

PHYSIQUE SUBATOMIQUE, PHQ638: DEVOIR 3

Pierre-Antoine Graham

14 novembre 2022

- (a) On s'intéresse à la diffusion d'un électron de masse m sur un muon de masse M produite par le couplage minimal de leur champs de Dirac avec le même champ électromagnétique. Dans les deux cas, la constante de couplage est la même charge élémentaire e . La section efficace de ce processus peut être approximée au deuxième ordre en e dont l'unique diagramme de Feynman est représenté à la fig.1 Les fermions initiaux (resp. finaux) identifiés par les indices 1 et 2 (resp. 3 et 4)

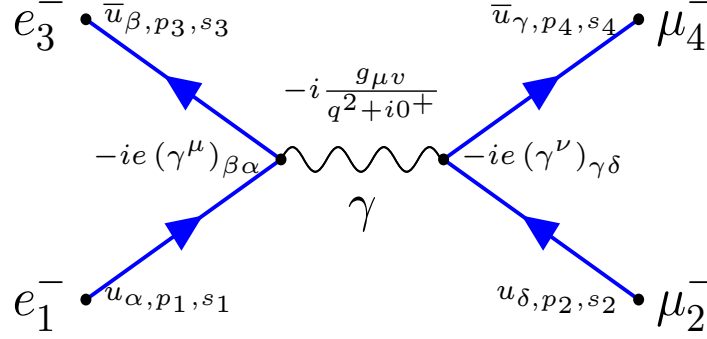


FIGURE 1 – Diagramme de Feynman donnant l'amplitude de diffusion electron-muon gouvernée par l'électrodynamique quantique au deuxième ordre en e . Les indices β, γ sont des indices de lignes alors que les indices α, δ sont des indices de colonnes. Ils indiquent la nature de la multiplication des deux objets partageant un indice.

correspondent aux quadri-impulsions p_1, p_2 (resp. p_3, p_4) et aux spins s_1, s_2 (resp. s_3, s_4). Les spineurs qui les décrivent sont notés $u_{p_1, s_1}, u_{p_2, s_2}$ (resp. $\bar{u}_{p_3, s_3}, \bar{u}_{p_4, s_4}$). Comme il est question d'un processus de deuxième ordre, le diagramme comporte deux vertex associés aux facteurs $-ie(\gamma^\mu)\delta(p_1 - q - p_3)$ (gauche) et $-ie(\gamma^\nu)\delta(p_2 + q - p_4)$ (droite). La seule ligne interne du diagramme correspond à un photon virtuel γ associé au propagateur $-ig_{\mu\nu}/(q^2 + i0^+)$. Conformément aux règles de Feynman, ces différents éléments se combinent pour former la quantité

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}' &= \int dq \bar{u}_{p_3, s_3} [-ie(\gamma^\mu)\delta(p_1 - q - p_3)] u_{p_1, s_1} \left[\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i0^+} \right] \bar{u}_{p_4, s_4} [-ie(\gamma^\nu)\delta(p_2 + q - p_4)] u_{p_2, s_2} \\ &= ie^2 [\bar{u}_{p_3, s_3}(\gamma^\mu)u_{p_1, s_1}] \left[\frac{g_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \right] [\bar{u}_{p_4, s_4}(\gamma^\nu)u_{p_2, s_2}] \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \end{aligned}$$

qui correspond à l'amplitude de diffusion

$$\mathcal{M} = [\bar{u}_{p_3, s_3}(\gamma^\mu)u_{p_1, s_1}] \left[\frac{4\pi\alpha g_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \right] [\bar{u}_{p_4, s_4}(\gamma^\nu)u_{p_2, s_2}] \quad (1)$$

avec $\alpha = e^2/(4\pi)$.

- (b) Afin d'obtenir le carré de l'amplitude de diffusion (1) moyenné sur les spins s_1, s_2 et sommée sur les spins s_3, s_4 , on utilise la formule de Casimir qui est basée sur la relation

