

**О.І. Білобородько, Т.Г. Ємел'яненко**

**АНАЛІЗ ДИНАМІЧНИХ РЯДІВ**

**2014**

**Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Дніпропетровський національний університет  
ім. Олеся Гончара**

**О.І. Білобородько, Т.Г. Ємел'яненко**

## **АНАЛІЗ ДИНАМІЧНИХ РЯДІВ**

*Ухвалено науково-методичної радою  
як навчальний посібник*

**Дніпропетровськ  
РВВ ДНУ  
2014**

УДК 519.246.8 (075.8)

ББК 22.172я73

В 61

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, доц. В.Б. Говоруха  
д-р техн. наук, проф. О.Г. Байбуз

В 61        Аналіз динамічних рядів [Текст] : навч. посіб./ О.І. Білобородько,  
                Т.Г. Ємел'яненко. – Д.: РВВ ДНУ, 2014. – 80 с.

Розглянуто загальні характеристики одномірних динамічних рядів, типи тенденцій та методи їх розпізнавання, методи оцінювання параметрів коливань, змін стійкості рівнів ряду та тенденції динаміки. Викладено статистичні та адаптивні методи аналізу та прогнозування динамічних рядів, методи нового напрямку досліджень – прогнозування динамічних рядів за допомогою апарату нечіткої логіки.

Для студентів спеціальності «Прикладна математика», «Програмне забезпечення систем».

Темпплан 2014, поз. 28

Навчальне видання

Оксана Іванівна Білобородько  
Тетяна Георгіївна Ємел'яненко

**Аналіз динамічних рядів**  
**Навчальний посібник**

Редактор **А.А. Гриженко**  
Техредактор **Л.П. Замятіна**  
Коректор **А.А. Гриженко**

---

Підписано до друку **29.09.11**. Формат 60x84/16. Папір друкарський. Друк плоский.  
Ум. друк. арк. **5**. Ум. фарбовідб. **3,7**. Обл. вид. арк. **3,3**. Тираж 100 пр. Зам. №

---

РВВ ДНУ, просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010.

Друкарня ДНУ, вул. Наукова, 5, м. Дніпропетровськ, 49050

© Білобородько О.І., Ємел'яненко Т.Г. 2014

## ВСТУП

В сучасних умовах важливі рішення повинні прийматись лише спираючись на ретельний аналіз наявної інформації. Для розв'язання задач, пов'язаних з аналізом даних при наявності випадкових впливів, використовується апарат прикладної статистики, складовою частиною якого є статистичні методи прогнозування. Необхідність використання таких методів виникає досить часто, вони використовуються для прогнозування показників фондового ринку, грошових потоків, змін матеріальних запасів на складах та в магазинах та багатьох інших випадках. Трендові та тренд-сезонні моделі з їх простотою дозволяють отримати надійніші результати прогнозування, навіть ніж складні економіко-математичні моделі, які базуються на системах алгебраїчних та диференціальних рівнянь, особливо при короткотерміновому та середньо терміновому прогнозуванні. Разом з тренд-сезонними моделями в сучасних умовах використовують моделі, які враховують невелику кількість останніх даних та здатні адаптуватись до змін процесу – адаптивні моделі.

Можна виділити три основні задачі дослідження динамічних рядів.

Перша з них полягає в описі змін відповідного показника в часі і виявленні тих чи інших властивостей ряду, що досліджується. Для цього вдаються до різноманітних способів: розрахунку узагальнюючого показника зміни рівнів у часі – середнього темпу зростання; застосуванню різних згладжуючих фільтрів, що зменшують коливання рівнів у часі і дозволяють більш чітко уявити тенденції розвитку; підбору кривих, що характеризують ці тенденції; виділенню сезонних та інших періодичних і випадкових коливань; вимірюванню залежності між членами ряду (автокореляції). До методів опису деякої властивості динаміки можна з певною підставою віднести і методи перевірки наявності або відсутності довгострокових тенденцій ряду.

Другою важливою задачею аналізу є пояснення механізму зміни рівнів ряду. Для її вирішення зазвичай вдаються до регресійного аналізу.

Нарешті, третя задача – опис зміни ряду динаміки і пояснення механізму формування ряду часто використовується для статистичного прогнозування, яке в більшості випадків зводиться до екстраполяції виявлених тенденцій розвитку.

Запропоноване видання містить викладення основ теорії аналізу динамічних рядів. Посібник поділено на теми, в яких розглянуто питання визначення та класифікації динамічних рядів; перевірки динамічних рядів на випадковість; згладжування; регресійного підходу до аналізу та прогнозування динамічних рядів, до складу якого ввійшли процедури визначення лінійного та нелінійного трендів, циклічної складової, гетероскедастичності та автокореляції; адаптивного прогнозування; прогнозування з використанням нечіткого підходу та сингулярного спектрального аналізу.

# ТЕМА 1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ, ВИДИ ТА ЗАДАЧА АНАЛІЗУ ДИНАМІЧНИХ РЯДІВ

Динамічні процеси, які відбуваються в економічних, виробничих та технічних системах, в багатьох випадках можуть бути представлені у вигляді ряду значень (спостережень) деякого показника (явища), послідовно розташованих в хронологічному порядку. Зміни цього показника відображують хід розвитку процесу, який досліджується.

Послідовність спостережень одного показника (ознаки), впорядкована в залежності від послідовно зростаючих чи спадаючих значень іншого показника, називається **динамічним рядом**, або **рядом динаміки**. Якщо в якості ознаки, в залежності від якої відбувається впорядкування, розглядається час, тоді такий динамічний ряд називають **часовим рядом**.

Спостереження за деяким явищем, характер якого змінюється в часі, породжує впорядковану послідовність, яка називається **часовим рядом**. Оскільки впорядкування зазвичай відбувається за часом, то три наведених терміна будемо розглядати як рівнозначні.

Елементами динамічних рядів є значення (спостереження) досліджуваного показника, які називають **рівнями ряду**, та моменти або інтервали часу, яким вони відповідають. Тобто часовий ряд може бути заданий за допомогою двох систем:

- 1)  $t_1, t_2, \dots, t_N$  – система часових параметрів,  $t_i - t_{i-1} = h$ ,  $h = const$  ;
- 2)  $\{u(t_i)\} = \{u_i; i = \overline{1, N}\}$  – система спостережень (рівні ряду).

Якщо  $u_i$  – вектори, то отримуємо багатомірний часовий ряд.

**Довжиною ряду** вважають час, що пройшов від першого моменту спостереження до останнього ( $t_N - t_1$ ), або кількість рівнів ряду  $N$ .

Класифікацію часових рядів проводять за наступними ознаками:

1) за часом – моментні та інтервальні. Часові ряди, в яких значення показника відповідає конкретним моментам часу, називаються **моментними**. Наприклад, температурні показники за кожен день місяцю. Якщо рівні часового ряду утворюються накопиченням, усередненням, або будь-яким іншим методом агрегування, за певний проміжок часу, такі ряди є **інтервальними**. Наприклад, ряд показників обсягу продукції підприємства в окремі місяці року. Різниця моментних рядів від інтервальних в тому, що сума рівнів інтервального ряду є цілком реальним показником – загальний обсяг продукції за рік, а сума рівнів моментного ряду не має реального змісту;

2) по формі представлення рівнів – ряди **абсолютних** (кількість пацієнтів), **відносних** (індекси цін) або **середніх** (середня заробітна плата) величин;

3) по відстані між датами або інтервалами часу – повні та неповні часові ряди. **Повні часові ряди** мають місце, коли дати фіксування або закінчення періодів йдуть одна за одною з рівними інтервалами, **неповні** – коли принцип рівних інтервалів порушується.

Часовий ряд має суттєві відмінності від вибірки:

- 1) порядок елементів в послідовності  $\{u_i\}$  суттєвий;
- 2) значення  $\{u_i\}$  залежні, що дає можливість прогнозування;
- 3) часовий ряд нестационарний;
- 4) змінна часу може бути неперервною, тоді послідовність  $\{u(t_i)\}$  буде нескінченною, на відміну від вибірки, які завжди скінчені.

Динамічний ряд можна представити у вигляді деякої детермінованої функції  $f(t)$ , якою визначається основна складова ряду, та випадкової складової

$$u(t) = f(t) + \xi_t, \text{ або } u(t) = f(t) * \xi_t \quad (1.1)$$

де  $\xi_t$  – залишки ряду або нерегулярні флюктуації, для яких виконуються умови

$$M\{\xi_t\} = 0, \quad \text{corr}(\xi_t, \xi_{t+k}) = 0. \quad (1.2)$$

Існує два підходи до аналізу часових рядів: класичний або регресійний та адаптивний. При регресійному підході функція  $f(t)$  представляється у вигляді трьох складових:

$T(t)$  – лінія тренду, що показує глобальні зміни досліджуваного явища;

$S(t)$  – сезонність, яка відображає коливання відносно тренду, що обумовлені зовнішніми впливами;

$A(t)$  – циклічність (автоколивання) – більш-менш регулярні коливання відносно тренду, обумовлені внутрішньою природою досліджуваного явища. Про наявність автоколивань свідчить умова  $\text{corr}(u_t, u_{t+k}) \neq 0$ .

Часовий ряд може бути подано у вигляді суми відповідних компонент, тоді отримуємо адитивну форму моделі

$$f(t) = T(t) + S(t) + A(t) + \xi_t, \quad (1.3)$$

або у вигляді добутку відповідних компонент, тоді отримуємо мультиплікативну форму моделі

$$f(t) = T(t) * S(t) * A(t) * \xi_t. \quad (1.4)$$

У деяких випадках використовують змішану форму

$$f(t) = T(t) * S(t) * A(t) + \xi_t, \quad (1.5)$$

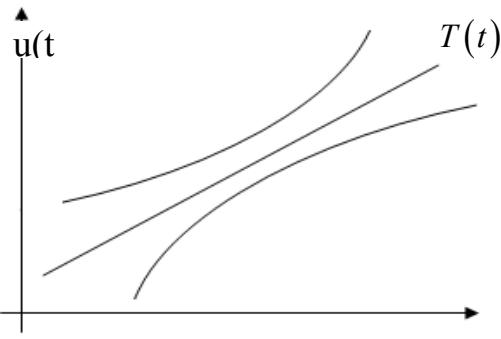
При використанні адаптивних методів функція  $f(t)$  представляється у вигляді

$$f(t) = f(a_{1t}, a_{2t}, a_{kt}, t).$$

Цей підхід доцільно використовувати під час аналізу коротких часових рядів. Проте в прогнозі цей метод дає меншу точність.

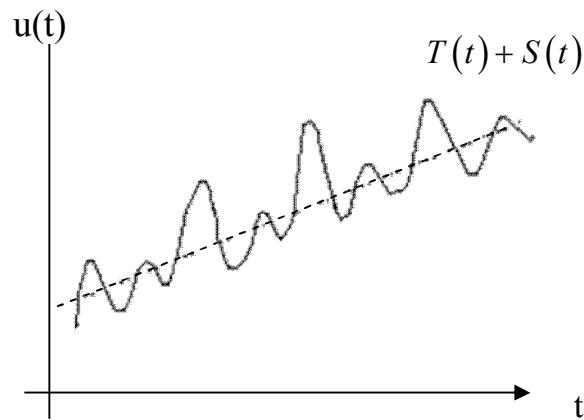
При використанні регресійного підходу можливо виділити такі базові моделі.

1. Гладкий ряд – зростаючий (рис. 1.1) чи спадаючий ряд. Гладкий ряд характеризується відсутністю сезонних, випадкових та циклічних коливань. Прикладами таких рядів є демографічні ряди, а також ряди в сфері виробництва та торгівлі, пов’язані з демографічним фактором. Так споживання зубної пасти не припиняється навіть у разі втрати роботи.



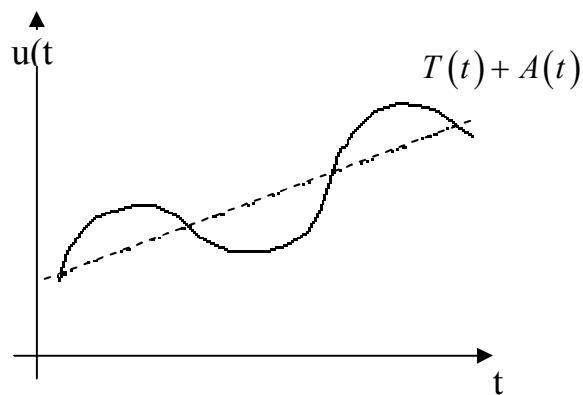
**Рис. 1.1. Гладкий зростаючий часовий ряд**

2. Часовий ряд з сезонними коливаннями (рис. 1.2). Поряд з довготрива-лими тенденціями в динамічних рядах мають місце більш або менш регулярні коливання – періодичні складові рядів динаміки. Якщо період коливань не перевищує 1 рік (12 місяців), тоді їх називають сезонними. Частіше за все причиною їх виникнення вважаються природно-кліматичні умови. Інколи сезонні коливання мають соціальний характер. Наприклад, збільшення закупівель в передсвяткові періоди, збільшення платежів в кінці кварталу.



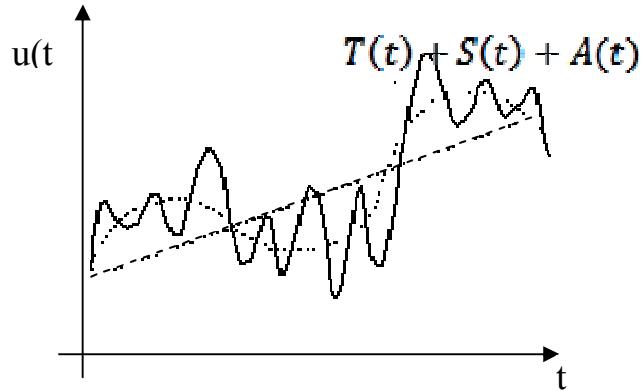
**Рис. 1.2. Часовий ряд зі зростанням та сезонними коливаннями**

3. Наявність циклічних коливань при відсутності сезонних (рис. 1.3). У разі, коли період коливань є значно більшим за 12 місяців, або не пов'язаний з природно-кліматичними умовами, вважають що має місце циклічна складова. Прикладами можуть бути демографічні або інвестиційні цикли. Приклад на рис. 1.3 штучний. Важко навести приклади динамічного ряду з циклічними коливаннями та водночас без сезонних коливань.



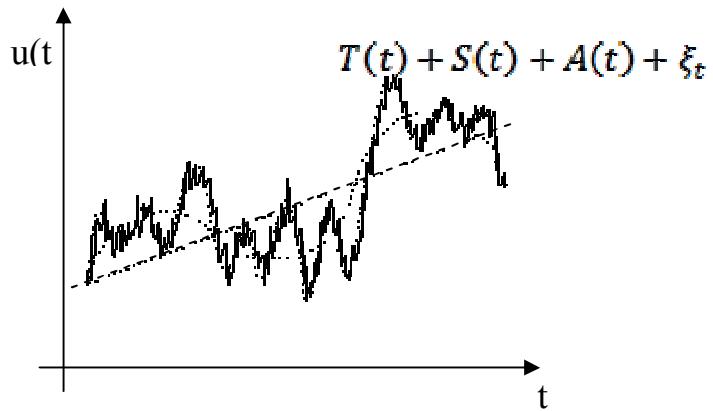
**Рис. 1.3. Часовий ряд з циклічними коливаннями**

4. Наявність сезонних та циклічних коливань. На практиці є типовим, коли динамічні ряди мають цикли різної довжини.



**Рис. 1.4. Часовий ряд зі зростанням, сезонними та циклічними коливаннями**

5. Наявність сезонних, циклічних та випадкових коливань. Фактори, під дією яких формується нерегулярна компонента бувають двох видів. По-перше, різкої, раптової дії (стихійні лиха, епідемії) – катастрофічні коливання. Вони викликають більш значні відхилення ніж коливання другого типу – випадкові коливання, що є результатом дії великої кількості побічних причин. Вплив окремих факторів незначний, але їх сумарний вплив істотно відчувається.



**Рис. 1.5. Часовий ряд зі зростанням, сезонними, циклічними та випадковими коливаннями**

В залежності від довжини ряду  $N$  вирізняють короткі ( $N \leq 20$ ), середні ( $20 < N \leq 50$ ) та довгі ( $N > 50$ ) часові ряди.

Основна задача аналізу часових рядів полягає у виділенні на основі відомого відрізу часового ряду детермінованої та випадкової компоненти, а також в оцінці їх характеристик. Отримавши оцінки цих складових можна вирішувати задачу прогнозу як самого ряду, так і його складових.

Виділяють короткотермінові (від 1 до 5 кроків), середньотермінові (від 6 до 10 кроків) та довгі (більше 10 кроків) прогнози.

Довгі прогнози як правило є неадекватними. Прогноз буде мати цінність, якщо  $D\{\xi_t\} \ll D\{u_t\}$ .

Для успішного дослідження динаміки процесу необхідно, щоб інформація була повною та часовий ряд мав достатню довжину. При визначенні сезонних коливань бажано мати інформацію не менш ніж за 3 періоди.

Застосування певного математичного апарату також накладає обмеження на необхідну довжину часових рядів. Так використання регресійного аналізу вимагає, щоб довжина ряду в декілька разів перевищувала кількість незалежних змінних.

### *Контрольні питання за темою*

1. Що таке «динамічний ряд»?
2. Що таке «часовий ряд»?
3. Чим часовий ряд відрізняється від вибірки?
4. Як можна отримати часовий ряд, якщо початковий ряд даних  $y(t) \neq y(i * h)$ ?
5. Назвіть задачі аналізу часових рядів?
6. Які часові ряди розглядає математична статистика?
7. Які Ви знаєте складові часового ряду?
8. Як математично можна представити часовий ряд?

## **ТЕМА 2. ДОСЛІДЖЕННЯ ЧАСОВОГО РЯДУ НА ВИПАДКОВІСТЬ**

Нехай задана упорядкована послідовність  $u_1, u_2, \dots, u_N$ . Необхідно визначити, чи представляють ці дані результати спостереження деякої випадкової величини (тобто вибірки з генеральної сукупності) або часовий ряд.

Вимоги до критеріїв перевірки на адекватність.

1. Критерій по можливості не повинен залежати від розподілу випадкової величини  $\xi_t$ .
2. Критерій повинен бути простим з обчислювальної точки зору.
3. Із всіх критеріїв обирається той, у якого альтернативною гіпотезою буде гіпотеза, що співпадає з очікуваними властивостями часового ряду.

### *Критерій екстремальних точок*

Даний критерій є найбільш потужним, коли в якості альтернативної гіпотези використовується гіпотеза про циклічність.

Критерій екстремальних точок є найбільш простим та базується на розрахунку кількості піків і ям в масиві даних. Екстремальною точкою («піком» або «ямою») називається значення, яке більше або менше і попереднього і наступного значення. Якщо маємо два або більше одинакових екстремальних значень, розташованих поруч, то враховується лише одне значення. Інтервал між екстремальними точками називається фазою.

Максимальна кількість «піків» та «ям» на одиницю менша кількості інтервалів монотонності.

Для визначення екстремальної точки потрібні три послідовні спостереження. Коли ряд випадковий, ці три величини могли б з'явитися в будь-якому порядку: всього шість варіантів. Наприклад,  $1, 2, 3; 1, 3, 2; 3, 1, 2; 3, 2, 1; 2, 1, 3; 2, 3, 1$ . Тільки у чотирьох з них  $1, 3, 2; 3, 1, 2; 2, 1, 3; 2, 3, 1$  є екстремальна точка. Отже ймовірність появи екстремальної точки у випадку трьох спостережень є **2/3**.

Розглянемо головну гіпотезу

$H_0$ : про випадковість часового ряду, при альтернативі

$H_1$ : про циклічність ряду.

Введемо індикатор екстремальної точки

$$x_i = \begin{cases} 1, & u_{i-1} < u_i > u_{i+1} \text{ або } u_{i-1} > u_i < u_{i+1} \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

$E = \sum_{i=2}^{N-1} x_i$  – загальна кількість екстремальних точок;

$$M\{E\} = \sum_{i=2}^{N-1} M\{x_i\} = \frac{2}{3}(N-2); \quad D\{E\} = \frac{16N-29}{90}.$$

Якщо  $N \rightarrow \infty$ , то розподіл величини  $E$  збігається до нормального розподілу.

Тому обчислимо статистику  $S = \frac{E - M\{E\}}{\sqrt{D\{E\}}}$  та порівняємо її з квантилем  $u_{\alpha/2}$

нормального розподілу з параметрами  $m = 0, \sigma = 1$  та рівнем значущості  $\alpha$ .

Якщо  $|S| \leq u_{\alpha/2}$ , то основна гіпотеза приймається, тобто ряд є випадковим, інакше є вірною гіпотеза про циклічність ряду.

### *Критерій, що базується на знаках різниці*

Даний критерій є найбільш потужним та ефективним, коли в якості альтернативи використовується гіпотеза про наявність тренду.

$H_0$ : про випадковість часового ряду, при альтернативі

$H_1$ : про наявність тренду.

Заданий ряд  $u_1, u_2, \dots, u_N$ . В якості індикатора обираємо

$$x_i = \begin{cases} 1, & u_i < u_{i+1}, i = \overline{1, N-1} \\ 0, & u_i \geq u_{i+1}, \end{cases}$$

Ті  $u_i$ , для яких  $x_i = 1$  називаються точками росту.  $C = \sum_{i=1}^{N-1} x_i$  – загальна кількість

точок росту;  $M\{C\} = \frac{N-1}{2}; D\{C\} = \frac{N+1}{12}; K = \frac{C - M\{C\}}{\sqrt{D\{C\}}}$  – нормована випадкова

величина має асимптотично нормальній розподіл з параметрами  $N \sim (0; 1)$ . Порівнюють  $K$  з  $u_{\alpha/2}$  – квантилем  $N \sim (0; 1)$  з заданим рівнем значущості  $\alpha$ .

Якщо  $|K| \leq u_{\alpha/2}$ , то справедлива гіпотеза  $H_0$ , тобто ряд є випадковим.

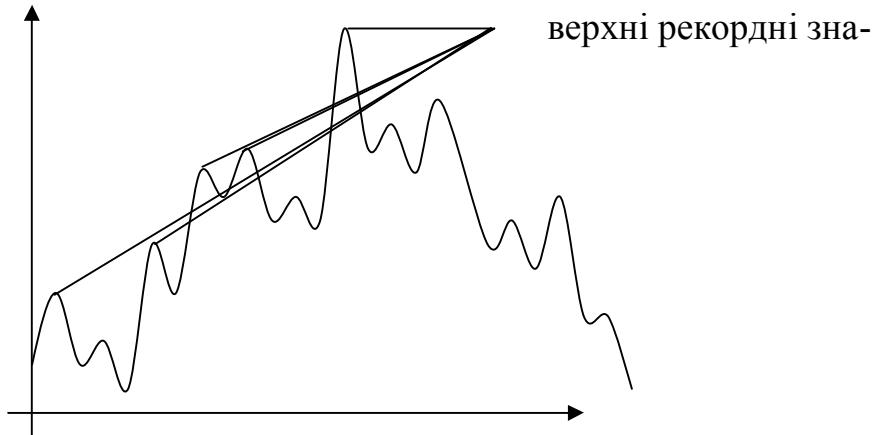
Якщо  $K < -u_{\alpha/2}$ , то має місце гіпотеза  $H_1$ , з тенденцією ряду до спадання.

Якщо  $K > u_{\alpha/2}$ , то має місце гіпотеза  $H_1$ , з тенденцією ряду до зростання.

### Критерій рекордних значень

Даний критерій є найбільш потужним та ефективним, коли в якості альтернативи використовується гіпотеза про наявність тренда.

Даний критерій запропоновано Ф. Фостером та А. Стюартом, він базується на дослідженні рекордних значень, які визначаються шляхом порівняння рівнів ряду. Спостереження  $u_i$  є верхнім (нижнім) рекордним значенням, якщо його рівень більше (менше), ніж всі попередні значення, рівні ряду.



**Рис. 2.1. Рекордні значення**

Критерій базується на перевірці головної статистичної гіпотези  $H_0$  з альтернативною гіпотезою  $H_1$  у наступному вигляді.

$H_0$ : ряд випадковий;

$H_1$ : наявність тренду.

Вводяться два індикатора

$$l_i = \begin{cases} 1, & u_i < u_1 \wedge \dots \wedge u_i < u_{i-1}, \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases} \quad m_i = \begin{cases} 1, & u_i > u_1 \wedge \dots \wedge u_i > u_{i-1}, \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases} \quad i = \overline{2, N},$$

де  $l_i$  – нижні рекордні значення;

$m_i$  – верхні рекордні значення;

$L = \sum_{i=2}^N l_i$  – загальна кількість нижніх рекордних значень;

$M = \sum_{i=2}^N m_i$  – загальна кількість верхніх рекордних значень.

Якщо знайдено рекордне значення, яке зустрічалось раніше, воно не враховується, а загальна кількість  $N$  зменшується на одиницю.

Далі обчислюють статистичні характеристики  $D$  та  $S$ .

Характеристика  $D = M - L$  – визначає перший критерій Фостера-Стюарта.

Характеристика  $S = M + L$  – визначає другий критерій Фостера-Стюарта. Величини  $D$  та  $S$  нормально розподілені, проте з різними параметрами. За допомогою величини  $D$  визначається тенденція зміни середнього; а величина  $S$  до-

зволяє визначити тенденцію зміни середньоквадратичного. Для цього окремо розглядаються гіпотези

$$H_0 : D = 0, \quad H_1 : D \neq 0$$

та

$$H_0 : S = \mu, \quad H_1 : S \neq \mu.$$

Якщо основна гіпотеза для першої пари є вірною, то  $M\{D\} = 0$ ,  $D\{D\} = \sum_{i=2}^N \frac{2}{i} = \mu$ .

Для другої пари гіпотез  $M\{S\} = D\{D\} = \mu$ ,  $D\{S\} = \sum_{i=2}^N \left( \frac{2}{i} - \frac{4}{i^2} \right)$ .

$$\text{Обчислюємо } T_1 = \frac{D - M\{D\}}{\sqrt{D\{D\}}} \quad \text{та} \quad T_2 = \frac{S - M\{S\}}{\sqrt{D\{S\}}}.$$

Статистичні характеристики  $T_1$  та  $T_2$  мають нормальній розподіл з параметрами  $(0;1)$ .

Якщо  $|T_1| \leq u_{\alpha/2}$ , то основна гіпотеза приймається і тенденції в зміні середнього немає, тобто тренда немає.

Якщо  $T_1 > u_{\alpha/2}$ , то присутня тенденція до зростання середнього рівня.

Якщо  $T_1 < -u_{\alpha/2}$ , то присутня тенденція до спадання середнього рівня.

Якщо  $|T_2| \leq u_{\alpha/2}$ , то основна гіпотеза приймається, тенденції в зміні дисперсії немає.

Якщо  $T_2 > u_{\alpha/2}$ , то присутня тенденція до зростання дисперсії.

Якщо  $T_2 < -u_{\alpha/2}$ , то присутня тенденція до спадання дисперсії.

$u_{\alpha/2}$  – квантиль  $N \sim (0; 1)$  з заданим рівнем значущості  $\alpha$ .

Іноді замість нормального розподілу використовується  $t$ -розподіл Стьюдента з  $N - 1$  ступенем свободи.

### Ранговий критерій Спірмена

Виконується перевірка головної гіпотези

$$H_0 : \text{ряд випадковий, з альтернативною гіпотезою}$$

$$H_1 : \text{про наявність тренду.}$$

Нехай задана послідовність  $u_1, u_2, \dots, u_N$ . Визначимо матрицю індикаторів

$$\left\{ h_{i,j}; i = \overline{1, N-1}, j = \overline{i+1, N} \right\} = \begin{cases} 1 & u_i < u_j \\ 0.5 & u_i = u_j \\ 0 & u_i > u_j \end{cases} \quad (2.1)$$

Розглядаються всі пари чисел, для яких  $i < j$ , тобто тільки частина матриці, що вища за головну діагональ. Використовуючи матрицю індикаторів обчислюється статистика

$$V = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (j-i) h_{ij}. \quad (2.2)$$

Коефіцієнт рангової кореляції  $\tau_C$  між порядком величин в часі та порядком за величиною  $u$  має нормальній розподіл та визначається як

$$\tau_C = 1 - \frac{12V}{N(N^2 - 1)}. \quad (2.3)$$

Для випадкового ряду виконуються наступні умови  $M\{\tau_C\} = 0$ ,  $D\{\tau_C\} = \frac{1}{N-1}$ .

