Л. С. ПОНТРЯГИН

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Л. С. ПОНТРЯГИН

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника
для студентов университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

22.161.6
П 56
УДК 517.9

УЧЕБНИК УДОСТОЕН ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРЕМИИ СССР
ЗА 1975 г.

$П \frac{1702050000-155}{053(02)-82} 82\text{-}83$

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ АВТОРА

Эта книга написана на основе лекций, которые я в течение ряда лет читал на механико-математическом факультете Московского государственного университета. При составлении программы лекций я исходил из уверенности, что выбор материала не должен быть случайным и не должен опираться исключительно на сложившиеся традиции. Наиболее важные и интересные применения обыкновенные дифференциальные уравнения находят в теории колебаний и в теории автоматического управления. Эти применения и послужили руководством при выборе материала для моих лекций. Теория колебаний и теория автоматического управления, несомненно, играют очень важную роль в развитии всей современной материальной культуры, и потому я считаю, что такой подход к выбору материала для курса лекций является, если и не единственно возможным, то во всяком случае разумным. Стремясь дать студентам не только чисто математическое орудие, пригодное для применений в технике, но также продемонстрировать и сами применения, я включил в лекции некоторые технические вопросы. В книге они изложены в § 13, 27, 29. Эти вопросы составляют неотъемлемую органическую часть моего курса лекций и, соответственно, этой книги.

Кроме материала, излагавшегося на лекциях, в книгу включены некоторые более трудные вопросы, разбиравшиеся на студенческих семинарах. Они содержатся в § 19, 31 книги. Материал, содержащийся в § 14, 22, 23, 24, 25, 30, излагался на лекциях частично и не каждый год.

Для удобства читателя в конце книги приведены два добавления, которые содержат материал, не входящий в курс обыкновенных дифференциальных уравнений, но существенным образом использующийся в нем. В первом добавлении (отсутствовавшем в предыдущем издании) изложены основные топологические свойства множеств расположенных в эвклидовом пространстве, и дано доказательство теорем о неявных функциях; второе добавление посвящено линейной алгебре.

В этом, втором издании по новому изложены теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных значений и параметров, а также о дифференцируемости решений по этим величинам. Сделаны также многие более мелкие исправления.

В заключение я хочу выразить благодарность моим ученикам и ближайшим товарищам по работе В. Г. Болтянскому, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко, помогавшим мне при подготовке и чтении лекций, а также при написании и редактировании этой книги. Мне хочется также отметить решающее влияние на мои научные интересы, оказанное выдающимся советским специалистом в области теории колебаний и теории автоматического управления Александром Александровичем Андроновым, с которым меня связывали долголетние дружеские отношения. Его влияние существенно сказалось на характере и направленности этой книги.

Л. С. Понтрягин

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ВВЕДЕНИЕ

Эта глава посвящена в первую очередь определению тех понятий, которые будут изучаться в дальнейшем. Что такое система обыкновенных дифференциальных уравнений, что называется ее решением и как много этих решений существует — таковы главные вопросы, на которые дается ответ в этой главе. Количество решений определяется теоремами существования и единственности, которые здесь не доказываются, а только формулируются. Доказательство этих и ряда других теорем того же типа дается в четвертой главе, а до этого сформулированные в первой главе теоремы многократно используются, чем выясняется их значение. Кроме этих основных сведений, в первой главе приводятся решения дифференциальных уравнений нескольких простейших типов. В конце главы рассматриваются комплексные дифференциальные уравнения и их комплексные решения и приводятся простейшие замечания относительно систем линейных дифференциальных уравнений.

§ 1. Дифференциальное уравнение первого порядка

Дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, в которых неизвестными являются функции одного или нескольких переменных, причем в уравнения входят не только сами функции, но и их производные. Если неизвестными функциями являются функции многих переменных, то уравнения называются уравнениями в *частных производных*, в противном случае, т. е. при рассмотрении функций только одного независимого переменного, уравнения называются *обыкновенными* дифференциальными уравнениями. В дальнейшем мы будем иметь дело только с последними.

Так как в ряде физических применений независимым переменным, от которого зависят неизвестные искомые функции, является время, которое принято обозначать через t, то всюду в дальнейшем независимое переменное будет обозначаться через t. Неизвестные функции будут обозначаться через x, y, z и т. д. Производные функций по t

будут, как правило, обозначаться точками: $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$ и т. д. В тех случаях, когда это неудобно или невозможно, мы будем указывать порядок производной верхним индексом в скобках; например, $x^{(n)}=\frac{d^nx}{dt^n}$.

В первую очередь мы займемся рассмотрением о д н о г о д и ф ф е р е н ц и а л ь н о г о у р а в н е н и я п е р в о г о п о р я д к а, т. е. уравнения, в которое входит лишь первая производная неизвестной функции. Уравнение это может быть записано в виде:

$$F(t,\ x,\ \dot{x})=0. \tag{1}$$

Здесь t — независимое переменное, x — его неизвестная функция, $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ — ее производная, а F — заданная функция трех переменных. Функция F может быть задана не для всех значений ее аргументов; поэтому говорят *об области* В *задания функции* F. Здесь имеется в виду множество В точек координатного пространства трех переменных t, x, $\dot{x}$. *Решением* уравнения (1) называется такая функция $x=\varphi(t)$ независимого переменного t, определенная на некотором интервале $r_1<t<r_2$ (случаи $r_1=-\infty$; $r_2=+\infty$ не исключаются), что при подстановке ее вместо x в соотношение (1) мы получаем тождество на всем интервале $r_1<t<r_2$. Интервал $r_1<t<r_2$ называется *интервалом определения* решения $\varphi(t)$. Очевидно, что подстановка $x=\varphi(t)$ в соотношение (1) возможна лишь тогда, когда функция $\varphi(t)$ на всем интервале $r_1<t<r_2$ имеет первую производную (и, в частности, непрерывна). Для того чтобы подстановка $x=\varphi(t)$ в соотношение (1) была возможна, необходимо также, чтобы при произвольном значении переменного t из интервала $r_1<t<r_2$ точка с координатами $(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ принадлежала множеству В, на котором определена функция F.

Соотношение (1) связывает три переменные величины t, x, $\dot{x}$. В некоторых случаях оно определяет переменное $\dot{x}$ как однозначную неявную функцию независимых переменных t, x. В этом случае дифференциальное уравнение (1) равносильно дифференциальному уравнению вида

$$\dot{x}=f(t,\ x). \tag{2}$$

Дифференциальное уравнение (2) называется *разрешенным относительно производной*; оно в некоторых отношениях более доступно для изучения, чем общее дифференциальное уравнение (1). Именно уравнения, разрешенные относительно производной, мы и будем теперь рассматривать. Мы не будем уже считать, что соотношение (2) получено в результате разрешения относительно $\dot{x}$ уравнения вида (1), а будем исходить из функции $f(t,\ x)$ как из заданной функции двух независимых переменных t, x.

