

# Проект по Небесна механика

**Изготвил: Мартин Анев**

студент в

Софийски Университет „Св. Климент Охридски“

ФМИ, Специалност: Информационни системи

**ФН:71232**

## Съдържание

|  |               |
|--|---------------|
| <u>Задача 1</u>                            | <u>стр.3</u>  |
| <u>Кеплерови елементи</u>                  | <u>стр.4</u>  |
| <u>Задача 2</u>                            | <u>стр.7</u>  |
| <u>Функции за реализиране на решенията</u> | <u>стр.11</u> |

## Задача 1: Пресметнете координатите и скоростите на планетите в деня, в който сте родени

Предварителна информация:

Орбитата на планетата зависи от 6 елемента (в задачата на Кеплер):

**a** - дължина на голямата полуос,

**e** - ексцентрицитет,

**i** - наклонение на плоскостта на орбитата,

**l** - средна аномалия, (**l**0 е средната аномалия в момента **t**0),

**g + θ** - дължина на перихелия,

**θ** - дължина на възела.

Пет от тези елементи са константи, единствено средната аномалия **l** е линейна функция на времето **t**.

Допълнителен елемент е ексцентричната аномалия **u**; в сила е уравнението на Кеплер

$$l = u - e \sin u$$

Ексцентрицитетът **e** характеризира сплеснатостта на елипсата:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in [0, 1) , \text{ където } b \text{ е дължината на малката полуос}$$

Връзката на елиптичните елементи с декартовите координати в  $R^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos g & -\sin g & 0 \\ \sin g & \cos g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Кеплерови елементи и техните стойности, взети от

[http://ssd.jpl.nasa.gov/txt/aprx\\_pos\\_planets.pdf](http://ssd.jpl.nasa.gov/txt/aprx_pos_planets.pdf)

|         | $\frac{a}{\text{AU}}$ | $\frac{e}{\text{rad}}$ | $\frac{I}{\text{deg}}$ | $\frac{L}{\text{deg}}$ | long.peri.<br>deg | long.node.<br>deg |
|---------|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------|-------------------|
|         | AU, AU/Cy             | rad, rad/Cy            | deg, deg/Cy            | deg, deg/Cy            | deg, deg/Cy       | deg, deg/Cy       |
| Mercury | 0.38709927            | 0.20563593             | 7.00497902             | 252.25032350           | 77.45779628       | 48.33076593       |
|         | 0.00000037            | 0.00001906             | -0.00594749            | 149472.67411175        | 0.16047689        | -0.12534081       |
| Venus   | 0.72333566            | 0.00677672             | 3.39467605             | 181.97909950           | 131.60246718      | 76.67984255       |
|         | 0.00000390            | -0.00004107            | -0.00078890            | 58517.81538729         | 0.00268329        | -0.27769418       |
| EM Bary | 1.00000261            | 0.01671123             | -0.00001531            | 100.46457166           | 102.93768193      | 0.0               |
|         | 0.00000562            | -0.00004392            | -0.01294668            | 35999.37244981         | 0.32327364        | 0.0               |
| Mars    | 1.52371034            | 0.09339410             | 1.84969142             | -4.55343205            | -23.94362959      | 49.55953891       |
|         | 0.00001847            | 0.00007882             | -0.00813131            | 19140.30268499         | 0.44441088        | -0.29257343       |
| Jupiter | 5.20288700            | 0.04838624             | 1.30439695             | 34.39644051            | 14.72847983       | 100.47390909      |
|         | -0.00011607           | -0.00013253            | -0.00183714            | 3034.74612775          | 0.21252668        | 0.20469106        |
| Saturn  | 9.53667594            | 0.05386179             | 2.48599187             | 49.95424423            | 92.59887831       | 113.66242448      |
|         | -0.00125060           | -0.00050991            | 0.00193609             | 1222.49362201          | -0.41897216       | -0.28867794       |
| Uranus  | 19.18916464           | 0.04725744             | 0.77263783             | 313.23810451           | 170.95427630      | 74.01692503       |
|         | -0.00196176           | -0.00004397            | -0.00242939            | 428.48202785           | 0.40805281        | 0.04240589        |
| Neptune | 30.06992276           | 0.00859048             | 1.77004347             | -55.12002969           | 44.96476227       | 131.78422574      |
|         | 0.00026291            | 0.00005105             | 0.00035372             | 218.45945325           | -0.32241464       | -0.00508664       |
| Pluto   | 39.48211675           | 0.24882730             | 17.14001206            | 238.92903833           | 224.06891629      | 110.30393684      |
|         | -0.00031596           | 0.00005170             | 0.00004818             | 145.20780515           | -0.04062942       | -0.01183482       |

