1) Функции нескольких переменных.

**функцией нескольких переменных** http://mathprofi.ru/m/funkcija_dvuh_peremennyh_oblast_opredelenija_linii_urovnja_clip_image004.gif, где http://mathprofi.ru/m/funkcija_dvuh_peremennyh_oblast_opredelenija_linii_urovnja_clip_image006.gif – аргументы или независимые переменные. Начнём разработку темы с наиболее распространенной на практике функции двух переменных http://mathprofi.ru/m/funkcija_dvuh_peremennyh_oblast_opredelenija_linii_urovnja_clip_image008.gif.

**Функцией двух переменных** называется закон, по которому каждой паре значений независимых переменных http://mathprofi.ru/m/funkcija_dvuh_peremennyh_oblast_opredelenija_linii_urovnja_clip_image010.gif (аргументов) из области определения соответствует значение зависимой переменной http://mathprofi.ru/m/funkcija_dvuh_peremennyh_oblast_opredelenija_linii_urovnja_clip_image012.gif (функции).

Данную функцию обозначают следующим образом:

http://mathprofi.ru/m/funkcija_dvuh_peremennyh_oblast_opredelenija_linii_urovnja_clip_image014.gif либо http://mathprofi.ru/m/funkcija_dvuh_peremennyh_oblast_opredelenija_linii_urovnja_clip_image016.gif

**Областью определения функции двух переменных** http://mathprofi.ru/m/funkcija_dvuh_peremennyh_oblast_opredelenija_linii_urovnja_clip_image014_0001.gif называется множество всех пар http://mathprofi.ru/m/funkcija_dvuh_peremennyh_oblast_opredelenija_linii_urovnja_clip_image026_0000.gif, для которых существует значение http://mathprofi.ru/m/funkcija_dvuh_peremennyh_oblast_opredelenija_linii_urovnja_clip_image012_0000.gif.

**ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ**

**Определение 1.** Число *А* называется пределом функции http://ios.sseu.ru/public/eresmat/course1/prakt1/razdpr1_7/teo1_7_3.files/image002.gif в точке http://ios.sseu.ru/public/eresmat/course1/prakt1/razdpr1_7/teo1_7_3.files/image004.gif (или при http://ios.sseu.ru/public/eresmat/course1/prakt1/razdpr1_7/teo1_7_3.files/image006.gif и http://ios.sseu.ru/public/eresmat/course1/prakt1/razdpr1_7/teo1_7_3.files/image008.gif), если для любого сколь угодно малого положительного числа http://ios.sseu.ru/public/eresmat/course1/prakt1/razdpr1_7/teo1_7_3.files/image010.gif найдется положительное число http://ios.sseu.ru/public/eresmat/course1/prakt1/razdpr1_7/teo1_7_3.files/image012.gif такое, что для всех точек http://ios.sseu.ru/public/eresmat/course1/prakt1/razdpr1_7/teo1_7_3.files/image014.gif, отстоящих от точки http://ios.sseu.ru/public/eresmat/course1/prakt1/razdpr1_7/teo1_7_3.files/image004.gif на расстояние, меньшее чем http://ios.sseu.ru/public/eresmat/course1/prakt1/razdpr1_7/teo1_7_3.files/image012.gif, выполняется неравенство

http://ios.sseu.ru/public/eresmat/course1/prakt1/razdpr1_7/teo1_7_3.files/image018.gif.

Обозначается предел http://ios.sseu.ru/public/eresmat/course1/prakt1/razdpr1_7/teo1_7_3.files/image020.gif.

**Определение 2.**Функция http://ios.sseu.ru/public/eresmat/course1/prakt1/razdpr1_7/teo1_7_3.files/image002.gif называется непрерывной в точке http://ios.sseu.ru/public/eresmat/course1/prakt1/razdpr1_7/teo1_7_3.files/image004.gif, если предел функции в этой точке существует и http://ios.sseu.ru/public/eresmat/course1/prakt1/razdpr1_7/teo1_7_3.files/image024.gif.

Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются точками разрыва.

На функции нескольких переменных переносятся все свойства и методы теории пределов функции одной переменной.

2)**Свойства функции, непрерывной в ограниченной замкнутой области** http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_02_html_2ccdb806.gif**.**

*Определение функции двух переменных, непрерывной в точке:*

Функция http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_02_html_6ac649a6.gif называется непрерывной в http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_02_html_m10fc6a65.gif, если выполняются три условия:

1)Она определена в http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_02_html_1843f6a4.gif и некоторой её окрестности.

2)Если существует предел http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_02_html_11e2af15.gif

3)Если http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_02_html_795e3844.gif

Функция http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_02_html_6ac649a6.gif непрерывна в области http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_02_html_86dfb40.gif, если она непрерывна в каждой точке этой области.

*Свойства функций, непрерывных в ограниченной замкнутой области*http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_02_html_m63ade12c.gif*:*

http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_02_html_f99a00e.gif - является ограниченной в ограниченной замкнутой области http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_02_html_m43144428.gif

2)http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_02_html_m7270e8ba.gif достигает в ограниченной замкнутой области http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_02_html_m43144428.gif своих наибольшего и наименьшего значений.

*3) http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_02_html_m187e740e.gif принимает хотя бы в одной точке этой области любой промежуточное значение между http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_02_html_m33a2f895.gif.*

***3)*** Частные производные.

*Определение частной производной функции двух переменных:*

Частной производной функции http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_03_html_6ac649a6.gif по одному из её аргументов называется предел отношения частного приращения функции по этому аргументу к приращению этого аргумента, при условии что приращение http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_03_html_7a698bbf.gif.

http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_03_html_7a637713.gif

http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_03_html_24a0e31f.gif

*Пример:*

http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_03_html_m471efb19.gif

http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_03_html_m2e51063b.gif

http://itm-x18.narod.ru/sem3/math_e3/3_03_html_m7abf9ae2.gif

***Необходимое условие дифференцируемости***:

**Теорема** Если функция *u* = *f*(*x*1, *x*2,  … , *xn*) дифференцируема в точке *a* , то в этой точке существуют частные производные по каждому аргументу *x*1,  … , *xn* , причем

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  | | --- | --- | --- | | |  | | --- | | ∂*u* | | ∂*xk* |     (*a*) = *Ak*, | |  |

Из этой теоремы следует, что приращение дифференцируемой функции можно записать в виде

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Δ*u* =   |  | | --- | | ∂*u* | | ∂*x*1 |    (*a*) Δ*x*1 + … +   |  | | --- | | ∂*u* | | ∂*xn* |    (*a*) Δ*xn* + *α*1 Δ*x*1 + *α*2 Δ*x*2 + … +*αn* Δ*xn* | |  |

и ее дифференциал

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | *du*(*a*) =   |  | | --- | | ∂*u* | | ∂*x*1 |    (*a*) Δ*x*1 + … +   |  | | --- | | ∂*u* | | ∂*xn* |   (*a*) Δ*xn*. | |

4) **Достаточное условие дифференцируемости**:

**Теорема.** Если функция u = f(x) имеет в окрестности точки a частные производные, непрерывные в этой точке, то f(x) дифференцируема в точке a .

Достаточное условие дифференцируемости функ- ции в терминах частных производных.

Теорема. Пусть функция z = f(x, y) в некоторой окрестности точки (x0, y0) имеет частные производные ∂z/∂x и ∂z/∂y, которые непрерывны в самой точке (x0, y0). Тогда функция z = f(x, y) дифференцируема в этой точке.

