Information et calcul quantique — Devoir #3
PHY 637 & PHY 737 — Automne 2021
Date de remise: 3 novembre 2022
À remettre le: 23 novembre 2022

1. **Canal d'effacement** Le canal d'effacement classique efface un bit avec probabilité p. Par exemple, si le premier de trois bits est effacé on aurait une transmission $000 \to ?00$, où ? est un symbole indiquant que le premier bit est effacé. Le canal d'effacement quantique est défini de manière similaire: avec probabilité p l'état d'un qubit est effacé. Par exemple, si le premier qubit est effacé, on aurait $|000\rangle \to |?00\rangle$. Les sous-questions a) et b) concernent le cas classique, alors que les sous-questions c),d) et e) concernent le cas quantique.

   (a) Combien d'erreurs d'effacement le code de répétition classique [n,1,n] peut-il corriger ? Comparez ce résultat à la correction d'erreur pour le canal symétrique binaire.

   (b) Considérant le résultat en a), pour quels canaux d'effacement (c'est-à-dire pour quels p) peut-on être assurés de transmettre de l'information ? [*Indice: Lorsque n est grand, on peut utiliser un résultat de statistique connu pour relier p et le nombre d'erreurs.*]

   (c) On considère maintenant le canal d'effacement quantique. Décrivez une procédure permettant au code de Shor de corriger une erreur d'effacement. Vous pouvez vous baser sur les résultats du cours sans les redémontrer.

   (d) Roger affirme avoir mis au point un code de correction d'erreur quantique avec paramètres [[n,1,n/2]] (on prend n pair par simplicité). Décrivez un protocol utilisant le code de Roger pour copier un état quantique. Est-ce que le code de Roger peut exister ? [*Indice: Vous avez accès à plus de n qubits.*]

   (e) Pour quels canaux d'effacement quantique (c'est-à-dire pour quels p) peut-on transmettre de l'information quantique ? Comparez ce résultat au cas classique. [*Indice: Utilisez le résultat en d). Entre autres, l'information n'est jamais complètement perdu pour le canal d'effacement quantique. Elle est juste inaccessible au receveur.*]

2. **Code à 5 qubits**. Le code à 5 qubits est défini par les 4 générateurs du groupe stabilisateur $XZZXI$, $IXZZX$, $XIXZZ$ et $ZXIXZ$ (ce sont des permutations cycliques de $XZZXI$).

   (a) Quels sont les opérateurs logiques $\bar{X}$ et $\bar{Z}$ de ce code?

   (b) Montrez que ce code peut corriger toutes les erreurs de poids inférieur ou égal à 1.

   (c) À partir d'un argument de comptage simple et du résultat en b), montrez qu'on ne peut pas distinguer les erreurs de poids supérieur à 1 des erreurs de poids inférieur ou égal à 1.

(d) Par malchance, le code est affecté par une erreur XXXXI. Quel est le syndrôme associé à cette erreur ? D'après la procédure établie en b), quelle est l'opération de correction d'erreur effectuée ? Est-ce que cette procédure ramène l'état quantique dans l'espace code ?

3. **Approximation séculaire** On s'intéresse à un système à deux niveaux de fréquence ω_{01} soumis à une perturbation externe d'amplitude Ω_R et de fréquence $\omega_d = \omega_{01}$:

$$H = \frac{\hbar\omega_{01}}{2}\sigma_z + \hbar\Omega_R \cos(\omega_{01}t)\sigma_x. \tag{1}$$

Cet Hamiltonien n'a pas de solution exacte. Afin de simplifier la situation, on passe dans un référentiel tournant à la fréquence ω_{01} où H prend la forme

$$H' = \frac{\hbar\Omega_R}{2}\sigma_x + \frac{\hbar\Omega_R}{2}\left(e^{2i\omega_{01}t}\sigma_+ + e^{-2i\omega_{01}t}\sigma_-\right). \tag{2}$$

Dans le cas où $\Omega_R/2\omega_{01} \ll 1$, le dernier terme peut être éliminé. Il s'agit de l'approximation séculaire. Dans ce numéro, on tente de justifier cette approximation sans toutefois utiliser la théorie des perturbations dépendantes du temps.

(a) On commence par s'intéresser au cas simple où l'on néglige les termes oscillants:

$$H' \approx \hbar\frac{\Omega_R}{2}\sigma_x. \tag{3}$$

Avec $|\psi(t=0)\rangle = |0\rangle$, déterminer la probabilité que le système soit dans l'état $|1\rangle$ au temps t. On prendra comme convention que $\sigma_z|0\rangle = -|0\rangle$.

(b) Faite le même calcul en ne gardant maintenant que les termes oscillants:

$$H_{2\omega} = \frac{\hbar\Omega_R}{2}\left(e^{2i\omega_{01}t}\sigma_+ + e^{-2i\omega_{01}t}\sigma_-\right). \tag{4}$$

(c) Calculez numériquement la même probabilité en utilisant l'Hamiltonian H sans faire d'approximation. Le calcul est simple avec Python ou un logiciel comme Mathematica. Tracez le résultat obtenu et comparez à l'expression obtenue en a) pour différentes valeurs de $\Omega_R/2\omega_{01}$. Est-ce que l'approximation séculaire est justifiée? Expliquez brièvement votre réponse.