 t}} + e_t$$

або в іншому вигляді

$$\hat{u}_t = \gamma a_0^{a_1^t} + e_t,$$

де  $\gamma$  – асимптота функції;  $a_0 > 0, 0 < a_1 < 1$ .

У кривій Гомперця виокремлюють чотири частини: на першій приріст функції незначний, на другій – збільшується, на третьій ділянці – майже постійний, на четвертій – відбувається уповільнення темпів приросту, функція необмежено наближається до значення  $\gamma$ . У результаті форма кривої нагадує латинську літеру S. Точкою перегину цієї кривої буде  $t_p = \frac{1}{\ln a_1} \ln \left( -\frac{1}{\ln a_0} \right)$  зі значенням функції  $u_{tp}$ , яке дорівнює  $u_{tp} = \gamma / e$ , де  $e = 2,71828$ .

Припустимо, що параметр  $\gamma$  відомий. Тоді надамо кривій лінійного вигляду:

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{u_t}{\gamma} \right) &= \ln \left( a_0^{a_1^t} \right) \Rightarrow \ln \left( \frac{u_t}{\gamma} \right) = \ln(a_0) a_1^t \Rightarrow \ln \ln \left( \frac{u_t}{\gamma} \right) = \ln(\ln(a_0) a_1^t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \ln \left( \frac{u_t}{\gamma} \right) = \ln \ln a_0 + \ln(a_1^t) \Rightarrow \ln \ln \left( \frac{u_t}{\gamma} \right) = \ln \ln a_0 + t \ln a_1 \Rightarrow U_T = A_0 + A_1 t. \end{aligned}$$

Отже, необхідно виконати перетворення початкового ряду

$$U_t = \ln \ln \left( \frac{u_t}{\gamma} \right).$$

Отримавши оцінки параметрів  $A_0$  та  $A_1$  лінійної регресії, враховуючи  $A_0 = \ln \ln a_0$  і  $A_1 = \ln a_1$ , обчислюємо

$$\hat{a}_0 = e^{e^{A_0}}, \quad \hat{a}_1 = e^{A_1}.$$

На основі кривої Гомперця описують, наприклад, динаміку показників рівня життя.

#### 7. Логістична крива (крива Перла–Ріда).

Ряд утворено залежністю

$$\hat{u}_t = \frac{1}{a_0 a_1^t + \gamma} + e_t,$$

де  $\gamma$  – верхня межа значень  $u_t$ ,  $a_0 > 0, a_1 > 0$ . Ця функція отримана на основі дослідження зростання організмів та їх популяцій. Вид графіка логістичної кривої (рис. 4.5) подібний до кривої Гомперця, але логістична крива має точку симетрії, яка збігається з точкою перегину.

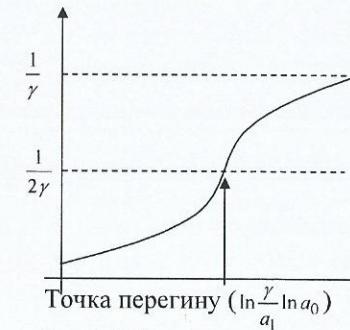


Рис. 4.5. Графік логістичної кривої

Припустимо, що параметр  $\gamma$  відомий. Тоді надамо кривій лінійного вигляду:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{a_0 a_1^t + \gamma} \Rightarrow \frac{1}{u_t} = a_0 a_1^t + \gamma \Rightarrow \frac{1}{u_t} - \gamma = a_0 a_1^t \Rightarrow \ln \left( \frac{1}{u_t} - \gamma \right) = \ln(a_0 a_1^t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \left( \frac{1}{u_t} - \gamma \right) = \ln a_0 + \ln(a_1^t) \Rightarrow \ln \left( \frac{1}{u_t} - \gamma \right) = \ln a_0 + t \ln a_1 \Rightarrow U_T = A_0 + A_1 t. \end{aligned}$$

Далі оцінки параметрів  $A_0$  та  $A_1$  визначаємо за схемою лінійної регресії. При цьому початкові значення часового ряду мають бути перетворені згідно з

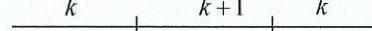
$U_T = \ln(1/u_t - \gamma)$ . Оцінки параметрів логістичної кривої отримуємо у вигляді  $\hat{a}_0 = e^{A_0}$ ,  $\hat{a}_1 = e^{A_1}$ .

В останніх трьох функціях суттєве значення має параметр  $\gamma$ , значення якого має бути визначено перед оцінюванням  $a_0$  та  $a_1$ . Для знаходження  $\gamma$  застосовують **метод трьох точок**. Елементи початкового часового ряду  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$  розподіляють на три частини за таким правилом:

$$N = 3k$$



$$N = 3k + 1$$



$$N = 3k + 2$$



Для кожної з частин ряду знаходять медіану  $u_I, u_{II}, u_{III}$ . Медіана ряду – це значення ряду, що ділить його навпіл. Половина спостережень менша за медіану, а половина більша. Для знаходження медіан необхідно упорядкувати кожну частину ряду. Тоді якщо кількість спостережень у частині непарна ( $k = 2m + 1$ ),  $u_{m+1}$  – медіана. Якщо кількість спостережень у частині парна ( $k = 2m$ ), то  $\frac{u_m + u_{m+1}}{2}$  – медіана. Величину  $\gamma$  знаходять за формулою

$$\gamma = \frac{u_I u_{III} - u_{II}^2}{u_I - 2u_{II} + u_{III}}.$$

### Дослідження якості побудованої лінії регресії

Наступний крок аналізу динамічного ряду регресійними методами є дослідження якості побудованої лінії регресії за допомогою перевірки адекватності та значущості обраної моделі (кривої).

Перевірити значущість лінії регресії означає встановити, чи відповідає математична модель, що описує залежність між змінними, експериментальним даним та чи достатньо в рівнянні лінії регресії пояснювальних змінних для опису залежності змінної. Для перевірки послуговуються положеннями дисперсійного аналізу (ANalysis of VAriance – ANOVA-аналізу).

Для подальшого застосування позначимо:

$u_t$  – початкові рівні ряду,  $t = \overline{1, N}$ ;

$\bar{u}$  – середнє арифметичне значення початкового ряду;

$\hat{u}_t$  – рівні ряду, отримані за обраною лінією регресії (кривою зростання),  $t = \overline{1, N}$ ;

$u_t - \bar{u}$  – загальне відхилення,  $t = \overline{1, N}$ ;

$\hat{u}_t - \bar{u}$  – відхилення, пояснене регресією,  $t = \overline{1, N}$ ;

$e_t = u_t - \hat{u}_t$  – залишок регресії,  $t = \overline{1, N}$ .

Згідно з положеннями дисперсійного аналізу загальна сума квадратів відхилень залежності змінної від середньоарифметичного дорівнює

$$SST = \sum_{i=1}^N (u_t - \bar{u})^2 = \sum_{i=1}^N (\hat{u}_t - \bar{u})^2 + \sum_{i=1}^N (u_t - \hat{u}_t)^2 = SSR + SSE,$$

де  $SSR$  – варіація, обумовлена регресією;  $SSE$  – залишкова варіація, обумовлена впливом неврахованих факторів.

Далі обчислюють значення інших величин (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

ANOVA – таблиця			
Джерело варіації	Ступінь вільності	Сума квадратів (SS)	Середнє квадратів (MS)
Варіація, обумовлена регресією ( $R$ )	$m - 1$	$SSR = \sum_{t=1}^N (\hat{u}_t - \bar{u})^2$	$MSR = \frac{SSR}{m - 1}$
Залишкова варіація ( $E$ )	$N - m$	$SSE = \sum_{t=1}^N e_t^2$	$MSE = \frac{SSE}{N - m}$
Загальна варіація ( $T$ )	$N - 1$	$SST = \sum_{t=1}^N (u_t - \bar{u})^2$	

Примітка.  $m$  – кількість параметрів обраної лінії регресії.

Значення, що входять до таблиці, дозволяють здійснити аналіз за допомогою наведених нижче критеріїв.

**F-тест, або критерій Фішера**, передбачає обчислення величини

$$F = \frac{MSR(N-m)}{MSE(m-1)},$$

яка має розподіл Фішера з  $v_1 = m - 1$  та  $v_2 = N - m$  ступенями вільності та порівняння її з квантилем  $f_{v_1, v_2, \alpha}$  розподілу Фішера за заданого рівня значущості  $\alpha$ .

Модель (лінія регресії) адекватна, якщо  $F > f_{v_1, v_2, \alpha}$ .

Значення  $F$  – міра того, наскільки лінія регресії краще описує значення залежності змінної (часового ряду) порівняно з її середнім значенням.

**Коефіцієнт детермінації ( $R^2$ )** – статистичний показник, застосовуваний у моделях як міра залежності варіації залежності змінної від варіації незалежних змінних. Коефіцієнт детермінації вказує, наскільки отримані спостереження підтверджують обрану модель. Обчислюється як одиниця мінус частка непоясненої дисперсії в дисперсії залежності змінної.

Вибіковий коефіцієнт детермінації розраховують так:

$$R^2 = \left(1 - \frac{SSE/N}{SST/N}\right) \times 100\% = \left(1 - \frac{SSE}{SST}\right) \times 100\%,$$

що визначає, яку частину (у відсотках) часового ряду пояснює лінія регресії.

Для лінійної регресії  $SST = SSR + SSE$ , тому маємо

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \times 100\%.$$

Коефіцієнт детермінації має бути не менший ніж 50%. Моделі з коефіцієнтом детермінації, вищим за 80%, вважають достатньо хорошими.

Коефіцієнт детермінації має таку властивість: його значення збільшується (не зменшується) у разі додавання в модель нових незалежних змінних (параметрів у лінію регресії). Тому порівняння регресій з різною кількістю параметрів не коректне. У цьому разі використовують скорегований коефіцієнт детермінації, щоб кількість параметрів не впливалася на статистику  $R^2$ .

Для обчислення скорегованого коефіцієнта детермінації послуговуються незсуненими оцінками дисперсії:

$$R^{*2} = \left(1 - \frac{SSE/(N-m)}{SST/(N-1)}\right) * 100\% = \left(1 - \left(1 - R^2\right) \frac{N-1}{N-m}\right) * 100\% \leq R^2.$$

Скорегований коефіцієнт детермінації завжди менший ніж 100%.

Теоретично він може бути менший за нуль тільки в разі дуже малого значення  $R^2$  та великої кількості параметрів, що свідчить про неадекватний вибір лінії регресії.

Для лінійної моделі на основі коефіцієнта детермінації можна знайти коефіцієнт парної кореляції

$$r^2 = R^2 \rightarrow r = \text{corr}(t, u_i) = \sqrt{R^2}.$$

Значущість лінійної моделі збігається зі значущістю коефіцієнта парної кореляції. Для перевірки на значимість коефіцієнта парної кореляції обчислюють статистику

$$t = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}},$$

яка має  $t$ -розподіл Стьюдента з  $\nu = N - 2$  ступенями вільності.

Якщо  $|t| \leq t_{\alpha/2}$ , де  $t_{\alpha/2}$  – квантиль  $t$ -розподілу Стьюдента, то коефіцієнт парної кореляції є незначущий.

Оцінку значущості параметрів лінії регресії знаходять із дисперсійно-коваріаційної матриці (оскільки застосовують МНК).

**AIC** – інформаційний критерій Акаїке застосовують виключно для порівняння моделей з різною кількістю параметрів. Чим менше значення статистики, тим краща модель.

$$AIC = \frac{2m}{N} + \ln \frac{SSE}{N}.$$

**BIC** (або **SC**) – байесівський інформаційний критерій Шварца застосовують та інтерпретують, як і **AIC**.

$$BIC = \frac{m \ln N}{N} + \ln \frac{SSE}{N}.$$

**BIC** передбачає більше «покарання», ніж **AIC**, за включення зайвих параметрів у модель.

Для обчислення прогнозного значення досліджуваної величини застосовують обране рівняння регресії  $T(t, a_1, \dots, a_k)$ :

$$\hat{u}_{N+\tau} = T(N+\tau, a_1, \dots, a_k),$$

де  $\tau$  – крок прогнозу.

Інтервальний прогноз обчислюють за формулою

$$\hat{u}_{H,\sigma}(N+\tau) = \hat{u}_{N+\tau} \mp \sigma_e \cdot t_{\alpha/2, N-2} \sqrt{1 + \frac{1}{N} + \frac{(N+\tau-\bar{t})^2}{\sum_{t=1}^N (t-\bar{t})^2}},$$

де  $\sigma_e$  – середньоквадратичне відхилення похибок;  $\sigma_e = \sqrt{MSE}$ ;  $t_{\alpha/2, N-2}$  – квантиль  $t$ -розподілу Стьюдента з  $N - 2$  ступенями вільності та рівнем значущості  $\alpha/2$ .

#### Контрольні питання і завдання до теми

1. Дайте визначення часового ряду.
2. Дайте визначення тренда.
3. Які функції можуть бути застосовані для моделювання тренда?
4. Назвіть типи кривих зростання.
5. Яким чином етап згладжування ряду пов'язаний з визначенням тренда?
6. У чому полягає суть МНК?
7. Виконання яких умов потребує МНК?
8. Як обирають форму кривої зростання?
9. Як визначають оцінки параметрів кривих зростання із застосуванням МНК?
10. Які частини характерні для кривої Гомперця і логістичної кривої?
11. Поясніть поняття «значимість моделі тренда».
12. За яким критерієм обирають найбільш адекватну модель тренда?
13. За якими критеріями порівнюють різні моделі тренда?

## ТЕМА 5. ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНІСТЬ

Під час проведення регресійного аналізу із застосуванням МНК слід звертати увагу на умови, пов'язані з виконанням властивостей випадкових відхилень моделі.

Для отримання якісних оцінок необхідно слідкувати за виконанням передумов застосування МНК. Умови, за яких можливе застосування регресійного аналізу, сформульовані у вигляді теореми Гаусса–Маркова. Їх виконання забезпечує незсуненість, ефективність та спроможність оцінок параметрів лінії регресії.

Найчастіше порушується умова незмінності дисперсії  $D\{e_t\} = \sigma^2 = const$  (ймовірність того, що величина  $e_t$  набуде деякого конкретного значення однаакова для всіх спостережень). Цю умову називають **гомоскедастичністю** (однаковий розкид). **Гетероскедастичність** (різний розкид) має місце, якщо для різних спостережень імовірність того, що для  $i$ -го спостереження величина  $e_t$  набуде деякого конкретного значення, відрізняється від імовірності прийняття цього ж значення для  $j$ -го спостереження.

Пояснимо зміст явища гетероскедастичності. У ході аналізу вибікових даних для кожного  $i$ -го спостереження є єдине значення  $e_i$ . Ці дані – конкретна реалізація залежності змінної ( $u_t$ ) з випадковими відхиленнями  $e_t$ ,  $t=1, N$ . Інші вибікові дані спостереження за тим самим процесом або явищем будуть мати інші відхилення. До вибірки ці показники априорі могли набувати довільних значень на основі деяких імовірнісних розподілів. Одна з вимог до цих розподілів є рівність дисперсії: незважаючи на те, що за кожного конкретного спостереження випадкове відхилення може бути великим або малим, додатним або від'ємним, не повинно бути деякої априорної величини, яка спричиняє більшу помилку (відхилення) за одних спостережень і меншу – за інших.

Далі (рис. 5.1) наведено два приклади лінійної регресії.

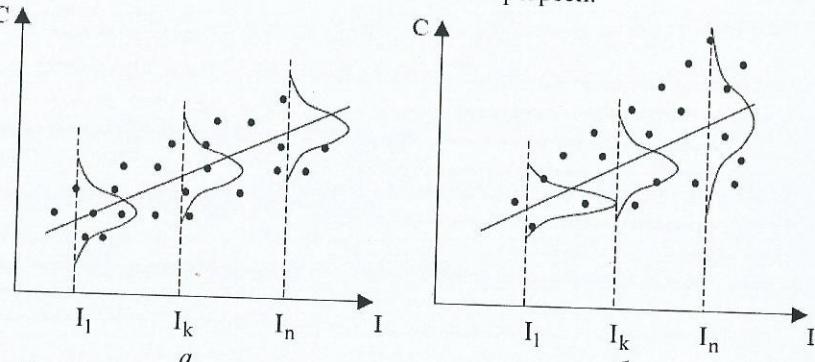


Рис. 5.1. Лінійна залежність обсягу споживання від доходу  $C = a_0 + a_1 I + e$

В обох випадках зі збільшенням доходу зростає середнє значення споживання. Проте на рис. 5.1, а дисперсія споживання залишається однаакова для різних рівнів доходу, а на рис. 5.1, б за аналогічної залежності дисперсія споживання не постійна, а зростає зі збільшенням доходу. Фактично це означає, що в другому випадку суб'екти з більшим доходом у середньому споживають більше, ніж суб'екти з меншим доходом, крім того, розкид у їх споживанні суттєвіший для більшого рівня доходу. Фактично люди з більшими доходами мають більший простір для їх розподілу. Реалістичність даної ситуації не викликає сумнівів.