След това обръщаме  $\theta$  ,  $g + \theta$  в Радиани (\* $\pi/180$ )

Обръщаме  $i$  в градуси (\* $\pi/180$ )

Ст-тите на  $\mu$  за планетите

|          | $\mu$       |
|----------|-------------|
| Меркурий | 1/6023600   |
| Венера   | 1/408523    |
| Земя     | 1/328900.5  |
| Марс     | 1/3098708   |
| Юпитер   | 1/1047.34   |
| Сатурн   | 1/3497.8    |
| Уран     | 1/22902.9   |
| Нептун   | 1/19402     |
| Плутон   | 1/135000000 |

$\gamma = 1 + \mu$ , където  $\gamma = Gm_A = 6.670 \cdot 10^{-8} \frac{sm^3}{g \cdot sec^2}$  е гравитационна константа

$$n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}$$

Величината  $n$  наричаме средно движение; То е момента на преминаване през перихелия на планета (начало на епоха). Връзката между средната и ексцентрична аномалии

$l = u - e \cdot \sin(u)$  наричаме уравнение на Кеплер.

Въвеждаме  $t$  - времето от рождената дата до 2000г.

(Рождена дата: 24.11.1990г. =>  $t = 9.10335$ )

От решението на задачата на Кеплер в декартови координати:

$$l = \sqrt{\gamma} a^{-\frac{3}{2}} (T - T_0)$$

$$\Rightarrow l = n \cdot (t(2\pi) - T_0) = u - e \cdot \sin(u)$$

$$u = l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l)))$$

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \cdot a \cdot (\cos(u) - e; \sin(u); \sqrt{1 - e^2}; 0)$$

$$v = Q \cdot \frac{(-\sin(u); \cos(u) \cdot \sqrt{1 - e^2}; 0) \cdot a \cdot n}{1 - e \cdot \cos(u)}$$

Където  $Q$  е от Основна формула на сферичната тригонометрия  
(Теорема. Всяка матрица  $Q \in SO(3, R)$  може да се представи аналитично  
във вида:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos g & -\sin g & 0 \\ \sin g & \cos g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Ротация на ъгъл  $\theta$  около оста  $Oz$       ротация на ъгъл  $i$  около оста  $Ox$       ротация на ъгъл  $g$  около оста  $Oz$

=

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \cos g - \sin\theta \sin g \cos i & -\cos\theta \sin g - \sin\theta \cos g \cos i & \sin\theta \sin i \\ \sin\theta \cos g + \cos\theta \sin g \cos i & -\sin\theta \sin g + \cos\theta \cos g \cos i & -\cos\theta \sin i \\ \sin g \sin i & \cos g \sin i & \cos i \end{pmatrix}$$

където  $\theta, g \in [0, 2\pi)$  и  $i \in [0, \pi]$

Описаните процедури се повтарят за всяка планета поотделно.

