**СПИСОК ЗАДАЧ**

# 1 Обязательные задачи

**1.** Написать программу по нахождению корней кубического уравнения методом дихотомии [1]:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

На вход: $a$, $b$, $c$, $d$, $\delta$, $\epsilon$. На выход: интервал, в котором находится корень уравнения в зависимости от $\delta$, $\epsilon$, либо сам корень.

Примеры уравнений:

a) $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$, $d = -2$; b) $a = 1$, $b = -100$, $c = 1$, $d = -100$ c) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$

**2.** Написать программу поиска корней нелинейного уравнения методом простой итерации [1], [2]:

$$\text{Вариант №1:} \quad x - a = \ln(1 + x); \quad \text{Вариант №2:} \quad x + a = e^x,$$

Параметр $a \in (-\infty; +\infty)$ задается на вход. Как влияет $a$ на количество решений уравнения?

**3.** Ответить на вопросы: 1) Что такое норма матрицы, какие нормы бывают и как их определять? 2) Что такое число обусловленности, для чего оно нужно, как определяется? 3) Какие существуют методы решения систем линейных алгебраических уравнений?

Написать программу для численного решения систем линейных алгебраических уравнений: [1], [2]: [3]:

$$Ax = b, \quad A \in R^{3\times3} \quad x, b \in R^3$$

a) Методом Гаусса: $A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 \\ 15 & 15 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Методом Якоби: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$

Для обеих матриц $A$ показать: собственные значения, норму, число обусловленности.

**4.** Ответить на вопросы: 1) Дать определения разностной аппроксимации дифференциального оператора и дифференциального уравнения. 2) Что такое порядок аппроксимации разностного оператора/уравнения и главный член невязки? 3) Что такое порядок сходимости разностной задачи?

Написать программу разностной аппроксимации с $k = 1$ порядком дифференциальной задачи первого порядка [2], [4], [5]:

$$y'(x) = -y(x); \quad \text{Вариант №1:} \quad y(0) = 1 \quad \text{Вариант №2:} \quad y(0) = -1$$

Вывести главный член невязки. Доказать, что построенная разностная аппроксимация сходится с первым порядком. В каких случаях порядко аппроксимации совпадает с порядком сходимости?

## 2 Задачи для возможного получения автомата

**5.**. Написать программу поиска всех корней нелинейного уравнения одним из итерационных методов (метод Ньютона простой или модифицированный, метод секущих, или их модификаций). [1], [2].

$$\text{Вариант №1:} \quad x = l\sin(x); \quad \text{Вариант №2:} \quad x = l\cos(x),$$

Параметр $l \in (-\infty; +\infty)$ задается на вход. Как влияет $l$ на количество решений уравнения? Каким образом можно найти все корни? Сравнить скорость решения с методом простой итерации.

**6.** Для функции $f(x)$ написать программу, интерполирующую ее полиномом. Выразить оценку погрешности численного решения. На выбор методы: интерполяционный полином Лагранжа, интерполяционный полином Ньютона, метод построения сплайн-функций. [1], [2].

| Вариант № | Пример |
|---|---|
| 1 | $x - \sin(x) - 0.25$ |
| 2 | $x^3 - \exp(x) + 1$ |
| 3 | $\sqrt{x} + \cos(x)$ |
| 4 | $x^2 + 1 - \arccos(x)$ |
| 5 | $\lg(x) + \frac{7}{2x+6}$ |
| 6 | $\mathrm{tg}(0.5x + 0.2) - x^2$ |
| 7 | $3x - \cos(x) - 1$ |
| 8 | $x + \lg(x.5)$ |
| 9 | $x^2 - \arcsin(x - 0.2)$ |
| 10 | $x^2 + 4 * \sin(x) - 2$ |
| 11 | $\mathrm{ctg}(x) + x^2$ |
| 12 | $\mathrm{tg}(x) - \cos(x) + 0.1$ |

