Devoir 3: Photonique et Optique Quantique

Université de Sherbrooke
Mathieu Juan

Dû: Mercredi 7 décembre avant 9h30

Matrice densité et pureté

La représentation d'un système quantique se fait souvent à l'aide d'un vecteur état $|\Psi\rangle$. Cependant, en optique quantique, il est souvent nécessaire de faire appel au concept de système quantique ouvert. Notamment, pour modéliser correctement l'émission spontanée d'un émetteur à deux niveaux, le bain de fluctuations électromagnétiques doit être introduit. Dans ce cas il devient difficile de décrire l'état complet du système (ensemble des modes électromagnétiques et émetteur), bien que cela serait nécessaire pour pouvoir représenter le système avec un vecteur état $|\Psi\rangle$ dans la majorité des cas. C'est dans ce contexte que la représentation à l'aide de la matrice densité devient pertinente. Elle permet de décrire les états purs et les états mixtes ainsi que l'état d'une partie d'un système en éliminant le bain par exemple (traces partielles).

Pour un état pur, qui peut par conséquent être décrit par un vecteur état $|\psi\rangle$, la matrice densité est donnée par:

$$\rho \equiv |\psi\rangle \langle\psi| \tag{1}$$

Cette définition peut être étendue pour les états mixtes:

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle\psi_n| , \tag{2}$$

avec $\{|\psi_n\rangle\}$ un ensemble d'états permettant de décrire le système. Dans ce cas, l'état du système ne peut pas être représenté par un vecteur état.
Pour une base arbitraire $\{|i\rangle\}_{i=1}^N$ de l'espace de Hilbert, la matrice de densité prend la forme générale:

$$\rho = \sum_{i,j=1}^{N} \rho_{i,j} |i\rangle \langle j| . \tag{3}$$

Question 1
En considérant la forme générale de la matrice densité (eq. 3), quelle est l'interprétation physique des éléments diagonaux $\rho_{i,i}$?

Question 2

En rappelant que la trace de ρ est donnée par:

$$\mathrm{Tr}\left[\rho\right] = \sum_n \langle\psi_n|\,\rho\,|\psi_n\rangle\,, \tag{4}$$

montrez que pour un état pur la trace de ρ^2 est toujours égale à 1: Tr $\left[\rho^2\right] = 1$.

La valeur de cette trace est utilisée pour définir la pureté d'un état. Pour un espace de Hilbert de dimension N quelle est alors la valeur minimale de Tr $\left[\rho^2\right]$ pour un état mixte.

Question 3
Considérons maintenant que le système est décrit par le Hamiltonien H. Après avoir démontré que la trace est cyclique, Tr $[AB] =$ Tr $[BA]$, montrez que Tr $\left[\rho^2\right]$ est une constante. Qu'est-ce que cela implique pour la pureté d'un état?

Question 4
Pour ces questions, aucun calcul n'est nécessaire. Ce sont plus des arguments généraux.
Nous avons vu en cours qu'un émetteur à deux niveaux, $\{|e\rangle\,, |g\rangle\}$, présente des oscillations de Rabi lorsqu'il est soumis à un champ E.M. classique. Le Hamiltonien prend alors la forme suivante:

$$H_{2lvl} = \hbar\omega_a/2\left(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|\right) + \hbar\Omega/2\left(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|\right). \tag{5}$$

Si les fluctuations du vide sont prises en compte, il est alors possible de décrire aussi l'émission spontanée. Si le système à deux niveaux est initialement dans l'état fondamental et que l'ensemble du bain électromagnétique à l'origine de l'émission spontanée est explicite dans le Hamiltonien ($H = H_{bain} + H_{2lvl} + H_{interaction}$), comment est-ce que la pureté du système change dans le temps au cours des oscillations de Rabi?

Si on s'intéresse uniquement à l'état du système à deux niveaux, comment peut-on écrire cet état pour les temps très longs (bien plus long que le taux d'émission spontanée)? Comment la pureté de ce sous-système a-t-elle évolué? Comment la pureté du bain a-t-elle par conséquent changé?

Plus généralement, lorsqu'un système quantique est soumis à des effets de décohérence (que ce soit via l'émission spontanée ou un autre mécanisme) à votre avis comment ces effets changent-ils la pureté d'un système?