#### Наслідки наявності гетероскедастичності

1. Оцінки параметрів лінії регресії, отримані за МНК, є незсунені, спроможні, але неефективні (не мають мінімальної дисперсії). Вони навіть не будуть асимптотично ефективні. Збільшення дисперсії оцінок знижує імовірність отримання максимально точних оцінок.

2. Хоч оцінки параметрів і незсунені, дисперсії оцінок і відповідні стандартні похибки цих оцінок будуть зсунені.

3. Усі висновки, отримані на основі  $t$ -та  $F$ -статистик, а також інтервали оцінки будуть ненадійні. Відповідно статистичні висновки можуть бути помилковими і привести до неправильних висновків щодо побудованої моделі. Так, якщо зсув дисперсії від'ємний, то оцінки стандартні похибки будуть менші ніж вони повинні бути, а відповідно  $t$ -статистики (критерій перевірки) – більші ніж насправді. Унаслідок цього статистично значущими можуть бути визнані коефіцієнти, які такими не є. І навпаки, якщо зсув додатний, то оцінки похибки будуть більші, ніж мають бути, а  $t$ -статистики – менші. Отже, можливі помилкові прийняття нуль-гіпотези.

Причину неефективності оцінок МНК за умови гетероскедастичності пояснимо на прикладі. Для кожного конкретного значення  $x_i$  випадково величини  $X$  змінна набуває значення  $y_i$  з деякої множини, яка має свій розподіл, різний у зв'язку з порушенням умови  $D\{e_t\} = \sigma^2 = const$  (рис. 5.2).

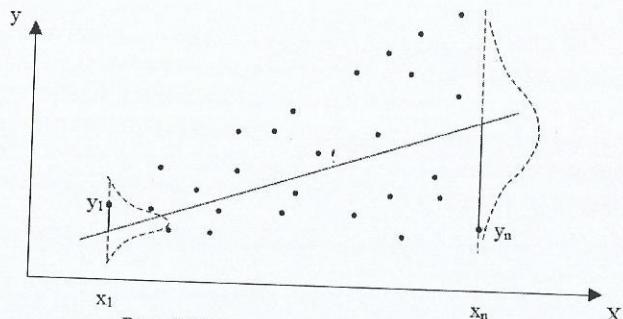


Рис. 5.2 Явище гетероскедастичності

За МНК мінімізується сума квадратів залишків

$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2.$$

Але в цьому випадку кожне конкретне значення  $e_i$  в даній сумі має одинакову вагу незалежно від того, отримано воно з розподілу з маленькою дисперсією чи з великою. Але точка, отримана з розподілу з меншою дисперсією, більш точно визначає напрям лінії регресії, тому вона повинна мати більшу вагу, ніж точка з розподілу з більшою дисперсією. Відповідно методи оцінювання, які враховують вагу точок спостереження, дозволяють отримати більш точні (ефективні) оцінки. Застосування ваги точок характерне для зваженого МНК.

Існує декілька методів пошуку наявності гетероскедастичності: другий критерій Фостера–Стюарта, критерій рангової кореляції Спірмена, критерій Парка, параметричний та непараметричний критерій Голдфелда–Квандта, критерій Глейзера.

Більшість критеріїв передбачає побудову лінії регресії і аналіз залишків.

## Способи оцінки наявності гетероскедастичності

### Візуальний.

Візуальний спосіб передбачає побудову графіка залежності квадратів залишків  $e_t^2$  від часу  $t$ . Залежно від їх розташування приймають відповідне рішення (рис. 5.3, 5.4).

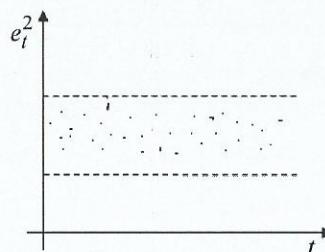


Рис. 5.3. Гомоскедастичність (значення розташовані в межах однієї області та рівномірно розподілені)

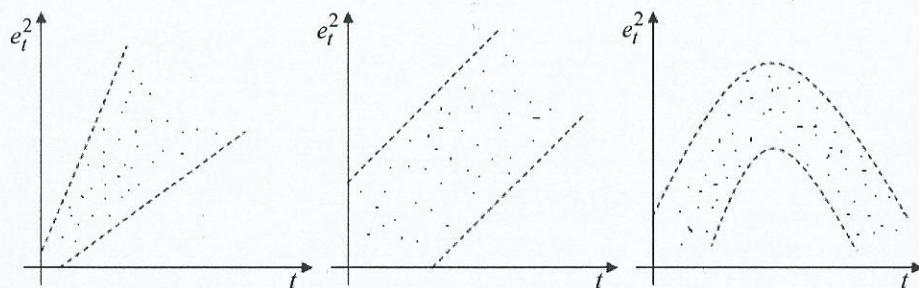


Рис. 5.4. Гетероскедастичність

### Критерій рангової кореляції Спірмена.

1) Будують лінію регресії  $T(t)$ .

2) Досліджують залежність похибок від часу:

$$\{e_t\} = \{u_t - T(t)\} = \{u_t - \hat{u}_t\}, t = \overline{1, N}.$$

3) Існування залежності визначають на основі рангового коефіцієнта кореляції Спірмена. Для цього обчислюють ранги  $r_{e_t}$  послідовності  $e_t$  та  $r_{t_t}$  послідовності  $t$ . Для часових рядів  $r_{t_t} = t$ .

4) Знаходять різницю між цими рангами:

$$\Delta t = r_{e_t} - r_{t_t} = r_{e_t} - t, t = \overline{1, N}.$$

5) Обчислюють коефіцієнт рангової кореляції Спірмена:

$$r_C = 1 - \frac{6 \sum_{t=1}^N \Delta t}{N(N^2 - 1)}.$$

6) Перевіряють гіпотезу  $H_0 : r_C = 0$  за альтернативної гіпотези  $H_1 : r_C \neq 0$ .

Якщо приймають основну гіпотезу ( $r_C$  незначущий), то роблять висновок про відсутність гетероскедастичності і наявність гомоскедастичності. Якщо  $r_C$  значущий, то має місце гетероскедастичність. Для перевірки цієї гіпотези обчислюють статистику

$$k = \frac{r_C \sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r_C^2}},$$

яка має розподіл Стьюдента з  $N-2$  ступенями вільності.

7) Якщо  $|k| \leq t_{\alpha/2, N-2}$ , то має місце гомоскедастичність.

Якщо  $k < -t_{\alpha/2, N-2}$ , то має місце тенденція зменшення дисперсії.

Якщо  $k > t_{\alpha/2, N-2}$ , то має місце тенденція до зростання дисперсії.

$t_{\alpha, v}$  – квантиль  $t$ -розподілу Стьюдента.

### Критерій Голдфелда–Квандта.

1) Розташовують дані в порядку зростання незалежної змінної, пропорційно якій змінюється стандартне відхилення випадкової компоненти. Для часового ряду ця змінна  $t$ , а дані вже впорядковані.

2) Із вихідних даних виключають  $d$  середніх спостережень.  $d$  зазвичай обирають у межах від  $\frac{1}{4}$  до  $\frac{1}{3}$  довжини часового ряду і таким чином, щоб кількість елементів, що залишилась, ділилась навпіл без остачі, тобто  $\frac{N-d}{2}$  було ціле (рис. 5.5).

3) Оцінюють дві регресії: одна відповідає меншим значенням  $t$ , її будують за першими  $\frac{N-d}{2}$  значеннями; друга відповідає більшим значенням  $t$ , її будують за останніми  $\frac{N-d}{2}$  спостереженнями.

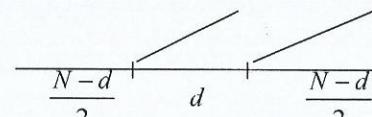


Рис. 5.5. Розподіл значень між групами

4) Обчислюють суму квадратів залишків для кожної регресії:

$$ESS_1 = \sum_{t=1}^{\frac{N-d}{2}} e_t^2, \quad ESS_2 = \sum_{t=\frac{N+d}{2}+1}^N e_t^2.$$

5) Обчислюють статистику:

$$F = \begin{cases} \frac{ESS_2}{ESS_1}, & \text{якщо } ESS_2 \geq ESS_1, \\ \frac{ESS_1}{ESS_2}, & \text{якщо } ESS_2 < ESS_1. \end{cases}$$

$F$  має  $F$ -розподіл Фішера з  $k_1 = k_2 = \frac{N-d}{2} - m - 1$  ступенями вільності;  $m$  – кількість параметрів лінії регресії.

6) Якщо  $\frac{1}{F_{\alpha, k_1, k_2}} < F < F_{\alpha, k_1, k_2}$ , то має місце гомоскедастичність.

Якщо  $F > F_{\alpha, k_1, k_2}$ , то має місце гетероскедастичність і тенденція до збільшення дисперсії.

Якщо  $F < \frac{1}{F_{\alpha, k_1, k_2}}$ , то має місце гетероскедастичність і тенденція до зменшення дисперсії.

Ці критерії незалежно від типу лінії регресії дозволяють оцінити наявність гетероскедастичності, але не передбачають способу її усунення.

#### Методи усунення ефекту гетероскедастичності

Дуже часто появу проблеми гетероскедастичності можна передбачити заздалегідь на основі знання характеру даних. У таких випадках на етапі специфікації моделі регресії можна вжити заходів щодо її усунення.

Для усунення ефекту гетероскедастичності застосовують зважений МНК (Weighted Least Squares, WLS), а також узагальнений МНК (Generalized Least Squares, GLS).

Як уже зазначено, у процесі відтворення лінії регресії бажано було б надати більшу вагу тим значенням, які знаходяться близче до лінії регресії, та меншу тим, що знаходяться на більшій відстані від лінії регресії.

Розглянемо зважений МНК для лінійної регресії:

$$u_t = a_0 + a_1 t + e_t.$$

Будемо вважати, що  $\sigma_t, t = \overline{1, N}$  відомі, тоді

$$\frac{u_t}{\sigma_t} = a_0 \frac{1}{\sigma_t} + a_1 \frac{t}{\sigma_t} + \frac{e_t}{\sigma_t}.$$

$$\sigma_t = \sqrt{D\{e_t\}} = \sqrt{\left(M\{e_t - M\{e_t\}\}\right)^2} = \sqrt{M\{e_t^2\}},$$

оскільки  $M\{e_t\} = 0$  за умовами теореми Гаусса–Маркова.

Можемо перетворити початкові значення  $t$  та  $u_t, t = \overline{1, N}$ , тоді отримаємо нову регресію:

$$u_t^* = a_0 z_t^* + a_1 t_t^* + e_t^*, \quad (5.1)$$

де  $z_t^* = 1/\sigma_t$ .

Для неї виконується

$$D\{e_t^*\} = D\left\{\frac{e_t}{\sigma_t}\right\} = \frac{1}{\sigma_t^2} D\{e_t\} = \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2} = 1 = \text{const.}$$

Таким чином, у результируючому часовому ряді всі дисперсії однакові та дорівнюють одиниці, тобто гетероскедастичність відсутня. Тому застосування МНК до перерахованих даних дозволить отримати параметри регресії, у яких будуть відсутні недоліки, обумовлені гетероскедастичністю.

Далі застосуємо МНК до перетвореного рівняння (5.1):

$$\sum_{t=1}^N \left( u_t^* - a_0 z_t^* - a_1 t_t^* \right)^2 = \sum_{t=1}^N \frac{1}{\sigma_t^2} (u_t - a_0 - a_1 t)^2 = \sum_{t=1}^N \frac{1}{\sigma_t^2} e_t^2 = \sum_{t=1}^N w_t e_t^2 \rightarrow \min_{a_0, a_1}.$$

Тобто необхідно мінімізувати зважену суму квадратів відхилень.

Для отримання розв'язку необхідно визначити  $\sigma_t$ . Будемо шукати  $\sigma_t$  наближено у вигляді деякої функції  $f(t)$ , побудованої за квадратами похибок лінії регресії, тобто за  $e_t^2$ . Наприклад,

$$f(t) = b_0 + b_1 t,$$

$$f(t) = b_0 + b_1 t^2,$$

$$f(t) = b_0 + \frac{b_1}{t},$$

$$f(t) = b_0 + b_1 \sqrt{t}.$$

Алгоритм усунення ефекту гетероскедастичності.

1) За величинами  $u_t$  побудувати лінію регресії.

2) Обчислити величини  $e_t$ .

3) За величинами  $e_t^2$  побудувати функцію  $f(t)$  за допомогою МНК, тобто ще одну лінію регресії.

4) Перетворити вихідні величини  $t$  та  $u_t$ , поділивши їх на значення  $\sigma_t = f(t)$ .

5) За допомогою МНК знайти значення коефіцієнтів лінії регресії (5.1).

#### Контрольні питання і завдання до теми

1. У чому полягає сутність гомо- та гетероскедастичності?
2. Як графічно можна відобразити випадки гетероскедастичності?
3. Які тести на виявлення гетероскедастичності вам відомі?
4. Укажіть, яке з наведених тверджень правильне.
  - а) Унаслідок наявності гетероскедастичності оцінки перестають бути ефективними та спроможними.
  - б) Оцінки та дисперсії оцінок залишаються незсуненими.
  - в) Висновки за t- і F-статистиками є ненадійні.
  - г) Другий критерій Форстера–Стюарта застосовують для перевірки наявності тенденцій зміни дисперсії.
  - д) Критерії перевірки наявності тенденцій зміни дисперсії залежать від обраної регресії.
  - е) Застосування зваженого МНК має обмежений характер, оскільки для цього необхідно знати дисперсії відхилень.

## ТЕМА 6. СЕЗОННІСТЬ

Періодичність явищ і процесів характерна для природних систем, а також для соціальних та економічних процесів. До сезонних належать явища, розвиток яких зумовлений закономірностями, які більш-менш регулярно повторюються в певні періоди часу.

Під **сезонністю** розуміють коливання показників, що систематично повторюються та пов'язані з особливостями зовнішніх умов у певний період. Коливання, обумовлені внутрішніми причинами явища, називають **циклічними (циклічністю)**. З позицій математичного апарату, яким послуговуються для аналізу коливань, різниця між сезонністю та циклічністю полягає лише в довжині періоду.

У разі застосування регресійного підходу динамічні ряди являють собою композицію чотирьох компонент: тренда, сезонної, циклічної та випадкової компоненти. Досить часто наявність циклічної компоненти не враховують, вважають, що вона дорівнює нулю (особливо для коротких рядів), у такому випадку динамічний ряд називають тренд-сезонним.

У сезонних часових рядах найчастіше спостерігають шаблон, який повторюється щогодини, щоденно, щотижня, щомісячно, щорічно. Тому зазвичай періоди дорівнюють 4, 7, 9, 12 або кратним цим числам.

Якщо ряд динаміки не містить чітко вираженої тенденції розвитку, тоді пошук сезонної складової можна здійснювати безпосередньо за емпіричними даними. Якщо має місце тенденція розвитку, тоді пошук сезонної складової зазвичай здійснюють за стаціонарним рядом. Для цього з початкового часового ряду  $\{u_t\}, t = \overline{1, N}$  вилучають тренд  $T_t = T(t)$ . Таким чином отримують новий ряд  $\{y_t\}, t = \overline{1, N}$ , для якого  $M\{y_t\} = 0$ .

Залежно від обраної форми подання часового ряду: адитивної (1.1), мультиплікативної (1.2) або змішаної (1.3), значення  $y_t$  обчислюють через  $y_t = u_t - T_t$  або  $y_t = u_t / T_t$  відповідно.

