Relativité générale, PHQ615: Devoir 1

Pierre-Antoine Graham

23 septembre 2022

Considérons un espace euclidien plat E à d-dimensions. L'espace est submergé dans un espace hôte de dimsenion $\mathbb{R}^{d+1}$ (cette submersion est toujours possible pour un espace plat). Soit la carte de coordonnées $u : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ qui envoie les points $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{d+1}$ de la sumbmersion à des coordonnées $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. L'application inverse u^{-1} permet d'écrire les composantes $[X_1, \cdots, X_{d+1}]$ de $\mathbf{X}$ dans une base *orthonormée* de $\mathbb{R}^{d+1}$ en fonction des coordonnées x^i. Sans perte de généralité pour un espace plat E, on pose que $X_{d+1} \equiv 0$.

Ignorant la composante nulle de $\mathbf{X}$, on peut interpréter u^{-1} comme une application $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ qui déforme la grille orthogonale de l'espace des coordonnées vers les points correspondant de $\mathbf{X}$. Cette application déforme le volume cubique $\mathrm{d}^d x = dx^1 \ \cdots \ dx^d$ vers un parallélotope. Les côtés du parallélotope sont données par le déplacement $d\mathbf{X} = \partial_i \mathbf{X} \mathrm{d}x^i$ dans l'espace hôte induit par une variation infinitésimale $\mathrm{d}x^i$ de la coordonnée x^i (gardant les autres coordonnées constantes). Le volume $\mathrm{d}V$ du parallélotope image de $\mathrm{d}^d x$ est donné par

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= \begin{vmatrix} \partial_1 X_1 & \cdots & \partial_d X_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 X_d & \cdots & \partial_d X_d \end{vmatrix} dx^1 \ \cdots \ dx^d \\
&= \left| \begin{bmatrix} \partial_1 X_1 & \cdots & \partial_d X_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 X_d & \cdots & \partial_d X_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 X_1 & \cdots & \partial_d X_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 X_d & \cdots & \partial_d X_d \end{bmatrix} \right|^{1/2} dx^1 \ \cdots \ dx^d \\
&= \left| \begin{bmatrix} \partial_1 \mathbf{X} \cdot \partial_1 \mathbf{X} & \cdots & \partial_1 \mathbf{X} \cdot \partial_d \mathbf{X} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_d \mathbf{X} \cdot \partial_1 \mathbf{X} & \cdots & \partial_d \mathbf{X} \cdot \partial_d \mathbf{X} \end{bmatrix} \right|^{1/2} dx^1 \ \cdots \ dx^d = \sqrt{g} dx^1 \ \cdots \ dx^d
\end{aligned}$$

où g est le déterminant du tenseur métrique $g_{ij} = \partial_i \mathbf{X} \cdot \partial_j \mathbf{X}$.

Soit le référentiel S associé à la base $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{t}\}$ donnant les coordonnées des évenements de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$. Les coordonnées des évenements dans S sont envoyés vers un second réferenciel S' associé à la base $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}', \hat{t}'\}$ avec un boost de rapidité ϕ dans la direction $\hat{x}$. L'action de ce boost laisse $\hat{z}$ invariant et, dans le sous-espace $\mathbb{R}^{2,1}$, il admet la representation matricielle

$$\Lambda_{\phi,\hat{x}} = \begin{bmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) & 0 \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Un second boost envoie les coordonnées de S' vers un dernier référenciel S'' avec un boost de rapidité ψ dans la direction $\hat{y}' = \hat{y}$. Ce boost preserve aussi $\hat{z}$ et sa representation matricielle dans le sous-espace $\mathbb{R}^{2,1}$ est

$$\Lambda_{\psi,\hat{y}'} = \begin{bmatrix} \cosh(\psi) & 0 & \sinh(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\psi) & 0 & \cosh(\psi) \end{bmatrix}.$$