На вход: a) Исследуемый интервал, исходя из области определения аргумента функции; b) Количество узлов, на которых будет строиться интерполяционный полином; c) точка, в которой будем проверять погрешность численного решения

На выход: a)Погрешность численного решения на исходном и удвоенном количестве узлов; b) Качественное сравнение графиков исходной функции и полиномиальной

**7.** Написать программу для решения системы линейных алгебраических уравнений тремя способами: [1], [2], [3].

$$Ax = b, \quad A \in R^{n\times n} \quad x, b \in R^n$$

а) Одним из прямых методов, с учетом специфики методов (LU-разложение, QR - разложение, разложение Холесского). б) Одним из итерационных методов (модифицированный метод Якоби, метод Гаусса-Зейделя и др.) в) Методом прогонки для трехдиагональной матрицы. Примеры

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

**8.** Написать программу нахождения численного решения интеграла вида [1] [2]:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

с помощью квадратурных формул Ньютона-Котеса. Выбрать два алгоритма (формула трапеций, формула парабол или формула трёх восьмых), провести их сравнение на погрешностях. Примеры:

$$\int\limits_0^2 \ln(1+x)\,dx \qquad \int\limits_0^2 e^x \cos(x)\,dx$$

На вход подаем функцию и количество элементов. На выходе получаем результат интегрирования и погрешность квадратурной формулы.

**9.** Аппроксимировать разностными операторами дифференциальное уравнение [2], [4], [5] :

$$y^{(n)}(x) = g(x)$$

где $n$ - порядок дифференцирования, $k$ - порядок аппроксимации, $M$ - шаблон аппроксимации. Для $n = 1$ реализовать три разностных схемы: 1) с $k = 2$ порядком аппроксимации; 2) с $k = 4$ порядком аппроксимации на компактном шаблоне. Показать главный член невязки. Шаблон аппроксимации для каждого из случаев выбирать самостоятельно (**вывести формулу**):

Вариант №1: $g(x) = e^x * \cos(x)$; $g(0) = 1$; $y(0) = 0$

Вариант №2: $g(x) = e^x * \sin(x)$; $g(0) = 0$; $y(0) = 1$

**10.** Написать программу для решения одномерного нелинейного уравнения переноса [4], [5],[7]

$$u_t + f(u)_x = 0$$

для задачи Коши:

$$u(x,0) = g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ \sin(\frac{\pi(x-1)}{3}), & 1 \le x < 4 \\ 0, & 4 \le x \le 5 \end{cases}$$

$$u(x,0) = g(x) = \begin{cases} a, & -1 \le x < 0 \\ b, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

где $a > b$. Реализовать для функций $f(u) = cu$, где $c = const$, и $f(u) = \frac{u^2}{2}$.

Вариант 1: схема Лакса + неявная схема с центральной разностью

Вариант 2: схема Лакса-Вендроффа + неявная схема с центральной разностью

Вариант 3: схема "Крест"+ неявная схема с центральной разностью

Вариант 4: схема Годунова + схема Кранка-Николсона

Построить графики численнного и точного решения на фиксированный момент времени (момент времени выбрать самостоятельно). Границы слева и справа постоянные. Вывод анимации приветствуется. Показать сходимость по $L_2$ норме вектора решения на последовательности сгущающихся сеток с фиксированным шагом. Как влияет разрыв на численное решение уравнения? Как влияет число Куранта в явной схеме на численное решение?

**11.** Методами Рунге-Кутты найти решение задачи Коши на заданном интервале $x \in (1,2)$ с указанной точностью $\epsilon = 10^4$: [2], [6]:
Вариант 1: (Рунге-Кутты 4 порядка, и модифицированный метод Эйлера)

$$\begin{cases} 2x^2 u(x) u_x + u^2 = 2x^3 + x^2 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

Вариант 2: (Рунге-Кутты 4 порядка и метод Эйлера с пересчетом)

$$\begin{cases} (xu - x^2) u_x + u^2 - 3xu - 2x^2 = 0 \\ u(1) = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Показать, начиная с какого количества узлов сетки решение удовлетворяет точности по правилу Рунге. Вывести 4-ый порядок аппроксимации метода Рунге-Кутты

# 3 Дополнительные задачи

**II.** Написать программу решения уравнения переноса (задача 10) проекционно-сеточным методом (разрывный метод Галёркина) [8], [9], [10]. Сравнить с полученными ранее результатами. Показать сходимость по $L_2$ норме.

