Physique subatomique, PHQ638: Devoir 1

Jean-Baptiste Betrand, Pierre-Antoine Graham

26 septembre 2022

Considerons la desintegration de deux particules de quadri-impulsions p_1 et p_2 en trois particules de quadri-impulsions p_3, p_4 et p_5. On note les masses respective de ce trois dernières particules m_3, m_4 et m_5. De plus, on a les masses invariantes $s = (p_1 + p_2)^2$ et $m = \sqrt{(p_4 + p_5)^2}$. La densité d'états finaux $\rho(m)$ avec une masse invariante m fixe respectant la conservation de l'énergie impulsion est donnée par

$$\rho(m) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{\mathrm{d}^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \frac{\mathrm{d}^3 p_5}{(2\pi)^3 2E_5} (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - p_5)\, \delta\left(m - \sqrt{(p_4 + p_5)^2}\right) \tag{1}$$

où E_i désigne l'énergie de la particule i dans le référenciel choisit.

A. Afin de trouver la valeur maximale prise par m en fonction de s, m_3 on se place dans le système de reference où $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$. La conservation de l'énergie s'écrit alors

$$\sqrt{s} = \sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^2} + \sqrt{m^2 + (\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5)^2}$$

en isolant m, on trouve

$$m^2 = \left(\sqrt{s} - \sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^2}\right)^2 - (\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5)^2$$

La conservation de la quantité de mouvement impose que $\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5 = \mathbf{0}$ et on a

$$m^2 = \left(\sqrt{s} - \sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^2}\right)^2 - \mathbf{p}_3^2 = s + m_3^2 - 2\sqrt{s}\sqrt{m_3^2 + \mathbf{p}_3^2}. \tag{2}$$

La valeur maximale de m est atteinte pour $\mathbf{p}_3 = 0$ et vaut $m = \sqrt{s + m_3^2}$. Cette maximisation correspond à une minimisation de la conversion de l'énergie initiale en énergie cinétique au profit de l'énergie de masse.

B. Avec (2), on voit que $m = 0$ est toujours une possibilité associée à

$$\mathbf{p}_3^2 = \frac{1}{2s}(s + m_3^2)^2 - m_3^2 = \frac{1}{2s}(s^2 + m_3^4) \geq 0 \quad \forall s,\ m_3$$

C. Afin d'évaluer (1), on se place d'abord dans le référentiel où $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$. La contrainte de conservation de l'énergie-impulsion devient

$$\begin{aligned}\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - p_5) &= \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4 - E_5)\delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_5) \\ &= \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4 - E_5)\delta^3(-\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_5).\end{aligned} \tag{3}$$

Les masses m_4 et m_5 permettent d'écrire les énergies E_4 et E_5 en fonction de $\mathbf{p}_4$ et $\mathbf{p}_5$. On a

$$E_4 = \sqrt{m_4^2 + \mathbf{p}_4^2} \quad \& \quad E_5 = \sqrt{m_5^2 + \mathbf{p}_5^2}. \tag{4}$$

L'intégration sur $\mathbf{p}_5$ est effectuée avec (3) et (4) comme suit :

$$\begin{aligned}&\int \frac{\mathrm{d}^3 p_5}{(2\pi)^3 2E_5} (2\pi)^4 \delta^3(-\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_5)\delta\left(m - \sqrt{(p_4 + p_5)^2}\right)\delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4 - E_5) \\ &= 2\pi \int \mathrm{d}^3 p_5 \delta^3(-\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_5)\delta\left(m - \sqrt{(E_4 + E_5)^2 - (\mathbf{p_4} + \mathbf{p_5})^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{m_5^2 + \mathbf{p}_5^2}}\delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4 - E_5) \\ &= \pi \frac{\delta\left(m - \sqrt{m_4^2 + \mathbf{p}_4^2} - \sqrt{m_5^2 + \mathbf{p}_4^2}\right)}{\sqrt{m_5^2 + \mathbf{p}_4^2}}\delta\left(E_1 + E_2 - E_3 - \sqrt{m_4^2 + \mathbf{p}_4^2} - \sqrt{m_5^2 + \mathbf{p}_4^2}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