Для того чтобы пользоваться наглядными геометрическими представлениями, мы введем в рассмотрение координатную плоскость P переменных t и x. При этом t как независимое переменное мы будем откладывать по оси абсцисс, а x как зависимое переменное — по оси ординат. Функция f, определяющая дифференциальное уравнение (2), может быть задана не для всех значений своих аргументов t и x, или, говоря геометрическим языком, не во всех точках плоскости P, а лишь в точках некоторого множества Γ плоскости P (рис. 1). Относительно множества Γ мы в дальнейшем всегда будем предполагать, что оно является *открытым*. Это значит, что наряду с каждой точкой p в Γ входит и некоторый круг положительного радиуса с центром в p (см. § 32). Относительно функции f будет предполагаться, что как она сама, так и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ являются непрерывными функциями пары переменных t, x на всем множестве Γ. Решение $x = \varphi(t)$ уравнения (2) будем геометрически изображать в плоскости P в виде кривой с уравнением $x = \varphi(t)$. Кривая эта в каждой точке имеет касательную и полностью проходит в открытом множестве Γ; она называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения (2).

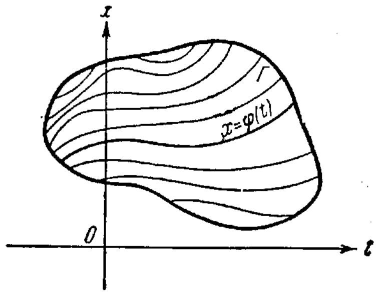

Рис. 1.

Теорема существования и единственности

Известно, какую большую роль в алгебре играют теоремы, отвечающие на вопрос о том, сколько решений имеет та или другая система алгебраических уравнений. Такова, например, основная теорема алгебры, утверждающая, что многочлен n-й степени всегда имеет ровно n корней (считая с их кратностями). Точно так же в теории дифференциальных уравнений важным теоретическим вопросом является вопрос о том, насколько много решений имеет дифференциальное уравнение. Оказывается, что каждое дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, и потому приходится ставить вопрос не о числе решений, а о том, как можно описать совокупность всех решений данного дифференциального уравнения. Ответ на этот вопрос дает теорема существования и единственности (теорема 1), которая в этом параграфе приводится без доказательства. Доказательство будет дано значительно позже (см. § 20).

Теорема 1. *Пусть*

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (3)$$

— дифференциальное уравнение. Будем предполагать, что функция $f(t, x)$ задана на некотором открытом множестве Γ плоскости P переменных t, x. Относительно функции f будем предполагать, что она сама и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ являются непрерывными функциями на всем открытом множестве Γ. Теорема утверждает, что:

1) для всякой точки (t_0, x_0) множества Γ найдется решение $x = \varphi(t)$ уравнения (3), удовлетворяющее условию

$$\varphi(t_0) = x_0; \qquad (4)$$

2) если два решения $x = \psi(t)$ и $x = \chi(t)$ уравнения (3) совпадают хотя бы для одного значения $t = t_0$, т. е. если

$$\varphi(t_0) = \chi(t_0),$$

то решения эти тождественно равны для всех тех значений переменного t, для которых они оба определены.

Числа t_0, x_0 называются *начальными значениями* для решения $x = \varphi(t)$, а соотношение (4) — *начальным условием* для этого решения. Говорят также, что решение $x = \varphi(t)$ *удовлетворяет начальному условию* (4) или же что оно *имеет начальные значения* t_0, x_0. Утверждение, что решение $x = \varphi(t)$ удовлетворяет начальному условию (4) (или имеет начальные значения t_0, x_0), предполагает, что интервал $r_1 < t < r_2$ определения решения $x = \varphi(t)$ содержит точку t_0.

Таким образом, теорема 1 утверждает, что координаты любой точки (t_0, x_0) множества Γ являются начальными значениями для некоторого решения уравнения (3) и что два решения с общими начальными значениями совпадают.

Геометрическое содержание теоремы 1 заключается в том, что *через каждую точку (t_0, x_0) множества Γ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения* (3) (см. рис. 1).

Говоря, что через каждую точку (t_0, x_0) множества Γ проходит «только одна» интегральная кривая, мы допускаем некоторую неточность. В самом деле, решением уравнения (3) называется функция $x = \varphi(t)$, заданная на вполне определенном интервале $r_1 < t < r_2$. Наряду с этой функцией может существовать функция $x = \psi(t)$, также удовлетворяющая уравнению (3) и имеющая те же начальные значения t_0, x_0, но заданная на другом интервале $s_1 < t < s_2$. Вторая часть теоремы 1 утверждает лишь, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ совпадают там, где они обе определены, но вовсе не утверждает, что интервалы их определения $r_1 < t < r_2$ и $s_1 < t < s_2$ одинаковы.

Если один из интервалов, например $s_1 < t < s_2$, полностью содержит другой, то мы будем говорить, что решение $x = \psi(t)$, заданное на интервале $s_1 < t < s_2$, является *продолжением* решения $x = \varphi(t)$. Естественно сосредоточить все внимание на тех решениях, которые нельзя продолжить ни вправо, ни влево. Такие решения мы будем называть *непродолжаемыми*. Нетрудно доказать (но это будет сделано позднее, см. § 22), что каждое решение может быть продолжено до непродолжаемого и притом единственным способом. Если теперь подразумевать под интегральной кривой график непродолжаемого решения, то утверждение о том, что через каждую точку (t_0, x_0) проходит единственная интегральная кривая, становится точным.

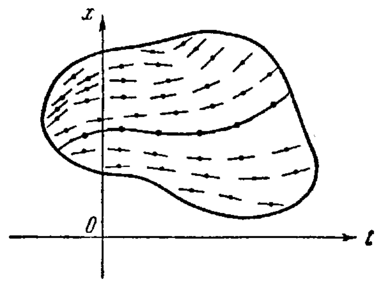

Рис. 2.

Каждое решение $x = \varphi(t)$ уравнения (3) мы интерпретировали геометрически в виде графика функции $\varphi(t)$. Дадим теперь геометрическую интерпретацию самого уравнения (3). Через каждую точку (t, x) множества Г проведем прямую $l_{t,x}$ с угловым коэффициентом $f(t, x)$. Мы получаем *поле направлений*, соответствующее уравнению (3), что и дает геометрическую интерпретацию этого уравнения.

Связь между геометрической интерпретацией уравнения и геометрической интерпретацией его решений заключается в том (рис. 2), что *любая интегральная кривая* $x = \varphi(t)$ *в каждой своей точке* $(t, \varphi(t))$ *касается прямой* $l_{t, \varphi(t)}$.