Тому для перевірки основної гіпотези обчислюється статистика

$$S = \frac{\tau_C}{\sqrt{D\{\tau_C\}}}, \quad (2.4)$$

Яка має нормальній розподіл з параметрами  $m = 0$ ,  $\sigma = 1$ .

Якщо  $|S| \leq u_{\alpha/2}$ , то справедлива гіпотеза  $H_0$ , тобто ряд є випадковим.

Якщо  $S < -u_{\alpha/2}$ , то має місце гіпотеза  $H_1$ , з тенденцією ряду до зростання.

Якщо  $S > u_{\alpha/2}$ , то має місце гіпотеза  $H_1$ , з тенденцією ряду до спадання.

$u_{\alpha/2}$  – квантиль нормального розподілу  $N \sim (0; 1)$  з заданим рівнем значущості  $\alpha$ .

### Ранговий критерій Манна

Критерій Манна використовують для перевірки статистичної гіпотези

$H_0$ : про випадковість ряду, з альтернативною гіпотезою

$H_1$ : про наявність тренду.

У послідовності  $u_1, u_2, \dots, u_N$  підраховують величину  $T_n$  як кількість випадків, коли більш раннє значення часового ряду  $u_i$  менше одного з більш пізніх значень  $u_j$ , тобто кількість нерівностей  $u_i < u_j$  при  $i < j$ . Якщо два поруч розташовані спостереження мають однакове значення, то до величини  $T_n$  додається 0.5 замість 1. Використовуючи матрицю індикаторів з попереднього критерію, отримуємо

$$T_n = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N h_{i,j}.$$

В послідовності з  $N$  елементів з урахуванням умови  $i < j$  можна утворити лише  $N(N-1)/2$ , а ймовірність того, що в парі  $u_i$  буде менше ніж  $u_j$  при  $i < j$ , дорівнює  $1/2$  (рівність не враховуємо, розглядаємо як дискретний випадок), то

$$M\{T_n\} = \frac{N(N-1)}{2} \cdot \frac{1}{2}; \quad D\{T_n\} = \frac{(2N+5)N(N-1)}{72}.$$

У випадку, коли основна гіпотеза  $H_0$  є вірною, величина  $T_n$  має нормальній розподіл з вказаними параметрами. Тому для перевірки основної гіпотези обчислюємо нормовану величину

$$U = \frac{T_n - M\{T_n\} + 0.5}{\sqrt{D\{T_n\}}}.$$

Поправка 0.5 при обчисленні  $U$  враховує рівність  $u_i = u_j$ .

Якщо  $|U| \leq u_{\alpha/2}$ , справедлива гіпотеза  $H_0$ , і ряд є випадковим.

Якщо  $U < -u_{\alpha/2}$ , має місце гіпотеза  $H_1$ , з тенденцією ряду до спадання.  
 Якщо  $U > u_{\alpha/2}$ , має місце гіпотеза  $H_1$ , з тенденцією ряду до зростання.

### **Критерій випадковості, що базується на серіальній кореляції**

Якщо ряд невипадковий, то існує деяка залежність між рівнями ряду. Характеристикою, що свідчить про наявність будь-якої залежності є кореляція між послідовними рівнями часового ряду.

Нехай задано часовий ряд  $u_1, u_2, \dots, u_N$ . Серіальною кореляцією  $r_k$  з запізненням  $k$  (або з лагом  $k$ ) називають кореляцію між елементами часового ряду, які розташовані на відстані  $k$  одиниць один від одного.

$$r_1 = \text{corr}(u_1, u_2, \dots, u_{N-1}; u_2, u_3, \dots, u_N),$$

$$r_2 = \text{corr}(u_1, u_2, \dots, u_{N-2}; u_3, u_4, \dots, u_N),$$

...

$$r_{N/2} = \text{corr}(u_1, u_2, \dots, u_{N/2}; u_{N/2+1}, \dots, u_N),$$

де  $\text{corr}(x, y) = \frac{\bar{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{D_x D_y}}$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{xy}$  – відповідні середні значення,  $D_x$ ,  $D_y$  – вибіркові дисперсії,  $r_0 = 1$ .

Послідовність  $r_0, r_1, \dots, r_{N/2}$  називається корелограмою. Графік залежності  $r_k$  від  $k$  також називається **корелограмою**. Для довгих часових рядів ( $N > 50$ ) для обчислення  $r_k$  використовується спрощена формула

$$r_k = \frac{\frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (u_i - \bar{u})(u_{i+k} - \bar{u})}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})^2}, \quad \bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i.$$

Для коротких та середніх часових рядів використовується формула

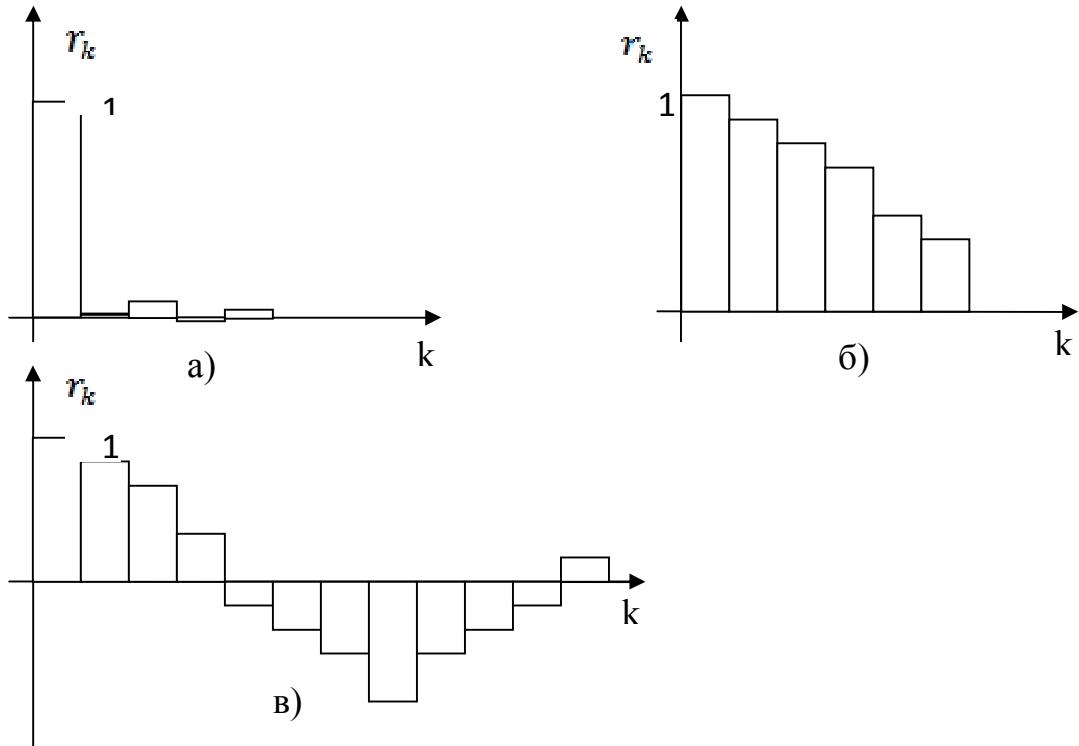
$$r_k = \frac{\frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} \left( u_i - \frac{1}{N-k} \sum_{j=1}^{N-k} u_j \right) \left( u_{i+k} - \frac{1}{N-k} \sum_{j=1}^{N-k} u_{j+k} \right)}{\left( \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} \left( u_i - \frac{1}{N-k} \sum_{j=1}^{N-k} u_j \right)^2 \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} \left( u_{i+k} - \frac{1}{N-k} \sum_{j=1}^{N-k} u_{j+k} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Для випадкових часових рядів всі  $r_i$ , крім  $r_0$  статистично дорівнюють нулю.

Виходячи з цього, перевірка ряду на випадковість полягає в перевірці на значущість коефіцієнтів кореляції. При наявності тренду коефіцієнти кореляції є значущими. Статистика для перевірки на значущість  $k$ -го коефіцієнта

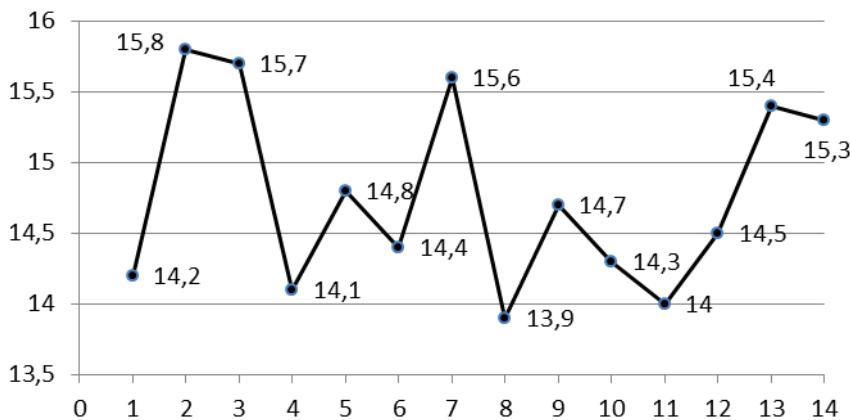
$$t_k = \frac{r_k \sqrt{N-k-2}}{\sqrt{1-r_k^2}}$$

має розподіл Стьюдента з кількістю степенів вільності  $v = N - k - 2$ . Якщо  $|t_k| \leq t_{v, \alpha/2}$ , то коефіцієнт є незначущим.



**Рис. 2.2. Варіанти корелограмми**  
**а) випадковий ряд; б) присутній тренд; в) сезонність**

Приклад 1. Перевірити ряд на випадковість за допомогою критерію екстремальних точок (**14.2, 15.8, 15.7, 14.1, 14.8, 14.4, 15.6, 13.9, 14.7, 14.3, 14.0, 14.5, 15.4, 15.3**).



**Рис. 2.3. Графічне зображення ряду з прикладу 1**

Екстремальні точки: «піки» – 15.8, 14.8, 15.6, 14.7;  
 «ями» – 14.1, 14.7, 13.9.

Загальна кількість –  $E=7$ ,  $M\{E\} = \frac{2}{3}(N-2)=8$ ;  $D\{E\} = \frac{16N-29}{90}=1,81$ .

$$S = \frac{E - M\{E\}}{\sqrt{D\{E\}}} = -0,75.$$

При  $\alpha = 0.05$ ,  $u_{\alpha/2} = 1.96$ .  $|S| = |-0.75| = 0.75$ .  $0.75 < 1.96$ . Отже робимо висновок, що ряд є випадковим.

Приклад 2. Перевірити ряд на випадковість за допомогою критерію Спірмена (25, 28, 27, 26, 24, 20, 22, 22, 21, 19, 16, 17, 15, 13, 12, 14, 13, 11).

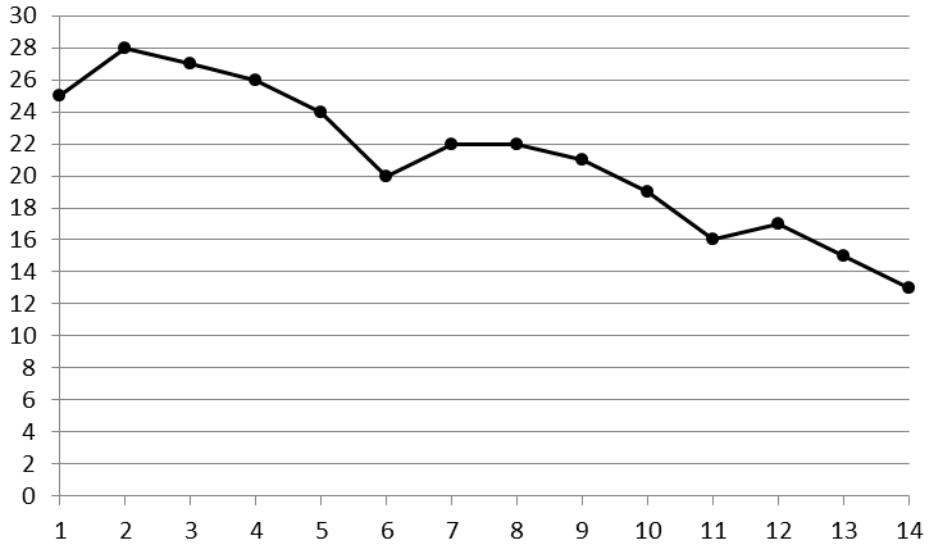


Рис. 2.4. Графічне зображення ряду з прикладу 2

Обчислимо за формулою (2.1) матрицю індикаторів

$$\{h_{ij}\} = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Далі проведемо розрахунки за формулами (2.2) – (2.4).

$$V = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2 + 0.5^2 + 1^2 = 13.5.$$

$$\tau_c = 1 - \frac{12 * 13.5}{14 * (14^2 - 1)} = 1 - 0.059 = 0.941, D\{\tau_c\} = \frac{1}{13} = 0.077, S = \frac{0.941}{\sqrt{0.077}} = 3.393.$$

При  $\alpha = 0.05$ ,  $u_{\alpha/2} = 1.96$ .  $|S| = 3.393$ .  $3.393 > 1.96$ . Отже робимо висновок, що ряд не є випадковим, та має тенденцію до спадання.

### Контрольні питання за темою

- Які часові ряди розглядає математична статистика?

2. Що являє собою стаціонарний (нестаціонарний) ряд, випадковий (невипадковий) ряд?
3. Що таке тренд?
4. Дайте визначення корелограми. Які висновки можна зробити при її аналізі?
5. Назвіть критерії, за допомогою яких можна перевірити гіпотезу про наявність сезонних або циклічних коливань?
6. За допомогою якого критерію перевіряється існування тенденції в зміні середньоквадратичного відхилення рівнів ряду від лінії тренду?
7. Який критерій дозволяє одночасно визначити наявність тренду та сезонних або циклічних коливань? Чи можна з його допомогою визначити період?
8. Що таке квантиль розподілу?
9. Навіщо нормується статистика, яка має нормальній розподіл?
10. Порівняйте потужності різних критеріїв.

### **ТЕМА 3. МЕТОДИ ЗГЛАДЖУВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ**

Пошук та аналіз тенденцій динамічного ряду у багатьох випадках виконується за допомогою його вирівнювання або згладжування. Також інколи необхідно виконати попередню обробку часового ряду, яка складається з вилучення аномальних значень ряду. Аномальні значення також можуть бути вилучені за допомогою згладжування. Аномальні значення часового ряду не відповідають досліджуваній задачі, та їх використання для побудови трендової моделі може сильно викривити результати досліджень. Причинами появи аномальних значень можуть бути технічні помилки при отриманні, обробки та пересилці інформації. Такі помилки називають помилками першого роду. Їх можна виявити та вжити заходів для їх усунення. Окрім того, аномальні рівні ряду можуть виникати через вплив факторів, що мають об'єктивний характер, але відбуваються рідко. Такі помилки називають помилками другого роду, їх усунути не можливо. В цьому випадку необхідно виключити з подальшого розгляду ці аномальні значення.

По суті різні прийоми згладжування полягають в заміщенні фактичних рівнів часового ряду розрахованими рівнями, які мають менші коливання. Це сприяє більш чіткому прояву тенденції розвитку. Інколи вирівнювання використовують як попередній етап перед використанням інших методів пошуку тенденцій.

#### **Вирівнювання за допомогою рухомого середнього**

Метод рухомого середнього (MA – moving average) базується на переході від початкових значень часового ряду до їх середніх значень на деякому інтервалі часу, довжина якого називається **шириною вікна**.

Цей інтервал на кожному кроці зміщується, начебто рухається уздовж ряду. Також при обчисленні значення нового рівня ряду використовується тільки частина ряду, що потрапляє у «вікно».

Рухомі середні дозволяють згладити як випадкові, так і періодичні коливання, виявити наявну тенденцію розвитку процесу, тому є важливим інструментом при фільтрації компонент часового ряду.

Як зазначено вище, на кожному кроці серед елементів початкового ряду  $\{u_i\}$ ,  $i = \overline{1, N}$  обирають по  $l$  елементів. Зазвичай в процедурах рухомого середнього  $l$  обирають непарним  $l = 2m + 1$  та, з метою спростити обчислення, виконують перенумерування елементів наступним чином

$$u_{-m}, u_{-(m-1)}, \dots, u_0, \dots, u_{m-1}, u_m. \quad (3.1)$$

В цьому випадку нове обчислене значення буде відповідати центральному значенню  $u_0$ .

Серед процедур рухомого середнього вирізняють:

- процедури простого рухомого середнього;
- процедури зваженого рухомого середнього.

Якщо досліджуване явище має лінійний характер, використовується просте рухоме середнє.

Алгоритм згладжування простим рухомим середнім має наступні кроки.

Крок 1. Визначити довжину вікна (інтервалу згладжування)  $l$ .

Крок 2. Розбити весь період спостережень на інтервали, що містять  $l$  елементів та розташовані один відносно з зсувом 1.

Крок 3. Для кожного інтервалу розрахувати арифметичні середні рівнів ряду, що потрапили в інтервал

$$\hat{u}_0 = \frac{1}{l} \sum_{i=-m}^{m} u_i$$

Крок 4. Замінити фактичне значення  $u_0$  на відповідне середнє  $\hat{u}_0$ .

Процедура згладжування призводить до повного усунення періодичних коливань в часовому ряді, коли ширина вікна дорівнює або кратна довжині циклу або періоду коливань. Тобто, для усунення сезонних коливань необхідно використовувати ширину вікна 4 або 12 ( $l = 2m$ ), але при цьому втрачається переваги непарної ширини вікна. В цьому випадку для розрахунку використовують непарну ширину вікна, що на 1 більша за період коливань, але перше та останнє значення, що потрапили у вікно, враховують з вагою 0,5. Арифметичне середнє рівнів обчислюють за формулою

$$\hat{u}_0 = \frac{\frac{1}{2}u_{-m} + \sum_{i=-(m-1)}^{m-1} u_i + \frac{1}{2}u_m}{2m}$$

Будь-який метод згладжування за методом рухомого середнього має суттєвий недолік. Це неможливість отримати згладжені значення в перших та останніх  $m$  точках. Це явище має називу **крайовий ефект**.

Для методу простого рухомого середнього для усунення крайового ефекту обчислюють середній приріст  $\Delta u$  на останньому інтервалі

$$\overline{\Delta u} = \frac{u_m - u_{-m}}{l-1}.$$

Останні  $m$  згладжених значень в кінці часового ряду шляхом послідовного збільшення попереднього згладженого рівня на величину  $\overline{\Delta u}$ .

Якщо для процесу є характерним нелінійний розвиток, то використання просто-го рухомого середнього може спричинити суттєві помилки. В цьому випадку більш надійним є використання зваженого рухомого середнього.

При побудові зваженого рухомого середнього на кожному інтервалі вирівнювання значення центрального рівня  $u_0$  замінюються на зважене середнє арифметичне

$$\hat{u}_0 = \frac{1}{l} \sum_{i=-m}^m w_i u_i, \quad \sum_{i=-m}^m w_i = 1.$$

Зважене рухоме середнє ставить у відповідність рівню ряду вагу, яка залежить від віддаленості даного рівня до рівня, що знаходиться в середині вікна згладжування.

Процедура зваженого рухомого середнього базуються на МНК.

При використанні МНК кожен відрізок вихідного ряду (3.1), що складається з  $l = 2m + 1$  елементів буде вирівнюватися за допомогою поліному (степінь поліному менше  $l$ )

$$\hat{u}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_p t^p. \quad (3.2)$$

В якості згладженого значення використовується значення полінома в середині його області застосування ( $t = 0$ ). Розглядатимемо поліном 3-ї степені

$$u_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3. \quad (3.3)$$

Знайдемо оцінки коефіцієнтів  $a_0, a_1, a_2, a_3$  за МНК з системи рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{t=-m}^m (u_t - a_0 - a_1 t - \dots - a_p t^p)^2 = 0, j = \overline{0, p},$$

які може бути записано у вигляді

$$a_0 \sum_{t=-m}^m t^j + a_1 \sum_{t=-m}^m t^{j+1} + \dots + a_p \sum_{t=-m}^m t^{j+p} = \sum_{t=-m}^m t^j u_t, j = \overline{0, p}. \quad (3.4)$$

За методом Крамера знайдемо  $a_0$

$$a_0 = c_1 u_{-m} + c_2 u_{-(m-1)} + \dots + c_m u_0 + \dots + c_{2m+1} u_m. \quad (3.5)$$

де всі  $c_i$  залежать лише від  $m$  та  $p$ .

Формули для обчислення  $a_1, a_2, a_3$  будуть подібні до (3.5).

Згідно (3.3) значення поліному в середині області згладжування ( $t = 0$ ) дорівнюють  $a_0$  ( $u_t = a_0$ ), в той же час  $a_0$  визначається за формулою (3.5), звідси випливає, що значення поліному в точці  $t = 0$  дорівнюють зваженому середньому початкових рівнях ряду.

Розглянемо апроксимацію за сьома точками кубічним поліномом ( $l = 7, m = 3, p = 3, t = -3, \dots, 3$ ). Якщо підставити ці значення в систему (3.4), то отримаємо

$$\begin{cases} 7a_0 + 28a_2 = \sum_{t=-m}^m u_t, \\ 28a_1 + 196a_3 = \sum_{t=-m}^m tu_t, \\ 28a_0 + 196a_2 = \sum_{t=-m}^m t^2 u_t, \\ 196a_1 + 1588a_3 = \sum_{t=-m}^m t^3 u_t. \end{cases} \quad (3.6)$$

Звідки знаходимо вираз для  $a_0$

$$a_0 = \frac{1}{21} \left( 7 \sum_{t=-m}^m u_t - \sum_{t=-m}^m t^2 u_t \right) = \frac{1}{21} (-2u_{-3} + 3u_{-2} + 6u_{-1} + 7u_0 + 6u_1 + 3u_2 - 2u_3).$$

У цієї формули існує символічний запис  $\frac{1}{21}[-2, 3, 6, 7, 6, 3, -2]$ . У разі, коли коефіцієнти симетричні можна використовувати наступну форму  $\frac{1}{21}[-2, 3, 6, 7]$ .

Не рекомендується обирати ширину вікна більше, ніж чверть значень аналізуєного ряду. Чим ширше вікно, тим більш гладкий ряд отримаємо після вирівнювання.

Для усунення крайового ефекту, тобто розрахунку згладжених значень часового ряду в останніх  $m$  точках ряду, можна скористатися поліномом (3.2), підставивши замість  $t = 1, 2, \dots, m$ . Для цього необхідно з системи (3.4) отримати вирази для обчислення  $a_j, j = \overline{1, p}$  та підставити їх разом з  $a_0$  до (3.2). Для перших  $m$  точок ряду обчислення аналогічні, лише  $t = -1, -2, \dots, -m$ .

Для нашого випадку

$$a_1 = \frac{1}{1512} \left( 397 \sum_{t=-m}^m tu_t - 49 \sum_{t=-m}^m t^3 u_t \right) = \frac{1}{252} [22, -67, -58, 0, 58, 67, -22],$$

$$a_2 = \frac{1}{84} \left( -4 \sum_{t=-m}^m u_t + \sum_{t=-m}^m t^2 u_t \right) = \frac{1}{84} [5, 0, -3, -4, -3, 0, 5],$$

$$a_3 = \frac{1}{216} \left( -7 \sum_{t=-m}^m tu_t + \sum_{t=-m}^m t^3 u_t \right) = \frac{1}{36} [-1, 1, 1, 0, -1, -1, 1],$$

$$u_1 = \frac{1}{126} [117, 24, -12, -12, 3, 12, -6],$$

$$u_2 = \frac{1}{126} [24, 57, 48, 18, -12, -21, 12],$$

$$u_3 = \frac{1}{126} [-12, 48, 57, 36, 6, -12, 3],$$

$$u_{N-2} = \frac{1}{42} [1, -4, 2, 12, 19, 16, -4],$$

$$u_{N-1} = \frac{1}{42} [4, -7, -4, 6, 16, 19, 8],$$

$$u_N = \frac{1}{42} [-2, 4, 1, -4, -4, 8, 39].$$

Інший варіант зваженого рухомого середнього можна отримати шляхом по-двійного усереднення. Так перша операція усереднення приводить до часового ряду

$$v_1 = \frac{1}{l} (u_1 + u_2 + \dots + u_l), \quad v_2 = \frac{1}{l} (u_2 + u_3 + \dots + u_{l+1}), \dots$$

Друга операція усереднення приводить до такого ряду

$$w_1 = \frac{1}{l} (v_1, v_2, \dots, v_l), \dots$$

Якщо  $l=4$ , то  $w_1 = \frac{1}{16} (u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 4u_4 + 3u_5 + 2u_6 + u_7) = \frac{1}{16} [1, 2, 3, 4]$ , тобто по-двійне усереднення по 4 значенням призводить до зваженого усереднення початкових рівнів ряду по 7 значенням.

Існує ще два різновиди рухомого середнього: медіанне та експоненціальне згладжування. Основою медіанного згладжування є обчислення рухомої медіани рівнів ряду, що потрапили до вікна. Медіанне згладжування більш стійке до викидів.

### Експоненційне згладжування

Експоненційне згладжування один з найпростіших та найпоширеніших підходів до вирівнювання ряду. Його основою є розрахунок експоненційних середніх. Нехай задано часовий ряд

$$\{u_t; t = \overline{1, N}\}. \quad (3.7)$$

Експоненційне згладжування відбувається за рекурентною формулою

$$S_t = \alpha u_t + \beta S_{t-1}, \quad (3.8)$$

де  $S_t$  – значення експоненційного середнього в момент часу  $t$ ,

$\alpha$  – параметр згладжування,  $\alpha = \text{const}$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,

$\beta = 1 - \alpha$ .

Вираз (3.8) можна переписати наступним чином

$$S_t = \alpha u_t + (1 - \alpha) S_{t-1} = S_{t-1} + \alpha (u_t - S_{t-1}). \quad (3.9)$$

В (3.9) експоненційне середнє на момент часу  $t$  представлене як сума експоненційного середнього попереднього моменту та долі  $\alpha$  від різниці між поточним спостереженням та експоненційним середнім попереднього моменту.

Якщо послідовно використовувати рекурентне співвідношення (3.8), то отримаємо вираз для обчислення  $S_t$  через значення рівнів ряду (3.7):

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha u_t + \beta S_{t-1} = \alpha u_t + \alpha \beta u_{t-1} + \beta^2 S_{t-2} = \dots = \\ &= \alpha u_t + \alpha \beta u_{t-1} + \beta^2 u_{t-2} + \dots + \alpha \beta^i u_{t-i} + \dots + \beta^N S_0 = \alpha \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i u_{t-i} + \beta^N S_0, \quad (3.10) \end{aligned}$$

де  $S_0$  – визначає умови для першого використання формули (3.8) при  $t=1$ .

Враховуючи, що  $\beta < 1$ , то при  $N \rightarrow \infty$   $\beta^N \rightarrow 0$ , а сума коефіцієнтів  $\alpha \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i \rightarrow 1$ .

Тоді

$$S_t = \alpha \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i u_{t-i}.$$

Таким чином, величина  $S_t$  є зваженою сумою всіх елементів ряду. При цьому коефіцієнти (ваги) зменшуються експоненційно в залежності від «віку» спостереження. Тому  $S_t$  і називають експоненційним середнім.

Наприклад, якщо  $\alpha = 0.3$ , то поточне спостереження буде мати вагу 0.3 а ваги попередніх спостережень відповідно 0.21, 0.147, 0.1029 и т.ін.

Розглянемо ряд, утворений моделлю

$$u_t = \alpha_1 + \varepsilon_t,$$

де  $\alpha_1 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_t$  – випадкові неавтокорельовані відхилення, або шум з середнім значенням 0 та дисперсією  $\sigma^2$ .