Для опису сезонних моделей існує два зовсім різні підходи: застосування індексів сезонності або гармонічний аналіз.

**Індекси сезонності** – це корегуючі коефіцієнти, що утворюють масив  $S_1, S_2, \dots, S_l$  довжиною  $l$ , де  $l$  – період. Сукупність індексів сезонності складає **сезонну хвилю**.

Для адитивної форми сезонність визначають за правилом

$$S_j = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} y_{j+kl}, \quad (6.1)$$

де  $j = \overline{1, l}$ ;  $m = \left[ \frac{N}{l} \right]$ ;  $p = m + 1$ , якщо  $ml \leq N$ , інакше  $p = m$ .

Наприклад, якщо довжина ряду  $N = 50$ , а період  $l = 12$ , то

$$S_1 = \frac{y_1 + y_{13} + y_{25} + y_{37} + y_{49}}{5}, \dots, S_{11} = \frac{y_{11} + y_{23} + y_{35} + y_{47}}{4}.$$

Сума всіх сезонних компонент для адитивної форми повинна дорівнювати нулю. Для цього отримані за формулою (6.1) індекси сезонності необхідно скорегувати таким чином:

$$S_j^{kop} = S_j - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l S_i.$$

Для ряду з трендом адитивну сезонність можна обчислити за однією з формул:

$$S_j = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} (u_{j+kl} - \bar{u}),$$

$$S_j = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_{j+kl} - \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \hat{u}_{j+kl}, \quad j = \overline{1, l}.$$

Прогноз будують за формулою

$$\hat{u}_{N+\tau} = T(N+\tau) + S_{(N+\tau) \bmod l}^{kop},$$

так,  $\hat{u}_{52} = T_{52} + S_4$ ,  $\hat{u}_{61} = T_{61} + S_1$ .

Для мультиплікативної форми сума індексів сезонності повинна дорівнювати періоду  $l$ , а їх середнє значення одиниці. Для цього отримані за формулою (6.1) індекси сезонності необхідно скорегувати за допомогою додаткового коефіцієнта

$$S_j^{kop} = \frac{l}{\sum_{i=1}^l S_i} S_j.$$

Для ряду з трендом мультиплікативну сезонність можна обчислити за формулою

$$S_j = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{u_{j+kl}}{\bar{u}}, \quad j = \overline{1, l}.$$

Мультиплікативні індекси сезонності застосовують, коли в разі зростання середнього рівня динаміки зростають і абсолютні відхилення, пов'язані із сезонністю.

В адитивних моделях індекси вимірюють в абсолютних величинах, а в мультиплікативних індекси показують відносні відхилення кожного значення від лінії тренда або середньої величини.

Прогноз будують за формулою

$$\hat{u}_{N+\tau} = T(N+\tau) \cdot S_{(N+\tau) \bmod l}^{kop}.$$

Зовсім інший підхід для визначення сезонної складової застосовують, коли коливання мають синусоїдальну форму, а саме гармонічний аналіз. У його основі лежить зображення циклічних змін ряду у вигляді сукупності гармонічних процесів коливань – рядів Фур'є.

Розкладання в ряд Фур'є здійснюють для стаціонарного ряду  $\{y_t\}, t = \overline{1, N}$  з вилученим трендом. Тренд може бути вилучено з ряду за допомогою МНК або

ковзного середнього. У разі застосування ковзного середнього слід обирати ширину вікна, яка дорівнює періоду, тоді значення тренда від цієї компоненти дорівнюватиме нульо, а тренд не буде містити сезонну складову.

Залишки  $\{u_t\}, t=1, \overline{N}$ , отримані після вилучення тренда, описують за допомогою розкладання в ряд Фур'є.  $\hat{y}_t$  записують у вигляді

$$\hat{y}_t = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos\left(t \frac{2\pi k}{l}\right) + B_k \sin\left(t \frac{2\pi k}{l}\right) \right), \quad (6.2)$$

де  $l$  – період коливань;  $A_0, A_k, B_k, k=1, \infty$  – коефіцієнти Фур'є; параметр  $k$  – гармоніка визначає  $k$ -ту криву ряду.

Коефіцієнти Фур'є обчислюють за формулами

$$A_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j,$$

$$A_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \cos\left(j \frac{2\pi k}{l}\right), \quad B_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \sin\left(j \frac{2\pi k}{l}\right).$$

Максимальна кількість гармонік, застосовуваних на практиці, дорівнює

$$k_{\max} = \left[ \frac{N}{2} \right].$$

Період  $l$  визначають, наприклад, за виглядом корелограми, побудованої за рядом  $\{y_t\}, t=1, \overline{N}$  з вилученим трендом, або за допомогою амплітудного спектра.

#### Контрольні питання і завдання до теми

1. Дайте визначення сезонності. Чим циклічність відрізняється від сезонності?
2. Які існують форми подання динамічних рядів?
3. Дайте визначення індексів сезонності.
4. Які властивості мають адитивні та мультиплікативні індекси сезонності?
5. У яких величинах вимірюють індекси сезонності?
6. За яким рядом обчислюють сезонну компоненту динамічного ряду?
7. У яких випадках застосовують гармонічний аналіз?
8. Що собою являє гармоніка? За яким принципом обирають кількість гармонік?

## ТЕМА 7. АВТОКОРЕЛЯЦІЯ

Будь-яка модель явища чи процесу є неточна, що обумовлює наявність залишків – відхилень теоретичних значень ряду від емпіричних. Неможливо без ускладнення моделі врахувати всі фактори, які впливають на залежність змінної. Впливу цих неврахованих факторів назнає випадкова складова ряду  $\xi_t$  (1.1).

Після знаходження тренда та сезонності можна обчислити ряд залишків:

$$e_t = u_t - T(t) - S(t), t=1, \overline{N}.$$

Одна з передумов застосування МНК є незалежність ряду залишків, тобто  $\text{cov}(e_i, e_j) = 0, i \neq j$ . Якщо ця умова не виконується, то роблять висновок про наявність залежності між залишками. Залежність між послідовними рівнями ряду залишків, взятих із зсувом, називають **автокореляцією** ряду залишків (похибок). Існує додатна та від'ємна автокореляція.

**Додатна автокореляція** передбачає, що за додатним значенням похибки у момент часу  $t$  наймовірніше буде йти додатне значення в момент часу  $t+1$ . За додатної автокореляції лінія, що з'єднує рівні ряду, частіше перетинає лінію регресії, ніж за додатної.

**Від'ємна автокореляція** означає, що за додатним значенням похибки наймовірніше буде від'ємне значення, а за від'ємним – додатне. За від'ємної автокореляції лінія, що з'єднує рівні ряду, частіше перетинає лінію регресії, ніж за додатної.

#### Моделі опису залишків ряду

1. Дистрибутивно-лагова модель:

$$e_t = f(t) + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots$$

2. Автокореляційна (авторегресійна) модель:

$$e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \alpha_2 e_{t-2} + \dots + \varepsilon_t,$$

де  $\varepsilon_t$  – випадкова величина з нульовим середнім. Якщо  $e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \varepsilon_t$ , то це автокореляційна модель 1-го порядку, якщо  $e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \alpha_2 e_{t-2} + \dots + \alpha_m e_{t-m} + \varepsilon_t$  – автокореляційна модель  $m$ -го порядку. Коефіцієнти  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  називають коефіцієнтами автокореляції або коефіцієнтами авторегресії.

Наявність автокореляції випадкових залишків регресійної моделі призводить до зменшення якості МНК-оцінок параметрів регресії, а також завищення статистичних характеристик, за якими перевіряють якість моделі. Тобто відбувається штучне підвищення якості моделі щодо її дійсного рівня точності. Тому перевірка автокореляції випадкових залишків є необхідною процедурою перевірки регресійної моделі.

Існує декілька методів перевірки наявності автокореляції. Це насамперед візуальний перегляд залишків та дослідження корелограми (див. тему 2), побудованої за рядом залишків. Найчастіше у випадкових залишках перевіряють наявність авторегресійного процесу першого порядку. Для перевірки нульової гіпотези про рівність коефіцієнта автокореляції нулю застосовують критерій Дарбіна–Уотсона. У разі лагової залежності змінної в моделі можна застосовувати асимптотичний  $h$ -тест Дарбіна. Для перевірки наявності автокореляції випадкових залишків більшого ступеня послуговуються універсальним асимптотичним  $LM$ -тестом Броїша–Годфрі. Крім того, цей тест не потребує виконання умови про нормальній розподіл залишків. Для перевірки сумісності гіпотези про рівність нулю всіх коефіцієнтів автокореляції до заданого ступеня застосовують  $Q$ -тест Бокса–Пірса або  $Q$ -тест Льюнга–Бокса.

### Критерій Дарбіна–Уотсона

Критерій Дарбіна–Уотсона застосовують для перевірки наявності автокореляції першого порядку. Цей метод заснований на статистиці Дарбіна–Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^N (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^N e_t^2}.$$

Вона тісно пов'язана з вибірковим коефіцієнтом кореляції  $\text{corr}(e_t, e_{t-1})$ :

$$DW \approx 2(1 - \text{corr}(e_t, e_{t-1})).$$

Таким чином, значення  $DW$  належить відрізку  $[0; 4]$ . Висновку про наявність чи відсутність автокореляції доходять залежно від того, у яку частину відрізка потрапило значення  $DW$  (рис. 7.1).

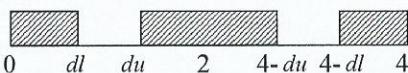


Рис. 7.1. Зони прийняття рішень критерію Дарбіна–Уотсона

На відрізку  $[du; 4 - du]$  автокореляція відсутня; на відрізку  $[0; dl]$  вона додатна; на відрізку  $[4 - dl; 4]$  – від’ємна; відрізки  $[dl; du]$ ,  $[4 - du; 4 - dl]$  – області невизначеності. На практиці, якщо  $DW$  потрапляє в зону невизначеності, приймають рішення про наявність автокореляції.

Значення  $dl$ ,  $du$  залежать від довжини ряду (табл. 7.1).

Значення величин  $dl$ ,  $du$  для критерію Дарбіна–Уотсона

$N$	$dl$	$du$
6	0,610	1,100
10	0,879	1,320
20	1,201	1,411
40	1,442	1,544
75	1,598	1,652
100	1,654	1,694
150	1,720	1,746
200	1,758	1,778

У разі застосування критерію Дарбіна–Уотсона необхідно враховувати такі обмеження:

- 1) критерій Дарбіна–Уотсона прийнятний лише для тих моделей, які містять вільний член;
- 2) випадкові відхилення  $\varepsilon_t$  визначають за ітераційною схемою  $\varepsilon_t = \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + v_t$ , яку називають авторегресійною схемою першого порядку;
- 3) статистичні дані не повинні містити пропусків у спостереженнях.

Для будь-якого значення  $m$  теоретична кореляційна матриця послідовності  $\{u_t\}$  – це матриця Лорана. Коефіцієнти  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$  – коефіцієнти корелограми. Матриця Лорана (додатно визначена), тому визначник будь-якого мінора, розташованого на головній діагоналі, не може бути від’ємний. Із додатної визначеності матриці Лорана випливають умови сумісності коефіцієнтів автокореляції.

$$L_{m-1} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{m-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{m-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m-1} & \rho_{m-2} & \rho_{m-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|L_1| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \rho_1^2 \Rightarrow |\rho_1| \leq 1, \text{ оскільки } |L_1| \geq 0. \text{ Тривіальний випадок.}$$

$$|L_2| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\rho_1^2\rho_2 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2 = 1 - \rho_2^2 + 2\rho_1^2(1 - \rho_2) = \\ = (1 - \rho_2)(1 + \rho_2 - 2\rho_1^2) \geq 0,$$

тоді  $1 - \rho_2 \geq 0$ ,  $\rho_2 \leq 1$ ,  $1 + \rho_2 - 2\rho_1^2 \geq 0$ ,  $\rho_2 \geq 2\rho_1^2 - 1$ .

Висновок: коефіцієнти кореляції є залежні.

Авторегресійну модель першого порядку  $m = 1$ ,  $e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \varepsilon_t$  називають марківською. Модель другого порядку  $m = 2$ ,  $e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \alpha_2 e_{t-2} + \varepsilon_t$  – це модель Юла. Для зручності перепишемо авторегресійну модель у вигляді

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^m \alpha_j e_{t-j}, \quad \alpha_j = -\alpha_{-j}, \quad \alpha_0 = 1. \quad (7.1)$$

Якщо помножити рівність (7.1) на  $e_{t-k}$  та обчислити математичне сподівання, то отримаємо систему рівнянь Юла–Уокера:

$$\rho_k + \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2} + \dots + \alpha_m \rho_{k-m} = 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (7.2)$$

Коефіцієнти автокореляції  $\alpha_j$  знаходять із системи (7.2).

Оскільки для коефіцієнтів кореляції виконується умова  $\rho_j = \rho_{-j}$ , то систему (7.2) можна записати у такому вигляді:

$$\rho_1 + \alpha_1 \rho_0 + \alpha_2 \rho_1 + \dots + \alpha_m \rho_{m-1} = 0, \quad \rho_0 = 1,$$

$$\rho_2 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_0 + \dots + \alpha_m \rho_{m-1} = 0,$$

...

Між коефіцієнтами  $\alpha_j$  та  $\alpha'_j$  існує залежність  $\alpha_j = \alpha'_j$ .

Для моделі Маркова

$$e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^1 \alpha_j e_{t-j},$$

$$\rho_1 + \alpha_1 = 0,$$

$$\alpha_1 = -\rho_1,$$

$$\alpha_1 = \rho_1.$$

Для моделі Юла

$$e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \alpha_2 e_{t-2} + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^2 \alpha_j e_{t-j},$$

$$\begin{cases} \rho_1 + \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 = 0, \\ \rho_2 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Крамера:

$$\alpha_1 = -\alpha_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}, \quad \alpha_2 = -\alpha_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}.$$

Модель Юла не може бути застосована, коли  $|\rho_1| = 1$ .

Прогнозні значення ряду авторегресії обчислюють за формулою

$$e_{N+\tau} = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_{N+\tau-j}.$$

При цьому перше прогнозне значення завжди обчислюють лише за значеннями початкового ряду, для наступних використовують попередні прогнозні значення. Ці авторегресійні моделі також застосовують до вихідного ряду, а не тільки до ряду залишків. Загальний прогноз, який будують на основі регресійного аналізу, залежить від обраної форми подання динамічного ряду (1.1). Його обчислюють за однією з формул:

$$\hat{u}_{N+\tau} = T_{N+\tau} + S_{N+\tau} + e_{N+\tau},$$

$$\hat{u}_{N+\tau} = T_{N+\tau} \cdot S_{N+\tau} \cdot e_{N+\tau},$$

$$\hat{u}_{N+\tau} = T_{N+\tau} \cdot S_{N+\tau} + e_{N+\tau}.$$

Основна причина наявності випадкового члена в моделях є неповна інформація про причини та взаємозв'язки, що впливають на значення залежної змінної. Тому властивості випадкових відхилень, у тому числі й автокореляцію, у першу чергу обумовлюють вибір формули залежності та склад пояснювальних змінних. Найчастіше автокореляція спричинена неправильною специфікацією моделі, тому для її усунення необхідно насамперед спробувати скорегувати саму модель. Вона може мати місце через відсутність у моделі деякої важливої пояснювальної змінної. Необхідно визначити даний фактор і врахувати його в рівнянні регресії. Також можна спробувати змінити формулу залежності. Але якщо це не допомагає виправити ситуацію, то, можливо, автокореляція пов'язана з деякими внутрішніми властивостями ряду  $e_t$ , тому доцільно скористатися авторегресійним перетворенням для її вилучення.

## Вилучення автокореляції

Розглядатимемо процедуру виключення автокореляції першого порядку з лінійним трендом.

Спостереження в момент часу  $t$  та  $t-1$  обчислюють відповідно до формул

$$\hat{u}_t = a_0 + a_1 t + e_t, \quad (7.3)$$

$$\hat{u}_{t-1} = a_0 + a_1(t-1) + e_{t-1}. \quad (7.4)$$

Будемо вважати, що на випадкові відхилення впливає авторегресія першого порядку:

$$\varepsilon_t = \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + v_t,$$

де  $v_t, t = 2, \dots, N$  – випадкові відхилення, які задовольняють умови теореми Гаусса–Маркова, а коефіцієнт  $\alpha_1$  відомий.