Mesure QND

Nous avons vu en cours que le calcul des corrélations entre le signal à mesurer et la sonde permet de quantifier à quel point une mesure est QND (*Quantum Non-Demolition*, ou mesure quantique non-destructive). Prenons l'exemple concret de la lame séparatrice vue en cours (fig. 1). L'idée est ici de voir s'il est possible d'utiliser un deuxème faisceau (sonde) pour mesurer le signal sans le détruire. En termes d'opérateurs le mode du signal est donné $\hat{a}$ et celui de la sonde par $\hat{b}$. En terme de mesure, il n'est pas possible de mesurer directement $\hat{a}$, $\hat{b}$, il est alors utile de définir les quadratures amplitude et phase pour ces deux modes:

$$X^a = \hat{a} + \hat{a}^\dagger \tag{6}$$
$$X^\phi = -i\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right) \tag{7}$$
$$Y^a = \hat{b} + \hat{b}^\dagger \tag{8}$$
$$Y^\phi = -i\left(\hat{b} - \hat{b}^\dagger\right) \tag{9}$$
$$\tag{10}$$

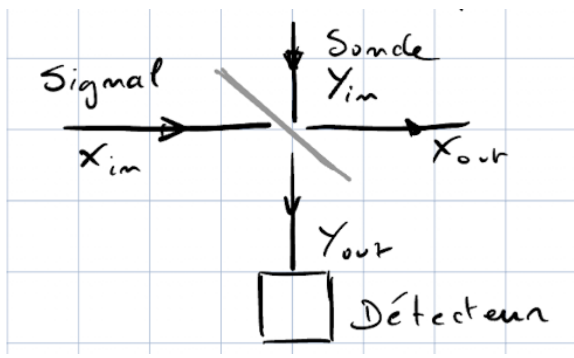

Figure 1: Utilisation d'une lame séparatrice pour mesure un faisceau (signal) à l'aide d'une sonde.

L'opération réalisée par la lame séparatrice est donnée par:

$$\begin{bmatrix} X^a_{out} \\ Y^\phi_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\eta^2} & -\eta \\ \eta & \sqrt{1-\eta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^a_{in} \\ Y^\phi_{in} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Question 5
Montrez que les corrélations entre amplitude du signal en entrée (X^a_{in}) et amplitude du signal en sortie (X^a_{out}) sont données par :

$$C^2_{X^a_{in}X^a_{out}} = \frac{\left|\langle X^a_{in}X^a_{out}\rangle_S - \langle X^a_{in}\rangle\langle X^a_{out}\rangle\right|^2}{V_{X^a_{in}}V_{X^a_{out}}} \tag{12}$$
$$= \frac{(1-\eta^2)V_{X^a_{in}}}{(1-\eta^2)V_{X^a_{in}} + \eta^2 V_{Y^\phi_{in}}} \tag{13}$$

Question 6
Montrez que les corrélations entre amplitude du signal en entrée (X^a_{in}) et phase de la sonde en sortie

(Y^{ϕ}_{out}) sont données par :

$$C^2_{X^a_{in}Y^{\phi}_{out}} = \frac{\left|\left\langle X^a_{in}Y^{\phi}_{out}\right\rangle_S - \langle X^a_{in}\rangle \left\langle Y^{\phi}_{out}\right\rangle\right|^2}{V_{X^a_{in}}V_{Y^{\phi}_{out}}} \tag{14}$$

$$= \frac{\eta^2 V_{X^a_{in}}}{\eta^2 V_{X^a_{in}} + (1-\eta^2)V_{Y^{\phi}_{in}}} \tag{15}$$

Question 7
Montrez que dans le cas où les deux modes $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont des états cohérents $|\alpha\rangle$, avec $\alpha = 1$, $C^2_{X^a_{in}Y^{\phi}_{out}} + C^2_{X^a_{in}X^a_{out}} = 1$. En vous basant sur des arguments simples, expliquez pourquoi cette valeur de 1 est typique d'une mesure qui n'est pas QND.

À l'inverse, si une système de mesure permet d'obtenir une mesure QND parfaite $C^2_{X^a_{in}Y^{\phi}_{out}} + C^2_{X^a_{in}X^a_{out}} = 2$, quelle est selon vous la valeur des corrélations $C^2_{X^a_{out}Y^{\phi}_{out}}$?

Question 8
Considérons maintenant un état du vide parfaitement comprimé pour la sonde Y_{in}, c'est-à-dire que la variance d'une des quadratures (phase ou amplitude) tends vers 0 alors que l'autre diverge. Laquelle des deux quadratures est-il important de minimiser pour améliorer la mesure obtenue avec la lame séparatrice? Est-il théoriquement possible d'obtenir une mesure QND parfaite?

Question 9
Finalement, considérons simplement le Hamiltonien libre d'un seul mode décrit par l'opérateur $\hat{a}$, $H_0 = \hbar\omega_c\hat{a}^\dagger\hat{a}$. En utilisant le paradigme de Heisenberg, montrez qu'une mesure de l'amplitude $\hat{a}^\dagger + \hat{a}$ n'est pas un bon choix d'observable.