Застосуємо до нього процедуру експоненційного згладжування (3.8). Тоді

$$S_t = \alpha \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i u_{t-i} = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i (\alpha_1 + \varepsilon_{t-i}) = \alpha_1 + \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \varepsilon_{t-i}.$$

Знайдемо математичне очікування та дисперсію  $S_t$ .

$$\begin{aligned} M(S_t) &= M(u_t) = \alpha_1, \\ D(S_t) &= M\left[\left(S_t - \alpha_1\right)^2\right] = M\left[\left(\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \varepsilon_{t-i}\right)^2\right] = \alpha^2 \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{2i} \sigma^2 = \frac{\alpha}{2-\alpha} \sigma^2. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Враховуючи  $0 < \alpha < 1$ ,  $D(S_t) < D(u_t) = \sigma^2$ .

Таким чином, експоненційне середнє  $S_t$  має таке саме математичне очікування, що і початковий ряд, але меншу дисперсію. З (3.11) видно, що чим менше значення  $\alpha$ , тим більше скорочується дисперсія. Відповідно тим більше фільтруються, подавляються коливання початкового ряду.

Експоненційне вирівнювання завжди потребує попереднього значення експоненційного середнього. Коли процес розпочинається необхідна величина  $S_0$ , яка буде використана для обчислення  $S_1$ . Якщо є попередні дані до початку вирівнювання, тоді в якості  $S_0$  можна використовувати арифметичне середнє наявних значень або деякої їх частини. В іншому випадку потрібне припущення початкового рівня ряду.

Припущення можна зробити врахувавши апріорні знання про процес або порівнюючи його зі схожими процесами. Після  $k$  кроків вага початкового значення буде дорівнювати  $(1-\alpha)^k$ . Якщо є впевненість в правильності початкового зна-

чення  $S_0$ , тоді коефіцієнт  $\alpha$  можна взяти малим. Якщо такої впевненості не має, тоді  $\alpha$  має бути великим, щоб зменшити вплив початкового значення. Але велике значення  $\alpha$  може стати причиною великої дисперсії коливань  $S_t$ . Тому після достатнього зсуву від початкового моменту часу величину  $\alpha$  можна зменшити.

Для того, щоб зменшити вплив великого значення вагового коефіцієнта початкової величини запропоновано модифікувати процедуру згладжування наступним чином.

Для початкового моменту часу запишемо

$$S'_0 = \alpha S_0, \\ S'_1 = \alpha u_t + (1 - \alpha) S'_0 = \alpha u_1 + \alpha(1 - \alpha) S_0,$$

де  $S_0$  – початкова оцінка рівня ряду.

Враховуючи, що тепер  $\alpha + \alpha(1 - \alpha) \neq 1$ , необхідно ввести додатковий множник. Таким чином, модифікованим експоненційним середнім для  $t = 1$  буде

$$\tilde{S}_1 = S'_1 \frac{1}{\alpha + \alpha(1 - \alpha)} = [\alpha u_1 + (1 - \alpha) S'_0] \frac{1}{\alpha + \alpha(1 - \alpha)}.$$

Для решти

$$\tilde{S}_t = S'_t \frac{1}{\sum_{i=0}^t \alpha(1 - \alpha)^i} = [\alpha u_t + (1 - \alpha) S'_{t-1}] \frac{1}{\sum_{i=0}^t \alpha(1 - \alpha)^i}.$$

Дана модифікація дозволяє пропорційно розподілити між елементами ряду зайву вагу вагового коефіцієнта початкового значення  $S_0$ .

Щоб скоротити час обчислень доцільно повернутися до звичайного експоненційного згладжування, коли  $\sum_{i=0}^t \alpha(1 - \alpha)^i \rightarrow 1$ . Р. Вейд рекомендує виконувати та-

кий перехід, коли сума коефіцієнтів  $\sum_{i=0}^t \alpha(1 - \alpha)^i = 0.995$ . При заданому значенні  $\alpha$  можна заздалегідь визначити на якому кроці необхідно повернутися до звичайної моделі.

Експоненційне середнє  $S_t$  є прикладом асиметричного ковзного середнього, в якому враховується ступінь «старіння» даних.

### *Контрольні питання за темою*

1. Навіщо проводять вирівнювання часового ряду?
2. Чи обов'язкове вирівнювання?
3. Який основний принцип методу рухомого середнього?
4. Дайте визначення «ширини вікна».
5. Вплив яких компонент часового ряду зменшується за допомогою рухомого середнього?
6. Які бувають процедури рухомого середнього?

7. Як обчислюються згладжені значення простого рухомого середнього коли ширина вікна є парною?
8. Як відбувається розрахунок коефіцієнтів вирівнювання методу зваженого рухомого середнього?
9. В яких випадках доцільно використовувати процедури простого рухомого середнього, а в яких зваженого рухомого середнього?
10. З якою проблемою стикаються на початку та в кінці ряду, виконуючи вирівнювання?
11. В чому полягає принцип експоненціального згладжування?
12. Як обирати початкове значення для експоненціального згладжування?

## ТЕМА 4. РЕГРЕСІЙНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ. ВІДІЛЕННЯ ТРЕНДУ

Деяка стійка систематична зміна упродовж тривалого часу називається **тенденцією**. Тенденція часового ряду або ряду динаміки, представлена у вигляді гладкої кривої, що має аналітичний вигляд, називається **трендом**, а сама гладка крива називається **траекторією** або **кривою зростання**. Розрізняють три види тенденцій:

- тенденція зміни середнього (подається у вигляді функції, що згладжує часовий ряд, навколо якої розташовані початкові спостереження);
- тенденція зміни дисперсії (zmіни в відхиленнях емпіричних значень від значень, обчислених за трендом);
- тенденція автокореляції (zmіни у зв'язках між рівнями часового ряду).

Задача виділення тренда  $T(t)$  полягає в знаходженні деякої аналітичної функції

$$T(t, a_1, \dots, a_k) : \|u_t - T(t, a_1, \dots, a_k)\| \rightarrow \min_{a_1, \dots, a_k}.$$

В класичних регресійних методах функція тренда знаходиться одним з методів: лінійної регресії, нелінійної регресії, методом ковзного середнього, у вигляді сплайнів.

Методи лінійної та нелінійної регресії базуються на методі найменших квадратів (МНК)

$$S_3^2 = \sum_{t=1}^N \delta_t (u_t - T(t, a_1, \dots, a_k))^2 \rightarrow \min_{a_1, \dots, a_k}, \quad (4.1)$$

де  $S_3^2$  – залишкова дисперсія,  $\delta_t$  – вагові коефіцієнти.

Значення параметрів  $a_1, a_2, \dots, a_k$  знаходять із рішення системи рівнянь

$$\frac{\partial S_3^2}{\partial a_i} = 0, i = \overline{1, k}. \quad (4.2)$$

### Виділення тренда методом лінійної регресії

Будемо вважати, що часовий ряд утворено за законом

$$\hat{u}_t = a_0 + a_1 t + e_t = T(t, a_0, a_1) + e_t. \quad (4.3)$$

Задача полягає в оцінюванні  $a_0$  та  $a_1$  за заданими початковими рівнями ряду

$u_t, t = \overline{1, N}$ . При цьому  $\sum_{t=1}^N e_t^2 \rightarrow \min_{a_0, a_1}$ .

Згідно МНК  $S_3^2 = \sum_{t=1}^N (u_t - a_0 - a_1 t)^2 \rightarrow \min_{a_0, a_1}$ .

Маємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_3^2}{\partial a_0} &= -2 \left[ \sum_{t=1}^N u_t - a_0 N - a_1 \sum_{t=1}^N t \right], \\ \frac{\partial S_3^2}{\partial a_1} &= -2 \left[ \sum_{t=1}^N t u_t - a_0 \sum_{t=1}^N t - a_1 \sum_{t=1}^N t^2 \right]. \end{aligned}$$

Виконавши спрощення отримаємо

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^N a_0 + \sum_{t=1}^N a_1 t = \sum_{t=1}^N u_t, \\ \sum_{t=1}^N a_0 t + \sum_{t=1}^N a_1 t^2 = \sum_{t=1}^N u_t t, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a_0 N + a_1 \frac{N(N+1)}{2} = \sum_{t=1}^N u_t, \\ a_0 \frac{N(N+1)}{2} + a_1 \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \sum_{t=1}^N u_t t. \end{cases}$$

Оцінки коефіцієнтів  $\hat{a}_0$  та  $\hat{a}_1$  знаходимо методом Крамера з останньої системи рівнянь.

Лінійну регресію можна використовувати, коли виконуються умови Гаусса-Маркова:

- 1) модель лінійна за параметрами (коефіцієнтами), включає адитивну випадкову складову;
- 2)  $M\{e_t\} = 0, D\{e_t\} = \sigma^2 = const$ ;
- 3) значення випадкової складової мають взаємно незалежні розподіли, тобто  $corr(e_t, e_{t+k}) = 0, \forall k$ ;
- 4) значення випадкової складової  $e_t$  мають нормальній розподіл з параметрами  $(0, \sigma)$ .

Виконання цих умов забезпечує ефективність оцінок параметрів, отриманих за МНК.

### Виділення тренда методом нелінійної регресії

На практиці для опису тенденції розвитку динамічного ряду окрім лінійної моделі (4.3) використовують і інші види кривих зростання. При такому підході зміни досліджуваного показника пов'язують лише з впливом часу, вважають,

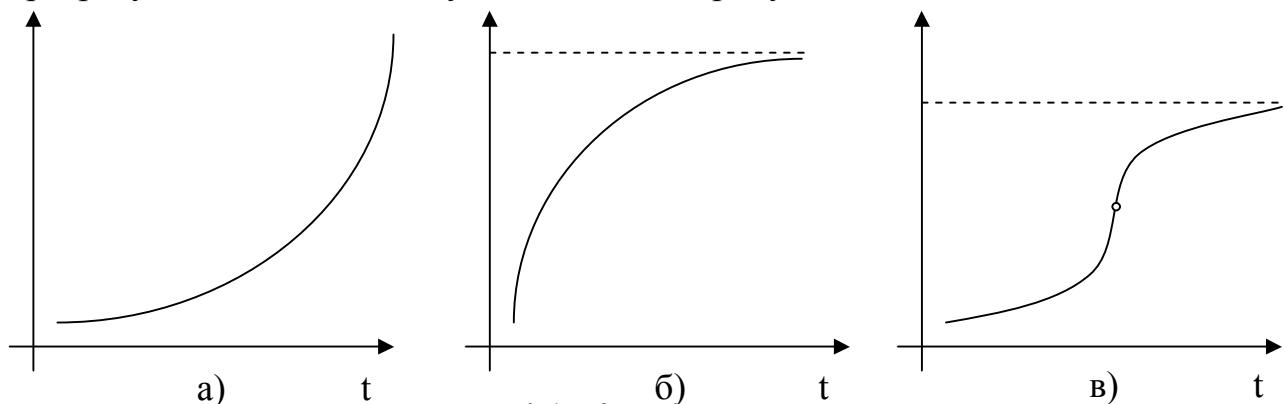
що вплив інших факторів не суттєвий або має не прямий вплив через фактор часу.

Всі криві зростання умовно можна поділити на три типи (рис. 4.1) в залежності від типу динаміки, який вони описують.

1. Функції, які описують монотонні тенденції без межі зростання.

2. Функції, що мають межу зростання в періоді, який досліджується. Такі функції називають **кривими з насиченням**. Прикладами явищ, які описують цим типом кривих можуть бути явища, пов'язані з демографічним фактором, дослідження ефективності використання ресурсів.

3. S-подібні криві – це функції, що мають межу зростання та точку перегину. Ці криві описують начебто два послідовних лавиноподібних процеси: один з пришвидшенням розвитку, другий – з уповільненням. Такі криві застосовуються в страхових розрахунках, при прогнозуванні науково-технічного прогресу, визначенні попиту на новий вид продукції.



**а) без межі зростання; б) крива з насиченням та без точки перегину;**  
**в) крива з насиченням та з точкою перегину**

Процедура виділення тренду з використанням кривих зростання включає в себе вибір форми кривої та оцінювання її параметрів.

Правильно встановити вид кривої, тобто вид аналітичної залежності значення показника від часу – одне з найважчих завдань. Обрана функція тренду має задовольняти такі умови: бути теоретично обґрунтованою; мати якнайменшу кількість параметрів; параметри функції повинні мати економічне тлумачення; оцінені значення тренду мають якомога менше відрізнятися від відповідних фактичних спостережень часового ряду.

Вибір форми кривої для виділення тренду певною мірою залежить від мети виділення тренду: інтерполяції або екстраполяції. У першому випадку метою є досягнення найбільшої близькості до фактичних рівнів часового ряду. У другому – виявлення основної закономірності розвитку явища, стосовно якої можна припустити, що в майбутньому вона збережеться.

В основі вибору кривої лежить візуальне оцінювання графічного зображення ряду динаміки та теоретичний аналіз сутності явища, зміни якого відображаються часовим рядом. Іноді до уваги беруть міркування стосовно характеру зростання рівнів ряду. Так, якщо зростання передбачається у вигляді арифмети-

чної прогресії, то згладжування відбувається за прямою; якщо зростання йде в геометричній прогресії, то згладжування виконують за експоненціальною функцією. На практиці під час попереднього аналізу часового ряду обирають, як правило, дві-три криві зростання для подальшого дослідження і побудови трендової моделі часового ряду.

**Метод послідовних різниць (Тінтнера)** може бути використаний для визначення порядку (ступеня) апроксимаційного полінома, якщо, по-перше, рівні часового ряду складаються лише із двох компонент: тренду та випадкової, і, по-друге, тренд є досить гладеньким, щоб його можна було згладити поліномом певного ступеня.

Алгоритм застосування методу передбачає такі кроки.

- На основі початкового ряду  $u_1, u_2, \dots, u_N$  обчислюють різниці (приrostи) до  $d$ -го порядку включно

$$\Delta_t^1 = u_t - u_{t-1}, \quad \Delta_t^2 = \Delta_t^1 - \Delta_{t-1}^1, \dots, \Delta_t^d = \Delta_t^{d-1} - \Delta_{t-1}^{d-1}, \quad t = \overline{2, N}$$

Зазвичай розраховують різниці до четвертого порядку.

- Для початкового ряду та для кожного різницевого ряду обчислюють дисперсії

$$S_0^2 = \frac{\sum_{t=1}^N u_t^2 - \frac{1}{N} \left( \sum_{t=1}^N u_t \right)^2}{N-1} \text{ — для початкового ряду,}$$

$$S_d^2 = \frac{\sum_{t=d+1}^N (\Delta_t^d)^2}{(N-d)c_{2d}^d} \text{ — для ряду різниць } d \text{-го порядку,}$$

де  $C_{2d}^d$  — біноміальний коефіцієнт,  $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

- Порівнюють значення кожної наступної дисперсії із попередньою, тобто розраховують різниці  $|S_k^2 - S_{k-1}^2|$ ,  $k = \overline{1, d}$ , і якщо для будь-якого  $k$  ця величина не перевищує певної наперед заданої додатної величини, тобто порядок величин дисперсій одинаковий, то ступінь апроксимаційного полінома має дорівнювати  $k-1$ .

Необхідно зазначити, що для визначення тренду в багатьох часових рядах не слід використовувати поліноми дуже великого порядку, оскільки отримані в такий спосіб функції згладжування відображатимуть випадкові відхилення, а не детерміновану складову, що суперечить поняттю тенденції.

Розглянемо найбільш вживані криві зростання.

### 1. Поліноміальні криві другого порядку

Будемо вважати, що часовий ряд утворено за законом

$$\hat{u}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + e_t = T(t, a_0, a_1, a_2) + e_t.$$

Задача полягає в оцінюванні  $a_0$ ,  $a_1$  та  $a_2$  за заданими початковими рівнями ряду  $u_t$ ,  $t = \overline{1, N}$ . При цьому  $\sum_{t=1}^N e_t^2 \rightarrow \min_{a_0, a_1, a_2}$ .

Згідно МНК  $S_3^2 = \sum_{t=1}^N (u_t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2)^2 \rightarrow \min_{a_0, a_1, a_2}$ .

Маємо систему рівнянь

$$\frac{\partial S_3^2}{\partial a_0} = -2 \sum_{t=1}^N (u_t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2) = 0,$$

$$\frac{\partial S_3^2}{\partial a_1} = -2 \sum_{t=1}^N (u_t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2) t = 0,$$

$$\frac{\partial S_3^2}{\partial a_2} = -2 \sum_{t=1}^N (u_t - a_0 - a_1 t - a_2 t^2) t^2 = 0.$$

Виконавши спрощення отримаємо

$$\begin{cases} a_0 N + a_1 \sum_{t=1}^N t + a_2 \sum_{t=1}^N t^2 = \sum_{t=1}^N u_t, \\ a_0 \sum_{t=1}^N t + a_1 \sum_{t=1}^N t^2 + a_2 \sum_{t=1}^N t^3 = \sum_{t=1}^N u_t t, \\ a_0 \sum_{t=1}^N t^2 + a_1 \sum_{t=1}^N t^3 + a_2 \sum_{t=1}^N t^4 = \sum_{t=1}^N u_t t^2. \end{cases}$$

Оцінки коефіцієнтів  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{a}_1$  та  $\hat{a}_2$  знаходимо методом Крамера.

## 2. Показова крива (експоненційна крива) зростання

Будемо вважати, що часовий ряд утворено за одним з наступних законів

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= a_0 a_1^t + e_t, \\ \hat{u}_t &= e^{a_0 + a_1 t} + e_t, \\ \hat{u}_t &= a_0 10^{a_1 t} + e_t. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Для спрощення процедури МНК для такого типу кривих необхідно виконати перетворення до лінійного вигляду.

Припустимо, що ряд утворено залежністю (4.4). Зведення до лінійного вигляду відносно параметрів виконаємо наступним чином

$$u_t = a_0 a_1^t \Rightarrow \ln u_t = \ln(a_0 a_1^t) \Rightarrow \ln u_t = \ln a_0 + t \ln a_1 \Rightarrow U_t = A_0 + A_1 t.$$

Для знаходження  $A_0$ ,  $A_1$  використовуються формули лінійної регресії, при цьому початкові дані повинні бути перетворені за правилом  $U_t = \ln u_t$ .

Оцінки параметрів залежності (4.4) визначаються з урахуванням співвідношень  $A_0 = \ln a_0$ ,  $A_1 = \ln a_1$  за формулами

$$\hat{a}_0 = e^{A_0}, \quad \hat{a}_1 = e^{A_1}.$$

### 3. Степенева або мультиплікативна крива зростання

Ряд утворено залежністю

$$\hat{u}_t = a_0 t^{a_1} + e_t,$$

яку можна привести до лінійного вигляду наступним чином

$$u_t = a_0 t^{a_1} \Rightarrow \ln u_t = \ln(a_0 t^{a_1}) \Rightarrow \ln u_t = \ln a_0 + a_1 \ln t \Rightarrow U_t = A_0 + A_1 T_t.$$

Визначення оцінок параметрів  $A_0$ ,  $A_1$  виконується згідно схемі лінійної регресії. При цьому початкові дані повинні бути перетворені за правилом  $U_t = \ln u_t$ , а також  $T_t = \ln t$ .

Оцінки параметрів  $\hat{a}_0$ ,  $\hat{a}_1$  визначаються наступним чином

$$\hat{a}_0 = e^{A_0}, \hat{a}_1 = A_1.$$

Форма степеневої кривої залежить від параметра  $a_1$  (рис. 4.2).

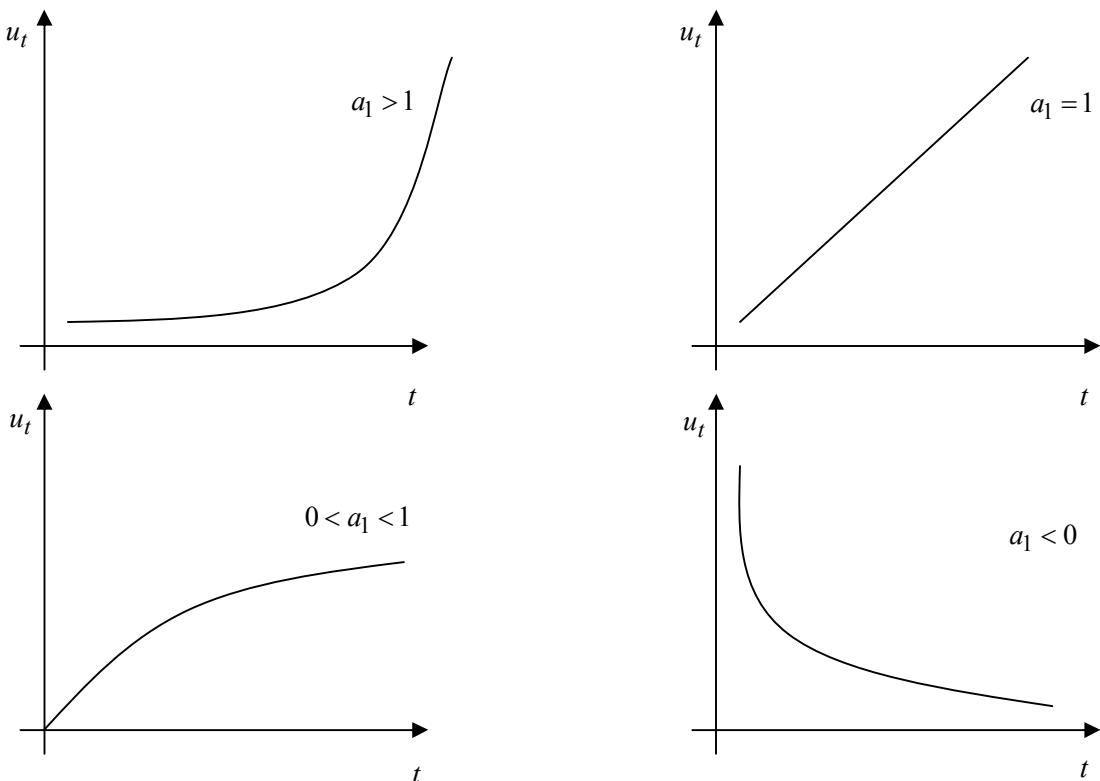


Рис. 4.2. Степенева регресія з різними параметрами

### 4. Обернена крива зростання

Крива, задана у вигляді

$$\hat{u}_t = a_0 + \frac{a_1}{t} + e_t,$$

має назву кривої Філіпса та показує залежність між середнім рівнем інфляції в крайні і рівнем безробіття. Згідно з кривою Філіпса, з ростом безробіття інфляція зменшується. Данна залежність є лінійною відносно коефіцієнтів, але застосу-

вання лінійної регресії потребує перетворення початкового масиву  $\{t_i\}$ ,  $i = \overline{1, N}$  за правилом  $T_i = \frac{1}{t_i}$ .

Крива у вигляді  $\hat{u}_t = \frac{1}{a_0 + a_1 t} + e_t$  – крива Енгеля показує залежність між об'ємом ринку товару та платоспроможністю населення.

Для знаходження параметрів використовується перетворення

$$\frac{1}{u_t} = a_0 + a_1 t \Rightarrow U_t = a_0 + a_1 t .$$

Знайдені оцінки параметрів лінійної регресії співпадають з параметрами нелінійної кривої.

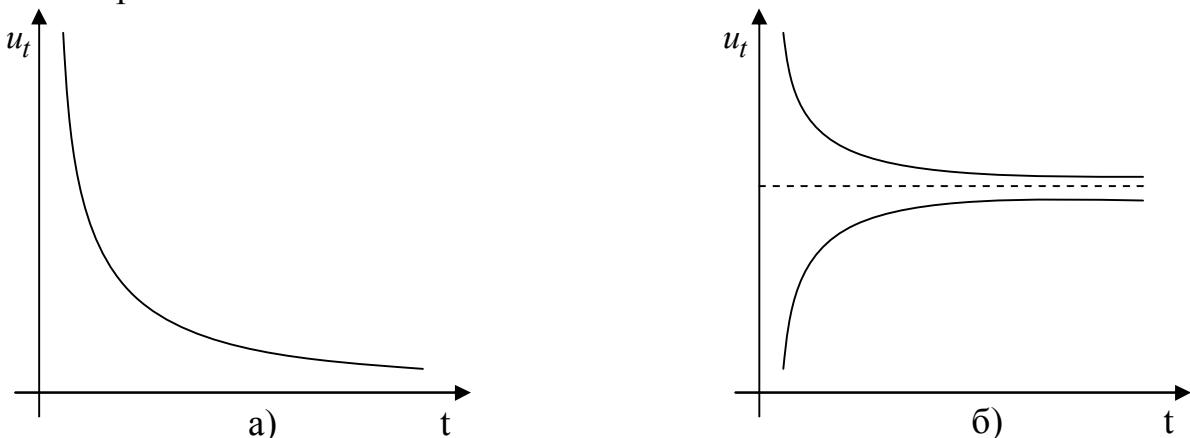


Рис. 4.3. а) крива Філіпса; б) крива Енгеля

### 5. Модифікована показова (експоненційна) крива

Ряд утворено залежністю

$$\hat{u}_t = a_0 a_1^t + \gamma + e_t .$$

Припустимо, що параметр  $\gamma$  якимось чином знайдено. Тоді приводимо криву до лінійного вигляду

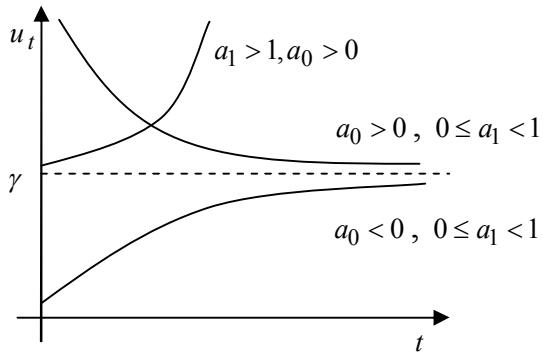
$$\ln(u_t - \gamma) = \ln(a_0 a_1^t) \Rightarrow \ln(u_t - \gamma) = \ln a_0 + t \ln a_1 \Rightarrow U_t = A_0 + A_1 t .$$

Отже, необхідно перетворити початковий ряд наступним чином

$$U_t = \ln(u_t - \gamma) .$$

Отримавши оцінки параметрів  $A_0$  та  $A_1$ , обчислюємо

$$\hat{a}_0 = e^{A_0}, \quad \hat{a}_1 = e^{A_1} .$$



**Рис. 4.4. Модифікована показова регресія з різними значеннями параметрів**

Приклад використання. Якщо на ринку з'являється новий товар, який супроводжується широкою реклами, то спочатку попит на цей товар буде досить великий і швидкість продажу товару буде значною. Із часом продаж буде стабілізуватися та дійде до певного рівня насичення. У таких випадках фаза уповільненого зростання відсутня, і найкраще згладжування дасть модифікована експоненційна крива.

Модифікована експоненційна крива є базовою кривою, на підставі якої за допомогою певних перетворень отримують криву Гомперця і логістичну криву, які використовують частіше.

## 6. Крива Гомперца

Ряд утворено залежністю

$$\hat{u}_t = \gamma e^{-a_0 e^{-a_1 t}} + e_t,$$

або у іншому вигляді

$$\hat{u}_t = \gamma a_0^{a_1^t} + e_t,$$

$\gamma$  – асимптота функції,  $a_0 > 0, 0 < a_1 < 1$ .

У кривій Гомперця виокремлюють чотири ділянки: на першій приріст функції незначний, на другій – збільшується, на третьій ділянці приріст майже постійний, на четвертій – відбувається вповільнення темпів приросту, і функція необмежено наближається до значення  $\gamma$ . В результаті форма кривої нагадує латинську літеру  $S$ . Точкию перегину цієї кривої буде  $t_p = \frac{1}{\ln a_1} \ln \left( -\frac{1}{\ln a_0} \right)$  зі значенням функції  $u_{t_p}$ , яке дорівнює  $u_{t_p} = \gamma / e$ , де  $e = 2.71828$ .

