概率论与数理统计学习笔记

中国科学技术大学

彭煜峰

2023 年 12 月 10 日

前言

期末前夕，开始恶补概率论……主要参考 B 站孔祥仁老师的概率论与数理统计课程。

2023 年 12 月 10 日

中国科学技术大学

目录

第一章　概率论的基本概念

1.1　随机试验

1.1.1　名词

定义 1.1.1. 确定性现象：结果呈现确定性的现象.

定义 1.1.2. 随机现象：在个别试验中呈现不确定性，但是在大量重复试验中，表现出**统计规律性**的现象.

1.1.2　随机试验

定义 1.1.3. 对随机现象的实现或对其观察称为**随机试验，记为** E.

例 1.1.1. 投币观察向上的面.（实现、观察）

例 1.1.2. 记录每个星期一的天气.（观察）

特点

1. 相同条件可重复.
2. 试验结果明确可知，且一般不止一个.
3. 试验前不能确定那个结果出现.

1.2　样本空间与随机事件

1.2.1　样本空间

定义 1.2.1. 将 E 的所有可能结果和组成的集合称为 E 的**样本空间**$\sim\Omega$.

定义 1.2.2. 样本空间 Ω 中的元素即为**样本点.**

例 1.2.1. 写出下列试验的样本空间：

E_1 抛一枚硬币，观察正面 H，反面 T 出现的情况.

答: $\Omega = \{H, T\}$

E_2 将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H，反面 T 出现的情况.

答: $\Omega = \{HHH, TTT, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH\}$.

E_3 记录某一地区一昼夜的最高气温和最低气温.

答: 记最高气温为 x，最低气温为 y，该地区历史最低气温（不可能更低）为 T_1，历史最高气温（不可能更高）为 T_2，则

$$\Omega = \{(x, y) \,|T_1 \leqslant y \leqslant x \leqslant T_2\}.$$

1.2.2 随机事件

定义 1.2.3. 称 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件.**

定义 1.2.4. 在一次试验中，该子集的一个样本点出现，称该事件**发生.**

例 1.2.2. 投一枚骰子，将红色的点向上称作事件 A. 在一次试验中 1 点向上，请问事件 A 是否发生？

解. 样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 事件 $A = \{1, 4\}$. 可知 $A \subseteq S$ 且 A 中样本点 $\{1\}$ 在该试验中出现，因此事件 A 发生. □

定义 1.2.5. 由一个样本点组成的单点集叫做**基本事件.**

定义 1.2.6. 样本空间 Ω 本身为一个**必然事件.**

定义 1.2.7. 事件集合中没有元素，即为 $\emptyset$, 称为**不可能事件.**

1.3 事件间的关系及运算

1.3.1 事件关系

包含关系

定义 1.3.1. $A \subset B$ 表示事件 A 包含于事件 B, 如果事件 A 发生，则事件 B 一定发生.

注. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 则 $A = B$. 这一性质常用于证明集合相等.

和事件（并事件）

定义 1.3.2. $A \cup B$ 表示 A 事件与 B 事件**至少发生一个**，也记作 $A + B$.

积事件（交事件）

定义 1.3.3. $A \cap B$ 表示事件 A 和事件 B **同时发生**，也记作 AB.

差事件

定义 1.3.4. 事件 A 发生且事件 B 不发生，记作 $A - B$; 事件 B 发生且事件 A 不发生，记作 $B - A$.

互斥事件（互不相容）

定义 1.3.5. 事件 A 与事件 B, 不能同时发生，记作 $A \cap B = \emptyset$.

逆事件（对立事件）

定义 1.3.6. 事件 A 和 B **有且仅有**一个发生，记作 $A \cap B = \emptyset$ 且 $A \cup B = \Omega$.

注. 由此可知，对立事件一定是互斥事件而互斥事件不一定是对立事件.

1.3.2 事件的运算律

定理 1.3.1. 交换律 $A \cup B = B \cup A \qquad AB = BA$.

定理 1.3.2. 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A(BC) = (AB)C$.

