PHQ 615 : DEVOIR no 1
remettre le 23 septembre 2022

Problème 1 : Tenseur métrique et élément de volume
Supposons que les coordonnées spatiales x^i soient définies relativement à une base quelconque $\{\mathbf{e}_i\}$ ($i = 1,2,3$). Montrez que l'élément de volume, indépendant de la base, est donné par

$$d^3x\,\sqrt{g} \tag{1}$$

où $g \coloneqq \det(g_{ij})$ est le déterminant du tenseur métrique.

Problème 2 : Composition des transformations de Lorentz
Considérons trois référentiels : S, S' et S''. On passe de S à S' à l'aide d'une transformation de Lorentz simple de vitesse u dans la direction x. De même, on passe de S' à S'' à l'aide d'une transformation de Lorentz simple de vitesse v dans la direction y. Montrez que la transformation qui nous fait passer directement de S à S'' est le produit d'une transformation de Lorentz simple et d'une rotation. Déterminer l'axe et l'angle de cette rotation.
Indice : Construisez les matrices associées aux deux transformations de Lorentz (notées $\boldsymbol{\Lambda}_u$ et $\boldsymbol{\Lambda}_v$), ainsi que leur produit $\boldsymbol{\Lambda}_v\boldsymbol{\Lambda}_u$. Multipliez le résultat par une matrice de rotation $R(\theta)$ d'angle θ dans le plan approprié et déterminez l'angle θ pour que le produit $R\boldsymbol{\Lambda}_v\boldsymbol{\Lambda}_u$ ne comporte aucune rotation. Utilisez l'expression des transformations de Lorentz en fonction des rapidités et procédez à un calcul symbolique.

Problème 3 : Coordonnées stéréographiques sur la sphère

A Partez de l'expression suivante pour les coordonnées cartésiennes de la sphère en fonction des coordonnées stéréographiques (r,φ) :

$$\mathbf{X} = \left(\frac{2r\cos\varphi}{r^2+1}, \frac{2r\sin\varphi}{r^2+1}, \frac{r^2-1}{r^2+1}\right)$$

et calculez les quantités suivantes : (1) le tenseur métrique, (2) la connexion affine, (3) le tenseur de Riemann, (4) le tenseur de Ricci et (5) la courbure scalaire. Vous devez remettre cette partie du travail sous la forme d'un carnet python qui peut être imprimé ou transmis via Moodle.

B Les coordonnées stéréographiques telles que définies ci-dessus sont inadéquates pour décrire le pôle nord : ce point unique de la sphère correspond à $r \to \infty$ et à toutes les valeurs de φ. Par contre, on pourrait définir la projection stéréographique à partir du pôle sud au lieu du pôle nord et utiliser des coordonnées stéréographiques différentes (r', φ) qui, à leur tour, seraient inadéquates pour décrire le pôle sud. C'est un exemple de la nécessité de deux *cartes* pour décrire la sphère au complet. Le passage d'une carte à l'autre, c'est-à-dire la relation mathématique entre r et r', doit être différentiable dans une région commune aux deux cartes pour qu'on puisse parler ici de *variété différentiable*. Trouvez cette relation et commentez.