Припустимо, що параметр  $\gamma$  якимось чином знайдено. Тоді приводимо криву до лінійного вигляду

$$\ln\left(\frac{u_t}{\gamma}\right) = \ln\left(a_0^{a_1^t}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{u_t}{\gamma}\right) = \ln(a_0)a_1^t \Rightarrow \ln\ln\left(\frac{u_t}{\gamma}\right) = \ln(\ln(a_0)a_1^t) \Rightarrow$$

$$\ln\ln\left(\frac{u_t}{\gamma}\right) = \ln\ln a_0 + \ln(a_1^t) \Rightarrow \ln\ln\left(\frac{u_t}{\gamma}\right) = \ln\ln a_0 + t \ln a_1 \Rightarrow U_t = A_0 + A_1 t ..$$

Отже, необхідно виконати перетворення початкового ряду

$$U_t = \ln\ln\left(\frac{u_t}{\gamma}\right).$$

Отримавши оцінки параметрів  $A_0$  та  $A_1$  лінійної регресії, враховуючи  $A_0 = \ln\ln a_0$  та  $A_1 = \ln a_1$ , обчислюємо

$$\hat{a}_0 = e^{e^{A_0}}, \quad \hat{a}_1 = e^{A_1}.$$

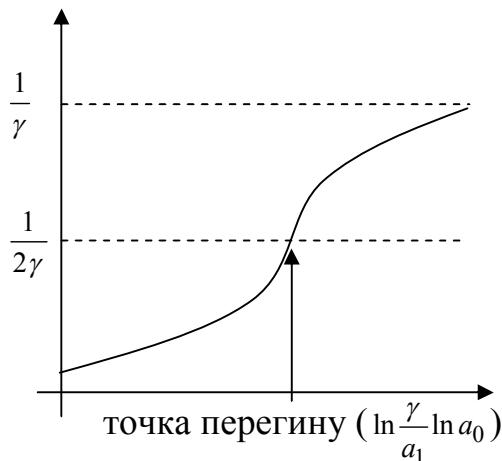
На підставі кривої Гомперця будується, наприклад, динаміка показників рівня життя.

## 7. Логістична крива або крива Перла-Ріда

Ряд утворено залежністю

$$\hat{u}_t = \frac{1}{a_0 a_1^t + \gamma} + e_t,$$

де  $\gamma$  – верхня границя значень  $u_t$ ,  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$ . Ця функція отримана на основі дослідження росту організмів та популяцій. Вид графіку логістичної кривої подібне до кривої Гомперця, але логістична крива має точку симетрії, яка співпадає з точкою перегину.



**Рис. 4.5. Графік логістичної кривої**

Припустимо, що параметр  $\gamma$  якимось чином знайдено. Тоді приводимо криву до лінійного вигляду

$$u_t = \frac{1}{a_0 a_1^t + \gamma} \Rightarrow \frac{1}{u_t} = a_0 a_1^t + \gamma \Rightarrow \frac{1}{u_t} - \gamma = a_0 a_1^t \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_t} - \gamma\right) = \ln(a_0 a_1^t) \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{1}{u_t} - \gamma\right) = \ln a_0 + \ln(a_1^t) \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{u_t} - \gamma\right) = \ln a_0 + t \ln a_1 \Rightarrow U_T = A_0 + A_1 t.$$

Далі визначення оцінок параметрів  $A_0$  та  $A_1$  виконується за схемою лінійної регресії. При цьому початкові значення часового ряду мають бути перетворені згідно з  $U_T = \ln(1/u_t - \gamma)$ . Оцінки параметрів логістичної кривої визначаються за формулами  $\hat{a}_0 = e^{A_0}$ ,  $\hat{a}_1 = e^{A_1}$ .

В останніх трьох функціях суттєве значення має параметр  $\gamma$ , значення якого має бути визначено перед оцінюванням  $a_0$  та  $a_1$ . Для знаходження  $\gamma$  використовується **метод трьох точок**. Елементи початкового часового ряду  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$  розподіляють на три частини за правилом

$$N = 3k$$

$$\underline{\hspace{k}} \quad | \quad \underline{\hspace{k}} \quad | \quad \underline{\hspace{k}}$$

$$N = 3k + 1$$

$$\underline{\hspace{k}} \quad | \quad \underline{\hspace{k+1}} \quad | \quad \underline{\hspace{k}}$$

$$N = 3k + 2$$

$$\underline{\hspace{k+1}} \quad | \quad \underline{\hspace{k}} \quad | \quad \underline{\hspace{k+1}}$$

Дляожної з частин ряду знаходять медіану  $u_I, u_{II}, u_{III}$ . Медіана ряду – це значення ряду, що ділить ряд навпіл. Половина спостережень менша за медіану, а половина більша. Для знаходження медіани необхідно упорядкувати кожну частину ряду. Тоді якщо кількість спостережень в частині непарна ( $k = 2m + 1$ ), то  $u_{m+1}$  – медіана. Якщо кількість спостережень в частині парна ( $k = 2m$ ), то

$\frac{u_m + u_{m+1}}{2}$  – медіана. Величину  $\gamma$  знаходять за формулою

$$\gamma = \frac{u_I u_{III} - u_{II}^2}{u_I - 2u_{II} + u_{III}}.$$

### Дослідження якості побудованої лінії регресії

Наступним кроком є дослідження якості побудованої лінії регресії за допомогою перевірки адекватності та значущості обраної моделі (кривої).

Перевірити значущість лінії регресії – це визначити чи відповідає математична модель, що описує залежність між змінними, експериментальним даним та чи достатньо в рівнянні лінії регресії пояснюючих змінних для представлення залежності змінної.

Для перевірки використовують положення дисперсійного аналізу (ANalysis of VAriance – ANOVA-аналізу).

Для подальшого використання позначимо через

$$u_t – початкові рівні ряду, t = \overline{1, N},$$

$\bar{u}$  – середнє арифметичне значення початкового ряду,

$\hat{u}_t$  – рівень ряду обчислений з використанням обраної лінії регресії (кривої зростання),  $t = \overline{1, N}$ ,

$u_t - \bar{u}$  – загальне відхилення,  $t = \overline{1, N}$ ,

$\hat{u}_t - \bar{u}$  – відхилення, яке пояснює регресія,  $t = \overline{1, N}$ ,

$e_t = u_t - \hat{u}_t$  – залишок регресії,  $t = \overline{1, N}$ .

Згідно з положеннями дисперсійного аналізу загальна сума квадратів відхилень залежної змінної від середньо арифметичного дорівнює

$$SST = \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})^2 = \sum_{i=1}^N (\hat{u}_i - \bar{u})^2 + \sum_{i=1}^N (u_i - \hat{u}_i)^2 = SSR + SSE,$$

де  $SSR$  – варіація, що обумовлена регресією;

$SSE$  – залишкова варіація, що обумовлена впливом неврахованих факторів.

Для подальшої перевірки обчислюють значення величин, що подано в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

#### ANOVA – таблиця

Джерело варіації	Ступінь свободи	Сума квадратів ( $SS$ )	Середнє квадратів ( $MS$ )
Варіація, що обумовлена регресією ( $R$ )	$m - 1$	$SSR = \sum_{t=1}^N (\hat{u}_t - \bar{u})^2$	$MSR = \frac{SSR}{m - 1}$
Залишкова варіація ( $E$ )	$N - m$	$SSE = \sum_{t=1}^N e_t^2$	$MSE = \frac{SSE}{N - m}$
Загальна варіація ( $T$ )	$N - 1$	$SST = \sum_{t=1}^N (u_t - \bar{u})^2$	

$m$  – кількість параметрів обраної лінії регресії.

Значення, що входять до таблиці, дозволяють провести аналіз з використанням наступних критеріїв.

**F -тест або критерій Фішера** передбачає обчислення величини

$$F = \frac{MSR(N - m)}{MSE(m - 1)},$$

яка має розподіл Фішера з  $v_1 = m - 1$  та  $v_2 = N - m$  ступенями свободи та порівняння її з квантилем  $f_{v_1, v_2, \alpha}$  розподілу Фішера при заданому рівні значущості  $\alpha$ .

Модель (лінія регресії) адекватна, якщо  $F > f_{v_1, v_2, \alpha}$ .

Значення  $F$  є мірою того, наскільки лінія регресії краще описує значення залежної змінної (часового ряду) порівняно з її середнім значенням.

**Коефіцієнт детермінації ( $R^2$ )** – статистичний показник, що використовується в моделях як міра залежності варіації залежної змінної від варіації незалежних

змінних. Вказує наскільки отримані спостереження підтверджують обрану модель. Обчислюється як одиниця мінус частка непоясненої дисперсії в дисперсії залежної змінної.

Вибірковий коефіцієнт детермінації розраховують наступним чином

$$R^2 = \left(1 - \frac{SSE/N}{SST/N}\right) \times 100\% = \left(1 - \frac{SSE}{SST}\right) \times 100\%.$$

що визначає яку частину (у відсотках) часового ряду пояснює лінія регресії. Для лінійної регресії  $SST = SSR + SSE$ , тому маємо

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \times 100\%.$$

Коефіцієнт детермінації має бути не менше 50%. Моделі з коефіцієнтом детермінації вище 80% вважають достатньо хорошими.

Коефіцієнт детермінації має таку властивість. Його значення збільшується (не зменшується) у разі додавання в модель нових незалежних змінних (параметрів в лінію регресії). Тому порівняння регресії з різною кількістю параметрів не коректно. В цьому разі використовують скорегований коефіцієнт детермінації, щоб кількість параметрів не впливало на статистику  $R^2$ .

Для обчислення скорегованого коефіцієнта детермінації використовують незсунені оцінки дисперсії:

$$R^{*2} = \left(1 - \frac{SSE/(N-m)}{SST/(N-1)}\right) * 100\% = \left(1 - \left(1 - R^2\right) \frac{N-1}{N-m}\right) * 100\% \leq R^2.$$

Скорегований коефіцієнт детермінації завжди менше 100%. Теоретично може бути менше нуля тільки у разі дуже малого значення  $R^2$  та великої кількості параметрів. Що свідчить про неадекватний вибір лінії регресії.

Для лінійної моделі на основі коефіцієнта детермінації можна знайти коефіцієнт парної кореляції

$$r^2 = R^2 \rightarrow r = \text{corr}(t, u_t) = \sqrt{R^2}.$$

Значущість лінійної моделі співпадає зі значущістю коефіцієнта парної кореляції. Для перевірки на значимість коефіцієнта парної кореляції обчислюється статистика

$$t = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}},$$

яка має  $t$ -розподіл Стьюдента з  $v = N - 2$  ступенями свободи.

Якщо  $|t| \leq t_{\alpha, v}$ , де  $t_{\alpha, v}$  – квантиль  $t$ -розподілу Стьюдента, то коефіцієнт парної кореляції є незначущим.

Оцінка значущості параметрів лінії регресії знаходиться з дисперсійно-коваріаційної матриці (оскільки використовується МНК).

**AIC – інформаційний критерій Акаїке.** Використовується виключно для порівняння моделей. Чим менше значення статистики, тим краща модель. Використовується для порівняння моделей з різною кількістю параметрів.

$$AIC = \frac{2m}{N} + \ln \frac{SSE}{N}.$$

**BIC або SC – байесовський інформаційний критерій Шварца.** Використовується та інтерпретується як і AIC.

$$BIC = \frac{m \ln N}{N} + \ln \frac{SSE}{N}.$$

BIC призначає більший штраф ніж AIC за включення зайвих параметрів в модель.

Для обчислення прогнозного значення досліджуваної величини викорi  $t_{\alpha,v}$  стовується обране рівняння регресії  $T(t, a_1, \dots, a_k)$

$$\hat{u}_{N+\tau} = T(N+\tau, a_1, \dots, a_k),$$

де  $\tau$  – період упередження прогнозу.

Інтервальний прогноз обчислюється за формулою

$$\hat{u}_{h,e}(N+\tau) = \hat{u}_{N+\tau} \mp \sigma_e \cdot t_{\alpha/2, N-2} \sqrt{1 + \frac{1}{N} + \frac{(N+\tau - \bar{t})^2}{\sum_{t=1}^N (t - \bar{t})^2}},$$

де  $\sigma_e$  – середньоквадратичне відхилення похибок,  $\sigma_e = \sqrt{MSE}$ ,

$t_{\alpha/2, N-2}$  – квантиль  $t$ -розподiлу Стьдента з  $N-2$  ступенями свободи та рiвнем значущостi  $\alpha/2$ .

#### Контрольнi питання за темою

1. Що таке часовий ряд?
2. Що таке тренд?
3. Якi функцiй можуть бути використанi для моделювання тренду?
4. Назвiть типи кривих зростання.
5. Яким чином етап вирiвнювання ряду пов'язан з визначенням тренду?
6. В чому суть методу найменших квадратiв?
7. Якi передумови використання МНК?
8. Як обирати форму кривої зростання?
9. Як визначити оцiнки параметрiв кривих зростання iз застосуванням МНК?
10. Какие характерные участки имеют кривая Гомперца и логистическая кривая?
11. Що таке значимiсть моделi тренду?
12. За яким критерiем обирають найбiльш адекватну модель тренду?
13. За якими критерiями порiвнюють riзнi моделi тренду мiж собою?

## ТЕМА 5. ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНІСТЬ

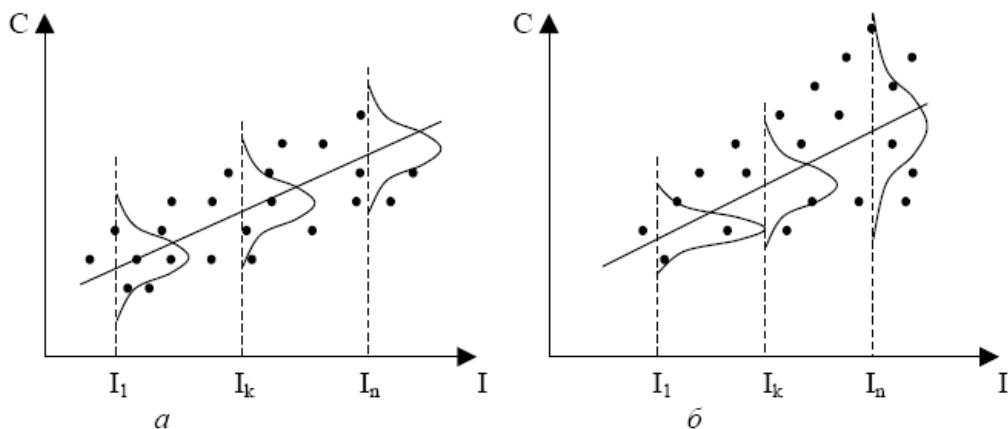
Під час проведення регресійного аналізу з використанням МНК на практиці слід звертати увагу на умови, пов'язані з виконанням властивостей випадкових відхилень моделі.

Для отримання якісних оцінок необхідно слідкувати за виконанням передумов МНК. Умови при яких можливо застосовувати регресійний аналіз сформульовані у вигляді теореми Гауса-Маркова. Виконання цих умов при застосуванні МНК забезпечує незсуненість, ефективність та спроможність оцінок параметрів лінії регресії.

Найчастіше порушується умова постійності дисперсії  $D\{e_t\} = \sigma^2 = \text{const}$  (ймовірність того, що величина  $e_t$  прийме деяке визначене значення однакова для всіх спостережень). Ця умова називається **гомоскедастичністю** та означає одинаковий розкид. **Гетероскедастичність** (різний розкид) виникає, якщо для різних спостережень імовірність того, що для  $i$ -го спостереження величина  $e_t$  прийме деяке конкретне значення відрізняється від імовірності прийняття цього ж значення для  $j$ -го спостереження.

Пояснимо зміст явища гетероскедастичності. При аналізі вибіркових даних вимога постійності дисперсії може викликати деяке здивування: для кожного  $i$ -го спостереження є єдине значення  $e_i$ , звідки ж береться розкид? Річ у тім, що під час розгляду вибіркових даних ми маємо справу з конкретною реалізацією залежності змінної ( $u_t$ ) і відповідно з випадковими відхиленнями  $e_t, t = \overline{1, N}$ . До здійснення вибірки ці показники априорі могли приймати довільні значення на основі деяких імовірнісних розподілів. Однією з вимог до цих розподілів є рівність дисперсії. Ця умова означає, що незважаючи на те що при кожному конкретному спостереженні випадкове відхилення може бути великим або маленьким, додатнім або від'ємним, не повинно бути деякої априорної величини, яка викликає більшу помилку (відхилення) при одних спостереженнях і меншу – при інших.

На рис. 5.1 наведено два приклади лінійної регресії – залежності обсягу споживання  $C$  від доходу  $I$ :  $C = a_0 + a_1 I + e$ .



**Рис. 5.1. Лінійна залежність обсягу споживання від доходу**  
а) дисперсія споживання однакова, б) дисперсія споживання а зростає

В обох випадках з ростом доходу зростає середнє значення споживання. Проте на рис. 5.1. а) дисперсія споживання залишається однаковою для різних рівнів доходу, а на рис. 5.1. б) при аналогічній залежності споживання від доходу дисперсія споживання не залишається постійною, а зростає з ростом доходу. Фактично це означає, що у другому випадку суб'єкти з більшим доходом в середньому споживають більше, ніж суб'єкти з меншим доходом, крім того, розкид в їх споживанні є більш суттєвим для більшого рівня доходу. Фактично люди з більшими доходами мають більший простір для розподілу свого доходу. Реальність даної ситуації не викликає сумнівів.

Наслідки наявності гетероскедастичності:

1. Оцінки параметрів лінії регресії отримані за МНК є незсуненими, спроможними, але не ефективними (не мають мінімальну дисперсію). Вони навіть не будуть асимптотично ефективними. Збільшення дисперсії оцінок знижує ймовірність отримання максимально точних оцінок.

2. Дисперсії оцінок будуть розраховуватися зі зсувом.

3. Усі висновки, отримані на основі  $t$ -та  $F$ -статистик, а також інтервальні оцінки будуть ненадійними. Відповідно, статистичні висновки можуть бути помилковими та можуть привести до невірних висновків за побудованою моделлю. Ймовірно, що стандартні помилки коефіцієнтів будуть занижені, а, відповідно,  $t$ -статистики завищенні. Це може привести до визнання статистично значущими коефіцієнтів, які такими не є.

Причину неефективності оцінок МНК при гетероскедастичності пояснимо на прикладі.

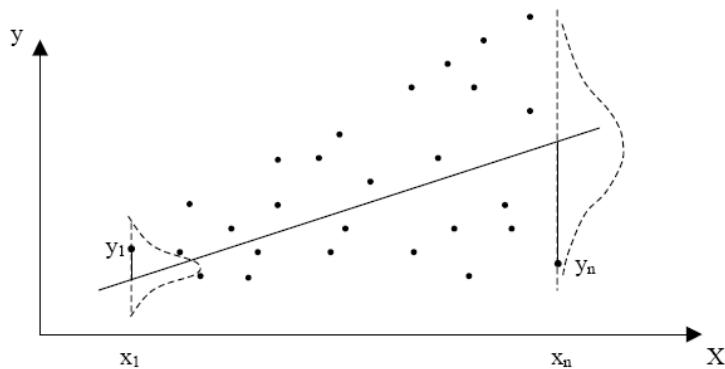


Рис. 5.2 Явище гетероскедастичності

Для кожного конкретного значення  $x_i$  випадкової величини  $X$  змінна приймає значення  $y_i$  з деякої множини, яка має свій розподіл, різний в силу непостійності дисперсії. За МНК мінімізується сума квадратів залишків

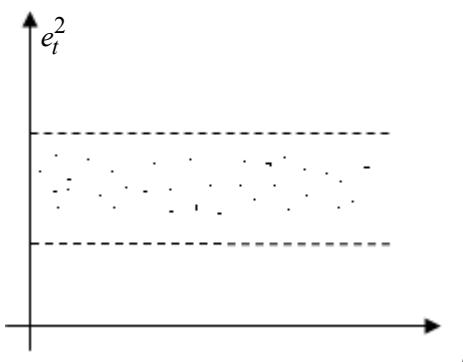
$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2.$$

Але в цьому випадку кожне конкретне значення  $e_i$  в даній сумі має однакову вагу в незалежності від того, отримано воно з розподілу з маленькою дисперсією або з великою. Але точка, отримана з розподілу з меншою дисперсією, більш точно визначає напрям лінії регресії, тому вона повинна мати більшу вагу, ніж точка з розподілу з більшою дисперсією. Відповідно, методи оцінюван-

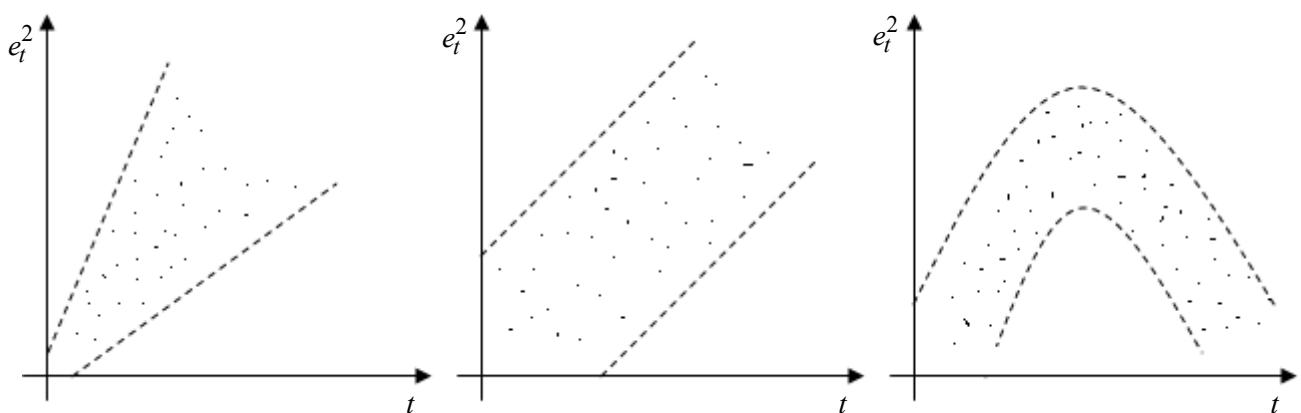
ня, які враховують ваги точок спостережень, дозволяють отримати більш точні (ефективні) оцінки. Використання ваг точок характерно для зваженого МНК. Існує декілька методів пошуку наявності гетероскедастичності: другий критерій Фостера-Стьюарта, критерій рангової кореляції Спірмена, критерій Парка, параметричний та непараметричний критерій Голдфелда-Квандта, критерій Глейзера.

У більшості критеріїв будується лінія регресії, після чого аналізуються похибки.

### *Способи оцінки присутності гетероскедастичності Візуальний.*



**Рис. 5.3. Гомоскедастичність (значення розташовані в межах однієї області та рівномірно розподілені)**



**Рис. 5.4. Гетероскедастичність**

#### **Критерій рангової кореляції Спірмена.**

- 1) Будується лінія регресії  $T(t)$ .
- 2) Досліджується залежність похибок від часу
 
$$\{e_t\} = \{u_t - T(t)\} = \{u_t - \hat{u}_t\}, t = \overline{1, N}$$
- 3) Існування залежності визначається на основі рангового коефіцієнта кореляції Спірмена. Для цього обчислюються ранги  $r_{e_t}$  послідовності  $e_t$  та  $r_{t_t}$  послідовності  $t$ . Для часових рядів  $r_{t_t} = t$ .
- 4) Знаходять різницю між цими рангами
 
$$\Delta t = r_{e_t} - r_{t_t} = r_{e_t} - t, t = \overline{1, N}$$

- 5) Обчислюється коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

$$r_C = 1 - \frac{6 \sum_{t=1}^N \Delta t}{N(N^2 - 1)}.$$

- 6) Перевіряється гіпотеза  $H_0 : r_C = 0$ , при альтернативній гіпотезі  $H_1 : r_C \neq 0$ . Якщо  $r_C$  незначущий, тобто вірна основна гіпотеза, то роблять висновок про відсутність гетероскедастичності. Маємо явище гомоскедастичності. Якщо  $r_C$  значущий, то наявна гетероскедастичність. Для перевірки цієї гіпотези обчислюється статистика

$$t = \frac{r_C \sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r_C^2}},$$

яка має розподіл Стьюдента з  $N-2$  степенями свободи.

- 7) Якщо  $|t| \leq t_{\alpha/2, N-2}$ , то присутня гомоскедастичність.

Якщо  $t < -t_{\alpha/2, N-2}$ , то присутня тенденція зменшення дисперсії.

Якщо  $t > t_{\alpha/2, N-2}$ , то присутня тенденція до зростання дисперсії.

$t_{\alpha, v}$  – квантиль  $t$ -розподілу Стьюдента.

### Критерій Голдфелда-Квандта.

- 1) Розташовують данні в порядку зростання незалежної змінної, пропорційно якій змінюється стандартне відхилення випадкової компоненти. Для часового ряду ця змінна  $t$ , а дані вже впорядковані.
- 2) Із вихідних даних виключають  $d$  середніх спостережень.  $d$  зазвичай обирається в межах від  $\frac{1}{4}$  до  $\frac{1}{3}$  довжини часового ряду і таким чином, щоб кількість елементів, що залишилась ділилась націло навпіл, тобто  $\frac{N-d}{2}$  було цілим.
- 3) Оцінюють дві регресії: перша використовує менші значення  $t$  і будеться за першими  $\frac{N-d}{2}$  значеннями; друга використовує більші значення  $t$  і будеться за останніми  $\frac{N-d}{2}$  спостереженнями.

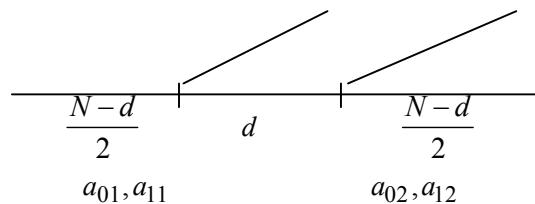


Рис. 5.5. Розподіл значень між групами

- 4) Обчислюють суму квадратів залишків дляожної регресії

$$ESS_1 = \sum_{t=1}^{N-d} (u_t - a_{01} - a_{11}t^2)^2 = \sum_{t=1}^{N-d} e_t^2, \quad ESS_2 = \sum_{t=\frac{N+d}{2}+1}^N (u_t - a_{02} - a_{12}t^2)^2 = \sum_{t=\frac{N+d}{2}+1}^N e_t^2.$$

5) Обчислюють статистику

$$F = \begin{cases} \frac{ESS_2}{ESS_1}, & \text{якщо } ESS_2 \geq ESS_1, \\ \frac{ESS_1}{ESS_2}, & \text{якщо } ESS_2 \leq ESS_1. \end{cases}$$

$F$  має  $F$ -розподіл Фішера з  $k_1 = k_2 = \frac{N-d}{2} - m - 1$  степенями свободи,  $m$  – кількість параметрів лінії регресії.

6) Якщо  $\frac{1}{F_{\alpha, k_1, k_2}} < F < F_{\alpha, k_1, k_2}$ , то присутня гомоскедастиність.

Якщо  $F > F_{\alpha, k_1, k_2}$ , то присутня гетероскедастичність та тенденція до збільшення дисперсії.

Якщо  $F < \frac{1}{F_{\alpha, k_1, k_2}}$ , то присутня гетероскедастичність та тенденція до зменшення дисперсії.

Ці критерії незалежно від типу лінії регресії дозволяють оцінити наявність гетероскедастичності, але не пропонують способу її усунення.

### *Методи вилучення гетероскедастичності*

Для вилучення гетероскедастичності можуть використовуватися зважений МНК (weighted least squares, WLS), а також узагальнений МНК (generalized least squares, GLS).

Як уже зазначалось при відтворенні лінії регресії було б бажано надати більшу вагу тим значенням, які знаходяться близче до лінії регресії, та меншу тим, що знаходяться на більший відстані від лінії регресії.