### **Краен резултат:**

|            | Меркурий | Венера  | Земя    | Марс    | Юпитер  | Сатурн  | Уран     | Нептун   | Плутон   |
|------------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|----------|
| <b>r</b>   | 0.2277   | -0.2272 | 0.4628  | 0.6951  | -2.8951 | 4.3984  | 3.1796   | 7.4043   | -20.502  |
|            | -0.3701  | -0.6873 | 0.8727  | 1.3294  | 4.403   | -8.9646 | -19.1726 | -29.2569 | -21.1252 |
|            | -0.0154  | -0.0428 | 0       | 0.0472  | 0.1105  | -0.433  | -0.2366  | -0.8266  | -3.9164  |
| <b>v</b>   | 1.065    | 1.1115  | -0.8992 | -0.6904 | -0.3723 | 0.274   | 0.2238   | 0.1757   | 0.1454   |
|            | 0.9229   | -0.3734 | 0.465   | 0.4464  | -0.2208 | 0.1421  | 0.0268   | 0.0458   | -0.1339  |
|            | 0.1717   | -0.0064 | 0       | -0.0035 | -0.0034 | 0.0009  | 0.0012   | -0.0026  | -0.0543  |
| <b> r </b> | 0.43484  | 0.72516 | 0.98779 | 1.5009  | 5.2707  | 9.9949  | 19.4359  | 30.1906  | 29.6976  |
| <b> v </b> | 1.4197   | 1.1726  | 1.0123  | 0.82215 | 0.4329  | 0.30865 | 0.22537  | 0.18163  | 0.20498  |

## Задача 2: Пресметнете елементите на Делоне и Поанкаре (от първи и втори вид) в деня, в който сте родени

От Теорема: Елементите на Делоне –  $L, G, \Theta, l, g, \theta$ , където  $(l, L)$ ,  $(G, g)$  и  $(\Theta, \theta)$  са спрегнати канонични променливи, се изразяват чрез орбиталните елементи:

**a** - дължина на голямата полуос,

**e** - ексцентрицитет,

**i** - наклонение на плоскостта на орбитата,

**l** - средна аномалия, ( $l_0$  е средната аномалия в момента  $t_0$ ),

**g +  $\theta$**  - дължина на перихелия,

**$\theta$**  - дължина на възела.

Както следва:

$$L = \mu \sqrt{\gamma \cdot a}$$

$$G = \mu \cdot \sqrt{\gamma \cdot a(1 - e^2)} = L \cdot \sqrt{(1 - e^2)}$$

$$\Theta = \mu \cdot \sqrt{\gamma \cdot a(1 - e^2)} \cos i = G \cdot \cos i$$

Като при това  $l, g$  и  $\theta$  съвпадат и в двата случая.

Елементите на Делоне –  $L, G, \Theta, l, g, \theta$  са константи с хамилтони:

$$\hat{H} = - \frac{\mu^3 \gamma^2}{2L^2}$$

Обръщаме  $\theta$  в радиани (\* $\pi/180$ )

Обръщаме  $i$  в градуси (\* $\pi/180$ )

То е момента на преминаване през перихелия на планета (начало на епоха).

$$l = \sqrt{\gamma} \cdot a^{-\frac{3}{2}}(t - T_0)$$

$$u = e \cdot \sin(u)$$

$$u = l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l + e \cdot \sin(l)))$$

$$n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}$$

Въвеждаме  $t$  = времето от рождената дата до 2000г.

(Рождена дата: 24.11.1990г. =>  $t = 9.10335$ )

$$l = n \cdot (t(2\pi) - T_0)$$

И чрез  $\lambda = l + g + \theta$  (дължина на епохата) ще можем да изразим елементите от двете системи на Поанкаре, и по-точно:

Първа система от шест елемента, характеризираща орбитите на планетите:

|            |                |              |
|------------|----------------|--------------|
| $L,$       | $L - G,$       | $G - \Theta$ |
| $\lambda,$ | $-g - \theta,$ | $-\theta$    |

И втора система:

|      |  |  |
|------|--|--|
| $L,$ | $\xi := \sqrt{2(L - G)} \cos(g + \theta),$ | $p := \sqrt{2(G - \Theta)} \cos(\theta)$ |
|------|--|--|

|            |  |   |
|------------|--|---|
| $\lambda,$ | $\eta := -\sqrt{2(L - G)} \sin(g + \theta),$ | $q := -\sqrt{2(G - \Theta)} \sin(\theta)$ |
|------------|--|---|

Описаните процедури се повтарят за всяка планета поотделно.