Le passage de S à S'' est décrit par la transformation $M = \Lambda_{\psi,\hat{y}'}\Lambda_{\phi,\hat{x}}$ qui n'affecte globalement pas $\hat{z}$. On peut écrire M comme le rpoduit d'un boost Λ et d'une rotation dans le plan Oxy (seule plan de rotation laissant $\hat{z}$ invariant). La représentation matricielle de R^{-1} dans $\mathbb{R}^{2,1}$ est

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

. On cherche à extraire la rotation contenue dans M en y appliquant R^{-1}. La résultat est la representation matricielle de Λ qui s'écrit

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cosh(\phi)\cosh(\psi) & \sinh(\phi) & \sinh(\psi)\cosh(\phi) \\ -\sin(\theta)\sinh(\psi) + \cos(\theta)\sinh(\phi)\cosh(\psi) & \cos(\theta)\cosh(\phi) & -\sin(\theta)\cosh(\psi) + \cos(\theta)\sinh(\phi)\sinh(\psi) \\ \sin(\theta)\sinh(\phi)\cosh(\psi) + \cos(\theta)\sinh(\psi) & \sin(\theta)\cosh(\phi) & \sin(\theta)\sinh(\phi)\sinh(\psi) + \cos(\theta)\cosh(\psi) \end{bmatrix}$$

Puisque Λ est un boost pure par hypothese, sa representation matricielle doit être symétrique et cela impose la contrainte suivante sur θ :

$$\begin{aligned} & 0 = \sin(\theta)\cosh(\phi) + \sin(\theta)\cosh(\psi) - \cos(\theta)\sinh(\phi)\sinh(\psi) \\ & \implies \left[\cos(\theta) \neq 0 \;\&\; \tan(\theta) = \frac{\sinh(\psi)\sinh(\phi)}{\cosh(\psi) + \cosh(\phi)}\right] \quad \text{or} \quad [\cos(\theta) = 0 \;\&\; \cosh(\phi) + \cosh(\psi) \implies \emptyset] \end{aligned}$$

qui correspond à l'égalité ${\Lambda^0}_2 = {\Lambda^2}_0$. À première vue, 2 angles séparés par π satisfont la contrainte. En réalité, on peut combiner le fait que $\theta = 0$ est réalisé lorsque $\phi = 0$ ou $\psi = 0$ à la contrainte $\cos(\theta) \neq 0$ pour avoir $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ qui fixe une branche unique de l'inverse de tan (arctan). On a finalement

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sinh(\psi)\sinh(\phi)}{\cosh(\psi) + \cosh(\phi)}\right).$$

Soit l'immersion de la 2-sphère $\mathbb{S}^2$ de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$. Pour simplifier ce qui suit, on note S^2 l'ouvert de $\mathbb{S}^2$ auquel on a retiré les pôles et un demi grand cercle qui les connectes [1]. Considérons les projections stéréographiques

$$
\begin{aligned}
u_N &: S^2 \to]0, 2\pi[\times]0, \infty[, \\
u_S &: S^2 \to]0, 2\pi[\times]0, \infty[
\end{aligned}
$$

associant un point de S^2 à l'intersection avec le plan Oxy (donnée en coordonnée polaires (r, φ)) de la droite joignant le nord $(0, 0, 1)$ (resp. sud $(0, 0, -1)$) et ce point. Les applications $u_{N,S}$ constituent des cartes de surface de l'ouvert S^2 vers l'ouvert $]0, 2\pi[\times]0, \infty[$. À l'inverse

$$
\begin{aligned}
u_{N,S}^{-1} &:]0, 2\pi[\times]0, \infty[\to S^2, \\
(\varphi, r) &\mapsto \mathbf{X}(\varphi, r)
\end{aligned}
$$

permet de représenter les points de S^2 en fonction des coordonnées sur le plan Oxy. On a

$$
\mathbf{X} = \left(\frac{2r\cos\varphi}{r^2+1}, \frac{2r\sin\varphi}{r^2+1}, \frac{r^2-1}{r^2+1} \right).
$$