Розглянемо WLS для лінійної регресії

$$u_t = a_0 + a_1 t + e_t.$$

Будемо вважати, що  $\sigma_t, t = \overline{1, N}$  відомі, тоді

$$\begin{aligned} \frac{u_t}{\sigma_t} &= a_0 \frac{1}{\sigma_t} + a_1 \frac{t}{\sigma_t} + \frac{e_t}{\sigma_t}. \\ \sigma_t &= \sqrt{D\{e_t\}} = \sqrt{(M\{e_t - M\{e_t\}\})^2} = \sqrt{M\{e_t^2\}}, \end{aligned}$$

оскільки  $M\{e_t\} = 0$  за умовами теореми Гаусса-Маркова.

Можемо перерахувати початкові значення  $t$  та  $u_t$ ,  $t = \overline{1, N}$ , тоді отримаємо нову регресію

$$u_t^* = a_0 z_t^* + a_1 t_t^* + e_t^*, \tag{5.1}$$

де  $z_t^* = 1/\sigma_t$ .

Для неї виконується

$$D\{e_t^*\} = D\left\{\frac{e_t}{\sigma_t}\right\} = \frac{1}{\sigma_t^2} D\{e_t\} = \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^2} = 1 = \text{const}.$$

Таким чином у результируючому часовому ряді всі дисперсії однакові та дорівнюють одиниці, тобто гетероскедастичність відсутня. Тому застосування МНК до перерахованих даних дозволить отримати параметри регресії, в яких будуть відсутні недоліки, що обумовлені зваженим МНК.

Далі застосовується МНК до перетвореного рівняння (5.1)

$$\sum_{t=1}^N \left( u_t^* - a_0 z_t^* - a_1 t_t^* \right)^2 = \sum_{t=1}^N \frac{1}{\sigma_t^2} (u_t - a_0 - a_1 t)^2 = \sum_{t=1}^N \frac{1}{\sigma_t^2} e_t^2 = \sum_{t=1}^N w_t e_t^2 \rightarrow \min_{a_0, a_1}.$$

Тобто необхідно мінімізувати зважену суму квадратів відхилень.

Будемо шукати  $\sigma_t$  наближено у вигляді деякої функції  $f(t)$ , побудованої за квадратами похибок лінії регресії, тобто за  $e_t^2$ . Наприклад, у вигляді

$$\begin{aligned} f(t) &= b_0 + b_1 t, \\ f(t) &= b_0 + b_1 t^2, \\ f(t) &= b_0 + \frac{b_1}{t}, \\ f(t) &= b_0 + b_1 \sqrt{t}. \end{aligned}$$

Алгоритм виключення гетероскедастичності.

- 1) За величинами  $u_t$  будується лінію регресії.
- 2) Обчислюють величини  $e_t$ .
- 3) За величинами  $e_t^2$  будується функцію  $f(t)$  за допомогою МНК, тобто будується ще одну лінію регресії.
- 4) Перетворюють вихідні величини  $t$  та  $u_t$ , поділивши їх на значення  $\sigma_t = f(t)$ .
- 5) За допомогою МНК знаходять значення коефіцієнтів лінії регресії (5.1).

### *Контрольні питання за темою*

Яке з наступних тверджень є правильним?

1. У наслідок наявності гетероскедастичності оцінки перестають бути ефективними та спроможними.
2. Оцінки та дисперсії оцінок залишаються незсууненими.
3. Висновки по t- і F-статистикам є ненадійними.
4. При наявності гетероскедастичності стандартні помилки оцінок будуть заниженими.
5. Другий критерій Форстера-Стюарта використовується для перевірки наявності тенденції в зміні дисперсії.

6. Критерії перевірки наявності тенденції в зміні дисперсії залежать від обраної регресії.
7. Використання зваженого МНК носить обмежений характер, оскільки для його використання необхідно знати дисперсії відхилень.

## ТЕМА 6. СЕЗОННІСТЬ

Періодичність явищ та процесів характерна для природних систем, а також для соціальних та економічних процесів. До сезонних відносяться такі явища, які виявляють у своєму розвитку закономірності, які більш-менш регулярно повторюються у певні періоди часу.

Під **сезонністю** розуміють коливання показників, що систематично повторюються та обумовлені особливостями зовнішніх умов в певний період. Якщо коливання обумовлені внутрішніми причинами явища, тоді говорять про **циклічність**. З точки зору математичного апарату, що використовується при аналізі коливань, різниця між сезонністю та циклічністю полягає в довжині періоду. При використанні регресійного підходу динамічні ряди є композицією чотирьох компонент: тренду, сезонної, циклічної та випадкової компоненти. Досить часто наявність циклічної компоненти не враховують, вважають що вона дорівнює нулю (особливо для коротких рядів), в такому випадку динамічний ряд називають тренд-сезонним.

У сезонних часових рядах найчастіше спостерігається шаблон поведінки, який повторюється щогодини, щоденно, щотижня, щомісячно, щорічно. Тому періоди, які найчастіше спостерігаються дорівнюють 4, 7, 9, 12 або кратним ним.

Якщо ряд динаміки не містить чітко вираженої тенденції розвитку, тоді пошук сезонної складової можна виконувати безпосередньо за емпіричними даними. Якщо тенденція розвитку присутня, тоді, пошук сезонної складової, зазвичай, виконують за стаціонарним рядом. Для цього з початкового часового ряду  $\{u_t\}, t = \overline{1, N}$  вилучають тренд  $T_t = T(t)$ . Тим самим отримують новий ряд  $\{y_t\}, t = \overline{1, N}$ , для якого  $M\{y_t\} = 0$ .

В залежності від обраної форми представлення часового ряду: адитивної (1.1), мультиплікативної (1.2) або змішаної (1.3), значення  $y_t$  обчислюються через  $y_t = u_t - T_t$  або  $y_t = u_t / T_t$  відповідно.

Для опису сезонних моделей існує два зовсім різних підходи: використання індексів сезонності або гармонічний аналіз.

**Індекси сезонності** утворюють масив  $S_1, S_2, \dots, S_l$  довжини  $l$ ,  $l$  – період. Це є ніби то корегуючи коефіцієнти. Сукупність індексів сезонності складає **сезонну хвилю**.

Для адитивної форми сезонність визначається за правилом

$$S_j = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} y_{j+kl}, \quad (6.1)$$

де  $j = \overline{1, l}$ ,  $m = \left[ \frac{N}{l} \right]$ ,  $p = m + 1$  якщо  $m \cdot l \leq N$ , інакше  $p = m$ .

Наприклад, якщо довжина ряду  $N = 50$ , а період  $l = 12$ , то

$$S_1 = \frac{y_1 + y_{13} + y_{25} + y_{37} + y_{49}}{5}, \dots, S_{11} = \frac{y_{11} + y_{23} + y_{35} + y_{47}}{4}.$$

Сума всіх сезонних компонент для адитивної форми повинна дорівнювати нулю. Для цього отримані за формулою (6.1) індекси сезонності необхідно скорегувати наступним чином

$$S_j^{kop} = S_j - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l S_i .$$

Для ряду з трендом адитивна сезонність може бути обчислена за формулами однією з формул

$$S_j = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} (u_{j+kl} - \bar{u}),$$

$$S_j = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_{j+kl} - \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \hat{u}_{j+kl}, \quad j = \overline{1, l} .$$

Прогноз будується за формулою

$$\hat{u}_{N+\tau} = T(N + \tau) + S_{(N+\tau) \bmod l}^{kop},$$

так  $\hat{u}_{52} = T_{52} + S_4$ ,  $\hat{u}_{61} = T_{61} + S_1$ .

Для мультиплікативної форми сума індексів сезонності повинна дорівнювати періоду  $l$ , а їх середнє значення одиниці. Для цього отримані за формулою (6.1) індекси сезонності необхідно скорегувати за допомогою додаткового коефіцієнта

$$S_j^{kop} = \frac{l}{\sum_{i=1}^l S_i} S_j .$$

Для ряду з трендом мультиплікативна сезонність може бути обчислена за

$$S_j = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{u_{j+kl}}{\bar{u}}, \quad j = \overline{1, l} .$$

Мультиплікативні індекси сезонності використовуються коли при зростанні середнього рівня динаміки також зростають і абсолютні відхилення, що пов'язані з сезонністю.

В адитивних моделях індекси вимірюються в абсолютних величинах, а в мультиплікативних індекси показують відносні відхилення кожного значення від лінії тренду або середньої величини.

Прогноз будується за формулою

$$\hat{u}_{N+\tau} = T(N + \tau) \cdot S_{(N+\tau) \bmod l}^{kop} .$$

Зовсім інший підхід для визначення сезонної складової використовується коли коливання мають синусоїdalну форму, а саме **гармонічний аналіз**. В його основі представлення циклічних змін ряду у вигляді сукупності гармонічних процесів коливань – рядів Фур'є.

Розкладання в ряд Фур'є виконують для стаціонарного ряду  $\{y_t\}, t = \overline{1, N}$  з виключеним трендом. Тренд може бути виключено з ряду за допомогою МНК або рухомого середнього. У разі використання рухомого середнього слід обирати

ширину вікна, яка дорівнює періоду, тоді значення тренда від цієї компоненти дорівнюватиме нулю, а тренд не буде містити сезонну складову.

Опис залишків  $\{y_t\}, t = \overline{1, N}$ , отриманих після виділення тренду, виконується за допомогою розкладання в ряд Фур'є,  $\hat{y}_t$  представляється у вигляді

$$\hat{y}_t = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos\left(t \frac{2\pi k}{l}\right) + B_k \sin\left(t \frac{2\pi k}{l}\right) \right), \quad (6.2)$$

де  $l$  – період коливань;  $A_0, A_k, B_k, k = \overline{1, \infty}$  – коефіцієнти Фур'є; параметр  $k$  визначає  $k$ -у криву ряду та має назву гармоніка.

Коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулами

$$A_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j, \\ A_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \cos\left(j \frac{2\pi k}{l}\right), \quad B_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N y_j \sin\left(j \frac{2\pi k}{l}\right).$$

Максимальна кількість гармонік, які використовують на практиці дорівнює

$$k_{\max} = \left[ \frac{N}{2} \right].$$

Період  $l$  визначається дослідником, наприклад, за виглядом корелограми, що побудована за рядом  $\{y_t\}, t = \overline{1, N}$  з виключеним трендом або за допомогою амплітудного спектру.

#### *Контрольні питання за темою*

9. Що таке сезонність? Чим циклічність відрізняється від сезонності?
10. Які існують форми представлення динамічних рядів?
11. Що таке індекси сезонності?
12. Які властивості адитивних та мультиплікативних індексів сезонності?
13. За яким рядом обчислюють сезонну компоненту динамічного ряду?
14. Коли використовують гармонічний аналіз?
15. Що таке гармоніка та яку кількість гармонік використовують?

## ТЕМА 7. АВТОКОРЕЛЯЦІЯ

Будь-яка модель є неточною, що обумовлює наявність залишків – відхилень теоретичних значень ряду від емпіричних. Неможливо без ускладнення моделі врахувати всі фактори, які впливають на залежну змінну. Під вплив цих неврахованих факторів підпадає випадкова складова ряду  $\xi_t$  (1.1).

Після знаходження тренду та сезонності можна обчислити ряд залишків

$$e_t = u_t - T(t) - S(t), t = \overline{1, N}.$$

Однією з умов можливості застосування МНК є незалежність ряду залишків, тобто  $\text{cov}(e_i, e_j) = 0, i \neq j$ . ). Якщо ця умова не виконується, то роблять висновок про наявність залежності між залишками. Залежність між послідовними рівня-

ми ряду залишків взятих із зсувом має назву **автокореляції** ряду залишків (похибок). Існує додатна та від'ємна автокореляції.

**Додатна автокореляція** передбачає, що за додатним значенням похибки у момент часу  $t$  скоріше за все буде більше ніж додатне значення в момент часу  $t+1$ . При додатній автокореляції лінія, що з'єднує рівні ряду рідко перетинає лінію регресії.

**Від'ємна автокореляція** означає, що за додатним значенням похибки скоріше за все буде менше від'ємне значення, а за від'ємним додатне. При від'ємній автокореляції лінія, що з'єднує рівні ряду частіше перетинає лінію регресії ніж при додатній.

### *Моделі опису залишків ряду*

1. Дистрибутивно-лагова модель

$$e_t = f(t) + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots$$

2. Автокореляційна (авторегресійна) модель

$$e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \alpha_2 e_{t-2} + \dots + \varepsilon_t,$$

де  $\varepsilon_t$  – випадкова величина з нульовим середнім. Якщо  $e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \varepsilon_t$ , то це автокореляційна модель 1-го порядку, якщо  $e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \alpha_2 e_{t-2} + \dots + \alpha_m e_{t-m} + \varepsilon_t$ , то це автокореляційна модель  $m$ -го порядку. Коефіцієнти  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  мають назву коефіцієнтами автокореляції або коефіцієнтами авторегресії.

Наявність автокореляції випадкових залишків регресійної моделі призводить до зменшення якості МНК-оцінок параметрів регресії, а також до завищення статистичних характеристик, за якими перевіряється якість моделі. Тобто відбувається штучне підвищення якості моделі відносно її дійсного рівня точності. Тому перевірка автокореляції випадкових залишків є неохідною процедурою перевірки регресійної моделі.

Існує декілька методів перевірки на наявність автокореляції. Це, насамперед, візуальний перегляд залишків та дослідження корелограми (див. тему 2) побудованої за рядом залишків. Частіше за все перевіряється наявність в випадкових залишках автoreгресійного процесу першого порядку. Для перевірки нульової гіпотези про рівність коефіцієнта автокореляції нулю використовують критерій Дарбіна-Уотсона. У разі лагової залежності змінної в моделі можна використовувати асимптотичний  $h$ -тест Дарбіна. Для перевірки наявності автокореляції випадкових залишків більшого ступеня використовують універсальних асимптотичний  $LM$ -тест Бройша-Годфри. Крім того цей тест не вимагає умови нормальногорозподілу залишків. Для перевірки сумісної гіпотези про рівність нулю всіх коефіцієнтів автокореляції до заданого степеня використовують  $Q$ -тест Бокса-Пірса або  $Q$ -тест Л'юнга-Бокса.

### *Критерій Дарбіна-Уотсона*

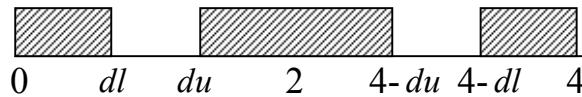
Критерій Дарбіна-Уотсона застосовується для перевірки наявності автокореляції першого порядку. Цей метод базується на статистиці Дарбіна-Уотсона

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^N (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^N e_t^2}.$$

Статистика Дарбіна-Уотсона тісно пов'язана з вибірковим коефіцієнтом кореляції  $\text{corr}(e_t, e_{t-1})$ :

$$DW \approx 2(1 - \text{corr}(e_t, e_{t-1})).$$

Таким чином, значення  $DW$  змінюються на відрізку.



**Рис. 7.1. Зони прийняття рішень критерію Дарбіна-Уотсона.**

На відрізку  $[du; 4 - du]$  автокореляція відсутня; на відрізку  $[0; dl]$  – додатна автокореляція; на відрізку  $[4 - dl; 4]$  – від'ємна автокореляція; відрізки  $[dl; du]$ ,  $[4 - du; 4 - dl]$  – області невизначеності. На практиці, якщо  $DW$  потрапляє в зону невизначеності, приймають рішення про наявність автокореляції. Значення  $dl$ ,  $du$  залежать від довжини ряду (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

**Значення величин  $dl$ ,  $du$  для критерію Дарбіна-Уотсона**

$N$	$dl$	$du$
6	0.610	1.100
10	0.879	1.320
20	1.201	1.411
40	1.442	1.544
75	1.598	1.652
100	1.654	1.694
150	1.720	1.746
200	1.758	1.778

Під час використання критерію Дарбіна-Уотсона необхідно враховувати такі обмеження:

1. Критерій Дарбіна-Уотсона застосовується лише для тих моделей, які містять вільний член.
2. Вважають, що випадкові відхилення  $\varepsilon_t$  визначаються за ітераційною схемою  $\varepsilon_t = \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \nu_t$ , яка називається авторегресійною схемою першого порядку.
3. Статистичні дані не повинні містити пропусків у спостереженнях.

Для будь-якого значення  $m$  теоретична кореляційна матриця послідовності  $\{u_t\}$  є матрицею Лорана. Коефіцієнти  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$  – коефіцієнти корелограми. Матриця Лорана (додатно визначена), тому визначник будь-якого мінору, роз-

ташованого на головній діагоналі, не може бути від'ємним. З додатної визначеності матриці Лорана випливають умови сумісності коефіцієнтів автокореляції.

$$L_{m-1} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{m-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{m-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{m-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{m-1} & \rho_{m-2} & \rho_{m-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|L_1| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \rho_1^2 \Rightarrow |\rho_1| \leq 1, \text{ оскільки } |L_1| \geq 0. \text{ Тривіальний випадок.}$$

$$|L_2| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\rho_1^2\rho_2 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2 = 1 - \rho_2^2 + 2\rho_1^2(1 - \rho_2) = (1 - \rho_2)(1 + \rho_2 - 2\rho_1^2) \geq 0, \text{ тоді}$$

$$1 - \rho_2 \geq 0, \rho_2 \leq 1, 1 + \rho_2 - 2\rho_1^2 \geq 0, \rho_2 \geq 2\rho_1^2 - 1.$$

Висновок: коефіцієнти кореляції є залежними.

Авторегресійна модель першого порядку:  $m = 1, e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \varepsilon_t$ . Ця модель називається марківською. Модель другого порядку – це модель Юла:  $m = 2, e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \alpha_2 e_{t-2} + \varepsilon_t$ . Для зручності перепишемо авто регресійну модель у вигляді

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^m \alpha_j^{\prime} e_{t-j}, \alpha_j^{\prime} = -\alpha_j, \alpha_0^{\prime} = 1. \quad (7.1)$$

Якщо помножити рівність (7.1) на  $e_{t-k}$  та обчислити математичне очікування, то отримаємо систему рівнянь Юла-Уоркера

$$\rho_k + \alpha_1^{\prime} \rho_{k-1} + \alpha_2^{\prime} \rho_{k-2} + \dots + \alpha_m^{\prime} \rho_{k-m} = 0, k = \overline{1, m}. \quad (7.2)$$

Коефіцієнти автокореляції  $\alpha_j^{\prime}$  знаходяться з системи (7.2).

Оскільки для коефіцієнтів кореляції виконується умова:  $\rho_j = \rho_{-j}$ , тоді систему (7.2) можна записати у наступному вигляді

$$\rho_1 + \alpha_1^{\prime} \rho_0 + \alpha_2^{\prime} \rho_1 + \dots + \alpha_m^{\prime} \rho_{m-1} = 0, \rho_0 = 1$$

$$\rho_2 + \alpha_1^{\prime} \rho_1 + \alpha_2^{\prime} \rho_0 + \dots + \alpha_m^{\prime} \rho_{m-1} = 0,$$

...

Між коефіцієнтами  $\alpha_j$  та  $\alpha_j^{\prime}$  існує залежність  $\alpha_j = \alpha_j^{\prime}$ .

Для моделі Маркова

$$e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^1 \alpha_j^{\prime} e_{t-j},$$

$$\rho_1 + \alpha_1^{\prime} = 0,$$

$$\alpha_1^{\prime} = -\rho_1,$$

$$\alpha_1 = \rho_1.$$

Для моделі Юла

$$e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \alpha_2 e_{t-2} + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^2 \alpha_j' e_{t-j},$$

$$\begin{cases} \rho_1 + \alpha_1' + \alpha_2' \rho_1 = 0, \\ \rho_2 + \alpha_1' \rho_1 + \alpha_2' = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Крамера

$$\alpha_1 = -\alpha_1' = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}, \quad \alpha_2 = -\alpha_2' = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}.$$

Модель Юла не може бути застосована, коли  $|\rho_1| = 1$ .

Прогнозні значення ряду авторегресії обчислюються за формулою

$$e_{N+\tau} = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_{N+\tau-j}.$$

При цьому перше прогнозне значення завжди обчислюється лише по значенням початкового ряду, а наступні використовують попередні прогнозні значення. Ці авторегресійні моделі можна застосовувати до вихідного ряду, а не тільки до ряду залишків. Загальний прогноз, що будеться на основі регресійного аналізу, залежить від обраної форми представлення динамічного ряду (1.1) та обчислюється за однією з формул

$$\begin{aligned} \hat{u}_{N+\tau} &= T_{N+\tau} + S_{N+\tau} + e_{N+\tau}, \\ \hat{u}_{N+\tau} &= T_{N+\tau} \cdot S_{N+\tau} \cdot e_{N+\tau}, \\ \hat{u}_{N+\tau} &= T_{N+\tau} \cdot S_{N+\tau} + e_{N+\tau}. \end{aligned}$$

Основною причиною наявності випадкового члена в моделях є неповна інформація о причинах та взаємозв'язках, що визначають те чи інше значення залежної змінної. Тому властивості випадкових відхилень, в тому числі і автокореляція, в першу чергу залежать від вибору формули залежності і складу пояснюючих змінних. Найчастіше автокореляція викликана неправильною специфікацією моделі, тому для її усунення необхідно, перш за все, спробувати скорегувати саму модель. Автокореляція може бути викликана відсутністю в моделі деякої важливої пояснюючої змінної. Необхідно визначити даний фактор та врахувати його в рівнянні регресії. Також можна спробувати змінити формулу залежності. Але, якщо нічого не допомагає, то можливо автокореляція обумовлена деякими внутрішніми властивостями ряду  $e_t$ , тому доцільно скористатися авторегресійним перетворенням для виключення автокореляції.

### **Виключення автокореляції**

Розглянемо процедуру виключення автокореляції першого порядку, розглянемо лінійний тренд.

Спостереження в момент часу  $t$  та  $t-1$  обчислюються відповідно до

$$\hat{u}_t = a_0 + a_1 t + e_t, \tag{7.3}$$

$$\hat{u}_{t-1} = a_0 + a_1(t-1) + e_{t-1}, \tag{7.4}$$

Будемо вважати, що на випадкові відхилення впливає авторегресія першого порядку:

$$\varepsilon_t = \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \nu_t,$$

де  $\nu_t, t = 2, \dots, N$  – випадкові відхилення, які задовольняють умовам теореми Гаусса-Маркова, а коефіцієнт  $\alpha_1$  відомий.

Помножимо обидві частини рівності (7.4) на  $\alpha_1$  та отримаємо

$$\alpha_1 \hat{u}_{t-1} = \alpha_1 a_0 + a_1 \alpha_1 (t-1) + \alpha_1 e_{t-1}. \quad (7.5)$$

Віднімемо з рівності (7.3) рівність (7.5)

$$\hat{u}_t - \alpha_1 \hat{u}_{t-1} = a_0 (1 - \alpha_1) + a_1 (t - \alpha_1 (t-1)) + e_t - \alpha_1 e_{t-1}.$$

Позначимо  $\hat{u}_t^* = \hat{u}_t - \alpha_1 \hat{u}_{t-1}$ ,  $a_0^* = a_0 (1 - \alpha_1)$ ,  $t^* = t - \alpha_1 (t-1)$ ,  $\nu_t = e_t - \alpha_1 e_{t-1}$ , отримаємо

$$\hat{u}_t^* = a_0^* + a_1 t^* + \nu_t, \quad (7.6)$$

для  $\nu_t$  вже виконуються умови теореми Гаусса-Маркова, тому оцінки  $a_0^*$ ,  $a_1$  будуть мати властивості ефективних незсунених оцінок.

Таким чином, якщо ми будемо знати значення коефіцієнта автокореляції  $\alpha_1$ , тоді обчисливши  $\hat{u}_t^*$  та  $t^*$ , зможемо застосувати МНК до (7.6). Тим самим отримати оцінки параметрів регресії, не пов'язаних з проблемою автокореляції. Авторегресійне перетворення першого порядку може бути узагальнено на перетворення більш високих порядків.

Методів для оцінювання  $\alpha_1$  декілька. Всі вони мають ітеративний характер.

Визначення  $\alpha_1$  на основі статистики Дарбіна-Уотсона. Оскільки статистика Дарбіна-Уотсона тісно пов'язана з коефіцієнтом кореляції

$$DW \approx 2(1 - \text{corr}(e_t, e_{t-1})),$$

Тому в якості оцінки коефіцієнта  $\alpha_1$  можна взяти коефіцієнт  $r = \text{corr}(e_t, e_{t-1})$ , який дорівнює

$$r \approx 1 - \frac{DW}{2}.$$

Цей метод дає добри результати при великій кількості спостережень.

Процедура Кохрана-Оркатта. Початковим етапом цієї процедури є застосування МНК до вихідного часового ряду, визначення параметрів тренда та знаходження ряду залишків  $e_t, t = \overline{1, N}$ .

1. В якості наближеного значення  $\alpha_1$  береться його МНК оцінка, отримана на основі

$$e_t = \alpha_1 e_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{t=2}^N e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^N e_{t-1}^2}.$$

2. Використовуючи перетворення (7.6) знаходимо МНК оцінки параметрів трендової моделі.

3. Будуємо ряд залишків  $e_t'$ . Якщо в ряді залишків не буде автокореляції або параметри на цьому та попередньому кроках будуть однаковими з заданою точністю, то процедура припиняється, в противному випадку повторюємо процедуру з першого кроку.

Недоліком цієї процедури є можливість потрапити в локальний мінімум.

Процедура Хілдрета-Лу. З відрізку  $[-1;1]$  – множина можливих значень коефіцієнта  $\alpha_1$  – послідовно вибирають значення  $\alpha_1$  з деяким кроком. Для кожного з них знаходять оцінки параметрів  $a_0$  та  $a_1$  моделі (7.6). Фіксується те значення  $\alpha_1$ , при якому  $\sum_{t=1}^N e_t^2$  мінімальна. Поблизу цієї точки  $\alpha_1$  обирається більш мілка сітка та все повторюється. Перевагою цього методу є відсутність ймовірності потрапити в локальний мінімум.

#### *Контрольні питання за темою*

1. Що таке автокореляція?
2. Про що свідчить додатна та від'ємна автокореляції?
3. Які існують методи перевірки на наявність автокореляції?
4. Які ви знаєте моделі опису залишків часового ряду?
5. За якими методами можна вилучати автокореляцію?

## **ТЕМА 8. АДАПТИВНІ МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ**

В адаптивних методах часовий ряд представляється у вигляді функції

$$u_t = f(a_{1t}, a_{2t}, \dots, a_{pt}, t) + e_t,$$

під час побудови якої відслідковується величина відхилень прогнозних значень від значень вихідного ряду.

Методи передбачають виконання двох етапів: вирівнювання ряду та наступне прогнозування. В той же час сам процес вирівнювання є послідовним обчислением прогнозного значення на 1 крок вперед з урахуванням відхилення вже побудованого прогнозу від попередньої частини ряду.

На відміну від регресійного підходу до аналізу динамічних рядів, який потребує суттєвих математичних обчислень та накладає обмеження на довжину ряду (середні та довгі), адаптивні методи застосовуються до аналізу коротких рядів.

Всі адаптивні методи базуються на принципі експоненціального згладжування, тобто враховують «старіння» інформації.

#### **Експоненційне прогнозування**

Розглянемо обчислювальну схему прогнозування методом експоненціального згладжування, розроблену Р.Брауном [15]. Ідея методу полягає в тому, що часовий ряд згладжується шляхом зваженого рухомого середнього з експоненційними вагами, що дозволяє здійснювати короткострокове прогнозування [10].

Будемо вважати, що часовий ряд може бути описано поліномом

$$u_t = \sum_{i=0}^p \frac{a_i}{i!} p^i + \varepsilon_t, \quad (8.1)$$

що дозволяє, розклавши функцію  $u_{t+l}$  у ряд Тейлора, обчислити прогнозне значення в момент  $t+l$

$$\hat{u}_{t+l} = u_t^{(0)} + l u_t^{(1)} + \frac{l^2}{2!} u_t^{(2)} + \dots + \frac{l^k}{k!} u_t^{(k)} + \dots + \frac{l^p}{p!} u_t^{(p)}. \quad (8.2)$$

Брауном Р. та Маєром Р. доведено, що будь-яку  $k$ -ту похідну ( $k = \overline{0, p}$ ) рівняння (8.2) можна представити лінійною комбінацією експоненційних середніх до  $(p+1)$ -го порядку

$$S_t^{(k)}(u) = \alpha S_t^{(k-1)}(u) + (1-\alpha) S_{t-1}^{(k)}(u), \quad k = \overline{1, p}, \quad (8.3)$$

де

$$S_t^{(1)}(u) = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i u_{t-i} + (1-\alpha)^t u_0, \quad (8.4)$$

$\alpha$  – параметр згладжування ( $0 < \alpha < 1$ ).

