Елементи на Делоné: лема 1

Лема 1. *Елементите на Делоне имат Хамилтониан*:

$$\widehat{H} = -\frac{m^3\gamma^2}{2L^2}.$$

Доказателство. Имаме

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} - \frac{m\gamma}{r}.$$

Ще пресметнем p_i, където $i = 1, 2, 3$. От дефиницията на производяща функция

$$S : p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Получаваме

$$p_1 \quad = \quad \frac{\partial S_0}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial q_1} + G\frac{\partial \psi}{\partial q_1},$$

където полагаме

$$S_0 = \int\limits_{r_{min}}^{r} \sqrt{\frac{2m^2\gamma}{r} - \frac{G^2}{r^2} - \frac{m^4\gamma^2}{L^2}} dr,$$

$$\psi = G \arccos\left(\frac{x_1\cos\theta}{r} + \frac{x_2\sin\theta}{r}\right),$$

$$\cos\psi = \frac{x_1\cos\theta}{r} + \frac{x_2\sin\theta}{r}.$$

Ще отбележим, че G не зависи от променливите x_1, x_2 и x_3 и за краткост ще положим

$$A \quad := \quad \frac{2m^2\gamma}{r} - \frac{G^2}{r^2} - \frac{m^4\gamma^2}{L^2}.$$

Тогава

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \sqrt{A}\frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{G}{\sqrt{1-\cos^2\psi}}\frac{\partial\Big(\frac{x_1\cos\theta}{r}+\frac{x_2\sin\theta}{r}\Big)}{\partial x_1}\\
&= \sqrt{A}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} + \frac{G}{-\sin\theta}\frac{\partial\left(\frac{x_1\cos\theta+x_2\sin\theta}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right)}{\partial x_1}\\
&= \sqrt{A}\frac{x_1}{r} - \frac{G\cos\theta}{r\sin\psi} + \frac{Gx_1\cos\psi}{r^2\sin\psi},
\end{aligned}
$$

и следователно получаваме

$$
p_1 = \frac{x_1}{r}\left(\sqrt{A}+\frac{G}{r}\operatorname{ctg}\psi\right) - \frac{G\cos\theta}{r\sin\psi}. \tag{1}
$$

Аналогично пресмятаме втория импулс:

$$
p_2 = \frac{x_2}{r}\left(\sqrt{A}+\frac{G}{r}\operatorname{ctg}\psi\right) - \frac{Gsin\theta}{r\sin\psi}. \tag{2}
$$

Понеже функцията ψ не зависи от променливата x_3, то третият импулс е:

$$
\begin{aligned}
p_3 &= \frac{\partial S_0}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_3} + G\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\\
&= \sqrt{A}\frac{\partial r}{\partial x_3} - \frac{G}{\sin\psi}\left(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta\right)\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\\
&= \sqrt{A}\frac{x_3}{r} - \frac{G}{\sin\psi}r\cos\psi\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial x_3},\\
&= \frac{x_3}{r}\left(\sqrt{A}+\frac{G}{r}\operatorname{ctg}\psi\right).
\end{aligned}
$$

Нека сега с помощта на равенствата (1), (2) и (3) пресметнем сумата от квадратите, която участва в H:

$$
\begin{aligned}
p_1^2+p_2^2+p_3^2 = &\left(A+2\sqrt{A}\frac{G}{r}\operatorname{ctg}\psi+\frac{G^2}{r^2}\operatorname{ctg}^2\psi\right)\\
&-2\frac{Gx_1\cos\theta}{r^2\sin\psi}\left(\sqrt{A}+\frac{G}{r}\operatorname{ctg}\psi\right)+\frac{G^2\cos^2\theta}{r^2\sin^2\psi}\\
&-2\frac{Gx_2\sin\theta}{r^2\sin\psi}\left(\sqrt{A}+\frac{G}{r}\operatorname{ctg}\psi\right)+\frac{G^2\sin^2\theta}{r^2\sin^2\psi}.
\end{aligned}
$$

Като използваме основното тригонометрично тъждество и връзката

$$r\cos\psi \quad = \quad x_1\cos\theta + x_2\sin\theta,$$

получаваме

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \quad = \quad A + \frac{G^2}{r^2} \;=\; \frac{2m^2\gamma}{r} - \frac{m^4\gamma^2}{L^2}.$$

Заместваме последното равенство в Хамилтониана

$$H \quad = \quad \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} - \frac{m\gamma}{r}.$$

и окончателният резултат е

$$\widehat{H} \quad = \quad \frac{1}{2m}\left(\frac{2m^2\gamma}{r} - \frac{G^2}{r^2} - \frac{m^4\gamma^2}{L^2} + \frac{G^2}{r^2}\right) - \frac{m\gamma}{r} \;=\; -\frac{m^3\gamma^2}{2L^2}.$$

Лема 1 е доказана.

Богдан Златанов, boxter@abv.bg
Лора Лобутова, loralo@abv.bg
Петя Брайнова, petia_brainova@abv.bg