

ФОРМАЛЬНЫЕ ЯЗЫКИ

Домашнее задание №12

Громов Павел

25 мая 2020 г.

Задание 1

Условие: построить однозначную КС грамматику, эквивалентную грамматике $S \rightarrow aSbbbb \mid aaaSbb \mid c$.

Решение: заметим, что в данном случае порядок не важен. И зададим порядок для применения правил: сначала только $aSbbbb$, потом только $aaaSbb$, и в конце c .

Теперь следует проверить однозначность (посчитаем определитель матрицы. Если не 0, то существует единственное решение).

$$\begin{cases} n + 3 \cdot m = v \\ 4 \cdot n + 2 \cdot m = u \end{cases}$$

$\det = -10$, следовательно решение существует и оно единственное. Найдем его:

$$\begin{cases} 10 \cdot m = 4 \cdot v - u & (\text{домножим первое на 4 вычтем второе}) \\ 10 \cdot n = 3 \cdot u - 2 \cdot v & (\text{домножим первое на 2, а второе на 3 и вычтем первое из второго}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = \frac{4 \cdot v - u}{10} \\ n = \frac{3 \cdot u - 2 \cdot v}{10} \end{cases}$$

Задание 2

Условие: описать язык, порождаемый грамматикой $F \rightarrow \epsilon \mid aFaFbF$

Примечание: $\langle \rangle$ приведены для того, чтобы выделить символы.

Решение: у нас имеется язык, заменим в нем $\langle a \rangle$ на одну открывающую скобку $\langle (\rangle$, а $\langle b \rangle$ на две закрывающие скобки $\langle) \rangle$.

Получим: $F \rightarrow \epsilon \mid (F(F))F$. Таким образом, все скобки идут парами, и получили правильную скобочную последовательность. ПСП - это язык Дика, а язык Дика - это КС. Отличие от языка Дика в том, мы можем подниматься вверх на 1 единицу, а спускаться на 2.

Получаем, что язык является контекстно-свободным. Слова состоят только из $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$, где $\langle a \rangle$ встречается в 2 раза чаще. Слово может быть либо пустым, либо шаблона $a...b$, то есть начинается на $\langle a \rangle$, в конце будет только $\langle b \rangle$.

Задание 3

Условие: определить, является ли следующий язык контекстно-свободным. Если является - привести КС грамматику, если нет - доказать.

1. $\{a^n b^m c^n d^m \mid n > 0, m > 0\}$

Решение: рассмотрим слово: $W = a^n b^m c^n d^m \in L$, где $n > p$, p - константа из леммы о накачке. По лемме у нас должно выполняться: $W = xy^k zv^k u$.

Рассмотрим случаи:

- (а) Первый случай, когда yzv лежит только в одной части: $a^n a^i b^m c^n d^m$. Получаем: $a^{n+i} b^m c^n d^m$, рассмотрим a^{n+i} и c^n , можем заметить, что степени получились разные, получили другой язык. Для остальных случаев, когда yzv лежит только в одной части аналогично.
- (б) Второй случай: когда yzv лежит в двух частях. Рассмотрим такой пример: $a^n a^i b^j b^m c^n d^m$. Получили $a^{n+i} b^{j+m} c^n d^m$, и снова видим разницу в показателях степеней и получили новый язык.

Таким образом, исходный язык не контекстно-свободный.

2. $\{w \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Решение: рассмотрим слово: $W = a^n b^n a^n b^n \in L$, где $n > p$, p - константа из леммы о накачке. По лемме у нас должно выполняться: $W = xy^k zv^k u$.

Воспользуемся леммой о накачке и рассмотрим несколько случаев:

- (a) Рассмотрим случай, когда yzv лежит в одной части. Предположим, что $|yzv| < p$, тогда получим $a^n a^i b^n a^n b^n$. Можем заметить, что нарушается симметричность, следовательно мы получили другой язык. Точно такие же доказательства, если рассмотрим остальные случаи (когда yzv лежит внутри других частей).
- (b) Второй случай, когда yzv лежит не в одной части, а в двух соседних частях. Рассмотрим для самого первого, получим: $a^n a^i b^j b^n a^n b^n$ ($a^{n+i} b^{j+n} a^n b^n$), где также нарушается симметричность. Для остальных случаев тоже самое.

Следовательно, данный язык не контекстно-свободный.

3. $\{a^k b^m b^{(k+l)} a^m \mid n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\}$

Решение: КС грамматика для данного языка

$$S \rightarrow LMR$$

$$L \rightarrow aLb \mid \epsilon$$

$$R \rightarrow bRa \mid \epsilon$$

$$M \rightarrow Mb \mid \epsilon$$