定理 1.3.3. 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

定理 1.3.4. De Morgan's Law $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1.4 频率与概率

1.4.1 频率

定义 1.4.1. 事件发生的频数 (n_A) 与试验总次数 (n) 之间的比值：

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}.$$

性质

1. $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$.
2. $f_n(\Omega) = 1$.
3. 若 $A_1, A_2, A_3 \cdots A_k$ 为**两两互不相容**事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i).$$

1.4.2 概率

用于衡量事件 A 发生的可能性的大小，一般用 P 来表示。

基本性质

1. 对于 $\forall A$, 有 $P(A) \geqslant 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. **可列可加性**：若 $A_1, A_2, A_3 \cdots$ 为**两两互不相容**事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

重要性质

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. **有限可加性**：若 $A_1, A_2, A_3 \cdots A_n$ 为**两两互不相容**事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

3. 若 $A \subset B$, 则 $P(B) \geqslant P(A)$. 等号成立当且仅当 $A = B$.

4. 对于 $\forall A$, 必有 $P(A) \leqslant 1$.

5. 对于 $\forall A$, 有 $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.

6. 对于 $\forall A, B$ 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

7. **次可加性**：对于任意事件列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$, 有 $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

8. **下连续性**：若事件列满足 $A_n \subset A_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

9. **上连续性**：若事件列满足 $A_n \supset A_{n+1}, n = 1, 2, \cdots$, 则

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

可以将上述性质 6 推广至一般形式，即为容斥原理：

定理 1.4.1. 容斥原理 对任意的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) =& \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P\left(A_iA_j\right) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P\left(A_iA_jA_k\right) - \cdots + \\ & (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n). \end{aligned}$$

证明. 应用数学归纳法. $n = 2$ 时，由于 $A_1 \cup A_2 = A_1 + A_2 - A_1 \cap A_2$, 根据**有限可加性**，有

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2).$$

假设对 $n = k - 1$ 成立，当 $n = k$ 时，应用归纳假设前提有：

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) =& P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right) \cup A_k\right) \\ =& P\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right) + P(A_k) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right) \cap A_k\right) \\ =& P\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right) + P(A_k) - P\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} (A_iA_k)\right) \\ =& \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} P\left(A_iA_j\right) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant k} P\left(A_iA_jA_k\right) - \cdots + \\ & (-1)^{k-1} P(A_1A_2\cdots A_k). \end{aligned}$$

□

例 1.4.1. 设 A 和 B 是任意两个概率不为 0 的不相容事件，则下列结论正确的是？

A. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容. B. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容.

C. $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. D. $P(A - B) = P(A)$.

解.

A. 当 $A \cup B \neq \Omega$ 时，$\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

B. 当 A 与 B 为互斥事件时，$\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

C. $P(AB) = \emptyset \neq P(A) \cdot P(B)$.

D. $P(A - B) = P(A - (A \cap B)) = P(A - \emptyset) = P(A)$.

□

例 1.4.2. 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = 0$, $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{6}$, 则事件 A, B, C 全不发生的概率为？

解. 题意要求 $P\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right)$:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) = P\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) = 1 - P(A \cup B \cup C).$$

接下来求 $P(A \cup B \cup C)$, 根据**容斥原理:**

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) =& P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(AB) - P(AC) - P(BC) \\ & + P(ABC) \\ =& \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + P(ABC) \end{aligned}$$

又因为 $ABC \subset AB$ 所以 $0 \leqslant P(ABC) \leqslant P(AB) = 0 \Rightarrow P(ABC) = 0$. 由此得到

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

□

例 1.4.3. 设当 A 与 B 同时发生时，C 必然发生则？

A. $P(C) \leqslant P(A) + P(B) - 1$. B. $P(C) \geqslant P(A) + P(B) - 1$.

C. $P(C) = P(AB)$. D. $P(C) = P(A \cup B)$.

解. 由题意可知 $AB \subset C$, 因此 $P(C) \geqslant P(AB)$, 故 C 错误。且 C 不一定等于 $A \cup B$, D 错误。又因为

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

可以推出

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

根据包含关系，有：

$$\begin{aligned} P(C) \geqslant P(AB) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &\geqslant P(A) + P(B) - 1. \end{aligned}$$

故 B 正确. □

例 1.4.4. 随机事件 A, B 及其和事件 $A \cup B$ 发生的概率分别为 $0.4, 0.3, 0.6$. $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，那么积事件 $A\overline{B}$ 发生的概率 $P\left(A\overline{B}\right)$ 为?