Помножимо обидві частини рівності (7.4) на  $\alpha_1$  та отримаємо

$$\alpha_1 \hat{u}_{t-1} = \alpha_1 a_0 + \alpha_1 \alpha_1 (t-1) + \alpha_1 e_{t-1}. \quad (7.5)$$

Віднімемо від рівності (7.3) рівність (7.5):

$$\hat{u}_t - \alpha_1 \hat{u}_{t-1} = a_0 (1 - \alpha_1) + a_1 (t - \alpha_1 (t-1)) + e_t - \alpha_1 e_{t-1}.$$

Позначимо  $\hat{u}_t^* = \hat{u}_t - \alpha_1 \hat{u}_{t-1}$ ,  $a_0^* = a_0 (1 - \alpha_1)$ ,  $t^* = t - \alpha_1 (t-1)$ ,  $v_t = e_t - \alpha_1 e_{t-1}$ , одержимо

$$\hat{u}_t^* = a_0^* + a_1 t^* + v_t, \quad (7.6)$$

для  $v_t$  вже виконуються умови теореми Гаусса–Маркова, тому оцінки  $a_0^*$ ,  $a_1$  будуть мати властивості ефективних незсунихених оцінок.

Таким чином, якщо нам буде відоме значення коефіцієнта автокореляції  $\alpha_1$ , то обчисливши  $\hat{u}_t^*$  та  $t^*$ , зможемо застосувати МНК до (7.6) і отримати оцінки параметрів регресії, не пов'язаних із проблемою автокореляції.

Авторегресійне перетворення першого порядку може бути узагальнено на перетворення більш високих порядків.

Методів для оцінювання  $\alpha_1$  декілька. Усі вони мають ітеративний характер.

**Визначення  $\alpha_1$  на основі статистики Дарбіна–Уотсона.** Оскільки статистика Дарбіна–Уотсона тісно пов'язана з коефіцієнтом кореляції

$$DW \approx 2(1 - \text{corr}(e_t, e_{t-1})),$$

як оцінку коефіцієнта  $\alpha_1$  можна взяти коефіцієнт  $r = \text{corr}(e_t, e_{t-1})$ , який дорівнює

$$r \approx 1 - \frac{DW}{2}.$$

Даний метод дає позитивні результати за великої кількості спостережень.

**Процедура Кохрана–Орката.** Початковий етап процедури Кохрана–Орката є застосування МНК до вихідного часового ряду, визначення параметрів тренда та знаходження ряду залишків  $e_t, t = \overline{1, N}$ .

1. Як наближене значення  $\alpha_1$  візьмемо його МНК-оцінку, отриману для залежності

$$e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{t=2}^N e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^N e_{t-1}^2}.$$

2. Застосовуючи перетворення (7.6), знаходимо МНК-оцінки параметрів трендової моделі.

3. Будуємо ряд залишків  $e_t$ . Якщо в ряді залишків не буде автокореляції або параметри на цьому та попередньому кроках будуть однакові із заданою точністю, то процедура припиняється, у противному разі повторюємо процедуру з першого кроку.

Недоліком процедури Кохрана–Оркатта є можливість потрапити в локальний мінімум.

**Процедура Хілдретта–Лу.** Із відрізка  $[-1; 1]$  – множини можливих значень коефіцієнта  $\alpha_1$  – послідовно обирають значення  $\alpha_1$  з деяким кроком. Для кожного з них знаходять оцінки параметрів  $\alpha_0$  та  $\alpha_1$  моделі (7.6). Фіксують те значення  $\alpha_1$ , за якого  $\sum_{t=1}^N e_t^2$  мінімальна. Поблизу зафіксованої точки  $\alpha_1$  обирають більшу дрібну сітку та все повторюють. Перевага даного методу полягає у відсутності ймовірності потрапляння в локальний мінімум.

#### Контрольні питання і завдання до теми

1. Дайте визначення автокореляції.
2. Про що свідчить додатна та від’ємна автокореляція?
3. Які існують методи перевірки на наявність автокореляції?
4. Які ви знаєте моделі опису залишків часового ряду?
5. Назвіть методи вилучення автокореляції.

## ТЕМА 8. АДАПТИВНІ МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ

В адаптивних методах часовий ряд подають у вигляді функції

$$u_t = f(a_{1t}, a_{2t}, \dots, a_{pt}, t) + e_t,$$

під час побудови якої відслідковують величину відхилень прогнозних значень від значень вихідного ряду.

Адаптивні методи передбачають виконання двох етапів: згладжування ряду та прогнозування. У той же час сам процес згладжування – це послідовне обчислення прогнозного значення на 1 крок вперед з урахуванням відхилення вже побудованого прогнозу від попередньої частини ряду.

Адаптивні методи застосовують до аналізу коротких динамічних рядів. Регресійний підхід потребує значно більших математичних обчислень та накладає обмеження на довжину ряду (середні та довгі).

Усі адаптивні методи ґрунтуються на принципі експоненціального згладжування, тобто враховують «старіння» інформації.

## Експоненціальне прогнозування

Розглянемо обчислювальну схему прогнозування методом експоненціального згладжування, яку розробив Р.Браун. Ідея методу полягає в тому, що часовий ряд згладжується шляхом зваженого ковзного середнього з експоненціальними ваговими коефіцієнтами, що дозволяє здійснювати короткострокове прогнозування.

Будемо вважати, що часовий ряд може бути описано поліномом

$$u_t = \sum_{i=0}^p \frac{a_i}{i!} p^i + \varepsilon_t, \quad (8.1)$$

що дозволяє, розкладавши функцію  $u_{t+l}$  у ряд Тейлора, обчислити прогнозне значення в момент  $t+l$ :

$$\hat{u}_{t+l} = u_t^{(0)} + l u_t^{(1)} + \frac{l^2}{2!} u_t^{(2)} + \dots + \frac{l^k}{k!} u_t^{(k)} + \dots + \frac{l^p}{p!} u_t^{(p)}. \quad (8.2)$$

Вчені Р.Браун та Р.Маєр довели, що будь-яку  $k$ -ту похідну ( $k = \overline{0, p}$ ) рівняння (8.2) можна представити лінійною комбінацією експоненціальних середніх до  $(p+1)$ -го порядку:

$$S_t^{(k)}(u) = \alpha S_t^{(k-1)}(u) + (1-\alpha) S_{t-1}^{(k)}(u), \quad k = \overline{1, p}, \quad (8.3)$$

де

$$S_t^{(1)}(u) = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i u_{t-i} + (1-\alpha)^t u_0, \quad (8.4)$$

$\alpha$  – параметр згладжування ( $0 < \alpha < 1$ ).

Із виразів (8.3), (8.4) отримано рівняння

$$\begin{aligned} S_t^{(1)}(u) &= \alpha u_t + (1-\alpha) S_{t-1}^{(1)}(u), \\ S_t^{(2)}(u) &= \alpha S_t^{(1)}(u) + (1-\alpha) S_{t-1}^{(2)}(u), \\ &\dots, \\ S_t^{(k)}(u) &= \alpha S_t^{(k-1)}(u) + (1-\alpha) S_{t-1}^{(k)}(u), \\ &\dots, \\ S_t^{(n)}(u) &= \alpha S_t^{(n-1)}(u) + (1-\alpha) S_{t-1}^{(n)}(u). \end{aligned} \quad (8.5)$$

На підставі рівнянь (8.5) сформулюємо обчислювальні схеми прогнозування часових рядів із типовими трендами.

Часовий ряд, визначений адитивним трендом:

$$u_t = a_0 + \varepsilon_t,$$

де  $a_0 = \text{const}$ ;  $\varepsilon_t \approx N(0, \sigma)$  – похибка, встановлена за нижчезаданими оцінками.

Із першого рівняння (8.5), з урахуванням  $S_t^{(1)}(u) = S_t(u)$  одержують

$$S_t(u) = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i u_{t-i} = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i (a_0 + \varepsilon_{t-i}) = \hat{a}_0 + \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i \varepsilon_{t-i}, \quad (8.6)$$

де  $\hat{a}_0 = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^t u_i$ ;  $t = 1, 2, \dots$ ;  $\varepsilon_t = u_t - \hat{a}_0(t-1)$ .

Враховуючи, що

$$E\{S_t\} = \hat{a}_0, \quad D\{S_t\} = E\left\{\left(\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i \varepsilon_{t-i}\right)^2\right\} = \alpha^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^{2i} \sigma^2 = \frac{\alpha}{2-\alpha} \sigma^2, \quad (8.7)$$

призначають довірчий інтервал на  $S_t(x)$

$$\hat{a}_0 - u_{\alpha/2} \sigma \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \leq S_t(u) \leq \hat{a}_0 + u_{\alpha/2} \sigma \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}}, \quad (8.8)$$

де  $u_{\alpha/2}$  – квантиль нормального розподілу за рівня значущості  $\alpha$ .

Прогнозна модель на  $\tau$  кроків уперед має вигляд

$$\hat{u}_{t+\tau} = \hat{a}_{0,t} = \alpha u_t + (1-\alpha) \hat{a}_0(t-1)$$

з довірчою оцінкою (8.8).

Для лінійно-адитивного тренда

$$u_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t$$

коєфіцієнти  $a_0$ ,  $a_1$  обчислюють через  $S_t^{(1)}(u)$ ,  $S_t^{(2)}(u)$  із рівнянь

$$S_t^{(1)}(u) = \hat{a}_0 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{a}_1, \quad S_t^{(2)}(u) = \hat{a}_0 + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \hat{a}_1 \quad (8.9)$$

з початковими умовами  $S_0^{(1)}(u) = a_0 + \frac{1-\alpha}{\alpha} a_1$ ,  $S_0^{(2)}(u) = \hat{a}_0 + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \hat{a}_1$ .

Із розв'язку системи (8.9) отримують

$$\hat{a}_0 = 2S_t^{(1)}(u) - S_t^{(2)}(u), \quad \hat{a}_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} (S_t^{(1)}(u) - S_t^{(2)}(u)). \quad (8.10)$$

Враховуючи, що

$S_1(t) = \alpha u_t + (1-\alpha) S_1(t-1)$ ,  $S_2(t) = \alpha^2 u_t + \alpha(1-\alpha) S_1(t-1) + (1-\alpha) S_2(t-1)$ ,  
на підставі (8.10) знаходять

$$\begin{aligned} a_0(t) &= \left(1 - (1-\alpha)^2\right) u_t + (1-\alpha)^2 a_0(t-1) + (1-\alpha)^2 a_1(t-1), \\ a_1(t) &= \alpha^2 u_t - \alpha^2 a_1(t-1) - \alpha^2 a_0(t-1) + a_1(t-1) \end{aligned} \quad (8.11)$$

або

$$a_0(t) = a_0(t-1) + a_1(t-1) + \left(1 - (1-\alpha)^2\right) \varepsilon_t, \quad a_1(t) = a_1(t-1) + \alpha^2 \varepsilon_t, \quad (8.12)$$

де  $\varepsilon_t = u_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 t$ .

Прогноз на один крок уперед визначають так:

$$a_0(t) + a_1(t) = a_0(t-1) + 2a_1(t-1) - 2\alpha(1-\alpha)\varepsilon_t.$$

Вирази (8.11), (8.12) дозволяють наново обчислювати оцінки параметрів лінійно-адитивного тренда, здійснюючи прогноз на  $\tau$  кроків уперед:

$$\hat{u}_{t+\tau} = \hat{a}_0(t+\tau) + \tau \hat{a}_1(t+\tau), \quad \tau = 0, 1, 2, \dots$$

або

$$\hat{u}_{t+\tau} = \left(2 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \tau\right) S_t^{(1)}(u) - \left(1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} \tau\right) S_t^{(2)}(u).$$

Похибку прогнозу, отже, і довірчі інтервали на лінійний тренд, оцінюють величиною  $\sigma_{t+\tau}$ , що дорівнює

$$\sigma_{t+\tau}^2 = \sigma^2 \frac{\alpha}{(2-\alpha)^3} \left(1 + 4(1-\alpha) + 5(1-\alpha)^2 + 2\alpha(4-3\alpha)\tau + 2\alpha^2\tau^2\right). \quad (8.13)$$

У випадку квадратично-адитивного тренда

$$u_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \varepsilon_t$$

з виразів (8.5) випливає система рівнянь

$$\begin{aligned} S_t^{(1)}(u) &= \hat{a}_0 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{a}_1 + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2\alpha^2} \hat{a}_2, \\ S_t^{(2)}(u) &= \hat{a}_0 - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \hat{a}_1 + \frac{(1-\alpha)(3-2\alpha)}{\alpha^2} \hat{a}_2, \\ S_t^{(3)}(u) &= \hat{a}_0 - \frac{3(1-\alpha)}{\alpha} \hat{a}_1 + \frac{3(1-\alpha)(4-3\alpha)}{2\alpha^2} \hat{a}_2 \end{aligned} \quad (8.14)$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned} S_0^{(1)}(u) &= a_0 - \frac{1-\alpha}{\alpha} a_1 + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2\alpha^2} a_2, \\ S_0^{(2)}(u) &= a_0 - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} a_1 + \frac{(1-\alpha)(3-2\alpha)}{\alpha^2} a_2, \\ S_0^{(3)}(u) &= a_0 - \frac{3(1-\alpha)}{\alpha} a_1 + \frac{3(1-\alpha)(4-3\alpha)}{2\alpha^2} a_2. \end{aligned}$$

Із системи (8.14) знаходять оцінки коефіцієнтів

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= 3S_t^{(1)}(u) - 3S_t^{(2)}(u) + S_t^{(3)}(u), \\ \hat{a}_1 &= \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} \left( (6-5\alpha) S_t^{(1)}(u) - 2(5-4\alpha) S_t^{(2)}(u) + (4-3\alpha) S_t^{(3)}(u) \right), \\ \hat{a}_2 &= \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \left( S_t^{(1)}(u) - 2S_t^{(2)}(u) + S_t^{(3)}(u) \right). \end{aligned} \quad (8.15)$$

При цьому,

$$\begin{aligned} a_0(t) &= a_0(t-1) + a_1(t-1) + a_2(t-1) + \left(1 - (1-\alpha)^2\right) \varepsilon_t, \\ a_1(t) &= a_1(t-1) + 2a_2(t-1) + \frac{3}{2} \alpha \left(1 - (1-\alpha)^2\right) \varepsilon_t, \\ a_2(t) &= a_2(t-1) + \frac{1}{2} \alpha^2 \varepsilon_t. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Для квадратично-адитивного тренда прогнозне значення на  $\tau$  кроків уперед обчислюють за виразом

$$\hat{u}_{t+\tau} = \hat{a}_0(t+\tau) + \hat{a}_1(t+\tau)\tau + \hat{a}_2(t+\tau)\tau^2 = \frac{(6(1-\alpha)^2 + (6-5\alpha)\alpha\tau + \alpha^2\tau^2) S_t^{(1)}(u)}{2(1-\alpha)^2} -$$

$$- \frac{(6(1-\alpha)^2 + 2(5-4\alpha)\alpha\tau + 2\alpha^2\tau^2) S_t^{(2)}(u)}{2(1-\alpha)^2} + \frac{(2(1-\alpha)^2 + (4-3\alpha)\alpha\tau + \alpha^2\tau^2) S_t^{(3)}(u)}{2(1-\alpha)^2}$$

з оцінкою похибки прогнозу через  $\sigma_{t+\tau}$ , що дорівнює

### Модель Брауна

$\beta_1 = 1 - \beta^2$ ,  $\beta_2 = 1$ , де  $\beta$  – коефіцієнт дисконтування даних, що визначає їх знецінення за одиницю часу;  $\beta \in [0; 1]$ ,  $\beta_1$  – коефіцієнт згладжування.

$$\begin{cases} \hat{a}_{1,t} = \hat{u}_t + (1 - \beta^2) e_t, \\ \hat{a}_{2,t} = \hat{a}_{2,t-1} + (1 - \beta^2) e_t. \end{cases}$$

Довірчі інтервали на прогнозні значення для моделей Тейла–Вейджа та Брауна обчислюють за формулами

$$u_{N+\tau_{\theta,u}} = \hat{u}_{N+\tau} \pm U(\tau),$$

де  $U(\tau) = \sigma_e \sqrt{1 + \beta_1(1.25 + \beta_1 \tau)}$ ,  $\sigma_e^2 = \sum_{t=1}^N (u_t - \hat{u}_t)^2 = \sum_{t=1}^N e_t^2$ .