Примеры

1. Для того чтобы проиллюстрировать значение теоремы 1 (в данном случае второй ее части), решим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \alpha x, \tag{5}$$

где α — действительное число. Здесь

$$f(t, x) = \alpha x,$$

так что функция f в действительности зависит лишь от переменного x. Множество точек, на котором определена функция f, в данном случае совпадает со всей плоскостью P. Как сама функция $f(t, x) = \alpha x$, так и ее производная $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \alpha$ являются непрерывными функциями переменных t и x во всей плоскости P. Таким образом, теорема 1 к уравнению (5) применима. Непосредственной подстановкой в уравнение (5) проверяется, что каждая функция

$$x = ce^{\alpha t}, \tag{6}$$

где c — произвольное действительное число, является решением уравнения (5). Решение это непродолжаемо, так как оно задано уже на всей прямой $-\infty < t < \infty$. Покажем, что, придавая всевозможные значения числу c, мы получим все решения уравнения (5). Пусть $x = \varphi(t)$ — произвольное решение этого уравнения. Покажем, что при надлежащем выборе числа c мы имеем $\varphi(t) = ce^{\alpha t}$. Пусть t_0 — некоторая точка интервала существования решения $\varphi(t)$ и $x_0 = \varphi(t_0)$. Положим $c = x_0 e^{-\alpha t_0}$. Тогда решения $x = \varphi(t)$ и $x = ce^{\alpha t} = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$ уравнения (5) имеют одинаковые начальные значения (t_0, x_0) и потому в силу второй части теоремы 1 совпадают. Таким образом, формула (6) исчерпывает совокупность всех решений дифференциального уравнения (5).

2. Дадим математическое описание процесса распада радиоактивного вещества. Количество вещества, еще не распавшегося к моменту времени t, обозначим через $x(t)$. Из физических соображений следует, что (если нет условий для возникновения цепной реакции) скорость распада, т. е. производная $\dot{x}(t)$, пропорциональна имеющемуся количеству нераспавшегося радиоактивного вещества:

$$\dot{x}(t) = -\beta x(t).$$

Здесь β — постоянный положительный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств радиоактивного вещества, а знак минус в правой части означает, что $x(t)$ убывает. Мы видим, что функция $x(t)$ удовлетворяет простейшему дифференциальному уравнению, рассмотренному в примере 1, так что

$$x(t) = ce^{-\beta t}.$$

Для определения константы c достаточно указать какие-либо начальные значения. Если, например, известно, что в момент времени $t = 0$ имелось количество вещества x_0, то $c = x_0$, и мы имеем:

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t}.$$

Скорость распада выражается здесь величиной β размерности $1/сек$. Часто вместо величины β скорость распада характеризуют так называемым *периодом полураспада*, т. е. временем, за которое распадается половина имеющегося запаса вещества. Обозначим период полураспада через T и установим связь между величинами β и T. Мы имеем:

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-\beta T},$$

откуда

$$T = \frac{1}{\beta} \ln 2.$$

§ 2. Некоторые элементарные методы интегрирования

Главной задачей, возникающей перед нами, когда мы имеем дело с дифференциальным уравнением, является задача отыскания его решений. В теории дифференциальных уравнений, так же как в алгебре, вопрос о том, что значит найти решение уравнения, можно понимать по-разному. В алгебре первоначально стремились найти общую формулу с применением радикалов для решения уравнений каждой степени. Таковы были: формула для решения квадратного уравнения, формула Кардана для решения кубического уравнения и формула Феррари для решения уравнения четвертой степени. Позже было установлено, что для уравнений выше четвертой степени общей формулы решения в радикалах не существует. Осталась возможность приближенного решения уравнений с числовыми коэффициентами, а также возможность исследования зависимости корней уравнений от его коэффициентов. Примерно такова же была эволюция понятия решения в теории дифференциальных уравнений. Первоначально стремились решать, или, как говорят, «интегрировать дифференциальные уравнения в квадратурах», т. е. пытались записать решение при помощи элементарных функций и интегралов от них. Позже, когда выяснилось, что решение в этом смысле существует лишь для очень немногих типов уравнений, центр тяжести теории был перенесен на изучение общих закономерностей поведения решений.

В этом параграфе будут приведены методы интегрирования в квадратурах некоторых простейших уравнений первого порядка.

А) (Уравнение в полных дифференциалах). Решим уравнение

$$\dot{x} = \frac{g(t, x)}{h(t, x)}, \tag{1}$$

правая часть которого представлена в виде отношения функций $g(t, x)$ и $h(t, x)$. Предполагается, что функции $g(t, x)$ и $h(t, x)$ определены и непрерывны на некотором открытом множестве Γ плоскости P переменных t, x, причем знаменатель $h(t, x)$ не обращается в нуль ни в одной точке этого множества, а выражение $h(t, x)\,dx - g(t, x)\,dt$ представляет собой полный дифференциал на всем множестве Γ. Последнее означает, что существует функция $F(t, x)$, определенная на множестве Γ и удовлетворяющая на всем этом множестве условиям

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = h(t, x), \qquad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = -g(t, x). \tag{2}$$

Уравнение (1) условимся символически записывать в виде уравнения

$$h(t, x)\,dx - g(t, x)\,dt = 0,$$

левая часть которого является полным дифференциалом. Оказывается, что для каждого решения $x=\varphi(t)$ уравнения (1) справедливо тождество

$$F(t, \varphi(t)) = \mathrm{const}.$$

Обратно, каждая функция $x=\varphi(t)$, заданная на некотором интервале и определяемая как неявная функция из уравнения

$$F(t, x) = c \tag{3}$$

(с произвольной константой c), является решением дифференциального уравнения (1).

Докажем предложение A). Пусть $x=\varphi(t)$ — решение дифференциального уравнения (1), определенное на интервале $r_1 < t < r_2$. Тогда для всех точек этого интервала мы имеем:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{g(t, \varphi(t))}{h(t, \varphi(t))},$$

откуда получаем:

$$h(t, \varphi(t))\,\dot{\varphi}(t) - g(t, \varphi(t)) = 0.$$

Левая часть этого равенства, в силу (2), представляет собой полную производную по t функции $F(t, \varphi(t))$, так что

$$\frac{d}{dt}F(t, \varphi(t)) = 0$$

на всем интервале $r_1 < t < r_2$. В силу известной теоремы анализа, функция $F(t, \varphi(t))$ есть константа на всем этом интервале.

Обратно, пусть $x=\varphi(t)$ есть решение уравнения (3), рассматриваемое на некотором интервале, так что

$$F(t, \varphi(t)) = c.$$

Дифференцируя это тождество по t, мы в силу (2), получаем:

$$h(t, \varphi(t))\,\dot{\varphi}(t) - g(t, \varphi(t)) = 0,$$

откуда видно, что $x=\varphi(t)$ есть решение дифференциального уравнения (1).

Итак, предложение A) доказано.

Результату, сформулированному в предложении A), можно дать следующее геометрическое истолкование. *Каждая интегральная кривая дифференциального уравнения* (1) *расположена целиком на некоторой линии уровня функции* $F(t, x)$, *т. е определяется уравнением* (3). *Обратно, каждая связная часть линии уровня* (*т. е. график решения уравнения* (3), *рассматриваемого на некотором интервале* $r_1 < t < r_2$) *представляет собой интегральную кривую.*

Так как линия уровня функции $F(t, x)$ может состоять из нескольких отдельных кусков, то в этом случае целая линия уровня не является одной интегральной кривой, а распадается на несколько интегральных кривых. Иными словами, одна константа c может, в силу неявного уравнения (3), определять несколько (и даже бесконечно много, см. пример 3) различных непродолжаемых решений.