解. 根据概率的运算律，有：

$$P\left(A\overline{B}\right) = P(A(\Omega - B)) = P(A\Omega - AB) = P(A - AB) = P(A) - P(AB).$$

上式中 $P(A - AB) = P(A) - P(AB)$ 成立因为 $AB \subset A$. 再根据容斥原理：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

可以得出

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.1.$$

因此可以得出

$$P\left(A\overline{B}\right) = P(A) - P(AB) = 0.4 - 0.1 = 0.3.$$

□

1.5　古典概型

定义 1.5.1. 满足以下两个特性的概率模型为**古典概型：**

1. **有限性：**Ω 包含的样本点为有限个.
2. **等可能性：**样本点（基本事件）发生的可能性相同.

1.6　条件概率

考虑事件 A 发生的情况下，事件 B 发生的概率。

例 1.6.1. 将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正反面的情况. 设事件 A 为"至少有一次为 H"，事件 B 为"两次掷出同一面". 现在来求已知事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率.

解. 考虑样本空间：

$$\begin{aligned}
&\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}\\
&A=\{HH,HT,TH\}\\
&B=\{HH,TT\}\\
&P\left(B|A\right)=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

□

推论 1.6.1. 设试验的样本空间的样本点总数为 n, A 包含的样本点有 m 个 $(m>0)$, AB 包含的样本点有 k 个，则

$$P\left(B|A\right)=\frac{k}{m}=\frac{k/n}{m/n}=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}.$$

定义 1.6.1. 条件概率 设 A, B 为两个事件，且 $P\left(A\right)>0$, 则

$$P\left(B|A\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)}.$$

特点

1. **非负性：**对 $\forall B$, $P\left(B|A\right)\geqslant 0$；
2. **规范性：**对于必然事件 Ω, 有 $P\left(\Omega|A\right)=1$；

3. **可列可加性**：设 $B_1, B_2, B_3, \cdots$ **两两互不相容**，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(B_i|A\right).$$

4. 对 $\forall B_1, B_2$, 有

$$P\left(B_1 \cup B_2|A\right) = P\left(B_1|A\right) + P\left(B_2|A\right) - P\left(B_1 B_2|A\right).$$

例 1.6.2. 一盒子装有 4 只产品，3 只一等品，1 只二等品，从中取产品两次，每次任取一只，不放回抽样. 设事件 A 为“第一次取到的是一等品”，事件 B 为“第二次取到的是一等品”. 试求条件概率 $P\left(B|A\right)$.

解.

$$P\left(B|A\right) = \frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

□

例 1.6.3. 设某动物活 20 年以上的概率是 0.8, 活 25 年以上的概率为 0.4. 现有只 20 岁的该动物，问该动物能活到 25 岁以上的概率.

解. 依题意，设事件 A 为动物活到 20 岁以上，事件 B 为动物活到 25 岁以上. 现在要求 $P\left(B|A\right)$. 根据条件概率公式，有

$$P\left(B|A\right) = \frac{P\left(AB\right)}{A} = \frac{0.4}{0.8} = 0.5$$

其中，由于 $B \subset A$, 因此 $P\left(AB\right) = P\left(B\right)$. □

例 1.6.4. 设 A, B 为随机事件，且 $0 < P\left(A\right) < 1$, $P\left(B\right) > 0$, $P\left(B|A\right) = P\left(B|\overline{A}\right)$, 则必有？