**Модель Бокса–Дженкінса** має три коефіцієнти згладжування:  $0 < \beta_1, \beta_2, \beta_3 < 1$ .

$$\begin{cases} \hat{a}_{1,t} = \hat{u}_t + \beta_1 e_t + \beta_3 (e_t - e_{t-1}), \\ \hat{a}_{2,t} = \hat{a}_{2,t-1} + \beta_1 \beta_2 e_t. \end{cases}$$

Якщо  $\beta_3 = 0$ , модель збігається з моделлю Тейла–Вейджа.

### Сезонні адаптивні моделі прогнозування

Сезонні коливання можуть бути описані моделями ковзного середнього двох типів:

1) мультиплікативною –  $u_t = m_t \cdot f_t \cdot \varepsilon_t$ ;

2) адитивною –  $u_t = m_t + f_t + \varepsilon_t$ ,

де  $m_t$  – гладка складова тренда;  $f_t$ ,  $g_t$  – сезонні компоненти;  $\varepsilon_t$  – похибка, що задовільняє умови теореми Гаусса–Маркова.

Нижче (табл. 8.1) описано сезонні моделі з урахуванням різних видів тренда та форм сезонності.

Таблиця 8.1

#### Зведені таблиця обчислення прогнозних значень

$\hat{u}_{t+\tau} =$	Сезонність відсутня	Адитивна сезонність	Мультиплікативна сезонність
Зростання немає	$\hat{a}_{1,t}$	$\hat{a}_{1,t} + \hat{g}_{t+\tau-l}$	$\hat{a}_{1,t} \cdot \hat{f}_{t+\tau-l}$
Лінійне зростання	$\hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{2,t} \cdot \tau$	$\hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{2,t} \cdot \tau + \hat{g}_{t+\tau-l}$	$(\hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{2,t} \cdot \tau) \cdot \hat{f}_{t+\tau-l}$
Експоненціальне зростання	$\hat{a}_{1,t} \cdot \hat{\eta}_{1,t}^\tau$	$\hat{a}_{1,t} \cdot \hat{\eta}_{1,t}^\tau + \hat{g}_{t+\tau-l}$	$(\hat{a}_{1,t} \cdot \hat{\eta}_{1,t}^\tau) \cdot \hat{f}_{t+\tau-l}$ , $\eta_{1,0} = \frac{u_2}{u_1}$

У наведених моделях сезонність – це масиви довжиною  $l$   $g_{1,\dots,l}, g_l, f_{1,\dots,l}, f_l$ , де  $l$  – період сезонності. Елементи цих масивів обчислюють на кожному кроці, як і коефіцієнти моделей. Перед згладжуванням їм необхідно присвоїти початкові значення.

Для мультиплікативної форми  $\hat{f}_i = 1$  або  $\hat{f}_i = \frac{u_i}{\bar{u}}$ ,  $i = \overline{1, l}$ . Для адитивної

форми  $\hat{g}_i = 0$  або  $\hat{g}_i = u_i - \bar{u}$ ,  $i = \overline{1, l}$ .

### Модель лінійного зростання з мультиплікативною сезонністю (модель Уінтерса)

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1,t} &= \beta_1 \frac{u_t}{\hat{f}_{t-l}} + (1 - \beta_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}), \\ \hat{a}_{2,t} &= \beta_2 (\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1 - \beta_2) \hat{a}_{2,t-1}, \\ \hat{f}_t &= \beta_3 \frac{u_t}{\hat{a}_{1,t}} + (1 - \beta_3) \hat{f}_{t-l}. \end{aligned}$$

Індекс сезонного компонента  $\hat{f}_t$  беруть як залишок від його ділення на період сезонності  $l$ .

### Експоненціальне зростання з мультиплікативною сезонністю

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1,t} &= \beta_1 \frac{u_t}{\hat{f}_{t-l}} + (1 - \beta_1)(\hat{a}_{1,t-1} \cdot \hat{\eta}_{t-1}), \\ \hat{\eta}_t &= \beta_2 \frac{\hat{a}_{1,t}}{\hat{a}_{1,t-1}} + (1 - \beta_2) \hat{\eta}_{t-1}, \\ \hat{f}_t &= \beta_3 \frac{u_t}{\hat{a}_{1,t}} + (1 - \beta_3) \hat{f}_{t-l}. \end{aligned}$$

### Лінійне зростання з адитивною сезонністю

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1,t} &= \beta_1 (u_t - \hat{g}_{t-l}) + (1 - \beta_1)(\hat{a}_{1,t-1} - \hat{a}_{2,t-1}), \\ \hat{a}_{2,t} &= \beta_2 (\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1 - \beta_2) \hat{a}_{2,t-1}, \\ \hat{g}_t &= \beta_3 (u_t - \hat{a}_{1,t}) + (1 - \beta_3) \hat{g}_{t-l}. \end{aligned}$$

### Експоненціальне зростання з адитивною сезонністю

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1,t} &= \beta_1 (u_t - \hat{g}_{t-l}) + (1 - \beta_1)(\hat{a}_{1,t-1} \cdot \hat{\eta}_{t-1}), \\ \hat{\eta}_t &= \beta_2 \frac{\hat{a}_{1,t}}{\hat{a}_{1,t-1}} + (1 - \beta_2) \hat{\eta}_{t-1}, \\ \hat{g}_t &= \beta_3 (u_t - \hat{a}_{1,t}) + (1 - \beta_3) \hat{g}_{t-l}. \end{aligned}$$

Рекомендації: за постійної амплітуди сезонної хвилі слід обирати адитивну модель, а за наявності змін у сезонній хвилі – мультиплікативну.

### Контрольні питання і завдання до теми

- Які методи називають адаптивними?
- Для яких рядів застосовують адитивні моделі?
- Що являє собою принцип експоненціального вирівнювання? Як в адаптивних моделях його застосовують?
- За якою формулою обчислюють прогнозні значення в моделях лінійного зростання?

5. Які бувають сезонні адаптивні моделі?
6. Як обирають початкові дані в адаптивних моделях?
7. Наведіть загальну схему обчислень в адаптивних методах.

## ТЕМА 9. МЕТОД СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Один із найбільш потужних методів аналізу часових рядів є метод SSA (Singular Spectrum Analysis) – метод сингуллярного спектрального аналізу. Для одновимірного ряду основоположний метод SSA полягає в перетворенні початкового ряду на багатовимірний, подальшому сингуллярному розкладанні траекторної матриці, що утворилася, групуванні членів розкладання і подальшому відновленні. При цьому часто можна виділити окремі адитивні складові початкового ряду, такі як тренд, різні циклічні й періодичні компоненти, а також шум.

### Опис основного алгоритму

Схему одновимірного методу розглянемо для ряду  $\{u_t; t=1, N\}$ . Для аналізу часових рядів оберемо цілий параметр  $L \in \mathbb{Z}$ ,  $1 < L < N$ . Його називають **довжиною гусені** або **довжиною вікна**. Будемо вважати, що ряди ненульові, тобто існує хоча б один індекс  $t$ , що  $u_t \neq 0$ , також введемо обмеження, що  $N > 2$ .

Основний алгоритм передбачає чотири кроки. Перші два – **вкладення** та **сингуллярне розкладання – етап розкладання**, а інші два – **згрупування** та **діагональне усереднення – етап відновлення**.

**Крок 1: вкладення.** Процедура вкладення являє собою перетворення початкового одновимірного ряду на послідовність  $L$ -вимірних векторів, кількість яких дорівнює  $K = N - L + 1$ :

$$X_t = (u_t, \dots, u_{t+L-1})^T, 1 \leq t \leq K.$$

Ці вектори утворюють **траекторну матрицю**  $X = [X_1 : \dots : X_K]$  ряду. Записуючи матрицю детальніше, відмітимо, що  $x_{ij} = u_{i+j-1}$ , тобто матриця має одинакові елементи на діагоналі  $i + j = \text{const}$ :

$$X = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_K \\ u_2 & u_3 & u_4 & \cdots & u_{K+1} \\ u_3 & u_4 & u_5 & \cdots & u_{K+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ u_L & u_{L+1} & u_{L+2} & \cdots & u_N \end{pmatrix}.$$

Таким чином, траекторна матриця за своєю структурою ганкелева. Існує взаємно однозначна відповідність між ганкелевими матрицями, розмірністю  $L \times K$  та рядами розмірністю  $N = L + K - 1$ .

**Крок 2: сингуллярне розкладання.** Результат кроку 2 – сингуллярне розкладання траекторної матриці ряду. Розглянемо матрицю

$$S = XX^T,$$

де  $X$  – траекторна матриця одновимірного часового ряду, відповідна довжині вікна  $L$ . Оскільки  $S$  додатно визначена, її власні значення невід'ємні. Позначимо через  $\lambda_1, \dots, \lambda_L$  власні значення матриці  $S$ , розташовані в порядку зменшення ( $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$ ) та через  $U_1, \dots, U_L$  ортонормовану систему **власних векторів** матриці  $S$ , що відповідають цим власним значенням.

Нехай  $d = \max\{i, \text{ таких, що } \lambda_i > 0\}$ . Визначивши  $V_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} X^T U_i$   $i = 1, \dots, d$ ,

отримаємо розкладання траекторної матриці

$$X = X_1 + \dots + X_d, \text{ де } X_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T. \quad (9.1)$$

Ортонормовані вектори  $V_i$  є власні вектори матриці  $X^T X$ .  $\sqrt{\lambda_i}$  називають **сингуллярними числами**,  $U_i$ ,  $V_i$  – **лівими й правими сингуллярними векторами** матриці  $X$  відповідно. Кожна з матриць  $X_i$  має ранг 1. Тому їх можна назвати **елементарними матрицями**. Набір  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$  називатимемо *i*-ю **власною трійкою** сингуллярного розкладання.

На геометричній мові система власних векторів  $U_i$  задає ортонормований базис у лінійному просторі, що породжується стовпцями матриці  $X$ , а вектори  $V_i$  задають ортонормований базис лінійного простору, що породжується рядками матриці  $X$ .

**Крок 3: групування.** На основі розкладання (9.1) процедура групування ділить всю множину індексів  $\{1, \dots, d\}$  на  $m$  підмножин  $I_1, \dots, I_m$ , що не перетинаються.

Нехай  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ , тоді результатуючу матрицю  $X_I$ , що відповідає групі  $I$ , визначають як  $X_I = X_{i_1} + \dots + X_{i_p}$ . Такі матриці обчислюють для  $I = I_1, \dots, I_m$ . Так, розкладання (9.1) може бути записане в згрупованому вигляді:

$$X = X_{I_1} + \dots + X_{I_m}.$$

Процедуру вибору множин  $I_1, \dots, I_m$  називають **групуванням власних трійок**.

**Крок 4: діагональне усереднення.** На останньому кроці основного алгоритму кожна матриця згрупованого розкладання перетворюється на новий ряд довжини  $N$ .

Нехай  $Y$  – матриця розмірністю  $L \times K$  з елементами  $y_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq L$ ,  $1 \leq j \leq K$ . Покладемо  $L^* = \min(L, K)$ ,  $K^* = \max(L, K)$  та  $N = L + K - 1$ . Нехай  $x_{ij} = y_{ij}$ , якщо  $L < K$  та  $x_{ij} = y_{ji}$  у решті випадків.

**Діагональне усереднення** переводить матрицю  $Y$  у ряд  $(z_1, \dots, z_N)$  за формулою

$$z_k = \begin{cases} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{j,k-j+1} & \text{для } 1 \leq k < L^*, \\ \frac{1}{L^*} \sum_{j=1}^{L^*} x_{j,k-j+1} & \text{для } L^* \leq k < K^*, \\ \frac{1}{N-k} \sum_{j=k-K^*+2}^{N-K^*+1} x_{j,k-j+1} & \text{для } K^* \leq k \leq N. \end{cases} \quad (9.2)$$

Цей вираз відповідає усередненню елементів матриці уздовж діагоналей  $i+j=k+1$ : вибір  $k=1$  дає  $z_1 = y_{11}$ , для  $k=2$  отримуємо  $z_2 = (y_{12} + y_{21})/2$  і т. д. Застосувавши діагональне усереднення до матриць, отриманих на етапі групування, приходимо до розкладання початкового ряду в суму рядів.

Новоутворені ряди являють собою адитивні компоненти початкового ряду. За умов правильного вибору довжини вікна та групування сингулярних трійок відокремленість компонент та результат аналізу покращуються.

#### Алгоритм 1. Основний SSA-алгоритм

1. Обрати деяке число  $L < N$  (довжина вікна), покласти  $K = N - L + 1$  і утворити матрицю:

$$X = \{x_{ij}; i = \overline{1, L}, j = \overline{1, K}\} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_K \\ u_2 & u_3 & u_4 & \cdots & u_{K+1} \\ u_3 & u_4 & u_5 & \cdots & u_{K+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_L & u_{L+1} & u_{L+2} & \cdots & u_N \end{pmatrix}.$$

2. За матрицею  $X$  обчислити матрицю  $X^* = \{x_{ij}^*; i = \overline{1, L}; j = \overline{1, K}\}$ , загальна формула для елементів цієї матриці така:

$$x_{ij}^* = (x_{ij} - \mu_j) / \delta_j, \quad i = \overline{1, L}, \quad j = \overline{1, K}.$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & , \quad \mu_j = \begin{cases} 0 & , \\ s_j & , \end{cases} \\ s_j & , \quad x_j \end{cases}$$

$$\text{де } \bar{x}_j = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x_{ij}, \quad s_j = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}.$$

3. Обчислити матрицю  $R$  за формuloю  $R = X^* (X^*)^T$ .

4. Здійснити сингулярне розкладання матриці  $R$  у вигляді

$$R = P \Lambda P^T,$$

де  $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_L \end{pmatrix}$  – діагональна матриця власних чисел;

$P = (p_1, p_2, \dots, p_L) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{L1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{L2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1L} & p_{2L} & \cdots & p_{LL} \end{pmatrix}$  – ортогональна матриця власних векторів матриці  $R$ .

5. Обчислити головні компоненти за формулою

$$X^* P = Y = (y_1, y_2, \dots, y_L).$$

6. Вибрати деяку кількість  $r$  головних компонент із номерами  $i_1, \dots, i_r$ .

$$7. \text{ Відновити багатовимірний ряд } \tilde{X}^* = \sum_{l=1}^r l_{i_l} p_{i_l}^T.$$

8. Здійснити децентрування й денормування (якщо необхідно) матриці  $\tilde{X}^*$ , результат – матриця  $\tilde{X}$ .

9. Виконати ганкелізацію (відновлення одновимірного ряду шляхом усереднення за побічними діагоналями):

$$\tilde{z}_k = \begin{cases} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \tilde{x}_{j,k-j+1} & \text{для } 1 \leq k < L^*, \\ \frac{1}{L^*} \sum_{j=1}^{L^*} \tilde{x}_{j,k-j+1} & \text{для } L^* \leq k < K^*, \\ \frac{1}{N-k} \sum_{j=k-K^*+2}^{N-K^*+1} \tilde{x}_{j,k-j+1} & \text{для } K^* \leq k \leq N. \end{cases}$$

Різні значення  $\mu_j$  і  $\delta_j$  визначають назву методу:  $\mu_j = 0$  – SSA без центрування;  $\mu_j = \bar{x}_j$  – SSA із центруванням;  $\delta_j = s_j$  – SSA із нормуванням;  $\delta_j = 1$  – SSA без нормування.

#### Вибір параметрів. Вибір довжини вікна.

#### Модифікація методу SSA

Довжина вікна – основний параметр алгоритму SSA. Його неправильний вибір може привести до того, що жодне групування не дасть якісного розкладення ряду на складові. Вибір довжини вікна залежить від розв'язуваної задачі та попередньої інформації відомої про ряд. Для аналізу структури часового ряду не має сенсу обирати довжину вікна, більшу, ніж половина довжини ряду. Чим більша довжина вікна, тим більш детальне буде розкладання вихідного ряду. Мала довжина вікна може спричинити змішування компонент ряду.