Б) (Линейные уравнения). Решим уравнение

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \tag{4}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ определены и непрерывны на некотором интервале $r_1 < t < r_2$ (случаи $r_1 = -\infty$ и $r_2 = +\infty$ не исключаются). Таким образом, открытое множество Γ в плоскости P определяется условиями $r_1 < t < r_2$, налагаемыми на t при произвольном x. Это множество представляет собой полосу, если r_1 и r_2 конечны; полуплоскость, если конечна только одна из величин r_1, r_2, и плоскость, если бесконечны обе величины r_1, r_2. Правая часть уравнения (4) непрерывна вместе со своей частной производной по x на всем множестве Γ, так что для уравнения (4) выполнены условия теоремы 1. Пусть t_0 — некоторая точка интервала $r_1 < t < r_2$. Положим:

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau. \tag{5}$$

Функция $A(t)$ определена на всем интервале $r_1 < t < r_2$. Оказывается, что совокупность всех решений уравнения (4) записывается формулой

$$x = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)} \cdot b(\tau)\,d\tau\right) e^{A(t)}, \tag{6}$$

где x_0 — произвольная константа. Каждое из этих решений определено на всем интервале $r_1 < t < r_2$ и потому непродолжаемо (так как за пределами этого интервала не определена правая часть уравнения (4)).

Для доказательства предложения Б) заметим прежде всего, что функция x, заданная соотношением (6), является решением уравнения (4). Это непосредственно проверяется путем подстановки.

Докажем, что формула (6) содержит все решения. Пусть $x = \varphi(t)$ — некоторое решение уравнения (4), определенное на интервале $s_1 < t < s_2$. Этот интервал должен содержаться в интервале $r_1 < t < r_2$, так как правая часть уравнения (4) определена только на этом последнем интервале. Пусть τ_0, ξ_0 — начальные значения решения $x = \varphi(t)$. Докажем, что можно так подобрать число x_0 в формуле (6), чтобы определяемое этой формулой решение имело своими начальными значениями τ_0, ξ_0, т. е. удовлетворяло условию

$$\left(x_0 + \int_{t_0}^{\tau_0} e^{-A(\tau)}\, b(\tau)\,d\tau\right) e^{A(\tau_0)} = \xi_0. \tag{7}$$

Этим будет доказано (см. теорему 1), что решение $x=\varphi(t)$ совпадает с решением (6) на всем интервале $s_1<t<s_2$.

Соотношение (7) является уравнением первой степени относительно неизвестной величины x_0, причем коэффициент $e^{A(\tau_0)}$ при x_0 отличен от нуля. Следовательно, уравнение (7) разрешимо относительно неизвестной величины x_0.

Итак, предложение Б) доказано.

Для сравнения приведем другой (принятый в большинстве учебников) вывод формулы (6), облегчающий ее запоминание. Прежде всего рассматривается однородное уравнение

$$\dot{y}=a(t)y. \tag{8}$$

Это — уравнение в полных дифференциалах (см. А)). В самом деле, символически его можно записать в виде

$$\frac{dy}{y}-a(t)\,dt=0.$$

Соответствующая функция $F(t, y)$ задается формулой

$$F(t, y)=\ln|y|-A(t),$$

и потому, в силу А), решения однородного уравнения (8) определяются как неявные функции из соотношения

$$\ln|y|-A(t)=c_1.$$

Отсюда получаем $|y|=e^{A(t)+c_1}$ или, иначе,

$$y=ce^{A(t)}, \tag{9}$$

где c может принимать любые действительные значения. (Этот вывод содержит неточность, поскольку функция $h(t, y)=y$ может обращаться в нуль, так что условие 1) предложения А) не выполнено; неточность легко может быть устранена, но мы этого делать не будем, так как формула (9) является частным случаем формулы (6), которая выше была полностью доказана.)

Для получения с помощью формулы (9) решения неоднородного уравнения (4) применяется так называемый *метод вариации постоянной*. Именно, решение уравнения (4) ищется в виде (9), где c уже не константа, а некоторая неизвестная функция переменного t. Подставляя это предполагаемое решение в уравнение (4), получаем:

$$\dot{c}e^{A(t)}+ca(t)e^{A(t)}=a(t)ce^{A(t)}+b(t)$$

или, что то же,

$$\dot{c}e^{A(t)}=b(t).$$

Отсюда находим:

$$c = \int e^{-A(t)} b(t)\,dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)} b(\tau)\,d\tau,$$

где x_0 — константа интегрирования.

Примеры

1. Решим уравнение

$$\dot{x} = f(t)\,g(x),$$

называемое *уравнением с разделяющимися переменными*. Будем предполагать, что функция $f(t)$ определена и непрерывна на интервале $r_1 < t < r_2$, а функция $g(x)$ определена, непрерывна и не обращается в нуль на интервале $q_1 < x < q_2$. Рассматриваемое уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Именно, оно может быть записано символически в виде:

$$\frac{dx}{g(x)} - f(t)\,dt = 0.$$

Соответствующая функция $F(t, x)$ задается формулой

$$F(t, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} - \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau.$$

Здесь x_0 принадлежит интервалу $q_1 < x < q_2$, а x изменяется на том же интервале; t_0 принадлежит интервалу $r_1 < t < r_2$, а t изменяется на том же интервале. В силу предложения А), все решения нашего уравнения получаются как неявные функции из соотношения

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau + c.$$

2. Решим уравнение

$$\dot{x} = h\left(\frac{x}{t}\right),$$

в котором правая часть зависит лишь от отношения переменных x и t. Уравнение это называется *однородным*.

Будем предполагать, что функция $h(y)$ определена и непрерывна на интервале $a_1 < y < a_2$ и что на этом интервале функция $h(y) - y$ не обращается в нуль. Наше уравнение решается путем замены переменных. Именно, вместо неизвестной функции x мы введем неизвестную функцию y, положив $x = yt$. Производя эту подстановку, мы получаем для новой неизвестной функции y уравнение

$$\dot{y}t + y = h(y)$$

или, что то же,

$$\dot{y} = \frac{h(y) - y}{t}.$$

Полученное уравнение с разделяющимися переменными решается по способу, указанному в примере 1.