A. $P\left(A|B\right) = P\left(\overline{A}|B\right)$.

B. $P\left(A|B\right) \neq P\left(\overline{A}|B\right)$.

C. $P\left(AB\right) = P\left(A\right) P\left(B\right)$.

D. $P\left(AB\right) \neq P\left(A\right) P\left(B\right)$.

解.

$$\begin{aligned}
& P\left(B|A\right) = P\left(B|\overline{A}\right) \\
\Longrightarrow & \frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(\overline{A}B\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{P\left(B\right) - P\left(AB\right)}{1 - P\left(A\right)} \\
\Longrightarrow & P\left(AB\right) - P\left(AB\right) \cdot P\left(A\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B\right) - P\left(A\right) \cdot P\left(AB\right) \\
\Longrightarrow & P\left(AB\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B\right).
\end{aligned}$$

□

1.7 乘法定理

由条件概率：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

可得乘法定理：

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A).$$

推论 1.7.1. 选妃公式

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB).$$

$$P(ABCD)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB)\cdot P(D|ABC).$$

例 1.7.1. 设袋中有 r 只红球，t 只白球. 每次自袋中任取一球，观察其颜色然后放回，并再放入 a 只与所取出的那只球同色的球. 若在袋中连续取球四次，试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率.

解. 设 A_i 为第 i 次取到红球，B_i 为第 i 次取到白球，题意要求 $P(A_1A_2B_3B_4)$. 根据乘法定理：

$$\begin{aligned}P(A_1A_2B_3B_4)&=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(B_3|A_1A_2)\cdot P(B_4|A_1A_2B_3)\\&=\frac{r}{r+t}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\cdot\frac{t}{r+t+2a}\cdot\frac{t+a}{r+t+3a}.\end{aligned}$$

□

例 1.7.2. 设某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为 $\frac{1}{2}$, 若第一次落下未打破，第二次落下打破的概率为 $\frac{7}{10}$, 第三次落下打破的概率为 $\frac{9}{10}$. 求透镜落下三次而未打破的概率.

解. 设 A_i 为第 i 次落下打破，则题意要求 $P\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right)$. 根据乘法定理：

$$\begin{aligned}P\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right)&=P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}|\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}\times\frac{1}{10}\\&=1.5\%.\end{aligned}$$

□

例 1.7.3. 甲袋中 3 个白球 6 个黄球，乙袋中 5 个白球 4 个黄球；先从甲袋中任选一只放入乙袋，再从乙袋中任选一只放入甲；问：甲袋中白球的数目不发生变化的概率.

解. 题意要求两次选择选中同样颜色球的概率. 设 A_i 为第 i 次选中白球，则要求 $P\left((A_1\cap A_2)\cup\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\right)\right)=P(A_1\cap A_2)+P\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\right)$.

$$P(A_1\cap A_2)+P\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{15}.$$

其中 $P\left((A_1\cap A_2)\cup\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\right)\right)=P(A_1\cap A_2)+P\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\right)$ 成立因为 $(A_1\cap A_2)$ 与 $\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\right)$ 互不相容. □

例 1.7.4. 100 件产品中有 10 件次品，用不放回方式每次抽取一件，连续抽 3 次，问第三次才抽到次品的概率.

解. 设 A_i 为第 i 次抽中次品，则题意要求 $P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\right)$. 根据乘法定理：

$$\begin{aligned}P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\right)&=P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}|\overline{A_1}\right)\cdot P\left(A_3|\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\right)\\&=\frac{9}{10}\times\frac{89}{99}\times\frac{10}{98}\end{aligned}$$

□

1.8 全概率公式

1.8.1 完备事件群

定义 1.8.1. 试验 E 的样本空间为 Ω, $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_n$ 为 E 中的一组事件，若满足：

1. $B_i \cap B_j = \emptyset$, 其中 $i \neq j$ 且 $i\,,\, j = 1, 2, 3, \cdots, n$；
2. $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$.

则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 Ω 的一个划分（完备事件群）.