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u_{p,s} \bar{u}_{p,s} &= \sum_{s=1,2} u_{p,s} u_{p,s}^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{E_p + m} \sum_{s=1,2} (p_\nu \gamma^\nu + m) u_s u_s^\dagger (p_\mu \gamma^\mu + m)^\dagger \gamma^0 \\ &= \frac{1}{E_p + m} \sum_{s=1,2} (p_\nu \gamma^\nu + m) u_s u_s^\dagger \gamma^0 (p_\mu \gamma^\mu + m) \\ &= \frac{1}{E_p + m} (p_\nu \gamma^\nu + m) \frac{1 + \gamma^0}{2} (p_\mu \gamma^\mu + m) \\ &= \frac{1}{2E_p + 2m} \left[\left(\underbrace{p_\nu p_\mu \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu}{2}}_{m^2} + 2mp_\nu \gamma^\nu + m^2 \right) + (p_\nu \gamma^\nu + m) (2p_\mu g^{\mu 0} - (p_\mu \gamma^\mu - m)\gamma^0) \right] \\ &= \frac{1}{2E_p + 2m} [2m(p_\nu \gamma^\nu + m) + 2E_p(p_\nu \gamma^\nu + m^2)] \\ &= \frac{1}{2E_p + 2m} [2m(p_\nu \gamma^\nu + m) + 2E_p(p_\nu \gamma^\nu + m^2)] = p_\nu \gamma^\nu + m \end{aligned} \quad (2)$$

dans le cas de spineurs électronique (la masse m est remplacée par M pour des spineurs muoniques).

- (c) L'amplitude carré total pour un processus de diffusion muon-électron sans égard aux spins finaux s_3, s_4 et moyennée sur les 4 états de spin initiaux s_1, s_2 est donné par (1) et vaut

$$|\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2 = \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} [\bar{u}_{p_3, s_3}(\gamma^\mu) u_{p_1, s_1}] \left[\frac{4\pi\alpha g_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \right] [\bar{u}_{p_4, s_4}(\gamma^\mu) u_{p_2, s_2}] [\bar{u}_{p_4, s_4}(\gamma^\mu) u_{p_2, s_2}]^\dagger \left[\frac{4\pi\alpha g_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \right]^\dagger [\bar{u}_{p_3, s_3}(\gamma^\mu) u_{p_1, s_1}]^\dagger$$

$$= 4 \left[\frac{\pi\alpha}{(p_1 - p_3)^2} \right]^2 g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} [\bar{u}_{p_3, s_3}(\gamma^\mu) u_{p_1, s_1}] [\bar{u}_{p_4, s_4}(\gamma^\nu) u_{p_2, s_2}] [\bar{u}_{p_2, s_2}(\gamma^\rho) u_{p_4, s_4}] [\bar{u}_{p_1, s_1}(\gamma^\sigma) u_{p_3, s_3}]. \quad (3)$$

où on a utilisé

$$[\bar{u}_{p', s'}(\gamma^\rho) u_{p, s}]^\dagger = u_{p, s}^\dagger (\gamma^\rho)^\dagger \bar{u}_{p', s'}^\dagger = u_{p, s}^\dagger \gamma^0 (\gamma^\rho)^\dagger \gamma^0 (u_{p', s'}^\dagger)^\dagger = \bar{u}_{p, s}(\gamma^\rho) u_{p', s'}. \quad (4)$$

Pour effectuer la somme sur s_2 et s_4 dans (3), on invoque la formule de Casimir

$$\sum_{s_2, s_4} [\bar{u}_{p_4, s_4}(\gamma^\nu) u_{p_2, s_2}] [\bar{u}_{p_2, s_2}(\gamma^\rho) u_{p_4, s_4}] = \text{Tr} \left(\gamma^\nu (p_{\lambda, 4} \gamma^\lambda + M) \gamma^\rho (p_{\xi, 2} \gamma^\xi + M) \right)$$

$$= p_{\lambda, 4} p_{\xi, 2} \text{Tr} \left(\gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\xi \right) + M p_{\lambda, 4} \text{Tr} \left(\gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \right) + M p_{\xi, 2} \text{Tr} \left(\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\xi \right) + M^2 \text{Tr} \left(\gamma^\nu \gamma^\rho \right)$$

$$= p_{\lambda, 4} p_{\xi, 2} \text{Tr} \left(\gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\xi \right) + M^2 \text{Tr} \left(\gamma^\nu \gamma^\rho \right)$$

$$= 4 p_{\lambda, 4} p_{\xi, 2} \left(g^{\nu\lambda} g^{\rho\xi} - g^{\nu\rho} g^{\lambda\xi} + g^{\nu\xi} g^{\rho\lambda} \right) + 4 M^2 g^{\nu\rho} \quad (5)$$