Доказательство. Пусть S(δ) — δ окрестность точки (x0, y0), в которой определена вместе со своими частными производными f 0 x и f 0 y функция f. Выберем ∆x и ∆y так, чтобы (x0 + ∆x, y0 + ∆y) ∈ S(δ). Замечая, что ∆z = f(x0 + ∆x, y0 + ∆y) − f(x0, y0) = = [f(x0 + ∆x, y0 + ∆y) − f(x0, y0 + ∆y)] + [f(x0, y0 + ∆y) − f(x0, y0)] , применим к выражениям, стоящим в квадратных скобках и являющимися приращениями функции только по одной переменной, формулу Лагранжа. ∆z = f 0 x (x0 + θ1∆x, y0 + ∆y)∆x + f 0 y (x0, y0 + θ2∆y)∆y, (8) где 0 < θ1, θ2 < 1, причем θ1 и θ2 зависят, конечно, от ∆x и ∆y. Если положить f 0 x (x0 + θ1∆x, y0 + ∆y) − f 0 x (x0, y0) = ε1, f 0 y (x0, y0 + θ2∆y) − f 0 y (x0, y0) = ε2, (9) то, в силу непрерывности частных производных f 0 x и f 0 y в точке (x0, y0), имеем lim ρ→0 ε1 = lim ρ→0 ε2 = 0. (10) Подставляя (9) в (8) получаем ∆z = f 0 x (x0, y0)∆x + f 0 y (x0, y0)∆y + ε1∆x + ε2∆y, что в силу выполнения условия (10), и означает дифференцируемость функ- ции f в точке (x0, y0).

5) **Дифференциал функции двух переменных**

Пусть функция z = f(x,y), имеет в точке М0(х0,у0) частные производные f /x (х0,у0) и f /у (х0,у0).

**Определение.** Полным приращением функции z = f(x,y) в точке М0(х0,у0) называется **разность**

1

1

Пусть приращение функции z =f(x,y) можно представить в виде

1

где , то функция называется дифференцируемой в точке M 0 (х0,у0).

**О.** Полным дифференциалом функции z=f(x,y) называется главная часть полного приращения  1  , линейная относительно приращений её аргументов 1. Полный дифференциал функции (если он существует) равен сумме всех ее частных дифференциалов и вычисляется по формуле:

1

При достаточно малых (по абсолютному значению) приращениях аргументов, полное приращение функции можно с как угодно малой относительной погрешностью заменить ее полным дифференциалом. Дифференциалы dх и dy независимых аргументов функции х и у совпадают с их приращениями соответственно  1  . Таким образом,

1

6) **Сложная функция** – это функция, аргументом которой также является функция.

С нашей точки зрения, это определение наиболее понятно. Условно можно обозначать как *f(g(x))*. То есть, *g(x)* как бы аргумент функции *f(g(x))*.

К примеру, пусть *f* – функция арктангенса, а *g(x) = lnx* есть функция натурального логарифма, тогда сложная функция *f(g(x))* представляет собой *arctg(lnx)*. Еще пример: *f* – функция возведения в четвертую степень, а формула - целая рациональная функция (смотрите [классификацию элементарных функций](http://www.cleverstudents.ru/functions/elementary_functions_classification.html)), тогда формула.

В свою очередь, *g(x)* также может быть сложной функцией. Например, формула. Условно такое выражение можно обозначить как формула. Здесь *f* – функция синуса, формула - функция извлечения квадратного корня, формула - дробная рациональная функция. Логично предположить, что степень вложенности функций может быть любым конечным натуральным числом формула.

Часто можно слышать, что сложную функцию называют **композицией функций.**

**Формула нахождения производной сложной функции.**  
формула производной сложной функции

7) Производная функции, заданной неявно

Или короче – производная неявной функции. Что такое неявная функция? Давайте сначала вспомним само [**определение функции одной переменной**](http://mathprofi.ru/mnozhestva.html):

**Функция одной переменной**http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image002.gif –это правило, по которому каждому значению независимой переменной http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image004.gif соответствует одно и только одно значение функции http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image006.gif.

Переменная **http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image004_0000.gif**называется **независимой переменной** или **аргументом**.  
Переменная http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image006_0000.gif называется **зависимой переменной** или **функцией**.