Le code qui suit permet de calculer la métrique, le symbol de christoffel, le tenseur de Riemann, de Ricci et le courbure de Ricci. Il en résulte les représentations matricielles

$$
\begin{aligned}
[g_{ij}] &= \begin{bmatrix} \frac{4}{(r^2+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4r^2}{(r^2+1)^2} \end{bmatrix}, \\
[\Gamma^k_{ij}] &= \left[\begin{bmatrix} -\frac{2r}{r^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{r^3-r}{r^2+1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-r^2}{r^3+r} \\ \frac{1-r^2}{r^3+r} & 0 \end{bmatrix} \right], \\
[R^i_{jkl}] &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{4r^2}{r^4+2r^2+1} \\ -\frac{4r^2}{r^4+2r^2+1} & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{r^4+2r^2+1} \\ \frac{4}{r^4+2r^2+1} & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \\
[R_{ij}] &= \begin{bmatrix} \frac{4}{r^4+2r^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{4r^2}{r^4+2r^2+1} \end{bmatrix}, \\
R &= 2.
\end{aligned}
$$

```python
#%%
from sympy import *
from sympy import Array
from IPython.display import display

init_printing()

r, phi = symbols(r'r \varphi')
coords = Array([r,phi])
X =  Array([2 * r * cos(phi), 2 * r * sin(phi), r**2 - 1])/(r**2 + 1)
dX = derive_by_array(X, coords).simplify()

# Metrique
gd = tensorcontraction(tensorproduct(dX, dX), (1, 3)).simplify()
```

1. On exclue le nord et le sud, car l'un est envoyé à ∞ et l'autre est envoyé à l'origine de Oxy qui n'est pas représentée en coordonnées polaires. De plus, par définition, une carte de surface est une aplications entre ouverts. Dans la topologie standart sur $\mathbb{R}^2$ la paramétrisation en coordonnées polaires n'est un ouvert que si elle exclue l'angle 0 et 2π. Cela impose le retrait de l'arc de grand cercle connectant les pôles dans l'ensemble des points représentés par $u_{N,S}$

```

# Metrique inverse
gu = Array([[1/gd[0, 0], 0], [0, 1/gd[1, 1]]])

# Symbole Christoffel
dg = derive_by_array(gd, coords)

gammad = (permutedims(dg,(2,0,1)) + permutedims(dg,(2,1,0))-dg)/2

gamma = tensorcontraction(tensorproduct(gu, gammad), (1,2)).simplify()

# Tenseur de Riemann
dgamma = derive_by_array(gamma, coords).simplify()

gg = tensorcontraction(tensorproduct(gamma, gamma), (0,4)).simplify()

Riemann = (
    permutedims(dgamma,(1,2,0,3))
    - permutedims(dgamma,(1,2,3,0))
    + permutedims(gg,(2,0,3,1))
    - permutedims(gg,(2,0,1,3))
).simplify()


# Tenseur de Ricci
Ricci = tensorcontraction(Riemann, (0, 2)).simplify()

# Scalaire de Ricci
R = tensorcontraction(tensorproduct(gu, Ricci), (0, 2), (1, 3)).simplify()

# Display
display(gd, gu, gamma, Riemann, Ricci, R)

# %%
```

En appliquant successivement u_N^{-1} et u_S, on produit l'application de changement de carte

$$u_S \circ u_N^{-1} :]0, 2\pi[\times]0, \infty[\to]0, 2\pi[\times]0, \infty[,$$
$$(\varphi, r) \mapsto (\varphi', r').$$

