Devoir 2: Photonique et Optique Quantique

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Mathieu Juan

Dû: Mercredi 23 novembre avant 9h30

États de Fock et champ cohérent dans une cavité

Le modèle de Jaynes-Cummings est utilisé pour décrire la dynamique de l'état photonique d'une cavité et d'un atome à deux niveaux lorsqu'ils sont couplés avec une constante de couplage g. La cavité est définie par les opérateurs annihilation/création $a^\dagger$ et a avec une fréquence ω_c. L'atome est défini par les opérateurs de Pauli $\sigma^\dagger$ et σ avec une fréquence ω_0. Le Hamiltonien interne du système est alors donné par:

$$H_0 = \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\omega_0 \sigma^\dagger \sigma \tag{1}$$

Avec cette notation, le Hamiltonien d'interaction fait intervenir la constante de couplage g et les dégrés de liberté de la cavité et de l'atome:

$$H_{int} = \hbar g \left(\sigma^\dagger a + \sigma a^\dagger\right) \tag{2}$$

Le Hamiltonien du modèle de Jaynes-Cummings est alors:

$$H = H_0 + H_{int} = \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar\omega_0 \sigma^\dagger \sigma + \hbar g \left(\sigma^\dagger a + \sigma a^\dagger\right) \tag{3}$$

Il est important de noter que ce Hamiltonien est obtenu après avoir négligé les termes non-résonants. Pour les états du système, nous utiliserons $|n\rangle$ pour l'état Fock n de la cavité (état propre de la cavité avec n photons) et $|g\rangle$ et $|e\rangle$ pour les états de l'atome. Le système peut alors être décrit avec $|g\rangle \otimes |n\rangle = |g, n\rangle$.

Question 1: Action des opérateurs a et $a^\dagger$. En utilisant la définition de $a = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k+1}\, |k\rangle \langle k+1|$, retrouvez les relations suivantes:

$$a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{4}$$

$$a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \tag{5}$$

Question 2: Avec l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde générale $|\Psi\rangle = \sum_k c_{e,k}\,|e, k\rangle + c_{g,k}\,|g, k\rangle$, montrez que pour un choix quelconque n de l'état de la cavité les équations du mouvement sont données par:

$$\frac{\partial}{\partial t}c_{e,n} = -\mathrm{i}\left(\omega_0 + n\omega_c\right)\, c_{e,n} - \mathrm{i}g\sqrt{n+1}\, c_{g,n+1} \tag{6}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}c_{g,n+1} = -\mathrm{i}\left(n+1\right)\omega_c\, c_{g,n+1} - \mathrm{i}g\sqrt{n+1}\, c_{e,n} \tag{7}$$

Question 3: Quelle est la dynamique du système lorsqu'il est initialement préparé dans l'état $|\Psi(t=0)\rangle = |g,0\rangle$? Donnez une argument physique qui explique cette évolution particulière.

Question 4: Expliquez pourquoi les équations du mouvement de la question 2 sont formellement équivalentes à:

$$\frac{\partial}{\partial t}c_{e,n} = \mathrm{i}\Delta\, c_{e,n} - \mathrm{i}g\sqrt{n+1}\, c_{g,n+1} \tag{8}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}c_{g,n+1} = -\mathrm{i}g\sqrt{n+1}\, c_{e,n}, \tag{9}$$

avec $\Delta = \omega_c - \omega_0$.

Question 5: Donnez la probabilité de transition $P_{g,n+1\to e,n}$ en résonance lorsque le système est initialement dans l'état $|g,n+1\rangle$. Comment la fréquence de Rabi pour le modèle de Jaynes-Cummings (Ω_n) varie-t-elle en fonction de l'état de Fock n de la cavité ?

Question 6: En vous basant sur la définition de la fréquence de Rabi obtenue pour un système à deux niveaux couplé à un champ classique ($\Omega = -2\,\langle g|\,\hat{\varepsilon}\cdot\mathbf{d}\,|e\rangle\, E_0/\hbar$), expliquez pourquoi la dépendance explicite de la fréquence de Rabi Jaynes-Cummings avec l'état de Fock n'est pas surprenante.