И получаваме следната таблица:



|                                     | Меркурий    |                 |                 | Венера      |                 |                 | Земя        |                 |            |
|-------------------------------------|-------------|-----------------|-----------------|-------------|-----------------|-----------------|-------------|-----------------|------------|
| L                                   | 1.0328E-07  |                 |                 | 2.0814E-06  |                 |                 | 3.0404E-06  |                 |            |
| G                                   | 1.0108E-07  |                 |                 | 2.0814E-06  |                 |                 | 3.0400E-06  |                 |            |
| Θ                                   | 1.0033E-07  |                 |                 | 2.0777E-06  |                 |                 | 3.0400E-06  |                 |            |
| I                                   | 2.4063E+02  |                 |                 | 9.3920E+01  |                 |                 | 5.7155E+01  |                 |            |
| g                                   | 5.0840E-01  |                 |                 | 9.5860E-01  |                 |                 | 1.7966E+00  |                 |            |
| θ                                   | 8.4350E-01  |                 |                 | 1.3383E+00  |                 |                 | 0.0000E+00  |                 |            |
| H                                   | -2.1449E-07 |                 |                 | -1.6928E-06 |                 |                 | -1.5202E-06 |                 |            |
| Първа<br>с-ма<br>на<br>Поанк<br>аре | 6.2210E-01  | 1.3200E-02      | 4.5000E-03      | 8.5030E-01  | 1.5305E-05      | 1.5000E-03      | 1.0000E+00  | 1.2801E-04      | 0.0000E+00 |
|                                     | 4.4026E+00  | -<br>1.3519E+00 | -<br>8.4350E-01 | 3.1761E+00  | -<br>2.2969E+00 | -<br>1.3383E+00 | 1.7534E+00  | -<br>1.7966E+00 | 0.0000E+00 |
| Втора<br>с-ма<br>на<br>Поанк<br>аре | 6.2210E-01  | 1.4384E-05      | 2.5823E-05      | 8.5030E-01  | 5.7473E-06      | 1.9688E-05      | 1.0000E+00  | 6.2462E-06      | 0.0000E+00 |
|                                     | 4.4026E+00  | -<br>6.4652E-05 | -<br>2.9014E-05 | 3.1761E+00  | -<br>6.4729E-06 | -<br>8.3148E-05 | 1.7534E+00  | -<br>2.7192E-05 | 0.0000E+00 |

|                                     | Марс            |                 |                 | Юпитер      |                 |                 | Сатурн      |                 |                 |
|-------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------|-----------------|-----------------|-------------|-----------------|-----------------|
| L                                   | 3.9826E-07      |                 |                 | 2.2000E-03  |                 |                 | 8.8298E-04  |                 |                 |
| G                                   | 3.9654E-07      |                 |                 | 2.2000E-03  |                 |                 | 8.8174E-04  |                 |                 |
| Θ                                   | 3.9633E-07      |                 |                 | 2.2000E-03  |                 |                 | 8.8091E-04  |                 |                 |
| I                                   | 3.0771E+01      |                 |                 | 5.1641E+00  |                 |                 | 1.1981E+00  |                 |                 |
| g                                   | -1.2829E+00     |                 |                 | -1.4965E+00 |                 |                 | -3.6760E-01 |                 |                 |
| θ                                   | 8.6500E-01      |                 |                 | 1.7536E+00  |                 |                 | 1.9838E+00  |                 |                 |
| H                                   | -1.0595E-07     |                 |                 | -9.1860E-05 |                 |                 | -1.4995E-05 |                 |                 |
| Първа<br>с-ма<br>на<br>Поанк<br>аре | 1.2341E+00      | 5.3000E-03      | 6.3977E-04      | 2.2808E+00  | 2.6000E-03      | 5.8999E-04      | 3.0880E+00  | 4.3000E-03      | 2.9000E-03      |
|                                     | -<br>7.9500E-02 | -<br>4.1790E-01 | -<br>8.6500E-01 | 6.0030E-01  | -<br>2.5710E-01 | -<br>1.7536E+00 | 8.7190E-01  | -<br>1.6161E+00 | -<br>1.9838E+00 |
| Втора<br>с-ма<br>на<br>Поанк<br>аре | 1.2341E+00      | 5.3698E-05      | 1.3181E-05      | 2.2808E+00  | 2.2000E-03      | 1.9299E-04      | 3.0880E+00  | 7.1412E-05      | 5.1684E-04      |
|                                     | -<br>7.9500E-02 | -<br>2.3844E-05 | -<br>1.5466E-05 | 6.0030E-01  | -<br>5.6977E-04 | -<br>1.0000E-03 | 8.7190E-01  | -<br>1.6000E-03 | -<br>1.2000E-03 |