До сих пор мы рассматривали функции, заданные в *явном* виде. Что это значит? Устроим разбор полётов на конкретных примерах.

Рассмотрим функцию http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image008.gif

Мы видим, что слева у нас одинокий «игрек», а справа – **только «иксы»**. То есть, функция http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image006_0001.gif **в явном виде** выражена через независимую переменную http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image004_0001.gif.

http://mathprofi.ru/g/proizvodnye_neyavnoi_parametricheskoi_funkcii_clip_image012_0001.gif – пример **неявной функции**.

*Касательная плоскость и нормаль к поверхности.*

*Касательная плоскость к поверхности в её точке* http://mschool.kubsu.ru/math1/primer7/image148.gif*(точка касания) есть плоскость, проходящая через* http://mschool.kubsu.ru/math1/primer7/image148.gif*и содержащая в себе все касательные, проведённые в точке* http://mschool.kubsu.ru/math1/primer7/image148.gif*ко всевозможным кривым, проведённым на поверхности через точку*http://mschool.kubsu.ru/math1/primer7/image149.gif

*Нормалью к поверхности в точке* http://mschool.kubsu.ru/math1/primer7/image148.gif*называется прямая, проходящая через точку*http://mschool.kubsu.ru/math1/primer7/image148.gif *и перпендикулярная к касательной плоскости, проведённой в этой точке.*

*Если уравнение поверхности имеет вид****F(x, y, z)=0****, то уравнение касательной плоскости в точке*http://mschool.kubsu.ru/math1/primer7/image150.gif *имеет вид:*

http://mschool.kubsu.ru/math1/primer7/image151.gif

*Уравнение нормали к этой поверхности в точке*http://mschool.kubsu.ru/math1/primer7/image152.gif *есть*

http://mschool.kubsu.ru/math1/primer7/image154.gif

*В случае явного задания поверхности уравнением*(8.1)*и*(8.2)*примут вид*



8) **Экстремум функции двух переменных**

|  |
| --- |
|  |
| Функция http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image256.gif имеет *максимум (минимум)* в точке http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image258.gif, если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение в любой другой точке http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image260.gif некоторой окрестности точки http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image262.gif, то есть http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image264.gif (соответственно http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image266.gif) для всех точек http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image267.gif, принадлежащих этой окрестности. Максимум и минимум функции называется ее экстремумом. Точка http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image268.gif, в которой функция имеет экстремум, называется *точкой экстремума*.  *Необходимое* условие экстремума: если дифференцируемая функция http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image269.gif достигает экстремума в точке http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image270.gif, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, то есть: http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image272.gif, http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image274.gif.  Точки, в которых частные производные равны нулю, называются стационарными точками. Стационарные точки и точки, в которых производные не существуют и которые лежат внутри области определения функции, называются *критическими точками*. Не всякая критическая точка является точкой экстремума.  *Достаточное условие* существования экстремума:  Пусть http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image275.gif стационарная точка функции http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image276.gif. Обозначим http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image278.gif, http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image280.gif, http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image282.gif и составим дискриминант http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image284.gif. Тогда:  если http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image286.gif, то функция имеет в точке http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image287.gif экстремум, а именно максимум, при http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image289.gif (или http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image291.gif) и минимум, при http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image293.gif (или http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image295.gif);  если http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image297.gif, то в точке http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image298.gif экстремума нет;  если http://abc.vvsu.ru/books/u_functions/obj.files/image300.gif, то требуется дальнейшее исследование (сомнительный случай). |

9) ***Определение двойного интеграла***

Понятие интеграла может быть расширено на функции двух и большего числа переменных. Рассмотрим, например, функцию двух переменных z=f(x,y). Двойной интеграл от функции f(x,y) обозначается как

∬Rf(x,y)dA,

где R - область интегрирования в плоскости Oxy. Если определенный интеграл ∫abf(x)dx от функции одной переменной f(x)≥0 выражает площадь под кривой f(x) в интервале от x=a до x=b, то двойной интеграл выражает объем под поверхностью z=f(x,y) выше плоскости Oxy в области интегрирования R