Comme le résultat (5) est un scalaire, il peut être extrait de la somme (3). On peut maintenant calculer la somme restante sur s_1, s_3 comme suit :

$$\sum_{s_1, s_3} [\bar{u}_{p_3, s_3}(\gamma^\mu) u_{p_1, s_1}] [\bar{u}_{p_1, s_1}(\gamma^\sigma) u_{p_3, s_3}] = \text{Tr} \left(\gamma^\mu (p_{\lambda', 3} \gamma^{\lambda'} + m) \gamma^\sigma (p_{\xi', 1} \gamma^{\xi'} + m) \right)$$

$$= p_{\lambda', 3} p_{\xi', 1} \text{Tr} \left(\gamma^\mu \gamma^{\lambda'} \gamma^\sigma \gamma^{\xi'} \right) + m p_{\lambda', 3} \text{Tr} \left(\gamma^\mu \gamma^{\lambda'} \gamma^\sigma \right) + m p_{\xi', 1} \text{Tr} \left(\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^{\xi'} \right) + m^2 \text{Tr} \left(\gamma^\mu \gamma^\sigma \right)$$

$$= p_{\lambda', 3} p_{\xi', 1} \text{Tr} \left(\gamma^\mu \gamma^{\lambda'} \gamma^\sigma \gamma^{\xi'} \right) + m^2 \text{Tr} \left(\gamma^\mu \gamma^\sigma \right)$$

$$= 4 p_{\lambda', 3} p_{\xi', 1} \left(g^{\mu\lambda'} g^{\sigma\xi} - g^{\mu\sigma} g^{\lambda'\xi'} + g^{\mu\xi'} g^{\sigma\lambda'} \right) + 4 m^2 g^{\mu\sigma}. \quad (6)$$

En combinant (5) et (6), (3) devient

$$|\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2 = 4 \left[\frac{\pi\alpha}{(p_1 - p_3)^2} \right]^2$$

$$\times g_{\mu\nu} \left(4 p_{\lambda, 4} p_{\xi, 2} \left(g^{\nu\lambda} g^{\rho\xi} - g^{\nu\rho} g^{\lambda\xi} + g^{\nu\xi} g^{\rho\lambda} \right) + 4 M^2 g^{\nu\rho} \right)$$

$$\times g_{\sigma\rho} \left(4 p_{\lambda', 3} p_{\xi', 1} \left(g^{\mu\lambda'} g^{\sigma\xi} - g^{\mu\sigma} g^{\lambda'\xi'} + g^{\mu\xi'} g^{\sigma\lambda'} \right) + 4 m^2 g^{\mu\sigma} \right)$$

$$= 4^3 \left[\frac{\pi\alpha}{(p_1 - p_3)^2} \right]^2 \left(p_{\lambda, 4} p_{\xi, 2} \left(\delta_\mu^\lambda g^{\rho\xi} - \delta_\mu^\rho g^{\lambda\xi} + \delta_\mu^\xi g^{\rho\lambda} \right) + M^2 \delta_\mu^\rho \right) \times \left(p_{\lambda', 3} p_{\xi', 1} \left(g^{\mu\lambda'} \delta_\rho^{\xi'} - \delta_\rho^\mu g^{\lambda'\xi'} + g^{\mu\xi'} \delta_\rho^{\lambda'} \right) + m^2 \delta_\rho^\mu \right)$$

$$= 4^3 \left[\frac{\pi\alpha}{(p_1 - p_3)^2} \right]^2 \left(p_{\mu, 4} p_2^\rho - \delta_\mu^\rho p_4 \cdot p_2 + p_4^\rho p_{\mu, 2} + M^2 \delta_\mu^\rho \right) \times \left(p_3^\mu p_{\rho, 1} - p_3 \cdot p_1 \delta_\rho^\mu + p_{\rho, 3} p_1^\mu + m^2 \delta_\rho^\mu \right)$$

$$= 4^3 \left[\frac{\pi\alpha}{(p_1 - p_3)^2} \right]^2 \left((p_4 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_1) - (p_3 \cdot p_1)(p_2 \cdot p_4) + (p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) + m^2(p_2 \cdot p_4) \right.$$

$$\left. - (p_4 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_1) + 4(p_4 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_1) - (p_4 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_1) - 4m^2(p_4 \cdot p_2) \right.$$

$$\left. + (p_4 \cdot p_1)(p_2 \cdot p_3) - (p_4 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_1) + (p_4 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_1) + m^2(p_4 \cdot p_2) \right.$$

$$\left. + M^2(p_3 \cdot p_1) - 4M^2(p_3 \cdot p_1) + M^2(p_3 \cdot p_1) + 4M^2 m^2 \right)$$

$$= 8 \left[\frac{4\pi\alpha}{(p_1 - p_3)^2} \right]^2 \left((p_4 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_1) + (p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) - m^2(p_2 \cdot p_4) - M^2(p_1 \cdot p_3) + 2m^2 M^2 \right). \quad (7)$$