注. 注意到，上述定义中的两个条件，若只对两个事件成立，即对 B_1, B_2 有 $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ 且 $B_1 \cup B_2 = \Omega$. 则 B_1, B_2 为一组对立事件.

例 1.8.1. 设试验 E 为投掷一枚骰子观察点数，其中有一下三个事件：

$B_1 = \{1\,,\,2\,,\,3\}$；

$B_2 = \{4\,,\,5\}$；

$B_3 = \{6\}$.

根据定义，B_1, B_2, B_3 显然是 $\Omega = \{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\}$ 的一个划分（完备事件群）.

1.8.2 全概率公式

定理 1.8.1. 全概率公式 设 E 的样本空间为 Ω, A 是 E 中的事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 Ω 的一组完备事件群，且 $P\left(B_i\right) > 0\,,\, (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$, 则

$$P\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A|B_i\right) \cdot P\left(B_i\right).$$

证明. 事件 A 可以表示为

$$A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(A \cap B_i\right).$$

又因为 $A \cap B_i \subset B_i$ 且 $B_i, i = 1, 2, 3, \cdots, n$ 之两两互不相容，所以对 $\forall i \neq j$ 有：

$$\left(A \cap B_i\right) \cap \left(A \cap B_j\right) = \emptyset.$$

因此有：

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A\cap\Omega)=P\left(A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap B_i)\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i).\end{aligned}$$

根据乘法定理：

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A|B_i).\end{aligned}$$

□

例 1.8.2. 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，不放回抽取. 问：第二次抽到次品的概率.

解. 设事件 A 为第二次抽到次品；事件 B 为第一次抽到正品. 显然事件 B 与事件 $\overline{B}$ 构成样本空间 Ω 的一个完备事件群. 根据全概率公式：

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B)\cdot P(A|B)+P\left(\overline{B}\right)\cdot P\left(A|\overline{B}\right)\\&=\frac{5}{6}\times\frac{2}{11}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{11}.\end{aligned}$$

□

注. 上面的例题在构造完备事件群时只考虑了第一次抽取样品，这是合理的. 因为第二次抽取样品要在第一次抽取之后，由于抽样是不放回抽样，第一次抽取的结果会影响第二次抽取时的概率，所以第二次抽样的事件是第一次抽样事件的子集，因此只需要考虑第一次抽样即可构造完备事件群. 这种方式在类似的情况中都成立.

例 1.8.3. 从 1, 2, 3, 4 中任取一个数，记为 x, 再从 1, 2, ···, x 中任取一个数记为 y. 求 $P\{y=2\}$.

解. 依题意 $x=i$ 为第一次抽到 i, 显然 $\{x=i|i=1\,,2\,,3\,,4\}$ 为样本空间 Ω 的一个完备事件群. 根据全概率公式：

$$\begin{aligned}P(y=2)&=\sum_{i=1}^{4}P(x=i)\cdot P(y=2|x=i)\\&=\frac{13}{48}.\end{aligned}$$

□

例 1.8.4. 研究表明肺癌的患病概率为 0.1%, 在人群中有 20% 是吸烟者，他们患肺癌的概率为 0.4%, 求不吸烟者患肺癌的概率.

解. 患肺癌的概率受吸烟与否的影响，因此设事件 A 为被抽样者吸烟，则 $\overline{A}$ 为被抽样者不吸烟. 事件 A 与 $\overline{A}$ 构成样本空间 Ω 的一个完备事件群. 设事件 B 为被抽样者患肺癌，根据全概率公式：

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)\cdot P(B|A) + P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(B|\overline{A}\right) \\ &= 20\% \times 0.4\% + 80\% \times P\left(B|\overline{A}\right) \\ &= 0.1\%. \end{aligned}$$

则可得问题目标 $P\left(B|\overline{A}\right)$.