***Свойства двойного интеграла***

Двойной интеграл обладает следующими свойствами:

∬R[f(x,y)+g(x,y)]dA=∬Rf(x,y)dA+∬Rg(x,y)dA;

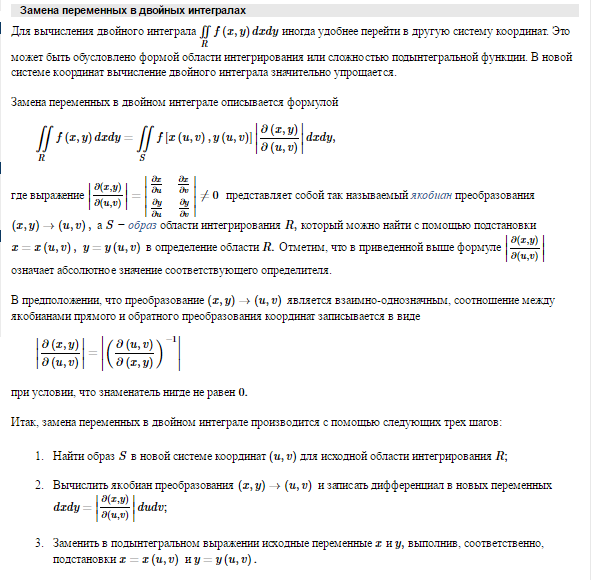
∬R[f(x,y)−g(x,y)]dA=∬Rf(x,y)dA−∬Rg(x,y)dA;

∬Rkf(x,y)dA=k∬Rf(x,y)dA, где k - константа;

Если f(x,y)≤g(x,y) в области R, то ∬Rf(x,y)dA≤∬Rg(x,y)dA;

Если f(x,y)≥0 в области R и S⊂R (рисунок 4), то ∬Sf(x,y)dA≤∬Rf(x,y)dA;

10) Замена переменных в двойном интеграле.



|  |
| --- |
| **Двойной интеграл в полярной системе координат** |
| |  | | --- | | picture-2.8-01Пусть на плоскости ***Оху*** одновременно введена и полярная система координат ***Orφ***  ***Оp*** — полярная ось, которая совпадает с осью ***Ох***;  ***φ*** — полярный угол;  ***r*** — полярный радиус точки ***М***.  Тогда, как известно:  formula-2.8-01 | |

11) Комплексные числа и действия над ними в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Если хотите, комплексное число – это двумерное число. Оно имеет вид http://mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image008.gif, где http://mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image010.gif и http://mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image012.gif – действительные числа, http://mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image014.gif – так называемая мнимая единица. Число http://mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image010_0000.gif называетсядействительной частью (*http://mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image016.gif*)комплексного числа http://mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image006_0000.gif, число http://mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image012_0000.gif называется мнимой частью (*http://mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image019.gif*) комплексного числа http://mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image006_0001.gif.

http://mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image021.gif – это ЕДИНОЕ  ЧИСЛО, а не сложение. Действительную и мнимую части комплексного числа, в принципе, можно переставить местами: http://mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image023.gif или переставить мнимую единицу: http://mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image025.gif – от этого комплексное число не изменится. **Но стандартно комплексное число принято записывать именно в таком порядке**:  http://mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image008_0000.gif

**Формы записи комплексного числа**

Алгебраическая форма комплексного числа

Запись [комплексного числа](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_16_1.php) http://www.webmath.ru/poleznoe/images/complex_numbers/formules_3843.png в виде http://www.webmath.ru/poleznoe/images/complex_numbers/formules_3783.png, где http://www.webmath.ru/poleznoe/images/complex_numbers/formules_3785.png и http://www.webmath.ru/poleznoe/images/complex_numbers/formules_3787.png - действительные числа, называется **алгебраической формой**комплексного числа.