- (d) On se place maintenant dans le référentiel où le muon est au repos. On suppose que sa masse M est grande en comparaison avec l'énergie E d'un électron incident et on néglige le transfert d'énergie de l'électron au muon ($E \ll M$). Cela se traduit par $p_2 = p_4 = (M, \mathbf{0})$, $p_1 = (E, \mathbf{p}_1)$ et $p_3 = (E, \mathbf{p}_3)$ avec $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_3|$ où E , \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_3 sont respectivement l'énergie conservée de l'électron, sa quantité de mouvement initiale et sa quantité de mouvement finale. Dans le référentiel du muon, la section efficace différentielle de diffusion de l'électron incident est approximativement donnée par

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2 M |\mathbf{p}_1| (|\mathbf{p}_3| (E + M) - |\mathbf{p}_1| E \cos \theta)} \underset{|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_3|}{\approx} \frac{1}{(8\pi)^2 M (E(1 - \cos \theta) + M)} \underset{E \ll M}{\approx} \frac{1}{(8\pi)^2 M^2} |\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2 \quad (8)$$

où θ représente l'angle formé entre \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_3 . Pour préciser (8), il suffit d'évaluer (7) pour les quadri-impulsions spécifiques à la situation considérée. On a les éléments suivants :

$$\begin{aligned}
(p_1 - p_3)^2 &= (E - E, \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2 = -|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3|^2 = -|\mathbf{p}_1|^2 - |\mathbf{p}_3|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos(\theta) = -4|\mathbf{p}_1|^2 \frac{1 - \cos(\theta)}{2} = -4|\mathbf{p}_1|^2 \sin^2(\theta/2), \\
(p_4 \cdot p_2) &= (M, 0) \cdot (M, 0) = M^2, \quad (p_3 \cdot p_1) = (E, \mathbf{p}_3) \cdot (E, \mathbf{p}_1) = E^2 - |\mathbf{p}_3||\mathbf{p}_1|\cos(\theta) = E^2(1 - \beta^2 \cos(\theta)), \\
(\textcolor{red}{p}_4 \cdot \textcolor{red}{p}_3)(\textcolor{red}{p}_2 \cdot \textcolor{red}{p}_1) &= ((M, 0) \cdot (E, \mathbf{p}_3))((M, 0) \cdot (E, \mathbf{p}_1)) = (EM)^2, \\
(\textcolor{blue}{p}_4 \cdot \textcolor{blue}{p}_1)(\textcolor{blue}{p}_3 \cdot \textcolor{blue}{p}_2) &= ((M, 0) \cdot (E, \mathbf{p}_1))((E, \mathbf{p}_3) \cdot (M, 0)) = (EM)^2
\end{aligned} \tag{9}$$

où $\beta = |\mathbf{p}_1|/E$ est la grandeur de la vitesse de l'électron dans le référentiel du muon. En injectant les expressions (9) dans (7), on trouve

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|_{\text{tot}}^2 &= 8 \left[\frac{4\pi\alpha}{(p_1 - p_3)^2} \right]^2 ((EM)^2 + (EM)^2 - m^2 M^2 - (EM)^2(1 - \beta^2 \cos(\theta)) + 2m^2 M^2) \\
&= 8(EM)^2 \left[\frac{4\pi\alpha}{-4|\mathbf{p}_1|^2 \sin^2(\theta/2)} \right]^2 (2 - 1 + \beta^2 \cos(\theta) + 1 - \beta^2) \\
&= 8(EM)^2 \frac{\pi^2 \alpha^2}{|\mathbf{p}_1|^4 \sin^4(\theta/2)} \left(2 - 2\beta^2 \frac{1 - \cos(\theta)}{2} \right) = (EM)^2 \frac{(4\pi)^2 \alpha^2}{|\mathbf{p}_1|^4 \sin^4(\theta/2)} (1 - \beta^2 \sin(\theta/2))
\end{aligned} \tag{10}$$

où on a utilisé $m^2 = E^2 - |\mathbf{p}_2|^2 = E^2(1 - \beta^2)$. Finalement, la combinaison de (10) à (8) donne la section différentielle de diffusion

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{E^2 \alpha^2}{4|\mathbf{p}_1|^4 \sin^4(\theta/2)} (1 - \beta^2 \sin(\theta/2)). \tag{11}$$