3. Решим уравнение

$$\dot{x} = x^2 \cos t \tag{10}$$

с разделяющимися переменными. Множеством Γ для него является вся плоскость (t, x). При $x > 0$ и при $x < 0$ уравнение это можно решать по способу, указанному в примере 1. Для каждой из этих полуплоскостей мы имеем:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int \cos t \, dt$$

или, иначе,

$$-\frac{1}{x} = \sin t - c.$$

Таким образом, получаем:

$$x = \frac{1}{c - \sin t}. \tag{11}$$

Кроме решений, описываемых этой формулой, мы имеем очевидное решение

$$x = 0. \tag{12}$$

Покажем, что формулы (11) и (12) охватывают совокупность всех решений уравнения (10). Пусть (t_0, x_0) — произвольные начальные значения. Если $x_0 = 0$, то решение (12) имеет эти начальные значения. Если же $x_0 \neq 0$, то указанные начальные значения имеет решение (11) при

$$c = \sin t_0 + \frac{1}{x_0}.$$

Решение (12) определено на интервале $(-\infty, +\infty)$ и потому непродолжаемо. Точно так же при $|c| > 1$ формула (11) определяет одно непродолжаемое решение, заданное на интервале $(-\infty, +\infty)$. При фиксированной константе c, удовлетворяющей неравенству $|c| \leqslant 1$, формула (11) задает не одно решение, а **бесконечное множество решений**. Каждое отдельное решение в этом случае определено на интервале $r_1 < t < r_2$, где r_1 и r_2 — два соседних нуля функции $\sin t - c$ (рис. 3).

4. Покажем, что если правая часть уравнения не имеет непрерывной производной, то вторая часть теоремы 1 (единственность)

может не иметь места. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}}. \tag{13}$$

Правая часть уравнения (13) определена и непрерывна для всех значений x, но ее производная $2x^{-\frac{1}{3}}$ терпит разрыв при $x = 0$. Если

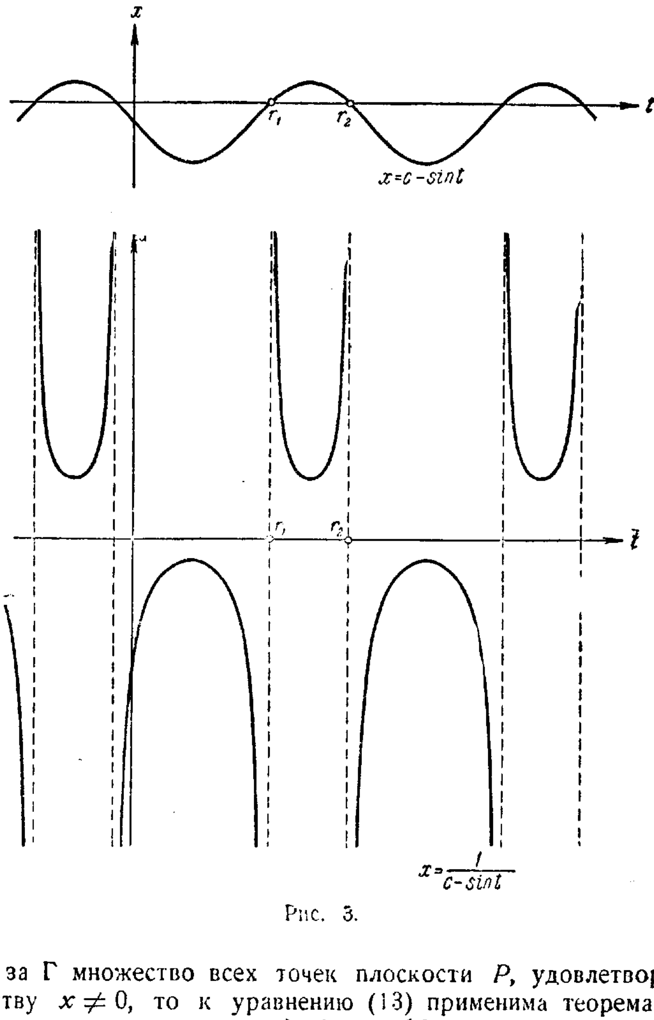

Рис. 3.

принять за Г множество всех точек плоскости P, удовлетворяющих неравенству $x \neq 0$, то к уравнению (13) применима теорема 1, и в каждой из полуплоскостей $x > 0$, $x < 0$ уравнение (13) можно решать по способу, указанному в примере 2. Решая уравнение (13) этим способом, мы получаем: $x^{\frac{1}{3}} = t - c$, или

$$x = (t - c)^3. \tag{14}$$

Часть графика функции (14) (при $t < c$) проходит в полуплоскости $x < 0$, часть же (при $t > c$) — в полуплоскости $x > 0$. Непосредственно проверяется, однако, что функция (14) является решением

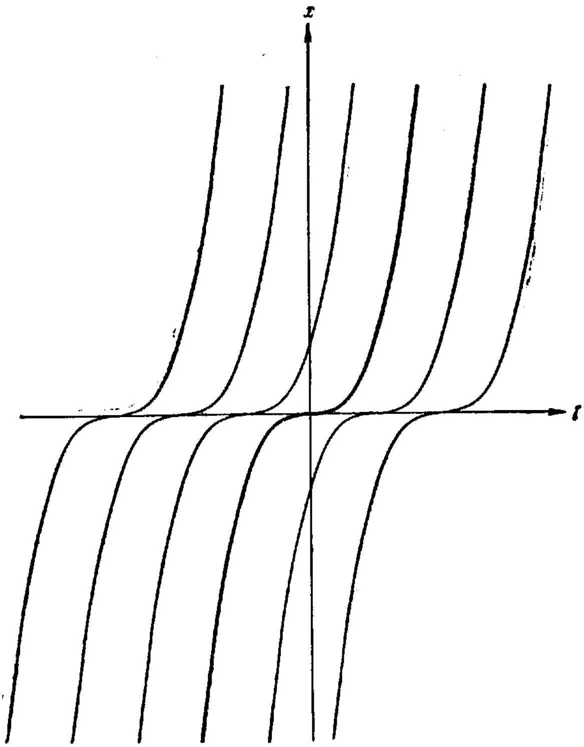

Рис. 4.

уравнения (13) при всех значениях t на интервале $-\infty < t < +\infty$. В то же время $x \equiv 0$ также является решением уравнения (13). Таким образом, через каждую точку $x = 0$, $t = c$ прямой $x = 0$ проходят уже два решения (рис. 4): решение (14) и решение $x = 0$. Мы видим, что вторая часть теоремы 1 (единственность) не имеет места для уравнения (13).

§ 3. Формулировка теоремы существования и единственности

В § 1 было рассмотрено одно дифференциальное уравнение первого порядка, причем была сформулирована теорема существования и единственности для этого уравнения. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений имеет дело и с более общими системами уравнений. Обычно система обыкновенных дифференциальных уравнений состоит из стольких уравнений, сколько в нее входит неизвестных функций; при этом все неизвестные функции являются функциями одного и того же независимого переменного. Во всех случаях теорема существования и единственности является основным теоретическим положением, дающим возможность подойти к изучению данной системы дифференциальных уравнений.

Теорема существования и единственности формулируется и доказывается применительно к системе уравнений, по внешнему виду имеющей несколько частный тип. В действительности же к этой системе уравнений сводятся системы сравнительно общего типа. Системы дифференциальных уравнений того частного типа, о котором здесь идет речь, мы будем называть в дальнейшем *нормальными*.