За допомогою модифікації SSA вдається покращити основний метод для деяких специфічних класів рядів та рядів зі складною структурою. Можливі такі варіанти досліджуваних рядів:

- часовий ряд коливається поблизу лінійного тренда, який необхідно вилучити;

- часовий ряд має стаціонарну поведінку з коливаннями, необхідно вилучити декілька гармонічних компонент з цього ряду;

- часовий ряд має складну структуру (наприклад, тренд складної форми або гармонічні компоненти з близькими амплітудами), відповідно для будь-якої довжини вікна відбувається змішування компонент часового ряду.

Можливі варіанти модифікації основного методу з одноразовим та дворазовим центруванням.

### Метод SSA для прогнозу часових рядів.

#### Алгоритми SSA-прогнозування

Введемо ряд означень.

Якщо багатовимірна вибірка, породжена часовим рядом  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$ , міститься в  $r$ -вимірній гіперплощині, а розмірність  $r$  одна для будь-якого  $L$  ( $r < L$ ), то ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$  будемо називати *рядом рангу  $r$* .

Часовий ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N+1}\}$  називають *продовженням ряду*  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$ , якщо породжена ним під час SSA обробки вибірка лежить у тій же гіперплощині, що й вихідний ряд.

#### Алгоритм 2. Побудова прогнозу на один крок уперед

Нехай задано ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$  рангу  $r$ , де  $N$  – достатньо велике. Для прогнозування ряду рангу  $r$  із вікном довжиною  $L$  достатньо обрати  $N \geq r + L$ .

1. Сформувати багатовимірну матрицю спостережень.

2. Побудувати матрицю  $S$ .

3. Знайти базис  $p^{(1)}, \dots, p^{(r)}$ , що відповідає ненульовим власним числам матриці  $S$ .

4. Записати систему лінійних алгебричних рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^r h_j p_1^{(j)} = u_{N-L+2}, \\ \dots, \\ \sum_{j=1}^r h_j p_{L-1}^{(j)} = u_N. \end{cases} \quad (9.3)$$

5. Дослідити систему (9.3) на сумісність.

- 5.1. Якщо система (9.3) несумісна, то вихідний ряд не має продовження.

- 5.2. Якщо система (9.3) має розв'язок, то вихідний ряд має продовження:

$$u_{N+1} = \sum_{j=1}^r h_j p_L^{(j)}, \quad (9.4)$$

де  $h_1, \dots, h_N$  – розв'язок системи (9.3).

Випадок нескінченної множини розв'язків системи не реалізується для жодного ряду кінцевого рангу.

Єдиність продовження ряду доводять за допомогою таких теорем.

**Теорема 9.1.** Нехай ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$  має ранг  $r$ ,  $\{u_t; t = \overline{1, N+1}\}$  – його продовження. Нехай також  $L > r - 1$ . Тоді якщо система (9.3) має розв'язок, то він єдиний.

**Теорема 9.2.** Нехай ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$  допускає продовження, тоді це продовження єдине.

Властивість існування лише єдиного продовження ряду може бути узагальнена на випадок багатокрокового продовження ряду. Розглянемо узагальнення алгоритму 2.

#### Алгоритм 3. Побудова прогнозу на $l$ кроків уперед

Пункти 1 – 4 алгоритму прогнозу на  $l$  кроків уперед збігаються з відповідними пунктами алгоритму 2.

Для визначення послідовних значень  $u_{N+1}, \dots, u_{N+l}$  маємо послідовність систем

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^r h_j p_1^{(j)} = u_{N-L+l+1}, \\ \dots, \\ \sum_{j=1}^r h_j p_{L-1}^{(j)} = u_{N+l-1}, \end{cases} \quad l = 1, 2, \dots \quad (9.5)$$

5. Дослідити систему (9.5), що відповідає  $l = 1$ , на сумісність.

5.1. Якщо система (9.5), що відповідає  $l = 1$ , несумісна, то вихідний ряд, не допускає продовження.

5.2. Якщо система (9.5), що відповідає  $l = 1$ , має розв'язок, то вона має розв'язок за будь-якого  $l$ , і продовження вихідного ряду однозначно визначають за формулою

$$u_{N+l} = \sum_{j=1}^r h_j(l) p_L^{(j)}, \quad (9.6)$$

де  $h_1(l), \dots, h_2(l)$  – розв'язок системи (9.5), що відповідає  $l$ -му кроху алгоритму.

**Теорема 9.3.** Нехай ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$  допускає продовження. Тоді він може бути продовженим необмежено на будь-яку кількість кроків, причому це продовження єдине.

Зауважимо, що не будь-який клас рядів може бути продовжений.

**Лема 9.1.** (про ряди, що не допускають продовження). Нехай ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$ , що має ранг  $r$ , допускає продовження та нехай значення  $u_{N+2}$  не є продовження цього ряду (у сенсі визначення, наведеного вище). Тоді ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N+2}\}$  не допускає продовження.

Цікаве питання мінімальної кількості точок, за якими можна відновити ряд рангу  $r$ . Має місце лема 9.2.

**Лема 9.2.** Для відновлення ряду рангу  $r$  завжди достатньо мати  $N = r + L$  точок.

Оскільки умови методу передбачають, що  $L > r$ , то для відновлення ряду рангу  $r$  завжди достатньо мати  $N = 2r + 1$  точку.

#### Контрольні питання і завдання до теми

1. Які кроки передбачає основний алгоритм SSA?
2. Що собою являє власна трійка сингулярного розкладання?
3. З якою метою виконують діагональне усереднення?
4. Дайте визначення ганкелізації.
5. Яким чином обирають параметри SSA?
6. Дайте визначення ряду рангу  $r$ .
7. Який ряд вважають продовженням ряду  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$ ?
8. Сформулюйте теореми, які доводять єдиність продовження ряду.

## ТЕМА 10. ПРОГНОЗУВАННЯ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ

Теорія нечітких множин, яку ввів Л. Заде для подання нового типу значень, заклали основи моделювання інтелектуальної діяльності людини і стала поштовхом до розвитку нової математичної теорії, застосованої для опису невизначеностей, що належать до класу нечіткості висловлювань і міркувань людини. Теорія нечітких множин – це розділ прикладної математики про методи аналізу невизначених даних, у якій невизначеності реальних явищ і процесів описують за допомогою поняття про множини, що не мають чітких меж.

Наведемо означення з теорії нечітких множин, якими ми будемо оперувати далі.

**Нечіткою множиною  $A$**  будемо називати множину впорядкованих пар (кортежів) вигляду

$$\langle x, \mu_A(x) \rangle,$$

де  $x$  – елемент деякої універсальної множини (універсуму)  $U$ ;  $\mu_A(x)$  – функція належності, що ставить у відповідність кожному з елементів  $x \in U$  деяке дійсне число з інтервалу  $[0, 1]$ , тобто дану функцію визначають у формі відображення:

$$\mu_A : U \rightarrow [0, 1].$$

Універсумом  $U$  будемо називати нечітку множину, функція належності якої тотожно дорівнює одиниці для всіх без винятку елементів:

$$\mu(x) \equiv 1, \forall x \in U.$$

**Носієм нечіткої множини** називають звичайну множину, яка містить ті і тільки ті елементи універсуму, для яких значення функції належності відповідної нечіткої множини відмінні від нуля.

#### Способи задання нечітких множин

1. Структурний спосіб. Нехай  $u_i, i = 1, 2, \dots, N$  – підмножини універсуму  $U$ , такі що  $\mu(x) = m_i \equiv \text{const}$ ,  $\forall x \in u_i$ , тоді нечітка множина може бути задана у вигляді  $\{m_1 / u_1, m_2 / u_2, \dots, m_N / u_N\}$ .

2. Функціональний спосіб. Нечітка множина задана аналітично у формі математичного виразу для відповідної функції належності. У цьому випадку нечітку множину зручно записати у вигляді  $A = \{x, \mu_A(x)\}$ , де  $\mu_A$  – деяка функція, задана аналітично у формі математичного виразу або графічно у формі деякої кривої.

Розглянемо найбільш поширені види функцій належності.

1. Трикутну функцію (рис. 10.1) обчислюють за формулою

$$f(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c, \\ 0, & c \leq x, \end{cases}$$

де  $a, b, c$  – деякі числові параметри, що набувають довільних дійсних значень і впорядковані співвідношенням  $a \leq b \leq c$ ;  $b$  задає координату вершини трикутника,  $a$  і  $c$  – основу трикутника.

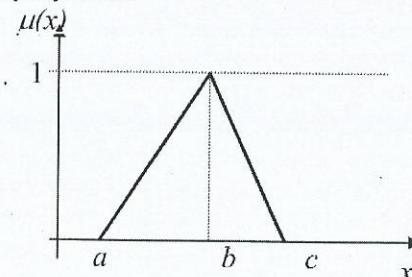


Рис. 10.1. Трикутна функція належності

2. Трапеціоподібну функцію (рис. 10.2) визначають за формулою

$$f(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & b \leq x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d, \\ 0, & d \leq x, \end{cases}$$

де  $a, b, c, d$  – деякі числові параметри, що набувають довільних дійсних значень і впорядковані співвідношенням  $a \leq b \leq c \leq d$ .

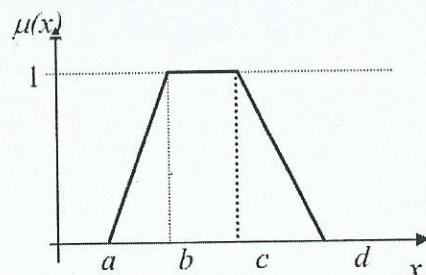


Рис. 10.2. Трапецієподібна функція належності

3. Гауссову функцію (рис. 10.3) обчислюють за формулou

$$f(x; \sigma, c) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}},$$

де  $\sigma, c$  – деякі числові параметри;  $\sigma$  – середнє квадратичне відхилення;  $c$  – середнє значення.

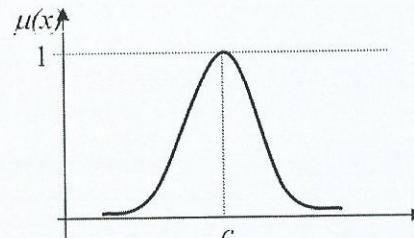


Рис. 10.3. Гауссова функція належності

**Об'єднанням** двох нечітких множин  $A$  і  $B$  називають деяку третю нечітку множину  $D$ , задану на цьому ж універсумі  $U$ , функцію належності якої визначають за такою формулou:

$$\mu_D(x) = \max \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in U.$$

**Лінгвістична змінна** – змінна, значеннями якої є слова або вислови природної чи штучної мови.

**Терм-множиною** називають множину всіх можливих значень лінгвістичної змінної.

**Термом** (лінгвістичним значенням, лінгвістичною оцінкою) називають будь-який елемент терм-множини. Терм задають нечіткою множиною за допомогою функції належності.

**Ядром нечіткої множини  $A$**  називають чітку підмножину універсуму  $U$ , елементи якої мають ступінь належності, що дорівнює одиниці:

$$\text{core}(A) = \{x \in U : \mu_A(x) = 1\}.$$

У загальному випадку **нечітким відношенням** або, більш точно, **нечітким  $k$ -арним відношенням**, заданим на множинах (універсумах)  $U_1, U_2, \dots, U_k$ , називають деяку фіксовану нечітку підмножину декартового добутку цих універсумів.

Нечітким лінгвістичним висловлюванням будемо називати висловлювання наведених нижче видів.

1. Вислів « $\beta \in \alpha$ », де  $\beta$  – назва лінгвістичної змінної;  $\alpha$  – значення лінгвістичної змінної, якому відповідає окремий лінгвістичний терм із базової терм-множини лінгвістичної змінної  $\beta$ .

2. Вислів « $\beta \in \forall \alpha$ », де  $\forall$  – модифікатор, що відповідає таким словам: «дуже», «більш-менш», «на багато більше» та ін.

3. Складені висловлювання, утворені з висловлювань перших двох видів та нечітких логічних операцій у формі зв'язок: «і», «або», «якщо ..., то», «не».

Оскільки в системах нечіткого виведення нечіткі лінгвістичні висловлювання займають центральне місце, далі будемо їх називати коротко: **нечіткими висловлюваннями**.

**Нечітке логічне виведення (продукція)** – апроксимація залежності «вхід-виход» на основі лінгвістичних висловлювань «Якщо ..., то» і логічних операцій над нечіткими множинами.

Механізм, або алгоритм, виведення – це важлива частина базової архітектури систем нечіткого виведення. Алгоритм виведення оперує правилами нечітких продукцій, у яких умови та висновки записані у формі нечітких лінгвістичних змінних.

Для отримання висновків у системах нечіткого виведення запропоновано декілька алгоритмів. Опис цих алгоритмів ґрунтуються на поділі процесу виведення на ряд послідовних етапів.

Системи нечіткого виведення призначенні для перетворення значень вхідних змінних на вихідні змінні на основі застосування нечітких правил продукцій. Для цього системи нечіткого виведення повинні містити базу правил нечітких продукцій і реалізовувати нечітке виведення висновків на основі засновків або умов, виражених у формі нечітких лінгвістичних висловлювань. Основні етапи нечіткого виведення:

- формування бази правил систем нечіткого виведення;
- фазифікація вхідних змінних;
- агрегація підумови в нечітких правилах продукцій;
- активізація або композиція підвісновків у нечітких правилах продукцій;
- акумулювання висновків нечітких правил продукцій.

База правил систем нечіткого виведення призначена для формального подання емпіричних знань або знань експертів у тій чи іншій проблемній галузі. У системах нечіткого виведення застосовують правила нечітких продукцій, у яких умови і висновки сформульовані в термінах нечітких лінгвістичних висловлювань. Сукупність таких правил будемо далі називати **базами правил нечітких продукцій**.

Базою правил нечітких продукцій є кінцева множина правил нечітких продукцій, узгоджених щодо застосуваннях у них лінгвістичних змінних. Найбільш часто базу правил подають у вигляді структурованого тексту.

ПРАВИЛО\_1: ЯКЩО «Умова\_1», ТО «Висновок\_1» ( $F_1$ ).

ПРАВИЛО\_2: ЯКЩО «Умова\_2», ТО «Висновок\_2» ( $F_2$ ).

...

ПРАВИЛО\_n: ЯКЩО «Умова\_n», ТО «Висновок\_n» ( $F_n$ ).

Еквівалентна форма:

RULE\_1: IF «Condition\_1», THEN «Conclusion\_1» ( $F_1$ ).

RULE\_2: IF «Condition\_2», THEN «Conclusion\_2» ( $F_2$ ).

...

RULE\_n: IF «Condition\_n», THEN «Conclusion\_n» ( $F_n$ ).

Тут через  $F_i, i = \overline{1, n}$  позначено коефіцієнти визначеності, або вагові коефіцієнти відповідних правил. Ці коефіцієнти можуть набувати значень з інтервалу  $[0, 1]$ . У випадку, якщо вагові коефіцієнти відсутні, зручно вважати, що їх значення дорівнюють 1.

У системах нечіткого виведення лінгвістичні змінні, застосовувані в нечітких висловлюваннях підумов правил нечітких продукцій, часто називають *вхідними лінгвістичними змінними*, а змінні, застосовувані в нечітких висловлюваннях підвисновків правил нечітких продукцій, – *вихідними лінгвістичними змінними*.

Таким чином, у ході формування бази правил нечітких продукцій необхідно визначити множину правил нечітких продукцій:  $P = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ , множину вхідних лінгвістичних змінних:  $V = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$  і множину вихідних лінгвістичних змінних:  $W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$ . Базу правил нечітких продукцій вважають заданою, якщо задано множини  $P, V, W$ . При цьому для зручності запису застосовують спеціальні скорочення для назв окремих термів вхідних та вихідних лінгвістичних змінних (табл. 10.1).

Таблиця 10.1

Загальноприйняті скорочення для значень основних термів лінгвістичних змінних у системах нечіткого виведення

Символічне позначення	Англомовна нотація	Україномовна нотація
NB	Negative Big	Від'ємний великий
NM	Negative Middle	Від'ємний середній
NS	Negative Small	Від'ємний малий
ZN	Zero Negative	Від'ємний, близький до нуля
Z	Zero	Нуль, близький до нуля
ZP	Zero Positive	Додатній, близький до нуля
PS	Positive Small	Додатній малий
PM	Positive Middle	Додатній середній
PB	Positive Big	Додатній великий

На формування бази правил систем нечіткого виведення часто впливають деякі додаткові фактори, визначені специфікою розв'язуваної задачі або алгоритму нечіткого виведення, який застосовують.