З виразів (8.3), (8.4) отримують рівняння

$$\begin{aligned} S_t^{(1)}(u) &= \alpha u_t + (1-\alpha) S_{t-1}^{(1)}(u), \\ S_t^{(2)}(u) &= \alpha S_t^{(1)}(u) + (1-\alpha) S_{t-1}^{(2)}(u), \\ &\dots, \\ S_t^{(k)}(u) &= \alpha S_t^{(k-1)}(u) + (1-\alpha) S_{t-1}^{(k)}(u), \\ &\dots, \\ S_t^{(n)}(u) &= \alpha S_t^{(n-1)}(u) + (1-\alpha) S_{t-1}^{(n)}(u). \end{aligned} \quad (8.5)$$

На підставі рівнянь (8.5) формулюються обчислювальні схеми прогнозування часових рядів із типовими трендами.

Часовий ряд, що визначається адитивним трендом

$$u_t = a_0 + \varepsilon_t,$$

де  $a_0 = const$ ,  $\varepsilon_t \approx N(0, \sigma)$  – похибка, визначена нижчепереліканими оцінками.

З першого рівняння (5), з урахуванням  $S_t^{(1)}(u) = S_t(u)$ , одержують

$$S_t(u) = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i u_{t-i} = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i (a_0 + \varepsilon_{t-i}) = \hat{a}_0 + \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i \varepsilon_{t-i}, \quad (8.6)$$

де  $\hat{a}_0 = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^t u_i$ ,  $t = 1, 2, \dots$ ,  $\varepsilon_t = u_t - \hat{a}_0(t-1)$ .

Враховуючи, що

$$E\{S_t\} = \hat{a}_0, \quad D\{S_t\} = E\left\{\left(\alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i \varepsilon_{t-i}\right)^2\right\} = \alpha^2 \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^{2t} \sigma^2 = \frac{\alpha}{2-\alpha} \sigma^2, \quad (8.7)$$

призначають довірчий інтервал на  $S_t(x)$

$$\hat{a}_0 - u_{\alpha/2} \sigma \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \leq S_t(u) \leq \hat{a}_0 + u_{\alpha/2} \sigma \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}}, \quad (8.8)$$

де  $u_{\alpha/2}$  – квантиль нормального розподілу при рівні значущості  $\alpha$ .

Прогнозна модель на  $\tau$  кроків уперед має вигляд

$$\hat{u}_{t+\tau} = \hat{a}_{0,t} = \alpha u_t + (1-\alpha) \hat{a}_0(t-1)$$

з довірчою оцінкою (8.8).

Для лінійно-адитивного тренду

$$u_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t$$

коефіцієнти  $a_0, a_1$  обчислюються через  $S_t^{(1)}(u), S_t^{(2)}(u)$  із рівнянь

$$S_t^{(1)}(u) = \hat{a}_0 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{a}_1, \quad S_t^{(2)}(u) = \hat{a}_0 + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \hat{a}_1, \quad (8.9)$$

з початковими умовами  $S_0^{(1)}(u) = a_0 + \frac{1-\alpha}{\alpha} a_1, S_0^{(2)}(u) = \hat{a}_0 + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \hat{a}_1$ .

З розв'язку системи (8.9) отримують

$$\hat{a}_0 = 2S_t^{(1)}(u) - S_t^{(2)}(u), \quad \hat{a}_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} (S_t^{(1)}(u) - S_t^{(2)}(u)). \quad (8.10)$$

Враховуючи, що

$$S_1(t) = \alpha u_t + (1-\alpha) S_1(t-1), \quad S_2(t) = \alpha^2 u_t + \alpha(1-\alpha) S_1(t-1) + (1-\alpha) S_2(t-1),$$

на підставі (8.10) знаходять

$$\begin{aligned} a_0(t) &= (1-(1-\alpha)^2) u_t + (1-\alpha)^2 a_0(t-1) + (1-\alpha)^2 a_1(t-1), \\ a_1(t) &= \alpha^2 u_t - \alpha^2 a_1(t-1) - \alpha^2 a_0(t-1) + a_1(t-1) \end{aligned} \quad (8.11)$$

або

$$a_0(t) = a_0(t-1) + a_1(t-1) + (1-(1-\alpha)^2) \varepsilon_t, \quad a_1(t) = a_1(t-1) + \alpha^2 \varepsilon_t, \quad (8.12)$$

де  $\varepsilon_t = u_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 t$ .

Прогноз на один крок уперед визначається

$$a_0(t) + a_1(t) = a_0(t-1) + 2a_1(t-1) - 2\alpha(1-\alpha)\varepsilon_t.$$

Вирази (8.11), (8.12) дозволяють перераховувати оцінки параметрів лінійно-адитивного тренда, тим самим здійснювати прогноз на  $\tau$  кроків уперед

$$\hat{u}_{t+\tau} = \hat{a}_0(t+\tau) + \tau \hat{a}_1(t+\tau), \quad \tau = 0,1,2,\dots$$

або

$$\hat{u}_{t+\tau} = \left( 2 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \tau \right) S_t^{(1)}(u) - \left( 1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} \tau \right) S_t^{(2)}(u).$$

Похибка прогнозу, отже і довірчі інтервали на лінійний тренд, оцінюються величиною  $\sigma_{t+\tau}$ , що дорівнює

$$\sigma_{t+\tau}^2 = \sigma^2 \frac{\alpha}{(2-\alpha)^3} \left( 1 + 4(1-\alpha) + 5(1-\alpha)^2 + 2\alpha(4-3\alpha)l + 2\alpha^2 l^2 \right). \quad (8.13)$$

У випадку квадратично-адитивного тренда

$$u_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \varepsilon_t,$$

з виразів (8.5) випливає система рівнянь:

$$\begin{aligned}
S_t^{(1)}(u) &= \hat{a}_0 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \hat{a}_1 + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2\alpha^2} \hat{a}_2, \\
S_t^{(2)}(u) &= \hat{a}_0 - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \hat{a}_1 + \frac{(1-\alpha)(3-2\alpha)}{\alpha^2} \hat{a}_2, \\
S_t^{(3)}(u) &= \hat{a}_0 - \frac{3(1-\alpha)}{\alpha} \hat{a}_1 + \frac{3(1-\alpha)(4-3\alpha)}{2\alpha^2} \hat{a}_2,
\end{aligned} \tag{8.14}$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned}
S_0^{(1)}(u) &= a_0 - \frac{1-\alpha}{\alpha} a_1 + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2\alpha^2} a_2, \\
S_0^{(2)}(u) &= a_0 - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} a_1 + \frac{(1-\alpha)(3-2\alpha)}{\alpha^2} a_2, \\
S_0^{(3)}(u) &= a_0 - \frac{3(1-\alpha)}{\alpha} a_1 + \frac{3(1-\alpha)(4-3\alpha)}{2\alpha^2} a_2.
\end{aligned}$$

Із системи (8.14) знаходять оцінки коефіцієнтів

$$\begin{aligned}
\hat{a}_0 &= 3S_t^{(1)}(u) - 3S_t^{(2)}(u) + S_t^{(3)}(u), \\
\hat{a}_1 &= \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2} ((6-5\alpha)S_t^{(1)}(u) - 2(5-4\alpha)S_t^{(2)}(u) + (4-3\alpha)S_t^{(3)}(u)), \\
\hat{a}_2 &= \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} (S_t^{(1)}(u) - 2S_t^{(2)}(u) + S_t^{(3)}(u)).
\end{aligned} \tag{8.15}$$

При цьому

$$\begin{aligned}
a_0(t) &= a_0(t-1) + a_1(t-1) + a_2(t-1) + (1-(1-\alpha)^2)\varepsilon_t, \\
a_1(t) &= a_1(t-1) + 2a_2(t-1) + \frac{3}{2}\alpha(1-(1-\alpha)^2)\varepsilon_t, \\
a_2(t) &= a_2(t-1) + \frac{1}{2}\alpha^3\varepsilon_t.
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Для квадратично-адитивного тренда прогнозне значення на  $\tau$  кроків уперед обчислюють за виразами

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{t+\tau} &= \hat{a}_0(t+\tau) + \hat{a}_1(t+\tau)\tau + \hat{a}_2(t+\tau)\tau^2 = (6(1-\alpha)^2 + (6-5\alpha)\alpha\tau + \alpha^2\tau^2) \frac{S_t^{(1)}(u)}{2(1-\alpha)^2} - \\
&- (6(1-\alpha)^2 + 2(5-4\alpha)\alpha\tau + 2\alpha^2\tau^2) \frac{S_t^{(2)}(u)}{2(1-\alpha)^2} + (2(1-\alpha)^2 + (4-3\alpha)\alpha\tau + \alpha^2\tau^2) \frac{S_t^{(3)}(u)}{2(1-\alpha)^2},
\end{aligned}$$

з оцінкою похибки прогнозу через  $\sigma_{t+\tau}$ , що дорівнює

$$\sigma_{t+\tau}^2 \approx \sigma^2 (2\alpha + 3\alpha^2 + 3\alpha^3\tau^2). \tag{8.17}$$

Загальний аналіз формул прогнозування за методом експоненційного згладжування свідчить, що точність прогнозу суттєво залежить від вибору параметра  $\alpha$ . Достовірних рекомендацій з вибору значення  $\alpha$  не існує. Неформальні рекомендації зводяться до такого. Якщо початкові умови достовірні, то вибирають  $\alpha \approx 0$ , у протилежному разі  $\alpha \approx 1$ . Залежно від інтервалу прогнозування або  $k$ -кrokів низкою авторів рекомендовано обирати

$$\alpha = \frac{2}{k+1} \text{ або } \alpha = \frac{1}{k+1}.$$

Якщо відома автокореляційна функція часового ряду  $\rho_1$ , то

$$\alpha = \begin{cases} \frac{3\rho_1 - 1}{2\rho_1}, & \frac{1}{3} < \rho_1 \leq 1, \\ 0 & -1 \leq \rho_1 \leq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Найбільш адекватніша процедура вибору  $\alpha$  зводиться до розбиття часового ряду на дві частини: для першої частини для різних  $\alpha$  будується прогноз на період, що відповідає другій частині. Для всіх заданих  $\alpha$  проводиться оцінка похибки прогнозу і те значення  $\alpha$ , де похибка мінімальна, приймається для наступних розрахунків.

Процедура. Обчислювальна схема прогнозування за методом експоненційного згладжування зводиться до нижчеописаної послідовності дій.

1. Визначається тип тренду, тим самим обирається модель експоненційного згладжування для випадків: адитивного тренду, лінійно-адитивного тренду, квадратично-адитивного тренду.

2. Визначають або задають параметр  $\alpha$ .

3. Обчислюють початкові умови прогнозування відповідно до обраної моделі тренду.

4. Знаходять експоненційне середнє  $S_t^{(k)}(u)$  відповідно до обраної моделі тренду за (8.6), (8.9) або (8.14).

5. Визначають оцінки коефіцієнтів моделі прогнозу відповідно до обраної моделі тренду за (8.6), (8.10) – (8.12) або (8.15), (8.16).

6. Здійснюють прогноз на один крок уперед і обчислюють  $\varepsilon_t$  – похибку відхилення фактичного значення від прогнозного.

7. За рекурентною формулою (8.3) обчислюють нові експоненційні середні, за якими знову знаходять оцінки коефіцієнтів моделі прогнозу.

8. Кроки процедури 6 та 7 є ітеративними.

Якщо темпи росту й приросту часового ряду значні, то реалізація процедури прогнозування методу експоненціального згладжування не є ефективною.

### Моделі лінійного зростання

Іншим варіантом використання експоненційного згладжування є його використання до обчислення коефіцієнтів в моделях лінійного зростання.

В моделях лінійного зростання прогноз обчислюється за формулою

$$u_{t+\tau} = \hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{2,t}\tau, \quad (8.18)$$

де  $\tau$  – період упередження прогнозу,  $\hat{a}_{1,t}$ ,  $\hat{a}_{2,t}$  – коефіцієнти адаптивної моделі в момент часу  $t$ ,  $\hat{a}_{1,t}$  – оцінка того, що досягли на поточному кроці,  $\hat{a}_{2,t}$  – пріріст на поточному кроці.

Оцінки параметрів  $a_{1,t}$ ,  $a_{2,t}$  знаходять на основі однопараметричного пре-диктору Хольта

$$\begin{aligned} \hat{a}_{1,t} &= \beta_1 u_t + (1 - \beta_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}), \\ \hat{a}_{2,t} &= \beta_2 (\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1 - \beta_2) \hat{a}_{2,t-1}, \end{aligned} \quad (8.19)$$

де  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  – параметри згладжування, які обираються з інтервалу  $(0;1)$ . За замовчуванням встановлюють  $\beta_1 = \beta_2 = 0.3$ .

Для обчислення початкових значень  $a_{1,t}$ ,  $a_{2,t}$  необхідно обрати величину  $k$ , яка визначає скільки перших значень ряду буде враховуватись при їх обчисленні. Якщо  $k = 1$ , то  $\hat{a}_{1,1} = u_1$ ,  $\hat{a}_{2,1} = u_2 - u_1$ .

Якщо  $k > 1$  початкові значення параметрів  $a_{1,t}$ ,  $a_{2,t}$  можна обчислювати за формулами

$$\hat{a}_{1,k} = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k u_t, \quad \hat{a}_{2,k} = \frac{u_k - u_1}{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (8.20)$$

В якості  $\hat{a}_{1,k}$  можна обирати середнє значення всього ряду  $\hat{a}_{1,k} = \bar{u}_t$ , а  $a_{2,k}$  обчислюється за формулою (8.20).

Процес згладжування часового ряду є послідовним обчисленням прогнозного значення на 1 крок вперед, тобто

$$\hat{u}_{t+1} = \hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{2,t}. \quad (8.21)$$

### Загальна схема обчислень.

1. У точках часового ряду  $t \leq k-1$  згладжені значення  $\hat{u}_t$  та коефіцієнти  $\hat{a}_{1,t}$ ,  $\hat{a}_{2,t}$  не обчислюються. Згладжені рівні ряду дорівнюють початковому ряду.
2. У точці  $t = k$  обчислюються лише коефіцієнти  $a_{1,k}$  та  $a_{2,k}$ .
3. Обчислюють прогноз на 1 крок вперед (8.21).
4. Значення  $t$  збільшується на одиницю.
5. Обчислюють коефіцієнти  $a_{1,t}$ ,  $a_{2,t}$  за формулою (8.19).
6. Повторюють з пункту 3 по 5 доки  $t \leq N$ .
7. Для побудови прогнозу за межами часового ряду використовують коефіцієнти  $a_{1,N}$ ,  $a_{2,N}$  та (8.81), тобто

$$u_{N+\tau} = \hat{a}_{1,N} + \hat{a}_{2,N}\tau.$$

Співвідношення (8.19) може бути інакше.

**Модель Тейла-Вейджа** відрізняється від загальної схеми моделі Хольта тим, що в (8.19) врахована рівність (8.21). Коефіцієнти обчислюються за наступними формулами

$$\begin{cases} \hat{a}_{1,t} = \beta_1 u_t + (1 - \beta_1) \hat{u}_t = \hat{u}_t + \beta_1 e_t, \\ \hat{a}_{2,t} = \hat{a}_{2,t-1} + \beta_1 \beta_2 e_t, \end{cases}$$

$$e_t = u_t - \hat{u}_t.$$

### **Модель Брауна**

$\beta_1 = 1 - \beta^2$ ,  $\beta_2 = 1$ , де  $\beta$  – коефіцієнт дисконтування даних, що визначає знецінення даних в одиниці часу,  $\beta \in [0;1]$ ,  $\beta_1$  – коефіцієнт згладжування.

$$\begin{cases} \hat{a}_{1,t} = \hat{u}_t + (1 - \beta^2) e_t, \\ \hat{a}_{2,t} = \hat{a}_{2,t-1} + (1 - \beta^2) e_t. \end{cases}$$

Довірчі інтервали на прогнозні значення для моделей Тейла-Вейджа та Брауна обчислюються за формулами

$$u_{N+\tau_{\theta,h}} = \hat{u}_{N+\tau} \pm U(\tau),$$

де  $U(\tau) = \sigma_e \sqrt{1 + \beta_1(1.25 + \beta_1 \tau)}$ ,  $\sigma_e^2 = \sum_{t=1}^N (u_t - \hat{u}_t)^2 = \sum_{t=1}^N e_t^2$ .

**Модель Бокса-Дженкінса** має три коефіцієнта згладжування  $0 < \beta_1, \beta_2, \beta_3 < 1$ .

$$\begin{cases} \hat{a}_{1,t} = \hat{u}_t + \beta_1 e_t + \beta_3 (e_t - e_{t-1}), \\ \hat{a}_{2,t} = \hat{a}_{2,t-1} + \beta_1 \beta_2 e_t. \end{cases}$$

Якщо  $\beta_3 = 0$ , модель то співпадає з моделлю Тейла-Вейджа.

### Сезонні адаптивні моделі прогнозування

Сезонні коливання можуть бути представлені моделями рухомого середнього двох типів:

1) мультиплікативною  $u_t = m_t \cdot f_t \cdot \varepsilon_t$ ;

2) адитивною  $u_t = m_t + f_t + \varepsilon_t$ ,

де  $m_t$  – гладка складова тренда;  $f_t$ ,  $g_t$  – сезонні компоненти;  $\varepsilon_t$  – похибка, що задовольняє умовам теореми Гауса-Маркова.

Таблиця 8.1

#### Зведенна таблиця обчислення прогнозних значень

$\hat{u}_{t+\tau} =$	Сезонність відсутня	Адитивна сезонність	Мультиплікативна сезонність
Росту немає	$\hat{a}_{1,t}$	$\hat{a}_{1,t} + \hat{g}_{t+\tau-l}$	$\hat{a}_{1,t} \cdot \hat{f}_{t+\tau-l}$
Лінійне зростання	$\hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{2,t} \cdot \tau$	$\hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{2,t} \cdot \tau + \hat{g}_{t+\tau-l}$	$(\hat{a}_{1,t} + \hat{a}_{2,t} \cdot \tau) \cdot \hat{f}_{t+\tau-l}$
Експоненціальне зростання	$\hat{a}_{1,t} \cdot \hat{r}_{1,t}^\tau$	$\hat{a}_{1,t} \cdot \hat{r}_{1,t}^\tau + \hat{g}_{t+\tau-l}$	$(\hat{a}_{1,t} \cdot \hat{r}_{1,t}^\tau) \cdot \hat{f}_{t+\tau-l}$ , $r_{1,0} = \frac{u_2}{u_1}$

У цих моделях сезонність – це масиви довжини  $l$   $g_{1,\dots,l}, f_{1,\dots,l}$ , де  $l$  – період сезонності. Як і коефіцієнти моделей перераховуються на кожному кроці, так само перераховуються і елементи цих масивів. Пере початком згладжування їм необхідно присвоїти початкові значення.

Для мультиплікативної форми  $\hat{f}_i = 1$  або  $\hat{f}_i = \frac{u_i}{\bar{u}}, i = \overline{1, l}$ .

Для адитивної форми  $\hat{g}_i = 0$  або  $\hat{g}_i = u_i - \bar{u}, i = \overline{1, l}$ .

#### Модель лінійного зростання з мультиплікативною сезонністю (модель Уінтерса)

$$\hat{a}_{1,t} = \beta_1 \frac{u_t}{\hat{f}_{t-l}} + (1 - \beta_1)(\hat{a}_{1,t-1} + \hat{a}_{2,t-1}),$$

$$\hat{a}_{2,t} = \beta_2 (\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1 - \beta_2) \hat{a}_{2,t-1},$$

$$\hat{f}_t = \beta_3 \frac{u_t}{\hat{a}_{1,t}} + (1 - \beta_3) \hat{f}_{t-l}.$$

Індекс при сезонному компоненті  $\hat{f}_t$  береться як залишок від його ділення на період сезонності  $l$ .

#### Експоненціальне зростання з мультиплікативною сезонністю

$$\hat{a}_{1,t} = \beta_1 \frac{u_t}{\hat{f}_{t-l}} + (1 - \beta_1)(\hat{a}_{1,t-1} \cdot \hat{r}_{t-1}),$$

$$\hat{r}_t = \beta_2 \frac{\hat{a}_{1,t}}{\hat{a}_{1,t-1}} + (1 - \beta_2)\hat{r}_{t-1},$$

$$\hat{f}_t = \beta_3 \frac{u_t}{\hat{a}_{1,t}} + (1 - \beta_3)\hat{f}_{t-l}.$$

#### Лінійне зростання з адитивною сезонністю

$$\hat{a}_{1,t} = \beta_1(u_t - \hat{g}_{t-l}) + (1 - \beta_1)(\hat{a}_{1,t-1} - \hat{a}_{2,t-1}),$$

$$\hat{a}_{2,t} = \beta_2(\hat{a}_{1,t} - \hat{a}_{1,t-1}) + (1 - \beta_2)\hat{a}_{2,t-1},$$

$$\hat{g}_t = \beta_3(u_t - \hat{a}_{1,t}) + (1 - \beta_3)\hat{g}_{t-l}.$$

#### Експоненціальне зростання з адитивною сезонністю

$$\hat{a}_{1,t} = \beta_1(u_t - \hat{g}_{t-l}) + (1 - \beta_1)(\hat{a}_{1,t-1} \cdot \hat{r}_{t-1}),$$

$$\hat{r}_t = \beta_2 \frac{\hat{a}_{1,t}}{\hat{a}_{1,t-1}} + (1 - \beta_2)\hat{r}_{t-1},$$

$$\hat{g}_t = \beta_3(u_t - \hat{a}_{1,t}) + (1 - \beta_3)\hat{g}_{t-l}.$$

Рекомендації: при постійній амплітуді сезонної хвилі слід обирати адитивну модуль, а при наявності змін в сезонній хвилі – мультиплікативну.

#### *Контрольні питання за темою*

1. Які методи називають адаптивними?
2. Для яких рядів застосовують адаптивні моделі?
3. Принцип експоненційного вирівнювання. Що це таке? Де в адаптивних моделях він використовується?
4. За якою формулою обчислюється прогнозні значення в моделях лінійного зростання?
5. Які бувають сезонні адаптивні моделі?
6. Як обирають початкові дані в адаптивних моделях?
7. Назвіть загальну схему обчислень?

## **ТЕМА 9. МЕТОД СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ**

Одним з потужних методів аналізу часових рядів є метод SSA (Singular Spectrum Analysis) або в перекладі метод сингулярного спектрального аналізу. Для одновимірного ряду базовий метод SSA полягає в перетворенні початкового ряду в багатовимірний, подальшому сингулярному розкладанні траекторної матриці, що утворилася, групуванні членів розкладання і подальшому віднов-

ленині [4,5]. При цьому часто виявляється можливим виділити окремі адитивні складові початкового ряду, такі як тренд, різні коливальні і періодичні компоненти, а також шумову компоненту.

### *Опис базового алгоритму*

Нехай задано часовий ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$ . Для аналізу часових рядів виберемо цілий параметр  $L \in \mathbb{Z}$ ,  $1 < L < N$ . Його називають «довжина гусені» або «довжина вікна». Схему одновимірного методу розглянемо для ряду  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$ . Далі припускатимемо, що ряди ненульові, тобто існує хоча б один індекс  $t$ , що  $u_t \neq 0$ , також введемо обмеження, що  $N > 2$ .

Базовий алгоритм складається з чотирьох кроків. Перші два кроки *вкладення* та *сингулярне розкладання* утворюють етап розкладання, а останні два *згрупування* та *діагональне усереднення* етап відновлення.

**Крок 1: Вкладення.** Процедура вкладення є перетворенням початкового одновимірного ряду в послідовність  $L$ -вимірних векторів, кількість яких дорівнює  $K = N - L + 1$

$$X_t = (u_t, \dots, u_{t+L-1})^T, \quad 1 \leq t \leq K.$$

Ці вектори утворюють *траєкторну матрицю*  $\mathbf{X} = [X_1 : \dots : X_K]$  ряду. Записуючи матрицю детальніше, відмітимо, що  $x_{ij} = u_{i+j-1}$ , тобто матриця має однакові елементи на діагоналі  $i + j = \text{const}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_K \\ u_2 & u_3 & u_4 & \cdots & u_{K+1} \\ u_3 & u_4 & u_5 & \cdots & u_{K+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_L & u_{L+1} & u_{L+2} & \cdots & u_N \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ця траєкторна матриця є ганкелевою за своєю структурою. Існує взаємно-однозначна відповідність між ганкелевими матрицями розмірністю  $L \times K$  та рядами розмірністю  $N = L + K - 1$ .

**Крок 2: Сингулярне розкладання.** Результатом цього кроku є сингулярне розкладання траєкторної матриці ряду. Розглянемо матрицю

$$\mathbf{S} = \mathbf{X} \mathbf{X}^T,$$

де  $\mathbf{X}$  – траєкторна матриця одновимірного часового ряду, відповідно довжині вікна  $L$ . Оскільки  $\mathbf{S}$  додатньо визначена, її власні значення невід'ємні. Позначимо через  $\lambda_1, \dots, \lambda_L$  *власні значення* матриці  $\mathbf{S}$ , розташовані в порядку зменшення ( $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$ ) та через  $U_1, \dots, U_L$  ортонормовану систему *власних векторів* матриці  $\mathbf{S}$ , що відповідають цим власним значенням.

Нехай  $d = \max\{i, \text{ таких, что } \lambda_i > 0\}$ . Визначивши  $V_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \mathbf{X}^T U_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ),

отримаємо розкладання траєкторної матриці

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_d, \quad \text{де } \mathbf{X}_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T. \quad (9.1)$$

Ортонормовані вектора  $V_i$  є власними векторами матриці  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ .  $\sqrt{\lambda_i}$  і називаються *сингулярними числами*,  $U_i$  і  $V_i$  – лівими і правими *сингулярними векторами* матриці  $\mathbf{X}$  відповідно. Кожна з матриць  $\mathbf{X}_i$  має ранг 1. Тому їх можна назвати *елементарними матрицями*. Набір  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$  називатимемо *і-ою власною трійкою сингулярного розкладання*.

На геометричній мові система власних векторів  $U_i$  задає ортонормований базис у лінійному просторі, що породжується стовпцями матриці  $\mathbf{X}$ . Аналогічно, вектора  $V_i$  задають ортонормований базис лінійного простору, що породжується рядками матриці  $\mathbf{X}$ .

Крок 3: Групування. На основі розкладання (9.1) процедура групування ділить всю множину індексів  $\{1, \dots, d\}$  на  $m$  підмножин, що не перетинаються  $I_1, \dots, I_m$ .

Нехай  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ , тоді *результатуюча* матриця  $\mathbf{X}_I$ , що відповідає групі  $I$ , визначається як  $\mathbf{X}_I = \mathbf{X}_{i_1} + \dots + \mathbf{X}_{i_p}$ . Такі матриці обчислюються для  $I = I_1, \dots, I_m$ , тим самим розкладання (1) може бути записане у згрупованому вигляді

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{I_1} + \dots + \mathbf{X}_{I_m}.$$

Процедура вибору множин  $I_1, \dots, I_m$  і називається *групуванням власних трійок*.

Крок 4: Діагональне усереднення. На останньому кроці базового алгоритму кожна матриця згрупованого розкладання переводиться в новий ряд довжини  $N$ .

Нехай  $\mathbf{Y}$  – матриця розміру  $L \times K$  з елементами  $y_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq L$ ,  $1 \leq j \leq K$ . Покладемо  $L^* = \min(L, K)$ ,  $K^* = \max(L, K)$  та  $N = L + K - 1$ . Нехай  $x_{ij} = y_{ij}$ , якщо  $L < K$  та  $x_{ij} = y_{ji}$  у решті випадків.