$$P\left(B|\overline{A}\right) = (0.001 - 0.0008) \div 0.8 = 0.025\%.$$

□

1.9 贝叶斯公式

定理 1.9.1. 设试验 E 的样本空间 Ω. A 是 E 的一个事件. $\{B_i|i = 1\,, 2\,, 3\,, \cdot\,, n\}$ 为 Ω 的一个完备事件群. 且 $P(A) > 0$, $P(B_i) > 0$. 那么

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P\left(B_j\right)\cdot P\left(A|B_j\right)}. \qquad (i = 1\,, 2\,, 3\,, \cdots\,, n)$$

证明. 根据条件概率公式，有：

$$P(B_i|A) = \frac{P(A\cdot B_i)}{P(A)}.$$

再对分母用全概率公式，对分子用乘法原理得：

$$P(B_i|A) = \frac{P(A\cdot B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P\left(B_j\right)\cdot P\left(A|B_j\right)}.$$

□

例 1.9.1. 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的. 根据以往的记录有以下数据：

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品再仓库中是均匀混合的，且无区别的标志.

(1) 在仓库中随机地取一只元件，求它是次品的概率；

(2) 在仓库中随机地取一只元件，若已知取到的是次品，求此次品出自三家工厂的概率.

解.

(1) 在仓库中随机地取一只元件，设 A_i 为此元件出自工厂 i. 显然 $\{A_i\}$ 为样本空间 Ω 的一个完备事件群. 设事件 B 为该元件是次品，根据全概率公式：

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)\cdot P(B|A_i)=0.15\times0.02+0.80\times0.01+0.05\times0.03=1.25\%.$$

(2) 根据贝叶斯公式：

$$\begin{aligned}
P(A_i|B)&=\frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{P(B)}\\
\Longrightarrow P(A_1|B)&=\frac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.15\times0.02}{0.0125}=0.24\\
\Longrightarrow P(A_2|B)&=\frac{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.80\times0.01}{0.0125}=0.64\\
\Longrightarrow P(A_3|B)&=\frac{P(A_3)\cdot P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.05\times0.03}{0.0125}=0.12.
\end{aligned}$$

□

例 1.9.2. 对以往的数据分析结果表明，当及其调整得良好时，产品得合格率为 98%, 而当机器发生某种故障时，其合格率为 55%. 每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为 95%. 现已知某日早上第一件产品是合格品，求机器调整良好的概率.

解. 设事件 A 为机器调整良好，事件 B 为生产的产品合格. 问题要求 $P(A|B)$. 由于事件 B 的概率受到事件 A 的影响，事件 A 与事件 $\overline{A}$ 构成样本空间 Ω 的一个完备事件群. 因此

模型满足贝叶斯公式的适用条件，根据贝叶斯公式：

$$\begin{aligned}P(A|B) &= \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A)+P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(B|\overline{A}\right)} \\ &= \frac{95\%\times 98\%}{95\%\times 98\%+5\%\times 55\%} \\ &\approx 0.9713.\end{aligned}$$

□

注. 上例，题干中说机器调整良好的概率为 95%, 这是在生产前根据以往的经验得出的，我们称之为“先验概率”. 而在多加了一个条件“生产的第一件产品为合格品”后，计算得出机器调整良好的概率约为 97%, 这是“后验概率”. 后验概率是在得到额外信息后对先验概率修正后的结果.

1.10 事件独立性

试验 E 的事件 A, B. 若 $P(A)>0$, 就可以定义 $P(B|A)$. 一般情况下 $P(B|A)\neq P(B)\implies$ 事件 A 发生与否**会对事件** B **发生的概率产生影响**；有的时候 $P(B|A)=P(B)\implies$ 事件 A 发生与否**不会对事件** B **发生的概率产生影响**.

例 1.10.1. 随机试验 E：投两枚硬币（甲和乙），观察正反面出现的情况. 假定事件 A：甲币正面向上；事件 B：乙币正面向上. 问：A 事件发生与否是否会对 B 发生的概率产生影响.