Мета етапу *фаззифікації* – встановлення відповідності між конкретним (звичай числовим) значенням окремої вхідної змінної системи нечіткого виведення і значенням функції належності відповідного їй терму вхідної лінгвістичної змінної. Після завершення цього етапу для всіх вхідних змінних повинні бути встановлені конкретні значення функцій належності за кожним із лінгвістичних термів, застосовуваних у підумовах бази правил системи нечіткого виведення.

Формально процедуру фаззифікації виконують таким чином. До початку цього етапу вважають відомими конкретні значення всіх вхідних змінних системи нечіткого виведення, тобто множину значень  $V' = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . У загальному випадку кожне  $a_i \in X_i$ , де  $X_i$  – універсум лінгвістичної змінної  $\beta_i$ . Далі розглядають кожну з підумов правил системи нечіткого виведення, які мають вигляд « $\beta_i \in \alpha'$ », де  $\alpha'$  – деякий терм з відомою функцією належності  $\mu(x)$ . При цьому значення  $a_i$  застосовують як аргумент  $\mu(x)$  і знаходять кількісне значення  $b'_i = \mu(a_i)$ . Воно і є результатом фаззифікації підумови « $\beta_i \in \alpha'$ ».

Етап фаззифікації вважають закінченим, коли будуть знайдені всі значення  $b'_i = \mu(a_i)$  дляожної з підумов всіх правил, що входять у дану базу правил системи нечіткого виведення. Множину цих значень позначимо через  $B = \{b'_i\}$ . При цьому якщо деякий терм  $\alpha'$  лінгвістичної змінної  $\beta_i$  не присутній в жодному з нечітких висловлювань, то відповідне йому значення функції належності не знайдеться у процесі фаззифікації.

Якщо в деякій підумові наявний терм з модифікатором, то процедуру фаззифікації виконують аналогічним чином щодо функції належності терму після виконання операції, яка відповідає даному модифікатору.

*Агрегація* – процедура визначення ступеня істинності умов за кожним із правил системи нечіткого виведення.

Формально процедуру агрегації виконують таким чином. До початку цього етапу вважають відомими значення істинності всіх підумов системи нечіткого виведення, тобто множину значень  $B = \{b'_i\}$ . Далі розглядають кожну з умов правил системи нечіткого виведення. Якщо умовою правила є нечітке висловлювання 1 або 2, то ступінь його істинності дорівнює відповідному значенню  $b'_i$ .

Якщо ж умова складається з декількох підумов, причому лінгвістичні змінні в підумовах попарно не дорівнюють одна одній, то ступінь істинності складного висловлювання з'ясовують на основі відомих значень істинності підумов.

Етап агрегації вважають закінченим, коли будуть знайдені всі значення  $b_k''$  для кожного з правил  $R_k$ , що входять у дану базу правил  $P$  системи нечіткого виведення. Цю множину значень позначають через  $B'' = \{b_1'', b_2'', \dots, b_n''\}$ .

**Активізація** в системах нечіткого виведення – процедура або процес знаходження ступеня істинності кожного з підвісновків правил нечітких продукцій. Активізація в загальному випадку аналогічна до композиції нечітких відношень, але не тотожна їй. У процесі формування бази правил системи нечіткого виведення задають вагові коефіцієнти  $F_i$  для кожного правила (за замовчуванням передбачено, якщо ваговий коефіцієнт не заданий явно, то його значення дорівнює 1).

Формально процедуру активізації виконують таким чином. До початку цього етапу вважають відомими значення істинності всіх умов системи нечіткого виведення, тобто множину значень  $B'' = \{b_1'', b_2'', \dots, b_n''\}$  і значення вагових коефіцієнтів  $F_i$  для кожного правила. Далі розглядають кожен із висновків правил системи нечіткого виведення. Якщо висновком правила є нечітке висловлювання вигляду 1 або 2, то ступінь його істинності дорівнює алгебричному добутку відповідного значення  $b_i''$  на ваговий коефіцієнт  $F_i$ . Якщо ж висновок складається з декількох підвісновків, причому лінгвістичні змінні в підвісновках попарно не дорівнюють один одному, то ступінь істинності кожного з підвісновків дорівнює алгебричному добутку відповідного значення  $b_i''$  на ваговий коефіцієнт  $F_i$ . Так само знаходять всі значення  $c_k$  ступенів істинності підвісновків для кожного з правил  $R_k$ , що входять у дану базу правил  $P$  системи нечіткого виведення. Цю множину значень позначають через  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$ , де  $q$  – загальна кількість підвісновків у базі правил.

При цьому не виключений випадок, коли ваговий коефіцієнт  $F_i$  може бути заданий індивідуально для окремих підвісновків. Процедура активізації залишається незмінною.

Після знаходження множини  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$  визначають функції належності кожного з підвісновків для розглянутих вихідних лінгвістичних змінних. Для цього можна застосувати один із методів, які є модифікацією того чи іншого методу нечіткої композиції:

min-активізацію:

$$\mu'(y) = \min\{c_i, \mu(y)\};$$

prod-активізацію:

$$\mu'(y) = c_i \mu(y);$$

average-активізацію:

$$\mu'(y) = 0,5 \cdot (c_i + \mu(y)),$$

де  $\mu(y)$  – функція належності терму, який є значенням деякої вихідної змінної  $\omega_j$ , заданої на універсумі  $Y$ .

Етап активізації вважають закінченим, коли для кожної з вихідних лінгвістичних змінних, що входять в окремі підвісновки правил нечітких продукцій, будуть визначені функції належності нечітких множин їх значень, тобто сукупність нечітких множин:  $C_1, C_2, \dots, C_q$ , де  $q$  – загальна кількість підвісновків у базі правил системи нечіткого виведення.

**Акумуляція** в системах нечіткого виведення – це процедура або процес знаходження функції належності для кожної з вихідних лінгвістичних змінних множини  $W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$ :

Мета акумуляції полягає в об'єднанні всіх ступенів істинності висновків (підвісновків) для отримання функції належності кожної з вихідних змінних. Необхідність виконання цього етапу обумовлена тим, що підвісновки, пов'язані з однією і тією ж вихідною лінгвістичною змінною, належать різним правилам системи нечіткого виведення.

Формально процедуру акумуляції виконують таким чином. До початку цього етапу вважають відомими значення істинності всіх підвісновків для кожного з правил  $R_k$ , що входять у дану базу правил  $P$  системи нечіткого виведення, у формі сукупності нечітких множин:  $C_1, C_2, \dots, C_q$ , де  $q$  – загальна кількість підвісновків у базі правил. Далі послідовно розглядають кожну з вихідних лінгвістичних змінних  $\omega_j \in W$  і пов'язані з нею нечіткі множини:  $C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jq}$ . Результат акумуляції для вихідної лінгвістичної змінної  $\omega_j$  визначають як об'єднання нечітких множин  $C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jq}$  за однією з формул об'єднання нечітких множин.

Етап акумуляції вважають закінченим, коли для кожної з вихідних лінгвістичних змінних будуть визначені підсумкові функції належності нечітких множин їх значень, тобто сукупність нечітких множин:  $C'_1, C'_2, \dots, C'_s$ , де  $s$  – загальна кількість вихідних лінгвістичних змінних у базі правил системи нечіткого виведення.

**Дефазифікація** в системах нечіткого виведення – це процедура або процес знаходження звичайного (не нечіткого) значення для кожної з вихідних лінгвістичних змінних множини  $W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$ .

Мета дефазифікації – за результатами акумуляції всіх вихідних лінгвістичних змінних отримати звичайне кількісне значення (crisp value) кожної з вихідних змінних.

Дефазифікацію іноді називають зведенням до чіткості.

Формально процедуру дефазифікації виконують таким чином. До початку цього етапу вважають відомими функції належності всіх вихідних лінгвістичних змінних у формі нечітких множин:  $C'_1, C'_2, \dots, C'_s$ , де  $s$  – загальна кількість вихідних лінгвістичних змінних у базі правил системи нечіткого виведення. Далі послідовно розглядають кожну з вихідних лінгвістичних змінних  $\omega_j \in W$  і відповідну нечітку множину  $C'_j$ . Результат дефазифікації для вихідної лінгвістичної змінної  $\omega_j$  визначають у вигляді кількісного значення  $y_j \in \square$ , одержуваного за однією з розглянутих нижче формул.

Етап дефазифікації вважають закінченим, коли для кожної з вихідних лінгвістичних змінних будуть визначені підсумкові кількісні значення у формі деякого дійсного числа, тобто у вигляді  $y_1, y_2, \dots, y_s$ , де  $s$  – загальна кількість вихідних лінгвістичних змінних у базі правил системи нечіткого виведення.

Для виконання числових розрахунків на етапі дефазифікації можуть бути застосовані такі формули, що отримали назву методів дефазифікації.

**1. Метод центра ваги.** Центр ваги, або центроїд площин, розраховують за формулою

$$y = \frac{\int_{\text{Min}}^{\text{Max}} x \mu(x) dx}{\int_{\text{Min}}^{\text{Max}} \mu(x) dx},$$

де  $y$  – результат дефазифікації;  $x$  – змінна, що відповідає вихідній лінгвістичній змінній  $\omega$ ;  $\mu(x)$  – функція належності нечіткої множини, що відповідає вихідній змінній  $\omega$  після етапу акумуляції;  $\text{Min}$  і  $\text{Max}$  – ліва і права точки інтервалу носія нечіткої множини вихідної змінної  $\omega$ .

У разі дефазифікації методом центра ваги звичайне (не нечітке) значення вихідної змінної дорівнює абсцисі центра ваги площин, обмеженої графіком кривої функції належності відповідної вихідної змінної.

**2. Метод центра ваги для одноточкових множин.** Центр ваги для одноточкових множин розраховують за формулою

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \mu(x_i)}{\sum_{i=1}^n \mu(x_i)},$$

де  $n$  – число одноточкових (одноелементних) нечітких множин, кожна з яких характеризує єдине значення розглянутої вихідної лінгвістичної змінної.

Розглянуті вище етапи нечіткого виведення можуть бути реалізовані неоднозначно, оскільки включають окрім параметрів, які повинні бути фіксовані або специфіковані. З огляду на це вибір конкретних варіантів параметрів кожного з етапів визначає певний алгоритм, який у повному обсязі реалізує нечітке виведення в системах правил нечітких продукцій. На сьогодні запропоновано кілька алгоритмів нечіткого виведення. Опишемо алгоритм нечіткого виведення Мамдані.

**Алгоритм Мамдані** (рис. 10.5) одним із перших застосували в системах нечіткого виведення. Його запропонував англійський математик Е.Мамдані (Ebrahim Mamdani) як метод для керування паровим двигуном. За своєю суттю цей алгоритм породжує розглянуті вище етапи, оскільки найбільшою мірою відповідає їх параметрам.

Формально алгоритм Мамдані може бути визначений таким чином:

- формування бази правил систем нечіткого виведення – особливості формування бази правил збігаються з розглянутими вище під час опису даного етапу;

- фаззифікація вихідних змінних – особливості фаззифікації збігаються з розглянутими вище під час опису даного етапу;

- агрегація підумови в нечітких правилах продукцій – для знаходження ступеня істинності умов кожного з правил нечітких продукцій застосовують парні нечіткі логічні операції. Ті правила, ступінь істинності умов яких відмінний від нуля, вважають активними і застосовують їх для подальших розрахунків;

- активізація підсумковків у нечітких правилах продукцій – здійснюють за формулою тін-активізації, при цьому для скорочення часу виведення враховують тільки активні правила нечітких продукцій;

- акумуляція висновків нечітких правил продукцій – здійснюють за формулою

$$\mu_D(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in U$$

для об'єднання нечітких множин, що відповідають термам підсумковків, які належать до одних і тих самих вихідних лінгвістичних змінних;

- дефазифікація вихідних змінних – традиційно застосовують метод центра ваги або метод центра площин.

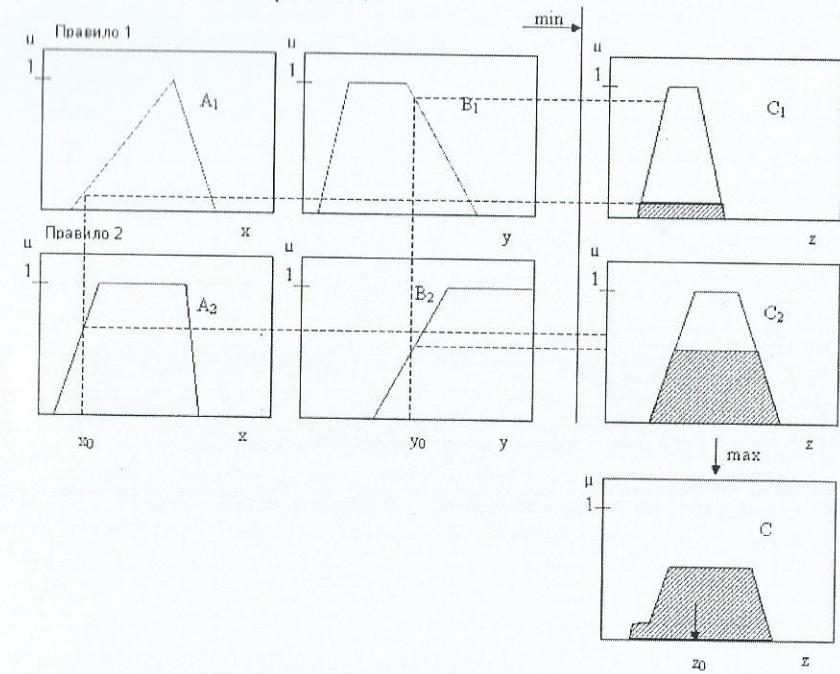


Рис. 10.5. Схема нечіткого виведення за алгоритмом Мамдані

Опишемо, як розглянутий підхід можна застосовувати під час прогнозування. У 1993 р. Сонг і Чіссом (Song i Chissom) запропонували нечіткі моделі детермінованих (time-variant) і авторегресійних (time-invariant) часових рядів первого порядку (first-order) і застосували розроблені моделі для прогнозування кількості студентів університету штату Алабама (США), фаззифікувавши попередньо чіткий часовий ряд. Це було перше застосування нечітких моделей під час моделювання часових рядів і перше означення моделей нечітких часових рядів.

Нехай  $X_t, (t=1, 2, \dots) \subset R^l$  – універсум, на якому визначено нечіткі множини  $y_t^i, (i=1, 2, \dots)$  і  $Y_t$  – колекція  $y_t^i, (i=1, 2, \dots)$ . Тоді  $Y_t$  – нечіткий часовий ряд.

На практиці в більшості часових рядів послідовні спостереження залежні:

$$R = \{(y_t, y_{t-1}), (y_{t-1}, y_{t-2}) \dots\} \subseteq Y_t \times Y_{t-1},$$

де  $Y_t, Y_{t-1}$  – змінні;  $y_t, y_{t-1}$  – значення цих змінних.

Найчастіше моделлю залежності є явна функція

$$f : Y_{t-1} \rightarrow Y_t,$$

представлена лінійною функцією (марківський процес, модель AR(1)):

$$y_t = f(y_{t-1}, \phi, \varepsilon) = \phi \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

де  $\varepsilon_t$  – випадкова похибка, шум.

У разі нечіткого часового ряду як модель авторегресії застосовують нечітке різницеве рівняння

$$\begin{aligned} y_t^j &= y_{t-1}^j \times R_{ij}(t, t-1), \\ y_t^j &\in Y_t, \quad y_{t-1}^j \in Y_{t-1}, \quad i \in I, j \in J, \end{aligned}$$

де  $\times$  – операція композиції з теорії нечітких множин;  $R(t, t-1) = U_{i,j} R_{ij}(t, t-1)$  – система нечітких відношень, яка символічно може бути записана у вигляді  $Y_t \rightarrow Y_{t-1}$ .