*Діагональне усереднення* переводить матрицю  $\mathbf{Y}$  в ряд  $(z_1, \dots, z_N)$  за формулою

$$z_k = \begin{cases} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{j,k-j+1} & \text{для } 1 \leq k < L^*, \\ \frac{1}{L^*} \sum_{j=1}^{L^*} x_{j,k-j+1} & \text{для } L^* \leq k < K^*, \\ \frac{1}{N-k} \sum_{j=k-K^*+2}^{N-K^*+1} x_{j,k-j+1} & \text{для } K^* \leq k \leq N. \end{cases} \quad (9.2)$$

Цей вираз відповідає усередненню елементів матриці уздовж «діагоналей»  $i + j = k + 1$ : вибір  $k = 1$  дає  $z_1 = y_{11}$ , для  $k = 2$  отримуємо  $z_2 = (y_{12} + y_{21})/2$  і т. д. Застосувавши діагональне усереднення до матриць отриманих на етапі групування, приходимо до розкладання початкового ряду в суму рядів.

Новоутворені ряди представляють собою адитивні компоненти початкового ряду. При правильному виборі довжини вікна та правильному групуванні сингулярних трійок розділімість компонент та результат аналізу покращується.

Сформулюємо базовий алгоритм.

### Алгоритм 1

1. Розгорнення одновимірного ряду в багатовимірний. Виберемо деяке число  $L < N$  (довжина вікна), покладемо  $K = N - L + 1$  і утворимо матрицю

$$\mathbf{X} = \left\{ x_{ij}; i = \overline{1, L}, j = \overline{1, K} \right\} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_K \\ u_2 & u_3 & u_4 & \cdots & u_{K+1} \\ u_3 & u_4 & u_5 & \cdots & u_{K+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_L & u_{L+1} & u_{L+2} & \cdots & u_N \end{pmatrix}.$$

2. Обчислення матриці  $X^*$ . За матрицею  $\mathbf{X}$  обчислимо матрицю  $X^* = \{x_{ij}^*; i = \overline{1, L}; j = \overline{1, K}\}$ , загальна формула для елементів цієї матриці така

$$x_{ij}^* = (x_{ij} - \mu_j) / \delta_j, \quad i = \overline{1, L}, \quad j = \overline{1, K}.$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \\ s_j, & \mu_j = \begin{cases} 0 & \\ x_j, & \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{де } \bar{x}_j = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L x_{ij}, \quad s_j = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}.$$

3. Обчислимо матрицю  $R$  за формулою  $R = X^* (X^*)^T$ .

4. Сингулярне розкладання матриці  $R$  у вигляді

$$R = P \Lambda P^T,$$

де  $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_L \end{pmatrix}$  – діагональна матриця власних чисел;

$P = (p_1, p_2, \dots, p_L) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{L1} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{L2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1L} & p_{2L} & \dots & p_{LL} \end{pmatrix}$  – ортогональна матриця власних векторів

матриці  $R$ .

5. Обчислюємо головні компоненти за формулою

$$X^* P = Y = (y_1, y_2, \dots, y_L).$$

6. Відбір головних компонент: вибираємо деяку кількість  $r$  головних компонент із номерами  $i_1, \dots, i_r$ .

7. Відновлення багатовимірного ряду  $\tilde{X}^* = \sum_{l=1}^r l_{i_r} p_{i_r}^T$ .

8. Децентрування й денормування (якщо необхідно) матриці  $\tilde{X}^*$ , результат – матриця  $\tilde{X}$ .

9. Ганкелізація (відновлення одновимірного ряду шляхом усереднення за побічними діагоналями)

$$\tilde{z}_k = \begin{cases} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \tilde{x}_{j,k-j+1} & \text{для } 1 \leq k < L^*, \\ \frac{1}{L^*} \sum_{j=1}^{L^*} \tilde{x}_{j,k-j+1} & \text{для } L^* \leq k < K^*, \\ \frac{1}{N-k} \sum_{j=k-K^*+2}^{N-K^*+1} \tilde{x}_{j,k-j+1} & \text{для } K^* \leq k \leq N. \end{cases}$$

Спосіб завдання  $\mu_j$  і  $\delta_j$  буде визначати назву методу:  $\mu_j = 0$  – SSA без центрування;  $\mu_j = \bar{x}_j$  – SSA із центруванням;  $\delta_j = s_j$  – SSA із нормуванням;  $\delta_j = 1$  – SSA без нормування.

**Вибір параметрів. Вибір довжини вікна. Модифікація базового методу SSA.** Довжина вікна є основним параметром базового алгоритму SSA: неправильний вибір цього параметру може привести до того, що ніяке групування не приведе до якісного розкладення ряду на складові. Вибір довжини вікна залежить від задачі, що вирішується, та попередньої інформації, що відома про ряд. Для аналізу структури часового ряду не має сенсу обирати довжину вікна більшу, ніж половина довжини ряду. Чим більша довжина вікна, тим більш детальним отримаємо розкладання вихідного ряду. Маленька довжина вікна може привести до змішування компонент ряду.

За допомогою модифікацій SSA вдається покращити базовий метод для деяких специфічних класів рядів та для рядів зі складною структурою. Можливі варіанти рядів, що досліджуються:

- часовий ряд коливається поблизу лінійного тренда, і ми хотіли б вилучити цей тренд;
- часовий ряд має стаціонарну поведінку, і ми хотіли б вилучити декілька гармонічних компонент з цього ряду;
- часовий ряд має складну структуру (наприклад, тренд складної форми або гармонічні компоненти з близькими амплітудами), і, відповідно, для будь-якої довжини вікна відбувається змішування компонент часового ряду.

Можливі варіанти модифікації базового методу з одноразовим та дворазовим центруванням.

### **Метод SSA для прогнозу часових рядів. Алгоритми SSA-прогнозу**

Введемо ряд означень.

Якщо багатовимірна вибірка породжена часовим рядом  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$ , міститься в  $r$ -мірній гіперплощині, та розмірність  $r$  – одна для будь-якого  $L$  ( $r < L$ ), то ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$  будемо називати *рядом рангу  $r$* .

Часовий ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N+1}\}$  називається *продовженням ряду*  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$ , якщо породжена ним при SSA обробці вибірка лежить у той же гіперплощині, що і вихідний ряд.

### АЛГОРИТМ 2. ПРОГНОЗ НА ОДИН КРОК УПЕРЕД

Нехай задано ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$  рангу  $r$ , де  $N$  – достатньо велике. Для прогнозування ряду рангу  $r$  з вікном довжини  $L$  достатньо обрати  $N \geq r + L$ .

1. Сформуємо багатовимірну матрицю спостережень.

2. Побудуємо матрицю  $S$ .

3. Знайдемо базис  $p^{(1)}, \dots, p^{(r)}$ , що відповідає ненульовим власним числам матриці  $S$ .

4. Запишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь наступного вигляду

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^r h_j p_1^{(j)} = u_{N-L+2}, \\ \dots \\ \sum_{j=1}^r h_j p_{L-1}^{(j)} = u_N. \end{cases} \quad (9.3)$$

5. Дослідимо цю систему на сумісність.

5.1. Якщо система (9.3) несумісна, то вихідний ряд не має продовження.

5.2. Якщо система (9.3) має розв'язок, то вихідний ряд має продовження, що записується як

$$u_{N+1} = \sum_{j=1}^r h_j p_L^{(j)}, \quad (9.4)$$

де  $h_1, \dots, h_N$  – розв'язок системи (3).

Випадок нескінченної множини розв'язків системи не реалізується для жодного ряду кінцевого рангу.

Справедливі такі теореми.

**Теорема 1.** Нехай ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$  має ранг  $r$ , і  $\{u_t; t = \overline{1, N+1}\}$  – його продовження. Нехай також  $L > r - 1$ . Тоді, якщо система (9.3) має розв'язок, то він єдиний.

**Теорема 2.** Нехай ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$  допускає продовження. Тоді це продовження єдине.

Властивість „єдності” продовження ряду може бути узагальнена на випадок багатокрокового продовження ряду. Розглянемо узагальнення алгоритму 3.

### АЛГОРИТМ 3. ПРОГНОЗ НА $l$ КРОКІВ УПЕРЕД

Пункти 1 – 4 алгоритму прогнозу на  $l$  кроків уперед співпадають з відповідними пунктами алгоритму 2.

Для визначення послідовних значень  $u_{N+1}, \dots, u_{N+l}$  маємо послідовність систем

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^r h_j p_1^{(j)} = u_{N-L+l+1}, \\ \dots, \\ \sum_{j=1}^r h_j p_{L-1}^{(j)} = u_{N+l-1}. \end{cases} \quad (9.5)$$

5. Досліджуємо систему (9.5), що відповідає  $l=1$ , на сумісність.

5.1. Якщо система (9.5), що відповідає  $l=1$ , несумісна, то вихідний ряд, не дозволяє продовження.

5.2. Якщо система (9.5), що відповідає  $l=1$  має розв'язок, то вона має розв'язок при будь-якому  $l$ , і продовження вихідного ряду однозначно визначається за формулою

$$u_{N+l} = \sum_{j=1}^r h_j(l) p_L^{(j)}, \quad (9.6)$$

де  $h_1(l), \dots, h_2(l)$  – розв'язок системи (9.5), що відповідає  $l$ -му кроku алгоритму.

Теорема 3. Нехай ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$  дозволяє продовження. Тоді він може бути продовженим необмежено на будь-яку кількість кроків, причому це продовження єдине.

Зауважимо, що не будь-який клас рядів може бути продовженням. У наступній лемі розглянутий клас рядів, що не дозволяють продовження.

Лема 1 (Про ряди, що не дозволяють продовження). Нехай ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$ , що має ранг  $r$ , дозволяє продовження та нехай значення  $u_{N+2}$  не є продовженням цього ряду (в сенсі визначення 2). Тоді ряд  $\{u_t; t = \overline{1, N+2}\}$  не дозволяє продовження.

Цікавим є питання мінімальної кількості точок, за якими можна відновити ряд рангу  $r$ . Справедлива лема 2.

Лема 2. Для відновлення ряду рангу  $r$  завжди достатньо мати  $N = r + L$  точок. Оскільки умови методу передбачають, що  $L > r$ , то для відновлення ряду рангу  $r$  завжди достатньо мати  $N = 2r + 1$  точку.

#### Контрольні питання за темою

1. З яких кроків складається базовий алгоритм SSA?
2. Що таке власна трійка сингулярного розкладання?
3. З якою метою виконується діагональне усереднення?
4. Що таке ганкелізація?
5. Яким чином обираються параметри SSA?
6. Дайте визначення ряду рангу  $r$ .
7. Який ряд вважається продовженням ряду  $\{u_t; t = \overline{1, N}\}$ ?
8. Сформулюйте теореми, які доводять єдиність продовження ряду.

## ТЕМА 10. ПРОГНОЗУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ

Теорія нечітких множин, введена Л. Заде [19] для представлення нового типу значень, заклада основи моделювання інтелектуальної діяльності людини і стала початковим поштовхом до розвитку нової математичної теорії, яка використовується для опису невизначеностей, що відносяться до класу нечіткості висловлювань і міркувань людини. Теорія нечітких множин – це розділ прикладної математики, присвячений методам аналізу невизначених даних, в яких опис невизначеностей реальних явищ і процесів проводиться за допомогою поняття про множини, які не мають чітких меж.

Наведемо означення з теорії нечітких множин, якими ми будемо оперувати далі.

**Нечіткою множиною**  $A$  будемо називати множину впорядкованих пар (кортежів) виду:

$$\langle x, \mu_A(x) \rangle,$$

де  $x$  є елементом деякої універсальної множини (універсуму)  $U$ , а  $\mu_A(x)$  – функція принадності, що ставить у відповідність кожному з елементів  $x \in U$  деяке дійсне число з інтервалу  $[0, 1]$ , тобто дана функція визначається у формі відображення:

$$\mu_A : U \rightarrow [0, 1].$$

Універсумом  $U$  будемо називати нечітку множину, функція принадності якої тотожно дорівнює одиниці для всіх без винятку елементів:

$$\mu(x) \equiv 1, \forall x \in U.$$

*Носієм нечіткої множини* називається звичайна множина, яка містить ті і тільки ті елементи універсуму, для яких значення функції принадності відповідної нечіткої множини відмінні від нуля.

Способи задання нечітких множин:

1. Структурний спосіб. Нехай  $u_i, i = 1, 2, \dots, N$  – підмножини універсуму  $U$ , такі що  $\mu(x) = m_i \equiv \text{const}$ ,  $\forall x \in u_i$ , тоді нечітка множина може бути задана у вигляді  $\{m_1 / u_1, m_2 / u_2, \dots, m_N / u_N\}$ .

2. Функціональний спосіб. Нечітка множина задається аналітично в формі математичного виразу для відповідної функції принадності. У цьому випадку нечітку множину зручно записати у вигляді:  $A = \{x, \mu_A(x)\}$ , де  $\mu_A$  – деяка функція, що задана аналітично в формі математичного виразу або графічно в формі деякої кривої.

Розглянемо найбільш популярні види функцій принадності:

1. Трикутна (рис. 10.1)

Обчислюється за формулою

$$f(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & c \leq x \end{cases}$$

де  $a, b, c$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані співвідношенням:  $a \leq b \leq c$ ;  $b$  задає координату вершини трикутника,  $a$  і  $c$  – основу трикутника.

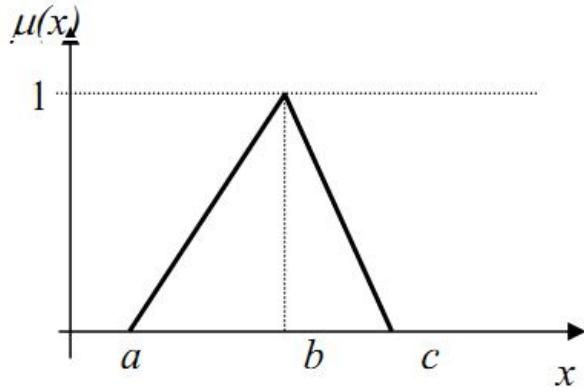


Рис. 10.1. Трикутна функція належності

2. Трапецієвидна (рис. 10.2)

$$f(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \end{cases}$$

де  $a, b, c, d$  – деякі числові параметри, що приймають довільні дійсні значення і впорядковані співвідношенням:  $a \leq b \leq c \leq d$ .

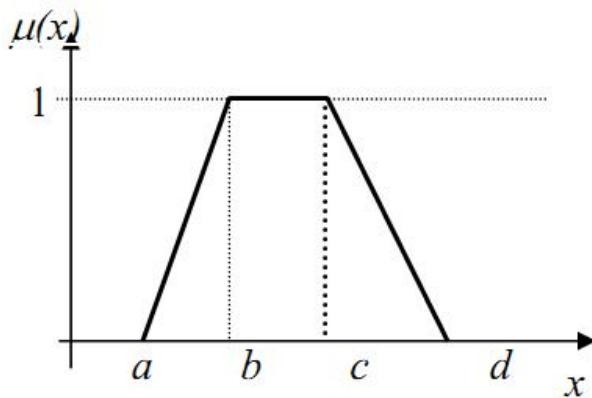


Рис. 10.2. Трапецієвидна функція належності

3. Гаусова (рис. 10.3)

$$f(x; \sigma, c) = e^{\frac{-(x-c)^2}{2\sigma^2}}$$

Тут  $\sigma, c$  – деякі числові параметри,  $\sigma$  – середнє квадратичне відхилення,  $c$  – середнє значення.

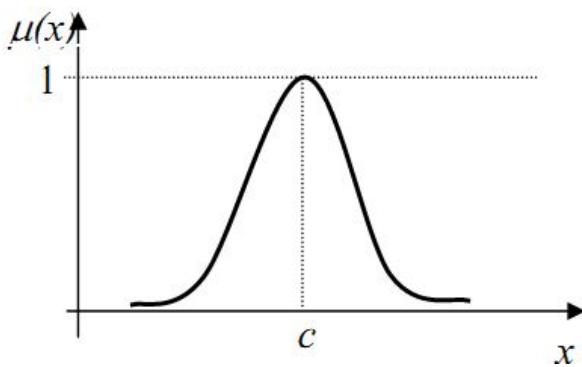


Рис. 10.3. Гаусова функція приналежності

**Об'єднанням** двох нечітких множин  $A$  і  $B$  називається деяка третя нечітка множина  $D$ , яка задана на цьому ж універсумі  $U$ , функція приналежності якого визначається за наступною формулою

$$\mu_D(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in U.$$

**Лінгвістична змінна** – змінна, значеннями якої є слова або вислови природної або штучної мови.

**Терм-множиною** називають множину всіх можливих значень лінгвістичної змінної.

**Термом** (лінгвістичним значенням, лінгвістичною оцінкою) називається будь-який елемент терм-множини. Терм задається нечіткою множиною за допомогою функції приналежності.

**Ядром нечіткої множини**  $A$  називається чітка підмножина універсуму  $U$ , елементи якої мають степінь приналежності, що дорівнює одиниці:

$$\text{core}(A) = \{x \in U : \mu_A(x) = 1\}.$$

У загальному випадку **нечітким відношенням** або, більш точно, **нечітким  $k$ -арним відношенням**, заданим на множинах (універсумах)  $U_1, U_2, \dots, U_k$  називається деяка фіксована нечітка підмножина декартового добутку цих універсумів.

**Нечітким лінгвістичним висловлюванням** будемо називати висловлювання наступних видів:

1. Вислів « $\beta$  є  $\alpha$ », де  $\beta$  – найменування лінгвістичної змінної,  $\alpha$  – її значення, якому відповідає окремий лінгвістичний терм з базової терм-множини лінгвістичної змінної  $\beta$ .
2. Вислів « $\beta$  є  $\nabla\alpha$ », де  $\nabla$  – модифікатор, що відповідає таким словам, як: «ДУЖЕ», «БІЛЬШ-МЕНШ», «БАГАТО БІЛЬШЕ» та іншим.
3. Складені висловлювання, утворені з висловлювань видів 1 і 2 та нечітких логічних операцій у формі зв'язувань: «І», «АБО», «ЯКЩО-ТО», «НЕ».

Оскільки в системах нечіткого виведення нечіткі лінгвістичні висловлювання займають центральне місце, далі будемо їх називати просто **нечіткими висловлюваннями**.

**Нечітке логічне виведення (продукція)** – апроксимація залежності «вхід-виход» на основі лінгвістичних висловлювань «Якщо – то» і логічних операцій над нечіткими множинами.

Механізм або алгоритм виведення є важливою частиною базової архітектури систем нечіткого виведення. Алгоритм виведення оперує правилами нечітких продукцій, в яких умови та висновки записані в формі нечітких лінгвістичних змінних.

Для отримання висновків в системах нечіткого виведення запропоновані декілька алгоритмів. Опис цих алгоритмів базується на поділі процесу виведення на ряд послідовних етапів.

Системи нечіткого виведення призначені для перетворення значень вхідних змінних у вихідні змінні на основі використання нечітких правил продукцій. Для цього системи нечіткого виведення повинні містити базу правил нечітких продукцій і реалізовувати нечітке виведення висновків на основі посилок або умов, представлених у формі нечітких лінгвістичних висловлювань. Основні етапами нечіткого виведення є:

- Формування бази правил систем нечіткого виводу.
- Фаззифікації вхідних змінних.
- Агрегація підумови в нечітких правилах продукцій.
- Активізація або композиція подзаключеній в нечітких правилах продукцій.
- Акумулювання висновків нечітких правил продукцій.

База правил систем нечіткого виведення призначена для формального подання емпіричних знань або знань експертів у тій чи іншій проблемній області. У системах нечіткого виводу використовуються правила нечітких продукцій, в яких умови і висновки сформульовані в термінах нечітких лінгвістичних висловлювань. Сукупність таких правил будемо далі називати базами правил нечітких продукцій.

Базою правил нечітких продукцій є кінцева множина правил нечітких продукцій, узгоджених щодо використовуваних в них лінгвістичних змінних.

Найбільш часто база правил представляється у формі структурованого тексту:

ПРАВИЛО\_1: ЯКЩО «Умова\_1» ТО «Висновок\_1» (F\_1)

ПРАВИЛО\_2: ЯКЩО «Умова\_2» ТО «Висновок\_2» (F\_2)

...

ПРАВИЛО\_n: ЯКЩО «Умова\_n» ТО «Висновок\_n» (F\_n)

або в еквівалентній формі:

RULE\_1: IF «Condition\_1» THEN «Conclusion\_1» (F\_1)

RULE\_2: IF «Condition\_2» THEN «Conclusion\_2» (F\_2)

...

RULE\_n: IF «Condition\_n» THEN «Conclusion\_n» (F\_n)

Тут через  $F_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) позначені коефіцієнти визначеності або вагові коефіцієнти відповідних правил. Ці коефіцієнти можуть приймати значення з інтервалу  $[0, 1]$ . У випадку, якщо ці вагові коефіцієнти відсутні, зручно прийняти, що їх значення дорівнюють 1.

У системах нечіткого виведення лінгвістичні змінні, які використовуються в нечітких висловлюваннях підумов правил нечітких продукцій, часто називають *вхідними лінгвістичними змінними*, а змінні, які використовуються в нечітких

висловлюваннях підвисновків правил нечітких продукцій, часто називають *виходними лінгвістичними змінними*.

Таким чином, при формуванні бази правил нечітких продукцій необхідно визначити: множину правил нечітких продукцій:  $P = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ , множину вхідних лінгвістичних змінних:  $V = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$  і множину вихідних лінгвістичних змінних:  $W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$ . Тим самим база правил нечітких продукцій вважається заданою, якщо задано множини  $P, V, W$ .

При цьому для зручності запису застосовують спеціальні скорочення для найменування окремих термів вхідних та вихідних лінгвістичних змінних (таблиця 10.1).

*Таблиця 10.1.*

Загальноприйняті скорочення для значень основних термів лінгвістичних змінних в системах нечіткого виведення

Символічне позначення	Англомовна нотація	Україномовна нотація
NB	Negative Big	Від'ємний великий
NM	Negative Middle	Від'ємний середній
NS	Negative Small	Від'ємний малий
ZN	Zero Negative	Від'ємний близький до нуля
Z	Zero	Нуль, близький до нуля
ZP	Zero Positive	Додатній близький до нуля
PS	Positive Small	Додатній малий
PM	Positive Middle	Додатній середній
PB	Positive Big	Додатній великий

На формування бази правил систем нечіткого виведення часто впливають деякі додаткові фактори, які визначаються специфікою розв'язуваної задачі або алгоритму нечіткого виведення, який використовується.

Метою етапу фаззифікації є встановлення відповідності між конкретним (зазвичай – чисельним) значенням окремої вхідної змінної системи нечіткого виводу і значенням функції належності відповідного їй терма вхідної лінгвістичної змінної. Після завершення цього етапу для всіх вхідних змінних повинні бути визначені конкретні значення функцій належності по кожному з лінгвістичних термів, які використовуються в підумовах бази правил системи нечіткого виводу.

Формально процедура фаззифікації виконується наступним чином. До початку цього етапу передбачаються відомими конкретні значення всіх вхідних змінних системи нечіткого виведення, тобто множина значень  $V' = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . У загальному випадку кожне  $a_i \in X_i$ , де  $X_i$  – універсум лінгвістичної змінної  $\beta_i$ . Далі розглядається кожна з підумов виду « $\beta_i \in a'$ » правил системи нечіткого виведення, де  $a'$  – деякий терм з відомою функцією належності  $\mu(x)$ . При цьому значення  $a_i$  – використовується як аргумент  $\mu(x)$ , тим самим знаходить-

ся кількісне значення  $b'_i = \mu(a_i)$ . Це значення і є результатом фазифікації підумови « $\beta_i \in \alpha'$ ».

Етап фазифікації вважається закінченим, коли будуть знайдені всі значення  $b'_i = \mu(a_i)$  для кожної з підумов всіх правил, що входять в дану базу правил системи нечіткого виведення. Множину цих значень позначимо через  $B = \{b'_i\}$ . При цьому якщо деякий терм  $\alpha''$  лінгвістичної змінної  $\beta_i$ , не присутній ні в одному з нечітких висловлювань, то відповідне йому значення функції приналежності не знаходиться в процесі фазифікації.

Якщо в деякій підумові зустрічається терм з модифікатором, то процедура фазифікації виконується аналогічним чином стосовно функції приналежності терма після виконання операції, яка відповідає даному модифікатору.

Агрегація є процедурою визначення ступеня істинності умов по кожному з правил системи нечіткого виведення.

Формально процедура агрегації виконується наступним чином. До початку цього етапу вважаються відомими значення істинності всіх підумов системи нечіткого виведення, тобто множина значень  $B = \{b'_i\}$ . Далі розглядається кожна з умов правил системи нечіткого виведення. Якщо умовою правила є нечітке висловлювання виду 1 або 2, то ступінь його істинності дорівнює відповідному значенню  $b'_i$ .

Якщо ж умова складається з декількох підумов, причому лінгвістичні змінні в підумовах попарно не дорівнюють одна одній, то визначається ступінь істинності складного висловлювання на основі відомих значень істинності підумов.

Етап агрегації вважається закінченим, коли будуть знайдені всі значення  $b''_k$  для кожного з правил  $R_k$ , що входять в дану базу правил  $P$  системи нечіткого виведення. Цю множину значень позначимо через  $B'' = \{b''_1, b''_2, \dots, b''_n\}$ .

Активізація в системах нечіткого виведення є процедурою або процесом знаходження ступеня істинності кожного з підвісновків правил нечітких продукцій. Активізація в загальному випадку багато в чому аналогічна композиції нечітких відношень, але не тотожна їй. Насправді, при формуванні бази правил системи нечіткого виведення задаються вагові коефіцієнти  $F_i$  для кожного правила (за замовченням передбачається, якщо ваговий коефіцієнт не заданий явно, то його значення дорівнює 1).

Формально процедура активізації виконується таким чином. До початку цього етапу вважаються відомими значення істинності всіх умов системи нечіткого виведення, тобто множина значень  $B'' = \{b''_1, b''_2, \dots, b''_n\}$  і значення вагових коефіцієнтів  $F_i$  для кожного правила. Далі розглядається кожен з вісновковів правил системи нечіткого виведення. Якщо вісновком правила є нечітке висловлювання виду 1 або 2, то ступінь його істинності дорівнює алгебраїчному добутку відповідного значення  $b''_i$  на ваговий коефіцієнт  $F_i$ .

Якщо ж вісновок складається з декількох підвісновків, причому лінгвістичні змінні в підвісновках попарно не дорівнюють один одному, то ступінь істинності кожного з підвісновків дорівнює алгебраїчному добутку відповідного значення  $b''_i$  на ваговий коефіцієнт  $F_i$ . Таким чином, знаходяться всі значення  $C_k$

ступенів істинності підвисновків для кожного з правил  $R_k$ , що входять в дану базу правил  $P$  системи нечіткого виведення. Цю множину значень позначимо через  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$ , де  $q$  – загальна кількість підвисновків у базі правил.

При цьому не виключається випадок, коли ваговий коефіцієнт  $F_i$ , може бути заданий індивідуально для окремих підвисновків. При цьому процедура активізації залишається незмінною.

Після знаходження множини  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$  визначаються функції приналежності кожного з підвисновків для розглянутих вихідних лінгвістичних змінних. Для цієї мети можна використовувати один з методів, які є модифікацією того чи іншого методу нечіткої композиції:

min-активізація:

$$\mu'(y) = \min\{c_i, \mu(y)\}$$

prod-активізація:

$$\mu'(y) = c_i * \mu(y)$$

average-активізація:

$$\mu'(y) = 0.5 * (c_i + \mu(y))$$

де  $\mu(y)$  – функція приналежності терму, який є значенням деякої вихідної змінної  $\omega_j$ , заданої на універсумі  $Y$ .

Етап активізації вважається закінченим, коли для кожної з вихідних лінгвістичних змінних, що входять в окремі підвисновки правил нечітких продукцій, будуть визначені функції приналежності нечітких множин їх значень, тобто сукупність нечітких множин:  $C_1, C_2, \dots, C_q$ , де  $q$  – загальна кількість підвисновків у базі правил системи нечіткого виведення.