**Например.** http://www.webmath.ru/poleznoe/images/complex_numbers/formules_3862.png

Подробнее о данной форме записи комплексных чисел по [ссылке →](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_16_5.php)

Тригонометрическая форма комплексного числа

Если http://www.webmath.ru/poleznoe/images/complex_numbers/formules_3863.png - [модуль комплексного числа](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_16_2.php) http://www.webmath.ru/poleznoe/images/complex_numbers/formules_3783.png, а http://www.webmath.ru/poleznoe/images/complex_numbers/formules_3829.png - его аргумент, то **тригонометрической формой**комплексного числа http://www.webmath.ru/poleznoe/images/complex_numbers/formules_3843.png называется выражение

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/complex_numbers/formules_3864.png

**Показательной формой** комплексного числа http://www.webmath.ru/poleznoe/images/complex_numbers/formules_3783.png называется выражение

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/complex_numbers/formules_3871.png

12) Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение — это уравнение, в котором свзяны между собой переменные, постоянные коэффициенты, искомая функция и производные от функции любого порядка. При этом максимальный порядок производной функции, который присутствует в уравнении, определяет порядок всего дифференциального уравнения. Решить диф уравнение - это определить искомую функцию, как зависимость от переменной.

**Дифференциальное уравнение** первого порядка в общем случае **содержит**:   
1) независимую переменную http://mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image010.gif;  
2) зависимую переменную http://mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image012.gif (функцию);  
3) первую производную функции: http://mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image014.gif.

В некоторых уравнениях 1-го порядка может отсутствовать «икс» или (и) «игрек», но это не существенно – **важно** чтобы в ДУ **была** первая производная http://mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image014_0000.gif, и **не было** производных высших порядков – http://mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image016.gif, http://mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image018.gif и т.д.

**Что значит решить дифференциальное уравнение?**Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти **множество всех функций**, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций часто имеет вид http://mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image700.gif ( http://mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image038.gif– произвольная постоянная), который называется **общим решением дифференциального уравнения**.

Виды

Однородное уравнение y’ = fi(y/x) (замена x = yU, x’ = U +yU’)

Уравнение с разделяющимися переменными y’ = f(x) \* g(y)

Линейное неоднородное http://mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image002.gif

Уравнение бернулли y’ = P(x)y = Q(x)y^n (замена y = UV, y’ = U’V \* UV’)

Уравнение в полных дифференциалах

**Зада́ча Коши́** — одна из основных **задач** теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными); состоит в нахождении решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего так называемым начальным условиям (начальным данным).

13) Уравнения, допускающие понижения порядка

I вид) y^(n) = f(x) – применяется n – кратное интегрирование

II вид) ур – я не содержащие y

(x,y’,y’’,…,y^(n)) = 0

Y -> младшую производную

Замена y’ = p(x)

III вид) не содержащие независимую переменную x

F(y,y’,y’’) = 0

X нет, следовательно младшая производная заменяется на y’ = p(y)

U’’ = p’(y) \* y’ = p’ \* p

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

y′′+py′+qy=0,

где p,q − постоянные коэффициенты.   
  
Для каждого такого дифференциального уравнения можно записать так называемое *характеристическое уравнение*:

k2+pk+q=0.

Обшее решение однородного дифференциального уравнения зависит от корней характеристического уравнения, которое в данном случае будет являться квадратным уравнением. Возможны следующие случаи:

Дискриминант характеристического квадратного уравнения положителен: D>0. Тогда корни характеристического уравнения k1 и k2 действительны и различны. В этом случае общее решение описывается функцией

y(x)=C1e^K1x+C2e^k2x,

где C1 и C2 − произвольные действительные числа.

Дискриминант характеристического квадратного уравнения равен нулю: D=0. Тогда корни действительны и равны. В этом случае говорят, что существует один корень k1 второго порядка. Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид:

y(x)=(C1x+C2)e^k1x.