Система

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, x^2, \ldots, x^n); \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

обыкновенных дифференциальных уравнений называется *нормальной*. В этой системе t — независимое переменное, $x^1, \ldots, x^n$ — неизвестные функции этого переменного, а $f^1, \ldots, f^n$ — функции от $n+1$ переменных, заданные на некотором открытом множестве Γ пространства размерности $n+1$, в котором координатами точки являются числа t, $x^1, \ldots, x^n$. В дальнейшем всегда будет предполагаться, что функции

$$f^i(t, x^1, x^2, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

непрерывны на открытом множестве Γ; точно так же будет предполагаться, что и их частные производные

$$\frac{\partial f^i(t, x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial x^j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

существуют и непрерывны на множестве Γ. Следует заметить, что частные производные (3), непрерывность которых предполагается, берутся только по переменным $x^1, \ldots, x^n$, а не по независимому переменному t.

Решением системы уравнений (1) называется система непрерывных функций

$$x^i = \varphi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

определенных на некотором интервале $r_1 < t < r_2$ и удовлетворяющих системе (1). Интервал $r_1 < t < r_2$ называется *интервалом* *определения* решения (4) (случаи $r_1 = -\infty$, $r_2 = +\infty$ не исключаются). Считается, что система функций (4) удовлетворяет системе уравнений (1), если при подстановке в соотношение (1) вместо $x^1, \ldots, x^n$ функций (4) соотношения (1) превращаются в тождества по t на всем интервале $r_1 < t < r_2$. Для возможности этой подстановки необходимо, чтобы функции (4) имели производные в каждой точке интервала $r_1 < t < r_2$ и чтобы правые части уравнений (1) были определены для всех подставляемых в них значений аргументов. Таким образом, точка с координатами

$$t, \; \varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)$$

должна принадлежать множеству Γ для всех значений t на интервале $r_1 < t < r_2$.

Дадим теперь формулировку теоремы существования и единственности для нормальной системы (1). (Доказательство будет приведено в § 21.)

Теорема 2. *Пусть* (1) — *нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь правые части уравнений* (1) *определены на некотором открытом множестве* Γ, *а функции* (2) *и* (3) *непрерывны на этом множестве. Оказывается, что для каждой точки*

$$t_0, \; x_0^1, \; x_0^2, \ldots, \; x_0^n \tag{5}$$

множества Γ *существует решение*

$$x^i = \varphi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

системы (1), *определенное на некотором интервале, содержащем точку* t_0, *и удовлетворяющее условиям*:

$$\varphi^i(t_0) = x_0^i; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Далее, оказывается, что если имеются два каких-либо решения

$$\left.\begin{aligned} x^i &= \psi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \\ x^i &= \chi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

системы (1), *удовлетворяющих условиям*

$$\psi^i(t_0) = \chi^i(t_0) = x_0^i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

причем каждое решение определено на своем собственном интервале значений переменного t, *содержащем точку* t_0, *то решения эти совпадают всюду, где они оба определены.*

Значения (5) называются *начальными* для решения (6), а соотношения (7) называются *начальными условиями* для этого решения. Мы будем говорить в дальнейшем, что решение (6) *имеет начальные значения* (5) или *удовлетворяет начальным условиям* (7).

Таким образом, теорему существования и единственности для нормальной системы кратко можно формулировать так:

Каковы бы ни были начальные значения** (5), **всегда существует решение системы** (1) **с этими начальными значениями, определенное на некотором интервале, содержащем точку** t_0. **Далее, если имеются два решения с одинаковыми начальными значениями** (5), **каждое из которых определено на своем интервале, содержащем** t_0, **то эти решения совпадают на общей части этих интервалов.

Совершенно так же, как в § 2, введем здесь понятие непродолжаемого решения.

А) Пусть

$$x^i = \varphi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

— решение системы уравнений (1), определенное на интервале $r_1 < t < r_2$, и

$$x^i = \psi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

— решение той же системы уравнений (1), определенное на интервале $s_1 < t < s_2$. Мы будем говорить, что решение (11) является *продолжением* решения (10), если интервал $s_1 < t < s_2$ содержит интервал $r_1 < t < r_2$ (т. е. $s_1 \leqslant r_1$, $r_2 \leqslant s_2$) и решение (10) совпадает с решением (11) на интервале $r_1 < t < r_2$. В частности, мы будем считать, что решение (11) является продолжением решения (10) и в том случае, когда оба решения полностью совпадают, т. е. $s_1 = r_1$, $r_2 = s_2$. Решение (10) будем называть *непродолжаемым*, если не существует никакого отличного от него решения, являющегося его продолжением.

Нетрудно доказать (но это будет сделано позднее, см. § 22, А)), что каждое решение может быть продолжено до непродолжаемого и притом единственным способом.

Формулируем теперь еще одну теорему существования, доказательство которой будет приведено в § 21.

Теорема 3. *Пусть*

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)\, x^j + b^i(t); \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

—нормальная линейная система уравнений. Здесь коэффициенты $a_j^i(t)$ и свободные члены $b^i(t)$ являются непрерывными функциями независимого переменного t, определенными на некотором интервале $q_1 < t < q_2$. Оказывается, что для любых начальных значений

$$t_0,\ x_0^1,\ x_0^2, \ldots, x_0^n; \qquad q_1 < t_0 < q_2, \tag{13}$$

существует решение системы (12) *с этими начальными значениями, определенное на всем интервале* $q_1 < t < q_2$.

В частности, если коэффициенты и свободные члены системы (12) определены на всей прямой, т. е. если $q_1 = -\infty$, $q_2 = +\infty$, то для любых начальных значений существует решение системы (12), определенное на всем бесконечном интервале $-\infty < t < +\infty$.

Решения нормальной системы (1) интерпретируются геометрически в виде интегральных кривых в $(n+1)$-мерном пространстве с координатами $t, x^1, \ldots, x^n$ (ср. § 1). Уравнения интегральной кривой имеют вид:

$$x^i = \varphi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

где (14) есть решение системы.

Сама система (1) интерпретируется с помощью поля направлений в $(n+1)$-мерном пространстве (ср. § 1).