Question 7: Considérons maintenant que l'atome est préparé dans l'état $|\Psi\rangle = 1/\sqrt{2}\,(|g\rangle + |e\rangle)$ et passe à travers une cavité optique. Pour un état de Fock $|n\rangle$ donné, les états propres du système sont:

$$|+\rangle_n = \sin\theta_n|g,n+1\rangle + \cos\theta_n|e,n\rangle \tag{10}$$
$$|-\rangle_n = \cos\theta_n|g,n+1\rangle - \sin\theta_n|e,n\rangle, \tag{11}$$

avec pour énergies propres $E_n^{\pm} = (n+1)\omega_c \pm g\sqrt{n+1}$. L'angle de mélange, ou angle de Stückelberg, est donné par:

$$\tan(2\theta_n) = -2g\sqrt{n+1}/\Delta. \tag{12}$$

De plus nous ferons les hypothèses suivantes: seul un mode de la cavité est considéré, le décalage spectral entre la cavité et l'atome est très grand, et aucun processus d'émission spontané et de décohérence sont considérés.

Expliquez qualitativement pourquoi la mesure de la phase de l'atome après qu'il soit passé dans la cavité permet de connaître le nombre de photons dans la cavité. En faisant l'hypothèse que le couplage g est faible, indiquez comment le changement de phase dépend du nombre de photon.

État cohérent

Considérons maintenant que la cavité est pompée avec un laser de façon à obtenir un état cohérent $|\alpha\rangle$:

$$|\alpha\rangle = e^{|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{13}$$

De part la présence de nombreux états de Fock $|n\rangle$, la dynamique du système à deux niveau devient alors bien plus complexe. En effet, dans ce cas les oscillations de Rabi disparaissent rapidement et, après un certain temps, réapparaissent (*collapse/revival* en Anglais).