解. 因为：

$$\begin{aligned}&\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}\\ &A=\{HH,HT\}\qquad P(A)=\frac{1}{2}\qquad P(AB)=\frac{1}{4}\\ &B=\{HH,TH\}\qquad P(B)=\frac{1}{2}\\ &P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{2}=P(B)\\ &P\left(B|\overline{A}\right)=\frac{P\left(\overline{A}B\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{1}{2}=P(B).\end{aligned}$$

所以没有影响. 同时，运用同样的分析方法也可以得出 B 发生与否对 A 没有影响. □

注. 在这个例子中，我们可以发现 $P(AB)$ 恰好等于 $P(A)\cdot P(B)$, 这是否是普遍性的结论呢？

定义 1.10.1. 假设 A, B 为两个事件，如果满足：

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B).$$

则事件 A 与事件 B 相互独立，反之也成立.

定理 1.10.1. 设 A, B, C 三个事件，有：

(1) $P(AB) = P(A)\cdot P(B) \implies A$ 与 B 相互独立；

(2) $P(AC) = P(A)\cdot P(C) \implies A$ 与 C 相互独立；

(3) $P(CB) = P(C)\cdot P(B) \implies C$ 与 B 相互独立；

(4) $P(ABC) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$.

若 A, B, C 满足 (1), (2), (3) 式，则 A, B, C **两两独立**. 若满足 (1), (2), (3), (4) 式，则 A, B, C **相互独立**.

例 1.10.2. 盒中有编号为 $1,2,3,4$ 的 4 只球，随机地从盒中取一只球，事件 A 为“取得的是 1 号球或 2 号球”，事件 B 为“取得的是 1 号或 3 号球”，事件 C 为“取得的是 1 号或 4 号球”验证：

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B) \qquad P(AC) = P(A)\cdot P(C) \qquad P(BC) = P(B)\cdot P(C).$$

但 $P(ABC) \neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$.

解. 根据题意：

$$\begin{aligned}
&P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}\\
&P(AB) = P(AC) = P(BC) = P(ABC) = \frac{1}{4}\\
\implies &P(AB) = P(A)\cdot P(B)\\
&P(AC) = P(A)\cdot P(C)\\
&P(BC) = P(B)\cdot P(C)\\
&\frac{1}{4} = P(ABC) \neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

□

准则 1.10.2. 若 $P(A)>0$, $P(B)>0$, 则 A 与 B 相互独立与 A 与 B 不相容**不能同时发生**.

证明. 当 $P(A)>0$, $P(B)>0$ 时，若 A 与 B 不相容，则有：

$$P(AB)=P(\emptyset)=0\neq P(A)\cdot P(B).$$

因此 A 与 B 不相互独立. □

注. 在上面的准则中，若 $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$, 且 A 与 B 不相容，就有：

$$P(AB)=P(\emptyset)=0=P(A)\cdot P(B).$$

由此可见，该准则的前提条件很重要.

推论 1.10.3. 若 A,B 相互独立，则下列结论成立：

1. A 与 $\overline{B}$ 相互独立；
2. $\overline{A}$ 与 B 相互独立；
3. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

证明. 这里只证明 A 与 $\overline{B}$ 相互独立. 因为 A,B 相互独立：

$$\begin{aligned}
&A=A\Omega=A\left(B\cup\overline{B}\right)=(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\\
\Longrightarrow\ &P(A)=P(AB)+P\left(A\overline{B}\right)\\
\Longrightarrow\ &P(A)=P(A)\cdot P(B)+P\left(A\overline{B}\right)\\
\Longrightarrow\ &P(A)(1-P(B))=P\left(A\overline{B}\right)\\
\Longrightarrow\ &P(A)\cdot P\left(\overline{B}\right)=P\left(A\overline{B}\right).
\end{aligned}$$

因此 A 与 $\overline{B}$ 相互独立. □

推论 1.10.4. 若事件群 $\{A_i|i=1,2,3,\cdots,n\}$, $(n\geqslant 2)$ 相互独立，则：

1. 任取其中 k 个事件也都相互独立；
2. 将 $\{A_i\}$ 中任意 j 个事件换为其对立事件，得到的新事件群也相互独立；