Примеры

1. Решим нормальную линейную систему уравнений

$$\dot{x} = -\omega y, \qquad \dot{y} = \omega x. \tag{15}$$

Множеством Γ для нее является все трехмерное пространство с координатами t, x, y. Непосредственно проверяется, что система функций

$$x = c_1 \cos(\omega t + c_2), \qquad y = c_1 \sin(\omega t + c_2), \tag{16}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, представляет собой решение системы (15). Для того чтобы показать, что, выбирая надлежащим образом постоянные c_1 и c_2, можно получить по формуле (16) произвольное решение, зададимся начальными значениями t_0, x_0, y_0 и покажем, что среди решений (16) имеется решение с этими начальными значениями. Мы получаем для постоянных c_1 и c_2 условия

$$c_1 \cos(\omega t_0 + c_2) = x_0, \qquad c_1 \sin(\omega t_0 + c_2) = y_0. \tag{17}$$

Пусть ρ и φ — полярные координаты точки (x_0, φ_0), так что

$$x_0 = \rho \cos\varphi, \qquad y_0 = \rho \sin\varphi.$$

Тогда уравнения (17) переписываются в виде:

$$c_1 \cos(\omega t_0 + c_2) = \rho\cos\varphi, \qquad c_1 \sin(\omega t_0 + c_2) = \rho \sin\varphi.$$

Полагая

$$c_1 = \rho, \qquad c_2 = \varphi - \omega t_0,$$

мы, очевидно, выполним условия (17). Таким образом, через каждую точку (t_0, x_0, y_0) проходит решение, задаваемое формулой (16).

В силу теоремы 2 (единственность) формула (16) охватывает совокупность всех решений.

2. Покажем, что если правые части (2) системы уравнений (1) k раз непрерывно дифференцируемы, т. е. имеют непрерывные производные порядка k (включая смешанные) по всем переменным t, $x^1, \ldots, x^n$, то $(k+1)$-я производная решения (4) системы (1) существует и непрерывна.

В самом деле, для решения (4) имеет место тождество:

$$\dot{\varphi}^i(t) = f^i(t, \varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Если правые части (2) имеют непрерывные первые производные, то правая часть тождества (18) имеет непрерывную производную по t, и потому функция $\ddot{\varphi}^i(t)$ существует и непрерывна. Дифференцируя написанное тождество (18) k раз, мы последовательно убедимся в существовании и непрерывности всех производных порядков $2, 3, \ldots, k+1$ функций $\varphi^i(t)$.

§ 4. Сведение общей системы дифференциальных уравнений к нормальной

В предыдущем параграфе была сформулирована теорема существования и единственности для нормальной системы дифференциальных уравнений. Здесь будет показано, каким образом весьма общие системы дифференциальных уравнений сводятся к нормальным системам дифференциальных уравнений, и тем самым будет установлена теорема существования и единственности для этих общих систем уравнений.

Дадим сначала понятие о системе дифференциальных уравнений в общем виде.

В случае одной неизвестной функции x независимого переменного t обычно рассматривается одно уравнение, которое можно записать в виде:

$$F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Здесь t — независимое переменное, x — его неизвестная функция, а F — заданная функция $n+2$ переменных. Функция F может быть задана не для всех значений ее аргументов, поэтому говорят об области B задания функции F. Здесь имеется в виду открытое множество B координатного пространства размерности $n+2$, в котором координатами точки являются переменные t, x, $\dot{x}$, $\ldots$, $x^{(n)}$. Если максимальный порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, равен n, то говорят, что имеется *уравнение n-го порядка*. *Решением* уравнения (1) называется такая непрерывная функция $x = \varphi(t)$ независимого переменного t, определенная на некотором интервале $r_1 < t < r_2$, что при подстановке ее вместо x в уравнение (1) мы получаем тождество по t на интервале $r_1 < t < r_2$. Очевидно, что подстановка $x = \varphi(t)$ в соотношение (1) возможна лишь тогда, когда функция $\varphi(t)$ на всем интервале своего существования $r_1 < t < r_2$ имеет производные до порядка n включительно. Для того чтобы подстановка $x = \varphi(t)$ в соотношение (1) была возможна, необходимо также, чтобы точка, имеющая координаты $\{t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)\}$, принадлежала множеству B определения функции F при произвольном t из интервала $r_1 < t < r_2$.

Если имеются две неизвестные функции одного независимого переменного, то рассматриваются два дифференциальных уравнения, вместе образующих *систему уравнений*. Система эта может быть записана в виде:

$$\left.\begin{aligned} F(t,\ x,\ \dot{x},\ \ldots,\ x^{(m)},\ y,\ \dot{y},\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0, \\ G(t,\ x,\ \dot{x},\ \ldots,\ x^{(m)},\ y,\ \dot{y},\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь t — независимое переменное, x и y — две его неизвестные функции, а F и G — две функции, каждая от $m+n+3$ переменных, заданные в некотором открытом множестве B. Если максимальный порядок производной функции x, входящей в систему (2), равен m, а максимальный порядок производной функции y, входящей в систему (2), равен n, то число m называется *порядком* системы (2) *относительно* x, число n — *порядком* системы (2) *относительно* y, а число $m+n$ называется *порядком* системы (2). *Решением* системы (2) называется пара непрерывных функций $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, заданных на некотором интервале $r_1 < t < r_2$ и обладающих тем свойством, что при подстановке их в соотношения (2) мы приходим к тождествам по t на всем интервале $r_1 < t < r_2$. Как и в случае одного уравнения, предполагаются выполненными условия, дающие возможность делать подстановку $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ в систему (2).

Аналогично определяются системы дифференциальных уравнений с тремя и большим числом неизвестных функций от одного независимого переменного. Если неизвестными функциями системы дифференциальных уравнений являются функции $x^1, \ldots, x^n$, а наивысший порядок производной функции x^i, входящей в систему, равен q_i, $i = 1, \ldots, n$, то число q_i называется *порядком* системы *относительно* x^i, а число $q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$ называется *порядком* системы. Таким образом, нормальная система (1) § 3 имеет порядок n.

Если соотношение (1) может быть разрешено относительно $x^{(n)}$, то уравнение (1) переписывается в виде:

$$x^n = f(t,\ x,\ \dot{x},\ \ldots,\ x^{(n-1)}). \tag{3}$$

Точно так же, если система (2) может быть разрешена относительно величин $x^{(m)}$ и $y^{(n)}$, то эта система может быть переписана в виде:

$$\left.\begin{aligned} x^{(m)} &= f(t,\ x,\ \dot{x},\ \ldots,\ x^{(m-1)},\ y,\ \dot{y},\ \ldots,\ y^{(n-1)}), \\ y^{(n)} &= g(t,\ x,\ \dot{x},\ \ldots,\ x^{(m-1)},\ y,\ \dot{y},\ \ldots,\ y^{(n-1)}). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Уравнение (3) и система (4) называются *разрешенными относительно высших производных*. Аналогично определяются разрешенные относительно высших производных системы с произвольным числом неизвестных функций. В частности, нормальная система (1) § 3 является разрешенной относительно высших производных. В дальнейшем мы будем заниматься почти исключительно системами, разрешенными относительно высших производных.

Покажем теперь, что всякая имеющая порядок n система дифференциальных уравнений, разрешенная относительно высших производных, сводится к нормальной системе порядка n. Для начала покажем, как одно уравнение порядка n сводится к нормальной системе порядка n.