Le premier δ de (5) peut être simplifié en calculant l'unique racine positive p de son argument. On a

$$\begin{aligned}
&0 = m - \sqrt{m_4^2+p^2} - \sqrt{m_5^2+p^2} \\
&\implies (m^2 - m_4^2 - p^2 - m_5^2 - p^2)^2 = 4(m_4^2+p^2)(m_5^2+p^2) \\
&\implies (m^2 - m_4^2 - m_5^2)^2 + 4p^4 + 4(-m^2 + m_5^2 + m_4^2)p^2 = 4m_4^2m_5^2 + 4p^2m_5^2 + 4m_4^2p^2 + 4p^4 \\
&\implies 4m^2p^2 = (m^2 - m_4^2 - m_5^2)^2 - 4m_4^2m_5^2 = (m^2 - m_4^2 - m_5^2 - 2m_4m_5)(m^2 - m_4^2 - m_5^2 + 2m_4m_5) \\
&\implies p = \frac{1}{4m}\sqrt{(m^2 - [m_4+m_5]^2)(m^2 + [m_4+m_5]^2)}.
\end{aligned}$$

Le δ peut être simplifié davantage de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\delta\left(m - \sqrt{m_4^2+\mathbf{p}_4^2} - \sqrt{m_5^2+\mathbf{p}_4^2}\right) &= \delta\left(\sqrt{\mathbf{p}_4^2} - p\right)\left|\frac{p}{\sqrt{m_4^2+p^2}} + \frac{p}{\sqrt{m_5^2+p^2}}\right|^{-1} \\
&= \delta\left(\sqrt{\mathbf{p}_4^2} - p\right)\left|\frac{p}{m - \sqrt{m_5^2+p^2}} + \frac{p}{\sqrt{m_5^2+p^2}}\right|^{-1} \\
&= \delta\left(\sqrt{\mathbf{p}_4^2} - p\right)\frac{\sqrt{m_4^2+p^2}\sqrt{m_5^2+p^2}}{mp}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Il est maintenant possible d'évaluer l'intégrale sur $\mathbf{p}_4$ en utilisant (4), (5) et (6). On trouve

$$\begin{aligned}
&\pi\int\frac{\mathrm{d}^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4}\delta\left(\sqrt{\mathbf{p}_4^2} - p\right)\frac{\sqrt{m_4^2+p^2}\sqrt{m_5^2+p^2}}{mp\sqrt{m_5^2+\mathbf{p}_4^2}}\delta\left(E_1 + E_2 - E_3 - \sqrt{m_4^2+\mathbf{p}_4^2} - \sqrt{m_5^2+\mathbf{p}_4^2}\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\mathrm{d}\Omega_4\int\mathrm{d}\sqrt{\mathbf{p}_4^2}\mathbf{p}_4^2\delta\left(\sqrt{\mathbf{p}_4^2} - p\right)\frac{\sqrt{m_4^2+p^2}\sqrt{m_5^2+p^2}}{mp\sqrt{m_5^2+\mathbf{p}_4^2}\sqrt{m_4^2+\mathbf{p}_4^2}}\delta\left(E_1+E_2-E_3-m\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{p^2\sqrt{m_4^2+p^2}\sqrt{m_5^2+p^2}}{mp\sqrt{m_5^2+p^2}\sqrt{m_4^2+p^2}}\delta\left(E_1+E_2-E_3-m\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{p}{m}\delta\left(E_1+E_2-E_3-m\right). \qquad (7)
\end{aligned}$$

où $\mathrm{d}\Omega_4$ est l'élément d'angle solide de d^3p_4 en coordonnées sphériques.
Afin de simplifier l'intégrale sur $\mathrm{d}p_3$, on souhaite changer de système de référence. Pour ce faire, on réécrit le résultat (7) de manière covariante en exploitant le fait que dans le système utilisé jusqu'ici $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$. On a l'invariant

$$(p_1+p_2-p_3)^2 = (E_1+E_2-E_3)^2 - (\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)^2$$

et l'argument du δ de (7) prend la forme covariante

$$E_1+E_2-E_3-m = \sqrt{(p_1+p_2-p_3)^2} - m.$$

Comme cette expression est valide dans tous les référenciels inertiels, on l'utilise pour passer au référenciel où $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$. Dans ce référenciel, le radicande de l'argument du δ devient

$$\begin{aligned}
(p_1+p_2-p_3)^2 &= (p_1+p_2)^2 + p_3^2 - 2(E_3(E_1+E_2) - \mathbf{p}_3\cdot(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)) \\
&= s + m_3^2 - 2\sqrt{m_3^2+\mathbf{p}_3^2}\sqrt{m_3^2+(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)^2} \\
&= s + m_3^2 - 2\sqrt{m_3^2+\mathbf{p}_3^2}\sqrt{s}
\end{aligned}$$

Encore une fois, on peut simplifier l'intégration sur le δ en trouvant d'abord la racine positive q de son argument. On a

$$0 = \sqrt{s + m_3^2 - 2\sqrt{m_3^2+q^2}\sqrt{s}} - m \implies q = \sqrt{\left(\frac{s+m_3^2-m^2}{2\sqrt{s}}\right)^2 - m_3^2}$$

D.