

Секулярни пертурбации на ексцентритетите и дължините на перихелиите

От миналата тема получихме системата от 16 диференциални уравнения за ексцентричните променливи

$$\left| \begin{aligned} \dot{\xi}_s &= \sum_{j \neq s} \frac{\mathcal{G}m_s m_j}{L_s L_j} \left[\frac{B_1(a_s, a_j)}{2} \frac{\eta_s}{L_s} - \frac{B_2(a_s, a_j)}{2} \frac{\eta_j}{\sqrt{L_s L_j}} \right] \\ \dot{\eta}_s &= - \sum_{j \neq s} \frac{\mathcal{G}m_s m_j}{L_s L_j} \left[\frac{B_1(a_s, a_j)}{2} \frac{\xi_s}{L_s} - \frac{B_2(a_s, a_j)}{2} \frac{\xi_j}{\sqrt{L_s L_j}} \right] \end{aligned} \right|$$

за $s, j = 1, \dots, 8$. Тази система представяме във вида:

$$\left| \begin{aligned} \dot{\xi} &= Q\eta, \\ \dot{\eta} &= -Q\xi, \end{aligned} \right|$$

където $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_8)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_8)$. Елементите на матрицата Q са

$$\begin{aligned} Q_{sj} &= Q_{js} = \frac{\mathcal{G}m_s m_j}{2L_s L_j \sqrt{L_s L_j}} B_2(a_s, a_j) & \text{за } j \neq s, \\ Q_{ss} &= \sum_{j \neq s} \frac{\mathcal{G}m_s m_j}{2L_j (L_s)^2} B_1(a_s, a_j) & \text{за } j = s. \end{aligned}$$

Матрицата Q е симетрична ($Q = Q^t$) и следователно можем да я диагонализираме: $Q = SJS^{-1}$, $J = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_8)$ е диагонална.

В случая се оказва, че всички диагонални елементи са различни и $\alpha_j > 0$, следователно началната система добива вида:

$$\left| \begin{aligned} S^{-1}\dot{\xi} &= J(S^{-1}\eta), \\ S^{-1}\dot{\eta} &= -J(S^{-1}\xi), \end{aligned} \right|$$

Получихме, че системата се разпада на 8 системи с по две независими уравнения от първи ред всяка:

$$\left| \begin{aligned} (S^{-1}\dot{\xi})_s &= \alpha_s (S^{-1}\eta)_s, \\ (S^{-1}\dot{\eta})_s &= -\alpha_s (S^{-1}\xi)_s, \end{aligned} \right|$$

за $s = 1, \dots, 8$.

От това, че

$$\begin{aligned}\xi_s &= \sqrt{L_s} \cdot e_s \cos(\theta_s + g_s), \\ \eta_s &= -\sqrt{L_s} \cdot e_s \sin(\theta_s + g_s)\end{aligned}$$

следва, че решението на изходната система има вида:

$$\begin{cases} e_s \cos(\theta_s + g_s) = K_{s0} \cos(\alpha_0 t + \beta_0) + \dots + K_{s8} \cos(\alpha_8 t + \beta_8), \\ e_s \sin(\theta_s + g_s) = K_{s0} \sin(\alpha_0 t + \beta_0) + \dots + K_{s8} \sin(\alpha_8 t + \beta_8), \end{cases}$$

където K_{sj} и β_j за $j = 1, \dots, 8$ са константи, зависещи от началните условия на изходната система.

Резултати на Стокуел относно секулярните пертурбации на ексцентрицитетите и перихелиите на големите планети от Слънчевата система

В своите изследвания (1870), Stockwell изключва Слънцето и получава следните конкретни стойности за константите K_{sj} , α_j и β_j . Въз основа на тях заключаваме, че всеки едон от ексцентрицитетите e_j се мени в съответните граници. Максимално възможният ексцентрицитет за някоя от планетите е $e_{mercury} = 0.231718$.

От друга страна, всяка една от елипсите се мени бавно. С изключение на Земята и Марс, останалите елипси се въртят (по посока, обратна на часовниковата стрелка) бавно, т.е имат средно движение. Това движение е периодично с период, например за Нептун равен на 2 101 559 години.

Таблица 1

$\alpha_s, \quad s = \overline{0, 8}$	$\beta_s, \quad s = \overline{0, 8}$	Меркурий	Венера	Земя
$\alpha_1 = 5''463$	$\beta_1 = 88^\circ 0'38''$	$K_{1,*} + 0,1766$	+0.0085	+0.0054
$\alpha_2 = 7''248$	$\beta_2 = 20^\circ 50'19''$	$K_{2,*} + 0.0268$	-0.0201	-0.0153
$\alpha_3 = 17''014$	$\beta_3 = 335^\circ 11'31''$	$K_{3,*} + 0.0014$	-0.0112	+0.0113
$\alpha_4 = 17''784$	$\beta_4 = 137^\circ 6'36''$	$K_{4,*} + 0.0015$	-0.0131	+0.0162
$\alpha_5 = 0''616$	$\beta_5 = 67^\circ 56'$	$K_{5,*} + 0.0000$	+0.0000	+0.0000
$\alpha_6 = 2''727$	$\beta_6 = 105^\circ 3'53''$	$K_{6,*} + 0.0005$	+0.0005	+0.0005
$\alpha_7 = 3''716$	$\beta_7 = 28^\circ 8'46''$	$K_{7,*} + 0.0244$	+0.0166	+0.0163
$\alpha_8 = 22''460$	$\beta_8 = 307^\circ 56'50''$	$K_{8,*} - 0.0009$	+0.0003	-0.0023

Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
+0.0008	−0.0000	−0.0000	+0.0000	+0.0000
−0.0025	+0.0000	+0.0000	−0.0000	−0.0000
+0.0225	−0.0000	−0.0000	+0.0000	+0.0000
−0.0790	+0.0000	+0.0000	−0.0000	−0.0000
+0.0000	+0.0000	+0.0000	+0.0015	+0.0100
+0.0007	+0.0019	+0.0017	+0.0297	+0.0029
+0.0187	+0.0431	+0.0341	−0.0448	+0.0114
−0.0150	+0.0156	+0.0483	+0.0018	+0.0001

Таблица 2

	Меркурий	Венера	Земя
$\sum_s K_{s,*} = e_{max}$	0.231718	0.070632	0.067735
e_{min}	0.121494	0	0
средно движ. на перихелия	5'', 463803	—	—
T – обиколка на перихелия	237 198 г	—	—

Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
0.139654	0.060827	0.084328	0.077965	0.014506
0.018475	0.025492	0.012371	0.011757	0.005571
17'', 784456	3'', 716607	22'', 46084	3'', 716607	0'', 616685
72872.6 г	348 705 г	57 700.4 г	348 705 г	2 101 559 г

Ралица Александрова, ramuna@abv.bg
 Людмил Петров, bg_liudo@abv.bg
 Николай Николов, nlnbg@yahoo.com