Дискриминант характеристического квадратного уравнения отрицателен: D<0. Такое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни k1=α+βi,k2=α−βi. Общее решение записывается в виде

y(x)=e^αx[C1cos(βx)+C2sin(βx)].

**Лине́йное** отображе́ние, **лине́йный опера́тор** — обобщение **линейной**числовой функции (точнее, функции ) на случай более общего множества аргументов и значений.

Пусть заданы линейные пространства [Graphics:1.gif] и [Graphics:2.gif]. Правило, по которому  каждому элементу [Graphics:3.gif]ставится в соответствие единственный элемент [Graphics:4.gif], называется *оператором*, действующим в линейных пространствах [Graphics:5.gif]. Результат  действия оператора [Graphics:6.gif] на элемент [Graphics:7.gif] обозначают [Graphics:8.gif] или [Graphics:9.gif]. Если элементы [Graphics:10.gif] и [Graphics:11.gif] связаны соотношением [Graphics:12.gif], то [Graphics:13.gif]называют *образом* элемента [Graphics:14.gif]; элемент [Graphics:15.gif] *прообразом* элемента [Graphics:16.gif].

14) необходимые условия линейной зависимости системы функций

Теорема

Y1, y2 … yn – n зависимость это определитель вронского = 0 в любой точке a,b

Доказательство

Если система функций линейно зависима, то хотя бы 1 из них можно выразить через все остальные, тогда во ВРОНСИАНЕ соответствующий столбец будет линейной комбинацией остальных

A1y1 + A2y2+…+Anyn = 0 зависима на все A1,A2…An = 0, где A – альфа

Y1 = -C2y2 – C3y3 – Cnyn

W(определитель вронского) = -c2y2 – c3y3-...-cnyn

Y2 y2

… …

Yn yn

Вывод: если y1,y2…yn – решение линейного однородного ур-я, то составленный для них определитель вронского либо тождественно равен 0 либо не равен 0

Теорема о структуре общего решения.

Пусть дано диф ур-е

y^(n) + p1y^(n-1) + p2y^(n-2) + … + pny = 0

где p1…pn – непрерывные функции и пусть y1,y2…yn линейные независимые решения этого ур – я, тогда:

y = C1y1 + C2y2 + … + Cnyn является общим решением исходного ур –я a C1, C2 … Cn постоянная произвольная

Доказательство

Проверим выполнения двух условий общего решения диф ур-я n-го порядка т.к. y = C1y1 + C2y2 + … + Cnyn

По 3 свойству линейного оператора это условие выполнено, т.е. при подстановки y в исходное ур –е получаем тождество ч.т.д

15) Решение линейных однородных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами (3 случая).

**Однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами** имеет следующий вид:  
http://mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image017.gif, где http://mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image019.gif и http://mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image021.gif – константы (числа), а в правой части – **строго** ноль.

[**Неоднородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами**](http://mathprofi.ru/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka.html)имеет вид:  
http://mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image023.gif, где http://mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image019_0000.gif и http://mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image021_0000.gif – константы, а http://mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image025.gif – функция, зависящая только от «икс». В простейшем случае функция http://mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image025_0000.gif может быть числом, отличным от нуля.

В зависимости от коэффициентов *p* и *q* корни характеристического уравнения могут быть:

действительными и различными формула,

действительными и совпадающими формула,

комплексно сопряженной парой формула.

**В первом случае** линейно независимыми частными решениями исходного дифференциального уравнения являются формула и формула, общее решение ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами есть формула.

Функции формула и формула действительно линейно независимы

**Во втором случае** одним частным решением является функция формула. В качестве второго частного решения берется формула.

**В третьем случае** имеем пару комплексных частных решений ЛОДУ формула и формула. Общее решение запишется как формула. Эти частные решения могут быть заменены двумя действительными функциями формула и формула, соответствующими действительной и мнимой частям.

16) Линейные неоднородные уравнения.