| Уран                            |                |                     |                     | Нептун              |                     |                     | Плутон              |                     |                     |
|---------------------------------|----------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| L                               | 1.9127E-04     |                     |                     | 2.8263E-04          |                     |                     | 4.6544E-08          |                     |                     |
| G                               | 1.9106E-04     |                     |                     | 2.8262E-04          |                     |                     | 4.5090E-08          |                     |                     |
| Θ                               | 1.9104E-04     |                     |                     | 2.8249E-04          |                     |                     | 4.3088E-08          |                     |                     |
| I                               | 3.1638E+00     |                     |                     | -1.3999E+00         |                     |                     | 4.8990E-01          |                     |                     |
| g                               | 1.6919E+00     |                     |                     | -1.5153E+00         |                     |                     | 1.9856E+00          |                     |                     |
| θ                               | 1.2918E+00     |                     |                     | 2.3001E+00          |                     |                     | 1.9252E+00          |                     |                     |
| H                               | -1.1377E-06    |                     |                     | -8.5709E-07         |                     |                     | -9.3807E-11         |                     |                     |
| Първа<br>с-ма<br>на<br>Поанкаре | 4.3805E<br>+00 | 4.8000E<br>-03      | 3.9719E<br>-04      | 5.4835E<br>+00      | 1.7548E<br>-04      | 2.6000E<br>-03      | 6.2835E<br>+00      | 1.9630E<br>-01      | 2.7030E<br>-01      |
|                                 | 5.4670E<br>+00 | -<br>2.9837E<br>+00 | -<br>1.2918E<br>+00 | -<br>9.6200E<br>-01 | -<br>7.8480E<br>-01 | -<br>2.3001E<br>+00 | -<br>4.1701E<br>+00 | -<br>3.9107E<br>+00 | -<br>1.9252E<br>+00 |
| Втора<br>с-ма<br>на<br>Поанкаре | 4.3805E<br>+00 | -<br>6.4210E<br>-04 | -<br>5.1285E<br>-05 | -<br>5.4835E<br>+00 | -<br>9.5162E<br>-05 | -<br>3.4604E<br>-04 | -<br>6.2835E<br>+00 | -<br>3.8747E<br>-05 | -<br>2.1959E<br>-05 |
|                                 | 5.4670E<br>+00 | -<br>1.0223E<br>-04 | -<br>1.7904E<br>-04 | -<br>9.6200E<br>-01 | -<br>9.5042E<br>-05 | -<br>3.8724E<br>-04 | -<br>4.1701E<br>+00 | -<br>3.7507E<br>-05 | -<br>5.9354E<br>-05 |