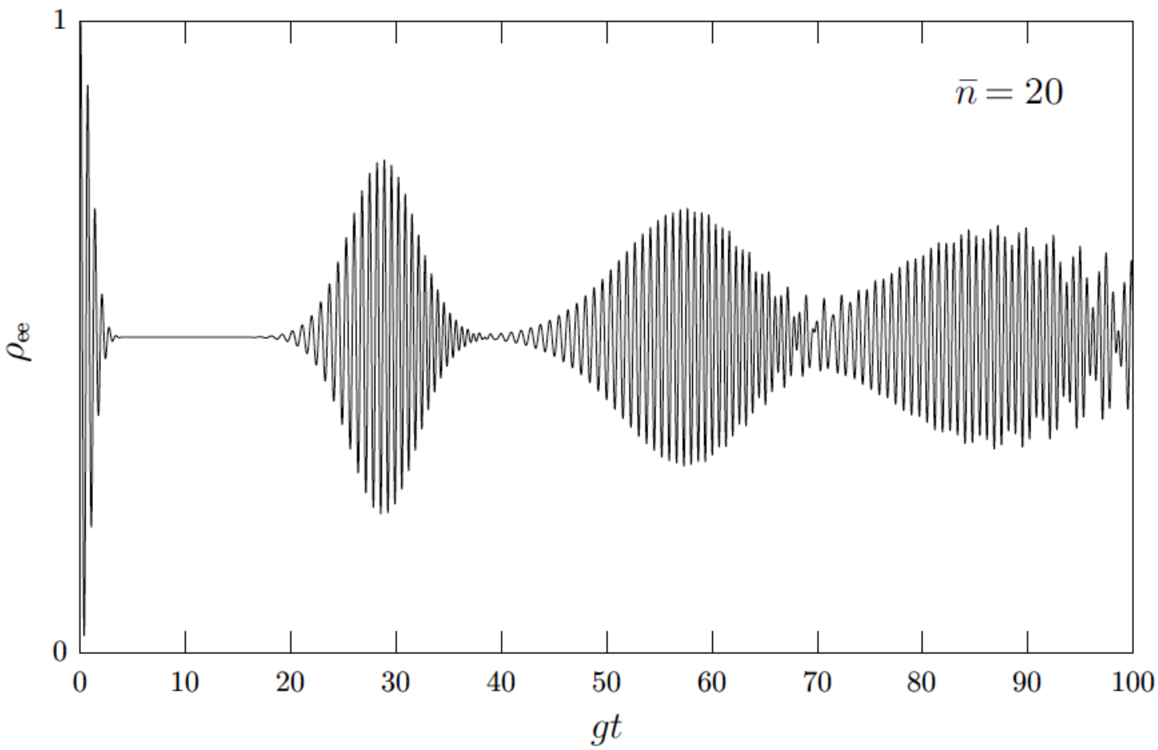

Figure 1: Disparition/réapparition des oscillations de Rabi pour un atome couplé à un état cohérent $|\alpha\rangle$, avec $\alpha = \sqrt{\bar{n}}$.

Question 8: Considérons l'état $|\Psi\rangle(t) = \sum_n c_{e,n}(t)|e,n\rangle + c_{g,n}(t)|g,n\rangle$ avec comme condition initiale la cavité dans l'état cohérent $|\alpha\rangle$ et l'atome dans l'état excité. Exprimez alors l'inversion de population $W(t)$. L'inversion est simplement donnée par la différence entre les probabilités de trouver l'atome dans l'état excité et l'état fondamental $W(t) = P_e(t) - P_g(t)$. Si vous le souhaitez, vous pouvez vérifier que le résultat obtenu vous donne en effet la disparition/réapparition des oscillations de Rabi.

Question 9: Le mécanisme derrière la disparition/réapparition des oscillations est lié aux fréquences de Rabi qui sont différentes pour chaque état de Fock $|n\rangle$. Concrètement, pour un état cohérent $|\alpha\rangle$, le nombre moyen de photon $\bar{n}$ est donné par $\bar{n} = \left\langle a^\dagger a \right\rangle = |\alpha|^2$ et la variance $\left\langle \Delta a^\dagger a \right\rangle = |\alpha| = \sqrt{\bar{n}}$. C'est cette variance qui donne une idée des différente fréquence de Radi présentes dans le système et qu'il faut considérer pour obtenir une condition sur le déphasage. En particulier, les oscillations disparaissent après un temps t_c lorsque $(\Omega_{\bar{n}+\sqrt{\bar{n}}} - \Omega_{\bar{n}-\sqrt{\bar{n}}})t_c \sim \pi$, c'est-à-dire que les oscillations de Rabi les plus lentes sont en opposition de phase avec les plus rapides. De façon similaire, la réapparition des oscillations à lieu après un temps t_r lorsque que les oscillations de Rabi redeviennent en phase entre elles $(\Omega_{\bar{n}+1} - \Omega_{\bar{n}})t_r \sim 2\pi$.

En considérant que $\bar{n}$ est grand, montrez que les temps de disparition t_c et de réapparition t_r imposés par ces deux conditions sont donnés par:

$$t_c \sim \frac{\pi}{2g} \tag{14}$$

$$t_r \sim \frac{2\pi\sqrt{\bar{n}}}{g} \tag{15}$$

Question 10: Les oscillations de Rabi obtenues avec un champ classique sont données simplement par $P_{g\to e}(t) = 1/2\cos(\Omega t)$, ne présentant ainsi aucun effet de disparition/réapparition des oscillations. Cet effet est par conséquent une signature unique lié à la nature quantique du système à deux niveaux et du champ électromagnétique. Afin de retrouver les oscillations de Rabi semi-classique à partir du modèle quantique, nous considérerons maintenant que la fréquence de Rabi $\Omega_{\bar{n}}$ est fixe. Quel est le cas limite pour ces valeurs de g et $\bar{n}$ qui correspondrait alors aux oscillations semi-classiques? Argumentez en quoi ce régime peut en effet être bien décrit par un champ classique.