Линейное неоднородное уравнение данного типа имеет вид:

y′′+py′+qy=f(x),

где p,q − постоянные числа (которые могут быть как действительными, так и комплексными). Для каждого такого уравнения можно записать соответствующее *однородное уравнение*:

y′′+py′+qy=0.

**Алгоритм решения неоднородного ДУ следующий:**

1) Сначала нужно **найти общее решение соответствующего однородного уравнения**. Да-да, взять уравнение http://mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image002_0001.gif, откинуть правую часть: http://mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image004_0001.gif – и найти общее решение.

2) Необходимо **найти какое-либо частное решение**http://mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image009.gif **неоднородного уравнения**. Сделать это можно так называемым способом **подбора частного решения** с применением [**метода неопределенных коэффициентов**](http://mathprofi.ru/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii.html).

3) На третьем этапе надо **составить общее решение**http://mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image011.gif**неоднородного уравнения**. Это совсем легко: http://mathprofi.ru/h/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka_clip_image013.gif. Совершенно верно – следует просто приплюсовать завоёванные трофеи.

Если изначально в условии сформулирована задача Коши (найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям), то добавляется четвёртый этап:

4) Нахождение частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. В случае с неоднородным диффуром принципы нахождения частного решения сохраняются.

*Теорема*: Общее решение неоднородного уравнения является суммой общего решения y0(x) соответствуюшего однородного уравнения и частного решения y1(x) неоднородного уравнения:

y(x)=y0(x)+y1(x).

17) ***Метод вариации постоянных***

Если общее решение y0 ассоциированного однородного уравнения известно, то общее решение неоднородного уравнения можно найти, используя *метод вариации постоянных*.

Пусть общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид:

y0(x)=C1Y1(x)+C2Y2(x).

Вместо постоянных C1 и C2 будем рассматривать вспомогательные функции C1(x) и C2(x). Будем искать эти функции такими, чтобы решение

y=C1(x)Y1(x)+C2(x)Y2(x)

удовлетворяло неоднородному уравнению с правой частью f(x).

Неизвестные функции C1(x) и C2(x) определяются из системы двух уравнений:

{C′1(x)Y1(x)+C′2(x)Y2(x)=0C′1(x)Y′1(x)+C′2(x)Y′2(x)=f(x).

18) Неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

1) f(x) = e^(r\*X) \* Pn(x), где Pn(x) – многочлен n – ной степени

Y’’ + P1y’ + P2y = f(x) = e^(r \* x) \* Pn

Будем искать решение в виде   
|y = e^(r \* x) \* Qn(x), где Qn(x) – многочлен той же степени, что и многочлен в правой части

|y’ = r \* e^(r \* x) \* Qn(x) + e^(r \* x) \* Qn(x)

|y’’ = r^2 \* e^(r \* x) \* Qn(x) + e(r \* x)\*Qn’(x) + r\*e^(r \* x) \* Qn’(x) + e^(r \* x) \* Qn’’(x)

Подставим полученное выражение в уравнение

r^2 \* e^(r \* x) \* Qn(x) + 2\*r \* e^(r \*x) \* Qn’(x) + e^(r \* x) \* Qn’’(x) + P1\*r\*e^(r\*x)\*Qn(x) + P1\*e^(r\*x)\*Qn’(x) + P2\*e^(rx)\*Qn(x) = e^(rx)\*Pn(x) |e^(rx)

Qn’’(x) + (2r + P1)\*Q’n(x) + (r^2 + P1r+ P2)Qn(x) = Pn(x)

Возможный 3 случая

1) r не корень характеристического уравнения

R^2 + P1R + P2 = 0

Т.е . методом неопределенных коэффициентов можно найти все коэффициенты многочлена слева.

2) r простой корень ур-я

R^2+ P1r + P2 = 0

|y = x\*e^(rx)\*Qn(x)

Таким образом многочлены справа и слева станут одинаковых степеней

3) r кратности 2

|y = x^2 + e^(rx)\*Qn(x)