Систему відношень  $R$  у виразі  $Y_t = Y_{t-1} \circ R(t, t-1)$  називають моделлю нечіткого часового ряду першого порядку, дана модель – важливий окремий випадок загальної моделі порядку  $p$ :

$$\begin{aligned} Y_t &= (Y_{t-1} \times Y_{t-2} \times \dots \times Y_{t-p}) \circ R(t, t-p), \\ R(t, t-p) &= \max_p \left\{ \min_{j_1, j_2, \dots, j_p} \left\{ y_t^{j_1}, y_{t-1}^{j_1}, \dots, y_{t-p}^{j_p} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Математично основу нечіткого моделювання часових рядів є теорема FAT (*Fuzzy Approximation Theorem*), згідно з якою будь-яка математична система може бути апроксимована системою, заснованою на нечіткій логіці. Іншими словами, за допомогою природномовних висловлювань «ЯКЩО..., ТО», з подальшою їх формалізацією засобами теорії нечітких множин, можна скільки завгодно точно описувати довільний взаємозв'язок «входи-виходи».

Розглянемо алгоритм прогнозування. Для опису алгоритму скористаємося наведеними нижче означеннями.

Нехай  $Y(t) \subset \square$ ,  $t = \dots, 0, 1, 2, \dots$  – універсальна множина, визначена нечіткими множинами  $f_i(t)$ . Тоді функцію  $F(t)$ , що складається з  $f_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , називають нечітким часовим рядом на  $Y(t)$ .

Крім того,  $F(t)$  можна розуміти як лінгвістичну змінну, де  $f_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , можливі лінгвістичні значення  $F(t)$ .

Якщо існує нечітке відношення  $R(t, t-1)$ , таке що

$$F(t) = F(t-1) \times R(t, t-1),$$

де символ  $\times$  – максимінний оператор композиції,  $F(t)$  виводиться з  $F(t-1)$ . Існуюче відношення між  $F(t-1)$  та  $F(t)$  позначатимемо виразом  $F(t-1) \rightarrow F(t)$ .

Нехай  $F(t-1) = A_i$  та  $F(t) = A_j$ , де  $A_i$  та  $A_j$  – нечіткі множини, тоді нечітке логічне відношення між  $F(t-1)$  та  $F(t)$  може бути позначене логічним

відношенням  $A_i \rightarrow A_j$ , де  $A_i$  та  $A_j$  називають відповідно лівою та правою частиною нечіткого логічного відношення.

Нечіткі логічні відношення, які мають однакову ліву частину, можуть бути об'єднані разом у групи логічних відношень. Наприклад, для однакових лівих частин  $A_i$  групування можна зобразити таким чином:

$$\left. \begin{array}{l} A_i \rightarrow A_{j1} \\ A_i \rightarrow A_{j2} \\ \vdots \end{array} \right\} \Rightarrow A_i \rightarrow A_{j1}, A_{j2}, \dots$$

Якщо  $F(t)$  стаціонарний нечіткий числовий ряд, тоді логічне відношення  $F(t-1) \rightarrow F(t)$  називають відношенням першого порядку.

Нехай  $F(t)$  стаціонарний нечіткий часовий ряд. Якщо  $F(t)$  виводиться з  $F(t-1), F(t-2), \dots, F(t-n)$ , то нечітке логічне відношення між ними може бути представлене нечітким логічним відношенням  $n$ -го порядку:

$$F(t-n), \dots, F(t-2), F(t-1) \rightarrow F(t)$$

Якщо  $F(t-n) = A_{in}, \dots, F(t-2) = A_{i2}, F(t-1) = A_{i1}, F(t) = A_j$ , де  $A_{in}, \dots, A_{i2}, A_{i1}, A_j$  – нечіткі множини, тоді нечітке логічне відношення  $n$ -го порядку може бути представлене таким чином:

$$A_{in}, \dots, A_{i2}, A_{i1} \rightarrow A_j.$$

Якщо існують нечіткі логічні відношення  $n$ -го порядку, що мають однакову ліву частину:

$$\begin{array}{c} A_{in}, \dots, A_{i2}, A_{i1} \rightarrow A_{ja} \\ A_{in}, \dots, A_{i2}, A_{i1} \rightarrow A_{jb} \\ \vdots \\ A_{in}, \dots, A_{i2}, A_{i1} \rightarrow A_{jm}, \end{array}$$

то такі нечіткі логічні відношення  $n$ -го порядку утворюють групу нечітких логічних відношень  $n$ -го порядку:

$$A_{in}, \dots, A_{i2}, A_{i1} \rightarrow A_{ja}, A_{jb}, \dots, A_{jm}.$$

Алгоритм прогнозування.

1. Приняти рішення щодо переходу до ряду приростів. Якщо необхідно, виконати переход від ряду вхідних даних до ряду приростів значень

$$x'_i = x_i - x_{i-1},$$

де  $i = 2, N$ ,  $N$  – довжина ряду.

Таким чином довжина ряду зменшується на одиницю.

2. Задати область визначення (універсум  $U$ ) проблеми виходячи з обраних на 1-му кроці значень на заданому часовому інтервалі.

3. Задати порядок відношень для побудови правил.

4. Якщо порядок не дорівнює 1, то приняти рішення щодо необхідності переходу від відношень старших порядків до відношень старших порядків на основі різниць між сусідніми індексами нечітких множин.

5. Задати нечіткі множини  $A_i$ , застосовуючи функції належності (гауссову, структурну, трапецієподібну, трикутну).

6. Фаззифікувати дані, отримані на кроці 1.

7. Побудувати нечіткі логічні відношення  $n$ -го порядку на основі фаззифікованих даних.

8. Якщо на кроці 4 було вирішено перейти до відношень старших порядків на основі різниць між сусідніми індексами нечітких множин, то перетворити кожне нечітке логічне відношення  $n$ -го порядку вигляду

$$A_{X1}, A_{X2}, A_{X3}, \dots, A_{Xj}, \dots, A_{Xn} \rightarrow A_{Xr}$$

на таку форму:

$$A_{X1}, A_{X1+V(X1)}, A_{X1+V(X1)+V(X2)}, \dots, A_{X1+V(X1)+V(X2)+\dots+V(Xj)}, \dots,$$

$$A_{X1+V(X1)+V(X2)+\dots+V(Xj)+\dots+V(Xn)} \rightarrow A_{X1+V(X1)+\dots+V(Xj)+\dots+V(Xn)+V(Xr)},$$

де  $V(X1), V(X2), \dots, V(Xr)$  – цілі числа.

В іншому випадку одразу перейти до кроку 9.

9. Побудувати групи нечітких логічних відношень  $n$ -го порядку на основі нечітких логічних відношень  $n$ -го порядку, отриманих на кроці 7 або 8.

10. Обрати перетворену групу нечітких логічних відношень  $n$ -го порядку для прогнозування.

11. Виконати дефаззифікацію вихідного параметра для отримання числового значення.

12. Якщо на першому кроці було здійснено перехід до ряду приrostів, то обчислити прогнозні значення в момент часу  $(t+1)$  як суму відомого значення в попередній момент часу  $t$  і спрогнозованого на кроці 7 приросту  $\Delta Y_t$ :

$$Y_{t+1} = Y_t + \Delta Y_t.$$

В іншому випадку крок 12 не потрібен.

Розглянутий метод нечіткого моделювання можна вважати однією з напівавтоматичних процедур, оскільки більшість виконуваних кроків, враховуючи побудову універсуму на основі множини вхідних даних задачі, можуть бути ефективно реалізовані в програмній формі, проте участь аналітика (експерта) у формуванні інтервалів розбиття і відповідних нечітких множин відіграє також величезну роль.

#### Контрольні питання і завдання до теми

1. Дайте означення нечіткої множини.
2. Сформулуйте визначення універсуму нечіткої множини.
3. Яким чином задають нечіткі множини?
4. Що собою являє лінгвістична змінна?
5. Дайте визначення терм-множини.
6. Дайте означення нечіткого лінгвістичного висловлювання.
7. Сформулуйте основні етапи нечіткого виведення.
8. З якою метою виконують етап дефаззифікації?
9. Сформулуйте теорему FAT.

## ДОДАТОК

### Коефіцієнти ковзного середнього

$$p = 3, u_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

$t = 5$

$$a_0 = \frac{1}{35}[-3; 12; 17; 12; -3],$$

$$a_1 = \frac{1}{12}[1; -8; 0; 8; -1],$$

$$a_2 = \frac{1}{14}[2; -1; -2; -1; 2],$$

$$a_3 = \frac{1}{12}[-1; 2; 0; -2; 1].$$

$t = 7$

$$a_0 = \frac{1}{21}[-2; 3; 6; 7; 6; 3; -2],$$

$$a_1 = \frac{1}{252}[22; -67; -58; 0; 58; 67; -22],$$

$$a_2 = \frac{1}{84}[5; 0; -3; -4; -3; 0; 5],$$

$$a_3 = \frac{1}{12}[-1; 1; 1; 0; -1; -1; 1].$$

$t = 9$

$$a_0 = \frac{1}{231}[-21; 14; 39; 54; 59; 54; 39; 14; -21],$$

$$a_1 = \frac{1}{1188}[86; -142; -193; -126; 0; 126; 193; 142; -86],$$

$$a_2 = \frac{1}{924}[28; 7; -8; -17; -20; -17; -8; 7; 28],$$

$$a_3 = \frac{1}{1188}[-14; 7; 13; 9; 0; -9; -13; -7; 14].$$

$t = 11$

$$a_0 = \frac{1}{429}[-36; 9; 44; 69; 84; 89; 84; 69; 44; 9; -36],$$

$$a_1 = \frac{1}{5148}[300; -294; -532; -503; -296; 0; 296; 503; 532; 294; -300],$$

$$a_2 = \frac{1}{858}[15; 6; -1; -6; -9; -10; -9; -6; -1; 6; 15],$$

$$a_3 = \frac{1}{5148}[-30; 6; 22; 23; 14; 0; -14; -23; -22; -6; 30].$$

$t = 13$

$$a_0 = \frac{1}{143}[-11; 0; 9; 16; 21; 24; 25; 24; 21; 16; 9; 0; -11],$$

$$a_1 = \frac{1}{24024}[1133; -660; -1578; -1796; -1489; -832; 0; 832; 1489; 1796; 1578; 660; -1133],$$

$$a_2 = \frac{1}{2002}[22; 11; 2; -5; -10; -13; -14; -13; -10; -5; 2; 11; 22],$$

$$a_3 = \frac{1}{3432}[-11; 0; 6; 8; 7; 4; 0; -4; -7; -8; -6; 0; 11].$$

$t = 15$

$$a_0 = \frac{1}{1105}[-78; -13; 42; 87; 122; 147; 162; 167; 162; 147; 122; 87; 42; -13; -78],$$

$$a_1 = \frac{1}{334152} [12922; -4121; -14150; -18334; -17842; -13843; -7506; 0; 7506; 13843; 17842; 18334; 14150; 4121; -12922],$$

$$a_2 = \frac{1}{12376} [91; 52; 19; -8; -29; -44; -53; -56; -53; -44; -29; -8; 19; 52; 91],$$

$$a_3 = \frac{1}{47736} [-91; -13; 35; 58; 61; 49; 27; 0; -27; -49; -61; -58; -35; 13; 91].$$

$l = 17$

$$a_0 = \frac{1}{323} [-21; -6; 7; 18; 27; 34; 39; 42; 43; 42; 39; 34; 27; 18; 7; -6; -21],$$

$$a_1 = \frac{1}{23256} [748; -98; -643; -930; -1002; -902; -673; -358; 0; 358; 673; 902; 1002; 930; 643; 98; -748],$$

$$a_2 = \frac{1}{7752} [40; 25; 12; 1; -8; -15; -20; -23; -24; -23; -20; -15; -8; 1; 12; 25; 40],$$

$$a_3 = \frac{1}{23256} [-28; -7; 7; 15; 18; 17; 13; 7; 0; -7; -13; -17; -18; -15; -7; 7; 28].$$

$l = 19$

$$a_0 = \frac{1}{2261} [-136; -51; 24; 89; 144; 189; 224; 249; 264; 269; 264; 249; 224; 189; 144; 89; 24; -51; -136],$$

$$a_1 = \frac{1}{255816} [6936; 68; -4648; -7481; -8700; -8574; -7372; -5363; -2816; 0; 2816; 5363; 7372; 8574; 8700; 7481; 4648; -68; -6936],$$

$$a_2 = \frac{1}{13566} [51; 34; 19; 6; -5; -14; -21; -26; -29; -30; -29; -26; -21; -14; -5; 6; 19; 34; 51],$$

$$a_3 = \frac{1}{255816} [-204; -68; 28; 89; 120; 126; 112; 83; 44; 0; -44; -83; -112; -126; -120; -89; -28; 68; 204].$$

$l = 21$

$$a_0 = \frac{1}{3059} [-171; -76; 9; 84; 149; 204; 249; 284; 309; 324; 329; 324; 309; 284; 249; 204; 149; 84; 9; -76; -171],$$

$$a_1 = \frac{1}{3634092} [84075; 10032; -43284; -78176; -96947; -101900; -95338; -79564; -56881; -29592; 0; 29592; 56881; 79564; 95338; 101900; 96947; 78176; 43284; -10032; -84075],$$

$$a_2 = \frac{1}{67298} [190; 133; 82; 37; -2; -35; -62; -83; -98; -107; -110; -107; -98; -83; -62; -35; -2; 37; 82; 133; 190],$$

$$a_3 = \frac{1}{519156} [-285; -114; 12; 98; 149; 170; 166; 142; 103; 54; 0; -54; -103; -142; -166; -170; -149; -98; -12; 114; 285].$$

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Афанасьев, В.Н. Анализ временных рядов и прогнозирование [Текст]: учебник / В.Н. Афанасьев, М.М. Юзбашев. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 228 с.

Бокс, Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление [Текст] / Дж. Бокс, Г. Дженкінс. – М.: Мир, 1974. – Вып. 1. – 406 с.; Вып. 2. – 198 с.

Голяндина, Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов [Текст]: учеб. пособие / Н.Э. Голяндина. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. – 76 с.

Голяндина, Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: прогноз временных рядов [Текст]: учеб. пособие / Н.Э. Голяндина. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. – 52 с.

Давнис, В. В. Прогнозные модели экспертных предпочтений [Текст] / В. В. Давнис. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2005. – 248с.

Дженкінс, Г. Спектральный анализ и его приложения [Текст] / Г. Дженнінс, Д. Ваттс. – М.: Мир, 1971. – Вып. 1. – 316 с.; Вып. 2. – 287 с.

Кендэл, М. Временные ряды [Текст] / М. Кендэл. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 199 с.

Лукашин, Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов [Текст]: учеб. пособие / Ю.П. Лукашин. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 416 с.

Отнес, Р. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы [Текст] / Р. Отнес, Л. Эноксон. – М.: Мир, 1982. – 428 с.

Принятие решений в системах мониторинга [Текст] / Т.Г. Емельяненко, А.В. Зберовский, А.Ф. Приставка, Б.Е. Собко. – Д.: РИК НГУ, 2005. – 224 с.

Приставка, О.П. Статистичний аналіз в АСОД: Часові ряди [Текст] / О.П. Приставка, П.О. Приставка, С.О. Смирнов. – Д.: РВВ ДДУ, 2000. – 112 с.

Статистична обробка даних [Текст] / В.П. Бабак, А.Я. Білецький, О.П. Приставка, П.О. Приставка. – К.: МІВВІЦ, 2001. – 388 с.

Френкель, А.А. Прогнозирование производительности труда: методы и модели [Текст] / А.А. Френкель. – М.: Экономика, 1989. – 213 с.

Хеннан, Э. Анализ временных рядов [Текст] / Э. Хеннан. – М.: Наука, 1964. – 216 с.

Brown, R.G. Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series [Text] / R.G. Brown. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs. – N.J., 1963.

Chen, S. M. Forecasting enrollments based on high-order fuzzy time series [Text] / S.M. Chen // Cybernetics and Systems: An Intern. J. – 2002. – N33. – P. 1–16.

Şah, M. Forecasting Enrollment Model Based on First-Order Fuzzy Time Series [Text] / M. Şah, K. Y. Degtarev // Proc. Int. Conf. Computational Intelligence (ICCI). – 2004. – P. 375–378.

Song, Q. Fuzzy time series and its models [Text] / Q. Song, B. Chissom // Fuzzy Sets and Systems. – 1993. – N54. – P. 269–277.

Zadeh, A. Lotfi. Fuzzy Sets [Text] / Lotfi A. Zadeh // Information and Control. – 1965. – Vol.8. – P. 338–353.