## **Функции за реализиране на решенията:**

### **Функции за Задача 1:**

Дефиниране на функцията "zad1"

```
function res = zad1(a, e, i, L, w, Omega, miu, t)

    tita = Omega*pi/180;
    g = (w - Omega)*pi/180;
    i = i*pi/180;
    Tita = [ cos(tita) , -sin(tita), 0 ;
            sin(tita) , cos(tita), 0 ;
            0      , 0      , 1 ] ;
    I = [ cos(i) , 0 , -sin(i) ;
         0      , 1 , 0      ;
         sin(i) , 0 , cos(i) ] ;
    G = [ cos(g) , -sin(g) , 0 ;
         sin(g) , cos(g) , 0 ;
         0      , 0      , 1 ] ;
    Q = Tita*I*G;
    gama = 1 + miu;
    n = sqrt(gama/a^3);
    to = ((w - L)/n)*pi/180;
    l = n*(-t^2*pi - to);
    u = l + e*sin(l + e*sin(l + e*sin(l)));

    r = Q*a*[cos(u)-e ; sin(u)*sqrt(1-e^2) ; 0 ]
```

```

v = Q*[-sin(u);cos(u)*sqrt(1-e^2);0]*a*n/(1-e*cos(u))

disp(['|r|=',num2str(norm(r))])

end

```

Дефиниране на функция "Zad11"

```

function res=zad11(d)

my_time=9.103353867214237;

zad1(d(1),d(2),d(3),d(4),d(5),d(6),d(7),my_time)

end

```

Дефиниране на функция „pusk“

```

d=[0.387 0.205 7.004 252.250 77.457 48.330 1/6023600;
    0.723 0.006 3.394 181.979 131.602 76.679 1/408523;
    1 0.016 0 100.464 102.937 0 1/328900.5;
    1.523 0.093 1.849 -4.553 -23.943 49.559 1/3098708;
    5.202 0.048 1.304 34.396 14.728 100.473 1/1047.34;
    9.536 0.053 2.485 49.954 92.598 113.662 1/3497.8;
    19.189 0.047 0.772 313.238 170.954 74.016 1/22902.9;
    30.069 0.008 1.770 -55.120 44.964 131.784 1/19402;
    39.482 0.248 17.140 238.929 224.068 110.303
    1/135000000];
for i=1:9
    disp(['planeta ',num2str(i)])
    zad11(d(i,:))
end

```

## **Функции за задача 2:**

Дефиниране на функция „elements”

```
function res = elements(a, e, i, L, w, Omega, miu,t)

i = i*pi/180;
n = sqrt(1/a^3);
to = ((w - L)/n)*pi/180;
gama = 1 + miu;
EL=miu*sqrt(gama*a)
GE=EL*sqrt(1-e^2)
TITADEBELA=GE*cos(i)
l = n*(t*2*pi - to)
g = (w - Omega)*pi/180
tita = Omega*pi/180
H=-miu*gama/(2*a)
P11=sqrt(a)
P12=(EL-GE)
P13=(GE-TITADEBELA)
P14=L*pi/180
P15=-g-tita
P16=-tita
P21=P11
P22=sqrt(2*(EL-GE))*cos(g+tita)
P23=sqrt(2*(GE-TITADEBELA))*cos(tita)
P24=P14
```

```

P25=-sqrt(2*(EL-GE))*sin(g+tita)
P26=-sqrt(2*(GE-TITADEBELA))*sin(tita)
end

```

Дефиниране на функция „puskelements”

```

d=[0.387 0.205 7.004 252.250 77.457 48.330 1/6023600;
    0.723 0.006 3.394 181.979 131.602 76.679 1/408523;
    1 0.016 0 100.464 102.937 0 1/328900.5;
    1.523 0.093 1.849 -4.553 -23.943 49.559 1/3098708;
    5.202 0.048 1.304 34.396 14.728 100.473 1/1047.34;
    9.536 0.053 2.485 49.954 92.598 113.662 1/3497.8;
    19.189 0.047 0.772 313.238 170.954 74.016 1/22902.9;
    30.069 0.008 1.770 -55.120 44.964 131.784 1/19402;
    39.482 0.248 17.140 238.929 224.068 110.303
    1/135000000];
my_time=9.103353867214237;
for k=1:9
    disp(['planeta ',num2str(k)])

    elements(d(k,1),d(k,2),d(k,3),d(k,4),d(k,5),d(k,6),d(k,7),my_time)
end

```