**III.** Написать программу решения уравнения переноса (задача 10) балансно-характеристической схемой CABARET [11], [12], [13]. Сравнить с полученными ранее результатами. Показать сходимость по $L_2$ норме.

**IV.** Написать программу решения уравнения переноса (задача 10) WENO [14] (Вариант 1) / A-WENO [15] (Вариант 2) схемами. Сравнить с полученными ранее результатами. Показать сходимость по $L_2$ норме.

**V.** Решить одномерное уравнение диффузии методом конечных элементов [16], [17]

$$(-k(x)u'(x))' = f$$

на интервале $(0, 1)$ для нулевых граничных условий

**VI.** Решить систему нестационарных уравнений гиперболического типа одним из методов повышенного порядка точности.

$$\boldsymbol{u}_t + f(\boldsymbol{u})_x = 0$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} \qquad f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix} \qquad E = \epsilon + \frac{u^2}{2} \qquad p = \epsilon\rho(\gamma - 1)$$

На выбор предлагаются схемы: PLM, Muscl-Hancock Scheme, TVD scheme, RBM scheme или одним из методов из задач **II - IV** [18]

Возможно, список дополнится

# Список литературы

## 4 Основная литература


[1] *Шарый С.П.* Курс вычислительной математики

[2] *Самарский А.А. Гулин А.В.* Численные методы, Изд. М.:Наука, 1989, 430 с.

[3] *Сорокин С.Б.* Вычислительные методы линейной алгебры. Конспект лекций с задачами

[4] *Остапенко В.В.* http://e-lib.nsu.ru/dsweb/Get/Resource-7456/page00000.pdf

[5] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. Изд. М.:Наука, 1977, 657 с.

[6] *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. Изд. М.:Наука, 1977, 440 с.

[7] *Лебедев А.С., Черный С.Г.* Практикум по численному решению уравнений в частных производных, Новосибирск, 2000.


## 5 Дополнительная литература


[8] *Hesthaven J.S., Warburton T.* Nodal discontinuous Galerkin methods. Algorithms, analysis and applications. Springer, 2008. 511 с.

[9] *Токарева С. А.* Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе разрывного метода Галёркина. 2010, 141 с.

[10] *Cockburn B.* An introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems // Lect . Notes Math. 2001 . V. 1697. P. 150-268 .

[11] *В.М. Головизнин, М.А. Зайцев, С.А. Карабасов, И.А. Короткин* Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд. МГУ, 2013.

[12] *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей гиперболическое уравнение со знакопеременным характеристическим полем // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2016. Т. 56. № 5. С. 796–815.

[13] *Н. А. Зюзина, В. В. Остапенко*, “О распаде неустойчивых сильных разрывов при аппроксимации схемой КАБАРЕ скалярного закона сохранения с выпуклым потоком”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 58:6 (2018), 988–1012; Comput. Math. Math. Phys., 58:6 (2018), 950–966

[14] *X.-D. Liu, S. Osher, T. Chan* Weighted essentially non-oscillatory schemes, J. Comput. Phys. 115 (1) (1994) 200–212. doi:10.1006/jcph.1994.1187.

[15] *Y. Jiang, C.-W. Shu, and M. P. Zhang*, An alternative formulation of finite difference weighted ENO schemes with Lax-Wendroff time discretization for conservation laws, SIAM J. Sci. Comput., 35 (2013), pp. A1137–A1160.

[16] *Василевский Ю.В., Ольшанский М.А.* Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. 2007, 103 с.

[17] *Лаевский Ю.М.* Метод конечных элементов (основы теории, задачи), 1999

[18] *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction. 2009