Physique subatomique, PHQ638: Devoir 1

Jean-Baptiste Betrand, Pierre-Antoine Graham

26 septembre 2022

Considerons la desintegration de deux particules de quadri-impulsions p_1 et p_2 en trois particules de quadri-impulsions p_3, p_4 et p_5. On note les masses respective de ce trois dernières particules m_3, m_4 et m_5. De plus, on a les masses invariantes $s = (p_1 + p_2)^2$ et $m = \sqrt{(p_4 + p_5)^2}$. La densité d'états finaux $\rho(m)$ avec une masse invariante m fixe respectant la conservation de l'énergie impulsion est donnée par

$$\rho(m) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{\mathrm{d}^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \frac{\mathrm{d}^3 p_5}{(2\pi)^3 2E_5} (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - p_5\right) \delta\left(m - \sqrt{(p_4 + p_5)^2}\right) \tag{1}$$

où E_i désigne l'énergie de la particule i dans le référenciel choisit.

A. Afin de trouver la valeur maximale prise par m en fonction de s, m_3 on se place dans le système de reference où $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$. La conservation de l'énergie s'écrit alors

$$\sqrt{s} = \sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^2} + \sqrt{m^2 + (\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5)^2}$$

en isolant m, on trouve

$$m^2 = \left(\sqrt{s} - \sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^2}\right)^2 - (\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5)^2$$

La conservation de la quantité de mouvement impose que $\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5 = \mathbf{0}$ et on a

$$m^2 = \left(\sqrt{s} - \sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^2}\right)^2 - \mathbf{p}_3^2 = s + m_3^2 - 2\sqrt{s}\sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^2}. \tag{2}$$

La valeur maximale de m est atteinte pour $\mathbf{p}_3 = 0$ et vaut $m = \sqrt{s + m_3^2}$. Cette maximisation correspond à une minimisation de la conversion de l'énergie initiale en énergie cinétique au profit de l'énergie de masse.

B. Avec (2), on voit que $m = 0$ est toujours une possibilité associée à

$$\mathbf{p}_3^2 = \frac{1}{2s}(s + m_3^2)^2 - m_3^2 = \frac{1}{2s}(s^2 + m_3^4) \geq 0 \quad \forall s,\ m_3$$

C. Afin d'évaluer (1), on se place d'abord dans le référentiel où $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$. La contrainte de conservation de l'énergie-impulsion devient

$$\begin{aligned}\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - p_5) &= \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4 - E_5)\delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_5) \\ &= \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4 - E_5)\delta^3(-\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_5).\end{aligned} \tag{3}$$

Les masses m_4 et m_5 permettent d'écrire les énergies E_4 et E_5 en fonction de $\mathbf{p}_4$ et $\mathbf{p}_5$. On a

$$E_4 = \sqrt{m_4^2 + \mathbf{p}_4^2} \quad \& \quad E_5 = \sqrt{m_5^2 + \mathbf{p}_5^2}. \tag{4}$$

L'intégration sur $\mathbf{p}_5$ est effectuée avec (3) et (4) comme suit :

$$\begin{aligned}&\int \frac{\mathrm{d}^3 p_5}{(2\pi)^3 2E_5}(2\pi)^4 \delta^3(-\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_5)\delta\left(m - \sqrt{(p_4 + p_5)^2}\right)\delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4 - E_{5)} \\ &= 2\pi \int \mathrm{d}^3 p_5 \delta^3(-\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_5)\delta\left(m - \sqrt{(E_4 + E_5)^2 - (\mathbf{p_4} + \mathbf{p_5})^2}\right)\frac{1}{\sqrt{m_5^2 + \mathbf{p}_5^2}}\delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4 - E_5) \\ &= 2\pi \frac{\delta\left(m - \sqrt{m_4^2 + \mathbf{p}_4^2} - \sqrt{m_5^2 + \mathbf{p}_4^2}\right)}{\sqrt{m_5^2 + \mathbf{p}_4^2}}\delta\left(E_1 + E_2 - E_3 - \sqrt{m_4^2 + \mathbf{p}_4^2} - \sqrt{m_5^2 + \mathbf{p}_4^2}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

Le premier δ de (5) peut être simplifié en calculant les racines de son argument. On a

$$0 = m - \sqrt{m_4^2 + \mathbf{p}_4^2} - \sqrt{m_5^2 + \mathbf{p}_4^2} \iff (m^2 - m_4^2 - \mathbf{p}_4^2 - m_5^2 - \mathbf{p}_4^2)^2 = (m_5^2 + \mathbf{p}_4^2)(m_5^2 + \mathbf{p}_4^2)$$

D.