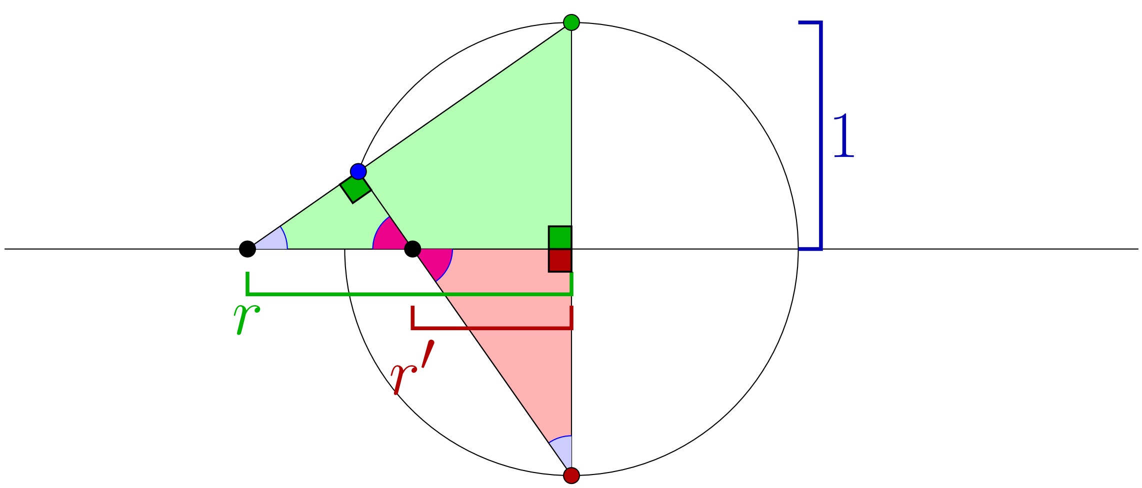

Figure 1 – Représentation de l'application de transition entre les cartes u_N et u_S dans un plan quelconque contenant N et S.

Puisqu'une projection stéréographique à partir du pôle nord et du pôle sud impliquent des droites du même plan contenant N et S, on a $\varphi = \varphi'$. La relation entre r et r' peut être établie avec la figure 1. Le pôle nord et sud sont respectivement représentés par les points vert et rouge. Le point projeté est représenté en bleu. En comparant les triangles rouge et vert, on constate que tous les angles de couleurs identiques sont identiques : les triangles sont semblables. Cette similitude permet d'établir l'égalité du rapport des côtés correspondant et on a

$$\frac{r}{1} = \frac{1}{r'}$$

qui permet finalement d'écrire

$$u_S \circ u_N^{-1} : (\varphi, r) \mapsto (\varphi, 1/r).$$

L'application de changement de carte $u_S \circ u_N^{-1}$ est différentiable partout sauf en $r = 0$ qui n'est pas inclu dans la représentation en coordonnées polaires. On a donc montré qu'il existe une application différentiable en tout point pour lié les cartes de surface (qui ont exactement la même image dans $\mathbb{R}^2$). En coordonnées polaires, les deux projections stéréographiques considérées ne forment pas un atlas, mais sont consistantes avec le fait que $\mathbb{S}^2$ est une variété différentiable. Pour montrer que $\mathbb{S}^2$ est une variété différentiable avec les deux projections, il faudrait utiliser un système de coordonnées cartésiennes qui ne présentent pas les mêmes limitations que les coordonnées polaires. Pour la projection à partir du pôle nord (resp. sud) le seule point de $\mathbb{S}^2$ à exclure pour avoir une application entre des ouverts serait le pôle nord (resp. sud). Les deux projections permetteraient alors de représenter chaque point de la surface, car l'union de leur domaines serait $\mathbb{S}^2$. En charchant l'application de transition entre leur image, on retrouverait l'équivalent de $u_S \circ u_N^{-1}$ en coordonnées cartésiennes. Cette application de transition entre les cartes serait encrore différentiable partout sur son domaine qui serait, cette fois, le plan Oxy sans l'origine. Effectivement, le domaine de l'application de transition est l'image de l'intersection des domaines de u_N et u_S soit l'image de $\mathbb{S}^2$ sans pôles. Comme l'origine n'intervient pas, la divergence de $u_S \circ u_N^{-1}$ n'affecte pas sa différentiabilité sur son domaine. Toutes les (2) cartes de l'atlas cartésien étant lié par une application différentiable, on peut conclure que $\mathbb{S}^2$ est une variété différentiable.