Акумуляція в системах нечіткого виведення є процедурою або процесом знаходження функції приналежності дляожної з вихідних лінгвістичних змінних множини  $W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$ .

Мета акумуляції полягає в тому, щоб об'єднати або акумулювати всі ступені істинності висновків (підвисновків) для отримання функції приналежності кожної з вихідних змінних. Причина необхідності виконання цього етапу полягає в тому, що підвисновки пов'язані з однією і тією ж вихідною лінгвістичною змінною, належать різним правилам системи нечіткого виведення.

Формально процедура акумуляції виконується таким чином. До початку цього етапу вважаються відомими значення істинності всіх підвисновків для кожного з правил  $R_k$ , що входять в дану базу правил  $P$  системи нечіткого виведення, у формі сукупності нечітких множин:  $C_1, C_2, \dots, C_q$ , де  $q$  – загальна кількість підвисновків в базі правил. Далі послідовно розглядається кожна з вихідних лінгвістичних змінних  $\omega_j \in W$  і пов'язані з нею нечіткі множини:  $C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jq}$ . Результат акумуляції для вихідної лінгвістичної змінної  $\omega_j$  визначається як об'єдання нечітких множин  $C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jq}$  за однією з формул об'єдання нечітких множин.

Етап акумуляції вважається закінченим, коли дляожної з вихідних лінгвістичних змінних будуть визначені підсумкові функції приналежності нечітких мно-

жин їх значень, тобто сукупність нечітких множин:  $C_1', C_2', \dots, C_s'$ , де  $s$  – загальна кількість вихідних лінгвістичних змінних в базі правил системи нечіткого виведення.

Дефазифікація в системах нечіткого виведення є процесом знаходження звичайного (не нечіткого) значення для кожної з вихідних лінгвістичних змінних множини  $W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$ .

Мета дефазифікації полягає в тому, щоб, використовуючи результати акумуляції всіх вихідних лінгвістичних змінних, отримати звичайне кількісне значення (crisp value) кожної з вихідних змінних.

Дефазифікацію іноді називають приведенням до чіткості.

Формально процедура дефазифікації виконується таким чином. До початку цього етапу вважаються відомими функції принадлежності всіх вихідних лінгвістичних змінних у формі нечітких множин:  $C_1', C_2', \dots, C_s'$ , де  $s$  – загальна кількість вихідних лінгвістичних змінних в базі правил системи нечіткого виведення. Далі послідовно розглядається кожна із вихідних лінгвістичних змінних  $\omega_j \in W$  і відповідна нечітка множина  $C_j'$ . Результат дефазифікації для вихідної лінгвістичної змінної  $\omega_j$  визначається у вигляді кількісного значення  $y_j \in \mathbb{R}$ , одержуваного по одній з розглянутих нижче формул.

Етап дефазифікації вважається закінченим, коли для кожної з вихідних лінгвістичних змінних будуть визначені підсумкові кількісні значення у формі деякого дійсного числа, тобто у вигляді  $y_1, y_2, \dots, y_s$ , де  $s$  – загальна кількість вихідних лінгвістичних змінних в базі правил системи нечіткого виведення.

Для виконання чисельних розрахунків на етапі дефазифікації можуть бути використані такі формули, що отримали назву методів дефазифікації.

1) Метод центру ваг. Центр ваги або центроїд площин розраховується за формулою

$$y = \frac{\int_{Min}^{Max} x * \mu(x) dx}{\int_{Min}^{Max} \mu(x) dx},$$

де  $y$  – результат дефазифікації;  $x$  – змінна, що відповідає вихідний лінгвістичної змінні  $\omega$ ;  $\mu(x)$  – функція принадлежності нечіткої множини, що відповідає вихідній змінні  $\omega$  після етапу акумуляції;  $Min$  і  $Max$  – ліва і права точки інтервалу носія нечіткої множини вихідної змінної  $\omega$ .

При дефазифікації методом центру ваг звичайне (не нечітке) значення вихідної змінної дорівнює абсцисі центру ваги площин, обмеженої графіком кривої функції принадлежності відповідної вихідної змінної.

2) Метод центру ваги для одноточкових множин. Центр ваги для одноточкових множин розраховується за формулою

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i * \mu(x_i)}{\sum_{i=1}^n \mu(x_i)},$$

де  $n$  – число одноточкових (одноелементних) нечітких множин, кожна з яких характеризує єдине значення розглянутої вихідний лінгвістичної змінної.

Розглянуті вище етапи нечіткого виведення можуть бути реалізовані неоднозначним чином, оскільки включають в себе окремі параметри, які повинні бути

фіксовані або специфіковані. Тим самим вибір конкретних варіантів параметрів кожного з етапів визначає певний алгоритм, який в повному обсязі реалізує нечітке виведення в системах правил нечітких продукцій. До теперішнього часу запропоновано кілька алгоритмів нечіткого виведення. Наведемо опис алгоритму нечіткого виведення Мамдані.

Алгоритм Мамдані (рис. 10.5) є одним з перших, який знайшов застосування в системах нечіткого виведення. Він був запропонований англійським математиком Е. Мамдані (Ebrahim Mamdani) в якості методу для управління паровим двигуном. За своєю суттю цей алгоритм породжує розглянуті вище етапи, оскільки найбільшою мірою відповідає їх параметрам.

Формально алгоритм Мамдані може бути визначений таким чином.

- Формування бази правил систем нечіткого виведення. Особливості формування бази правил збігаються з розглянутими вище під час опису даного етапу.

- Фаззифікація вхідних змінних. Особливості фаззифікації збігаються з розглянутими вище під час опису даного етапу.

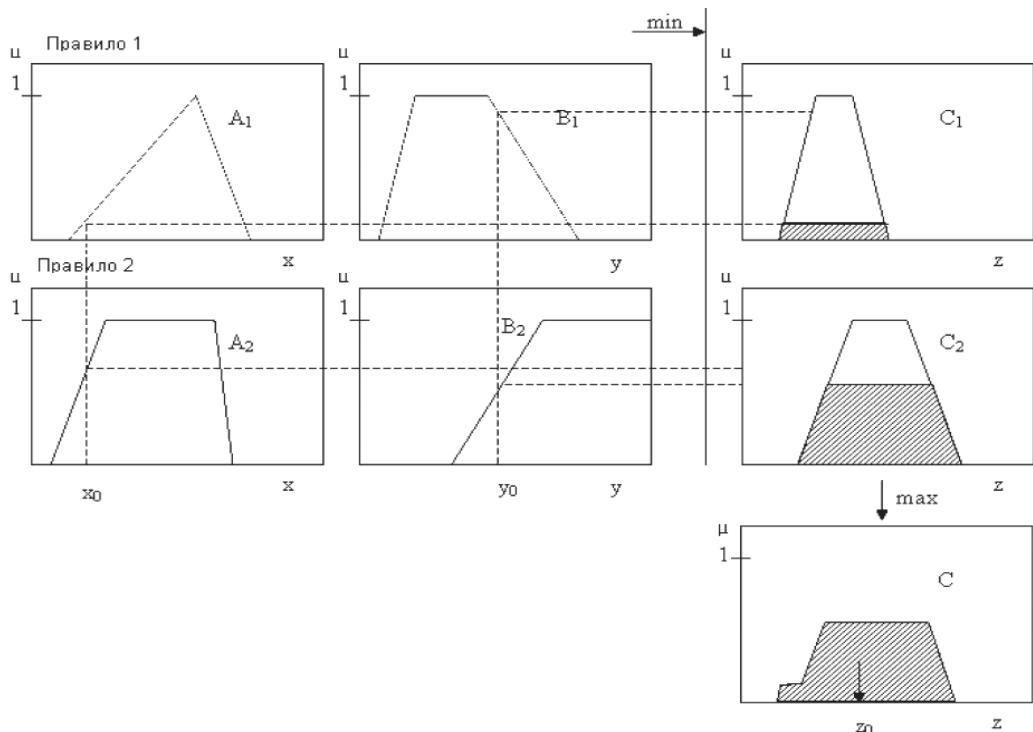
- Агрегація підумови в нечітких правилах продукцій. Для знаходження ступеня істинності умов кожного з правил нечітких продукцій використовуються парні нечіткі логічні операції. Ті правила, ступінь істинності умов яких відмінні від нуля, вважаються активними і використовуються для подальших розрахунків.

- Активізація підвісновків в нечітких правилах продукцій. Здійснюється за формулою  $m_{\text{act}}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ ,  $\forall x \in U$

- Акумуляція висновків нечітких правил продукцій. Здійснюється за формулою

- $\mu_D(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in U$
- для об'єднання нечітких множин, що відповідають термам підвісновків, що відносяться до одних і тих самих вихідних лінгвістичних змінних.

- Дефаззифікація вихідних змінних. Традиційно використовується метод центру ваги або метод центру площини.



**Рис. 10.5. Схема нечіткого виведення за алгоритмом Мамдані**

Опишемо, яким чином розглянутий підхід може бути використаний під час прогнозування.

У 1993 році Song i Chissom [3] запропонували нечіткі моделі детермінованих (time-variant) і авторегресійних (time-invariant) часових рядів першого порядку (first-order) і застосували розроблені моделі для прогнозування кількості студентів університету штату Алабама (США), фаззифікувавши попередньо чіткий часовий ряд. Це було перше застосування нечітких моделей під час моделювання часових рядів і перше означення моделей нечітких часових рядів.

Нехай  $X_t, (t = 1, \dots) \subset R^1$  – універсум, на якому визначені нечіткі множини  $y_t^i (i = 1, 2, \dots)$  і  $Y_t$  – колекція  $y_t^i (i = 1, 2, \dots)$ . Тоді  $Y_t$  називається нечітким часовим рядом.

На практиці в більшості часових рядів послідовні спостереження залежні:

$$R = \{(y_t, y_{t-1}), (y_{t-1}, y_{t-2}) \dots\} \subseteq Y_t \times Y_{t-1},$$

де  $Y_t, Y_{t-1}$  позначають змінні;  $y_t, y_{t-1}$  – значення цих змінних.

Найчастіше моделлю залежності є явна функція

$$f : Y_{t-1} \rightarrow Y_t.$$

Яка представлена лінійною функцією (марківський процес, модель AR(1)):

$$y_t = f(y_{t-1}, \phi, \varepsilon) = \phi * y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

де  $\varepsilon_t$  – випадкова помилка, шум.

У разі нечіткого часового ряду в якості моделі авторегресії використовується нечітке різницеве рівняння

$$y_t^j = y_{t-1}^j \times R_{ij}(t, t-1),$$

$$y_t^j \in Y_t, y_{t-1}^j \in Y_{t-1}, i \in I, j \in J,$$

де  $\times$  – позначає операцію композиції з теорії нечітких множин;

$R(t, t - 1) = \bigcup_{i,j} R_{ij}(t, t - 1)$  – система нечітких відношень, яка символічно

може бути записана у вигляді  $Y_t \rightarrow Y_{t-1}$ .

Систему відносин  $R$  у виразі  $Y_t = Y_{t-1} \circ R(t, t - 1)$  називають моделлю нечіткого часового ряду першого порядку, дана модель – важливий окремий випадок загальної моделі порядку  $p$

$$Y_t = (Y_{t-1} \times Y_{t-2} \times \dots \times Y_{t-p}) \circ R(t, t - p),$$

$$R(t, t - p) = \max_p \left\{ \min_{j, i_1, i_2, \dots, i_p} \{y_t^j, y_{t-1}^{i_1}, \dots, y_{t-p}^{i_p}\} \right\}.$$

Математичною основу нечіткого моделювання часових рядів є теорема FAT (*Fuzzy Approximation Theorem*), згідно з якою будь-яка математична система може бути апроксимована системою, заснованою на нечіткій логіці. Іншими словами, за допомогою природномовних висловлювань «ЯКЩО-ТО», з подальшою їх формалізацією засобами теорії нечітких множин, можна скільки завгодно точно описати довільний взаємозв'язок «входи-виходи».

Розглянемо алгоритм прогнозування, який базується на алгоритмах, описаних у роботах [20], [22] та [25]. Для опису алгоритму скористаємося наведеними нижче означеннями.

Нехай  $Y(t) \subset \mathbb{R}$ ,  $t = \dots, 0, 1, 2, \dots$  – універсальна множина, визначена нечіткими множинами  $f_i(t)$ . Тоді функція  $F(t)$ , що складається з  $f_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , називається нечітким часовим рядом на  $Y(t)$ .

Крім того,  $F(t)$  можна розуміти, як лінгвістичну змінну, де  $f_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , можливі лінгвістичні значення  $F(t)$ .

Якщо існує нечітке відношення  $R(t, t - 1)$ , таке що

$F(t) = F(t - 1) \times R(t, t - 1)$ , де символ  $\times$  є максимінним оператором композиції, то кажуть, що  $F(t)$  виводиться з  $F(t - 1)$ . Існуюче відношення між  $F(t - 1)$  та  $F(t)$  позначатимемо виразом  $F(t - 1) \rightarrow F(t)$ .

Нехай  $F(t - 1) = A_i$  та  $F(t) = A_j$ , де  $A_i$  та  $A_j$  – нечіткі множини, тоді нечітке логічне відношення між  $F(t - 1)$  та  $F(t)$  може бути позначене логічним відношенням  $A_i \rightarrow A_j$ , де  $A_i$  та  $A_j$  називаються відповідно лівою частиною та правою частиною нечіткого логічного відношення.

Нечіткі логічні відношення, які мають однакову ліву частину, можуть бути об'єднані разом у групи логічних відношень. Наприклад, для однакових лівих частин  $A_i$  таке групування можна зобразити таким чином:

$$\left. \begin{array}{l} A_i \rightarrow A_{j1} \\ A_i \rightarrow A_{j2} \\ \dots \end{array} \right\} \Rightarrow A_i \rightarrow A_{j1}, A_{j2}, \dots$$

Якщо  $F(t)$  стаціонарний нечіткий числовий ряд, тоді логічне відношення  $F(t - 1) \rightarrow F(t)$  називається відношенням першого порядку.

Нехай  $F(t)$  стаціонарний нечіткий часовий ряд. Якщо  $F(t)$  виводиться з  $F(t - 1), F(t - 2), \dots, F(t - n)$ , то нечітке логічне відношення між ними може бути представлено нечітким логічним відношенням  $n$ -го порядку:

$F(t-n), \dots, F(t-2), F(t-1) \rightarrow F(t)$ .

Якщо  $F(t-n) = A_{in}, \dots, F(t-2) = A_{i2}, F(t-1) = A_{i1}, F(t) = A_j$ , де

$A_{in}, \dots, A_{i2}, A_{i1}, A_j$  – нечіткі множини, тоді нечітке логічне відношення  $n$ -го порядку може бути представлено наступним чином

$$A_{in}, \dots, A_{i2}, A_{i1} \rightarrow A_j.$$

Якщо існують нечіткі логічні відношення  $n$ -го порядку. Що мають однакову ліву частину, як показано нижче:

$$A_{in}, \dots, A_{i2}, A_{i1} \rightarrow A_{ja}$$

$$A_{in}, \dots, A_{i2}, A_{i1} \rightarrow A_{jb}$$

.

.

$$A_{in}, \dots, A_{i2}, A_{i1} \rightarrow A_{jm},$$

то такі нечіткі логічні відношення  $n$ -го порядку утворюють групу нечітких логічних відношень  $n$ -го порядку:

$$A_{in}, \dots, A_{i2}, A_{i1} \rightarrow A_{ja}, A_{jb}, \dots, A_{jm}.$$

Алгоритм 10.1.

1. Прийняти рішення щодо переходу до ряду приростів. Якщо необхідно, то виконати перехід від ряду вхідних даних до ряду приростів значень

$$x'_i = x_i - x_{i-1},$$

де  $i = \overline{2, N}$ ,  $N$  – довжина ряду.

Таким чином довжина ряду зменшується на одиницю.

2. Задати область визначення (універсум  $U$ ) проблеми, виходячи з обра-них на кроці 1 значень, на заданому часовому інтервалі.

3. Задати порядок відношень для побудови правил.

4. Якщо порядок не дорівнює 1, то прийняти рішення щодо необхідності до переходу від відношень старших порядків, до відношень старших порядків на основі різниць між сусідніми індексами нечітких множин.

5. Задати нечіткі множини  $A_i$ , використовуючи функції приналежності (Гаусова, структурна, трапецієвидна, трикутна).

6. Фазифікувати дані, отримані на кроці 1.

7. Побудувати нечіткі логічні відношення  $n$ -го порядку на основі фази-фікованих даних.

8. Якщо на кроці 4 було вирішено перейти до відношень старших порядків на основі різниць між сусідніми індексами нечітких множин, то перетворити кожне нечітке логічне відношення  $n$ -го порядку виду

$$A_{X1}, A_{X2}, A_{X3}, \dots, A_{Xj}, \dots, A_{Xn} \rightarrow A_{Xr}$$

у таку форму

$$A_{X1}, A_{X1+V(X1)}, A_{X1+V(X1)+V(X2)}, \dots, A_{X1+V(X1)+V(X2)+\dots+V(Xf)}, \dots,$$

$$A_{X1+V(X1)+V(X2)+\dots+V(Xj)+\dots+V(Xn)} \rightarrow A_{X1+V(X1)+V(X2)+\dots+V(Xj)+\dots+V(Xn)+V(Xr)}$$

,

де  $V(X1), V(X2), \dots, V(Xr)$  – цілі числа.

В іншому випадку одразу перейти до кроку 9.

9. Побудувати групи нечітких логічних відношень  $n$ -го порядку на основі нечітких логічних відношень  $n$ -го порядку отриманих на кроці 7 або 8.

10. Обрати перетворену групу нечітких логічних відношень  $n$ -го порядку для прогнозування.

11. Виконати дефазифікацію вихідного параметру для отримання числового значення.

12. Якщо на першому кроці було виконано переход до ряду приростів, то обчислити прогнозні значення в момент часу  $(t + 1)$  як суму відомого значення в попередній момент часу  $t$  і спрогнозованого на кроці 7 приросту  $\Delta Y_t$ :

$$Y_{t+1} = Y_t + \Delta Y_t.$$

В іншому випадку крок 12 непотрібен.

Розглянутий метод нечіткого моделювання може бути віднесений до числа напівавтоматичних процедур, оскільки більшість виконуваних кроків, враховуючи побудову універсуму на основі множини вхідних даних задачі, можуть бути ефективно реалізовані в програмній формі, проте участь аналітика (експерта) при формуванні інтервалів розбиття і відповідних нечітких множин відіграє та-кож величезну роль.

#### *Контрольні питання за темою*

1. Дайте означення нечіткої множини.
2. Що таке універсам нечіткої множини?
3. Яким чином можуть задаватися нечіткі множини?
4. Що таке лінгвістична змінна?
5. Що таке терм-множина?
6. Дайте означення нечіткого лінгвістичного висловлювання.
7. Сформулюйте основні етапи нечіткого виведення.
8. З якою метою виконується етап дефазифікації?
9. Сформулюйте FAT теорему.



**ДОДАТОК**  
**КОЕФІЦІЕНТИ РУХОМОГО СЕРЕДНЬОГО**

$$p = 3, u_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$l = 5$$

$$a_0 = \frac{1}{35} [-3; 12; 17; 12; -3],$$

$$a_1 = \frac{1}{12} [1; -8; 0; 8; -1],$$

$$a_2 = \frac{1}{14} [2; -1; -2; -1; 2],$$

$$a_3 = \frac{1}{12} [-1; 2; 0; -2; 1].$$

$$l = 7$$

$$a_0 = \frac{1}{21} [-2; 3; 6; 7; 6; 7; 6; 3; -2],$$

$$a_1 = \frac{1}{252} [22; -67; -58; 0; 58; 67; -22],$$

$$a_2 = \frac{1}{84} [5; 0; -3; -4; -3; 0; 5],$$

$$a_3 = \frac{1}{36} [-1; 1; 1; 0; -1; -1; 1].$$

$$l = 9$$

$$a_0 = \frac{1}{21} [-2; 3; 6; 7; 6; 7; 6; 3; -2],$$

$$a_1 = \frac{1}{252} [22; -67; -58; 0; 58; 67; -22],$$

$$a_2 = \frac{1}{84} [5; 0; -3; -4; -3; 0; 5],$$

$$a_3 = \frac{1}{36} [-1; 1; 1; 0; -1; -1; 1].$$

$$l = 11$$

$$a_0 = \frac{1}{429} [-36; 9; 44; 69; 84; 89; 84; 69; 44; 9; -36],$$

$$a_1 = \frac{1}{5148} [300; -294; -532; -503; -296; 0; 296; 503; 532; 294; -300],$$

$$a_2 = \frac{1}{858} [15; 6; -1; -6; -9; -10; -9; -6; -1; 6; 15],$$

$$a_3 = \frac{1}{5148} [-30; 6; 22; 23; 14; 0; -14; -23; -22; -6; 30].$$

$$l = 13$$

$$a_0 = \frac{1}{143} [-11; 0; 9; 16; 21; 24; 25; 24; 21; 16; 9; 0; -11],$$

$$a_1 = \frac{1}{24024} [1133; -660; -1578; -1796; -1489; -832; 0; 832; 1489; 1796; 1578; 660; -1133],$$

$$a_2 = \frac{1}{2002} [22; 11; 2; -5; -10; -13; -14; -13; -10; -5; 2; 11; 22],$$

$$a_3 = \frac{1}{3432} [-11; 0; 6; 8; 7; 4; 0; -4; -7; -8; -6; 0; 11].$$

$$l = 15$$

$$a_0 = \frac{1}{1105} [-78; -13; 42; 87; 122; 147; 162; 167; 162; 147; 122; 87; 42; -13; -78],$$

$$a_1 = \frac{1}{334152} [12922; -4121; 11760; 19488; 20496; 16464; 9072; 0; -9072; -16464; -20496; -19488; 11760; 4121; -12922],$$

$$a_2 = \frac{1}{12376} [91; 52; 19; -8; -29; -44; -53; -56; -53; -44; -29; -8; 19; 52; 91],$$

$$a_3 = \frac{1}{47736} [-91; -13; 35; 58; 61; 49; 27; 0; -27; -49; -61; -58; -35; 13; 91].$$

$$l = 17$$

$$a_0 = \frac{1}{323} [-21; -6; 7; 18; 27; 34; 39; 42; 43; 42; 39; 34; 27; 18; 7; -6; -21],$$

$$a_1 = \frac{1}{23256} [748; -98; -643; -930; -1002; -902; -673; -358; 0; 358; 673; 902; 1002; 930; 643; 98; -748],$$

$$a_2 = \frac{1}{7752} [40; 25; 12; 1; -8; -15; -20; -23; -24; -23; -20; -15; -8; 1; 12; 25; 40],$$

$$a_3 = \frac{1}{23256} [-28; -7; 7; 15; 18; 17; 13; 7; 0; -7; -13; -17; -18; -15; -7; 7; 28].$$

$$l = 19$$

$$a_0 = \frac{1}{2261} [-136; -51; 24; 89; 144; 189; 224; 249; 264; 269; 264; 249; 224; 189; 144; 89; 24; -51; -136],$$

$$a_1 = \frac{1}{255816} [6936; 68; -4648; -7481; -8700; -8574; -7372; -5363; -2816; 0; 2816; 5363; 7372; 8574; 8700; 7481; 4648; -68; -6936],$$

$$a_2 = \frac{1}{13566} [51; 34; 19; 6; -5; -14; -21; -26; -29; -30; -29; -26; -21; -14; -5; 6; 19; 34; 51],$$

$$a_3 = \frac{1}{255816} [-204; -68; 28; 89; 120; 126; 112; 83; 44; 0; -44; -83; -112; -126; -120; -89; -28; 68; 204].$$

$$l = 21$$

$$a_0 = \frac{1}{3059} [-171; -76; 9; 84; 149; 204; 249; 284; 309; 324; 329; 324; 309; 284; 249; 204; 149; 84; 9; -76; -171],$$

$$a_1 = \frac{1}{3634092} [-84075; 10032; -43284; -78176; -96947; -101900;$$

$-95338; 79564; -56881; -29592; 0; 29592; 56881; 79564; 95338; 101900;$   
 $96947; 78176; 43284; -10032; 84075],$

$$a_2 = \frac{1}{67298} [190; 133; 82; 37; -2; -35; -62; -83; -98; -107; -110;$$
  
 $-107; -98; -83; -62; -35; -2; 38; 82; 133; 190],$

$$a_3 = \frac{1}{519156} [-285; -114; 12; 98; 149; 170; 166; 142; 103; 54; 0; -54;$$
  
 $-103; -142; -166; -170; -149; -98; -12; 144; 285].$

## **СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

1. Афанасьев В.Н., Юзбашев М.М. Анализ временных рядов и прогнозирование: Учебник. — М.: Финансы и статистика, 2001. — 228 с.
2. Бабак В.П. Статистична обробка даних. / В.П. Бабак, А.Я. Білецький, О.П. Приставка, П.О. Приставка. – К.: МІВВЦ, 2001. – 388 с.
3. Бокс Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление/ Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир. – Вып. 1. – 1974. 406 с.; Вып. 2. – 198 с.
4. Голяндина Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов: Учеб. пособие. С.Пб: Изд-во СПбГУ, 2004. 76 с.
5. Голяндина Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: прогноз временных рядов: Учеб. пособие. С.Пб: Изд-во СПбГУ, 2004. 52 с.
6. Давнис В. В. Прогнозные модели экспертных предпочтений. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2005. – 248с.
7. Дженкинс Г. Спектральный анализ и его приложения/ Г. Дженкинс, Д. Ваттс. – М.: Мир, 1971. – вып. 1. – 316 с., вып. 2 – 287 с.
8. Емельяненко Т.Г. Принятие решений в системах мониторинга/ Т.Г. Емельяненко, А.В. Зберовский, А.Ф. Приставка, Б.Е. Собко. – Д.: РИК НГУ. – 2005. – 224 с.
9. Кендэл М. Временные ряды. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 199 с.
- 10.Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 416 с.
- 11.Отнес Р. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы/ Р. Отнес, Л. Эноксон. – М.: Мир, 1982. – 428 с.
- 12.Приставка О.П. Статистичний аналіз в АСОД: Часові ряди. / О.П. Приставка, П.О. Приставка, С.О. Смирнов – Д.: РВВ ДДУ, 2000. – 112 с.
- 13.Френкель А.А. Прогнозирование производительности труда: методы и модели. - М.: Экономика, 1989. - 213 с.
- 14.Хеннан Э. Анализ временных рядов. – М.: Наука, 1964. - 216 с.
- 15.Brown R.G. Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.Y., 1963.
- 16.Chen, S. M. Forecasting enrollments based on high-order fuzzy time series / S.M. Chen // Cybernetics and Systems: An International Journal. – №33 (2002). – P. 1-16
- 17.Şah, M. Forecasting Enrollment Model Based on First-Order Fuzzy Time Series / M. Şah, K. Y. Degtarev // Proc. Int. Conf. Computational Intelligence (ICCI) (2004) . – p. 375-378.
- 18.Song, Q. Fuzzy time series and its models / Q. Song, B. Chissom // Fuzzy Sets and Systems. – №54 (1993) – P. 269-277.
- 19.Zadeh, A. Lotfi. Fuzzy Sets / Lotfi A. Zadeh // Information and Control. – 1965.

## **ЗМІСТ**

Вступ.....	3
Тема 1. Загальні поняття, види та задача аналізу динамічних рядів.....	4
Тема 2. Дослідження часового ряду на випадковість.....	8
Тема 3. Методи згладжування часових рядів.....	16
Тема 4. Регресійні методи аналізу. Виділення тренду.....	23
Тема 5. Гетероскедастичність.....	35
Тема 6. Сезонність.....	42
Тема 7. Автокореляція.....	44
Тема 8. Адаптивні методи прогнозування.....	50
Тема 9. Метод сингулярного спектрального аналізу.....	58
Тема 10. Прогнозування з використанням математичного апарату нечіткої логіки.....	64
Додаток. Коефіцієнти рухомого середнього.....	77
Список рекомендованої літератури.....	79