А) Пусть

$$y^{(n)} = f(t,\ y,\ \dot{y},\ \ldots,\ y^{(n-1)}) \tag{5}$$

— одно дифференциальное уравнение порядка n, разрешенное относительно высшей производной. Здесь t — независимое переменное, y — неизвестная функция переменного t. Далее, $f(t,\ y,\ \dot{y},\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ есть заданная функция $n+1$ переменных $t,\ y,\ \dot{y},\ \ldots,\ y^{(n-1)}$, определенная в некотором открытом множестве Γ координатного пространства размерности $n+1$. Относительно функции $f(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$ мы будем предполагать, что она непрерывна на множестве Γ и что ее частные производные

$$\frac{\partial f(t,\ y,\ \dot{y},\ \ldots,\ y^{(n-1)})}{\partial y^{(k)}},\quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

(где предполагается, что $y^{(0)} = y$) также непрерывны на множестве Γ. Для замены уравнения (5) нормальной системой уравнений вводятся новые неизвестные функции $x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$ независимого переменного t при помощи равенств

$$x^1 = y,\ x^2 = \dot{y},\ \ldots,\ x^n = y^{(n-1)}. \tag{6}$$

Оказывается, что уравнение (5) эквивалентно системе

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= x^3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}^{n-1} &= x^n, \\ \dot{x}^n &= f(t,\ x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Из этого в силу теоремы 2 следует, что для каждой точки t_0, $y_0,\ \dot{y}_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$ множества Γ существует решение $y = \varphi(t)$

уравнения (5), удовлетворяющее *начальным условиям*

$$\psi^{(k)}(t_0)=y_0^{(k)},\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

или, как говорят, решение с *начальными значениями*

$$t_0,\ y_0,\ \dot{y}_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}. \tag{8}$$

Далее, любые два решения с начальными значениями (8) совпадают на общей части их интервалов определения. Если уравнение (5) линейно, т. е. функция f линейна относительно переменных y, $\dot{y}$, ..., $y^{(n-1)}$, а коэффициенты ее определены и непрерывны на интервале $q_1<t<q_2$, то для любых начальных значений t_0, y_0, $\dot{y}_0$, ..., $y_0^{(n-1)}$, где $q_1<t_0<q_2$, имеется решение $y=\psi(t)$, определенное на всем интервале $q_1<t<q_2$.

Докажем, что уравнение (5) эквивалентно системе (7). Допустим, что функция y удовлетворяет уравнению (5), и докажем, что функции x^1, ..., x^n, определенные соотношениями (6), удовлетворяют системе (7). Дифференцируя соотношения (6), вводящие новые неизвестные функции x^1, ..., x^n, получаем:

$$\dot{x}^k=y^{(k)};\qquad k=1,\ \ldots,\ n-1, \tag{9}$$

$$\dot{x}^n=y^{(n)}. \tag{10}$$

Заменяя правые части соотношений (9) на основе соотношений (6), а правую часть соотношения (10) на основании уравнения (5), которому функция y удовлетворяет, мы получаем систему (7). Допустим, что, наоборот, функции x^1, ..., x^n удовлетворяют системе (7); примем тогда x^1 за y и покажем, что функция y удовлетворяет уравнению (5). Полагая в первом из уравнений системы (7) $x^1=y$, получаем $x^2=\dot{y}$. Заменяя во втором из уравнений (7) x^2 через $\dot{y}$, получаем $x^3=\ddot{y}$. Продолжая это построение дальше, мы приходим к соотношениям (6). Наконец, заменяя в последнем из уравнений системы (7) каждую функцию x^1, ..., x^n в силу формул (6), получаем уравнение (5) для y.

Так как функция f определена на множестве Γ, то правые части системы (7) также определены на множестве Γ при условии замены координат по формулам (6). Для системы (7) выполнены условия теоремы 2 на множестве Γ. Таким образом, можно произвольно выбрать начальные значения t_0, x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n в множестве Γ. Эти начальные значения в силу замены (6) превращаются в начальные значения

$$t,\ y_0,\ \dot{y}_0,\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$$

для уравнения (5).

Если уравнение (5) линейно, то система (7) также линейна. Из этого в силу теоремы 3 вытекает заключительная часть предложения А).

Таким образом, предложение А) доказано.

Прием, описанный в предложении А), дает возможность привести к нормальной системе произвольную систему дифференциальных уравнений, разрешенную относительно высших производных. Для того чтобы не загромождать изложения формулами, рассмотрим в нижеследующем предложении Б) систему четвертого порядка, состоящую из двух уравнений.

Б) Пусть

$$\left.\begin{aligned} \ddot{u} &= f(t,\ u,\ \dot{u},\ v,\ \dot{v}),\\ \ddot{v} &= g(t,\ u,\ \dot{u},\ v,\ \dot{v}) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

— система двух уравнений второго порядка. Здесь t — независимое переменное, а u и v — его неизвестные функции. Сведем систему (11) к нормальной системе, введя новые неизвестные функции x^1, x^2, x^3, x^4, по следующим формулам:

$$x^1 = u, \qquad x^2 = \dot{u}, \qquad x^3 = v, \qquad x^4 = \dot{v}.$$

При этой замене система (11) переходит в систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2,\\ \dot{x}^2 &= f(t,\ x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4),\\ \dot{x}^3 &= x^4,\\ \dot{x}^4 &= g(t,\ x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Если предположить, что функции f и g, стоящие в правых частях уравнений (11), определены в некотором открытом множестве Γ пятимерного пространства, где координатами точки служат t, u, $\dot{u}$, v, $\dot{v}$, причем функции эти непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка по переменным u, $\dot{u}$, v, $\dot{v}$, то система (12) нормальна и удовлетворяет условиям теоремы 2 на множестве Γ. Отсюда легко следует, что для произвольной точки t_0, u_0, $\dot{u}_0$, v_0, $\dot{v}_0$ множества Γ существует решение $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$ системы (11), удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= u_0, & \dot{\varphi}(t_0) &= \dot{u}_0,\\ \psi(t_0) &= v_0, & \dot{\psi}(t_0) &= \dot{v}_0. \end{aligned}$$

Кроме того, всякие решения с одинаковыми начальными условиями совпадают на общей части их интервалов существования.

Доказательство предложения Б) проводится точно так же, как и доказательство предложения А).

Если одно уравнение n-го порядка задано в форме

$$F(t,\ y,\ \dot{y},\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0, \tag{13}$$

не разрешенной относительно высшей производной $y^{(n)}$ неизвестной функции, то прежде всего возникает вопрос о возможности разрешения его относительно $y^{(n)}$; этот вопрос можно считать не относящимся к области дифференциальных уравнений, он относится скорее к области теории функций. Здесь, однако, имеются некоторые вопросы, которые разбираются в теории дифференциальных уравнений. Они носят следующий характер. Допустим, что уравнение (13) является квадратным относительно переменного $y^{(n)}$. Тогда оно определяет *двузначную* функцию $y^{(n)}$ остальных переменных. Там, где два значения действительно различны, мы приходим в сущности к двум различным уравнениям вида (5), но там, где два значения переменного $y^{(n)}$, определяемые уравнением (13), сливаются, расщепление на два уравнения вида (5) невозможно и приходится рассматривать уравнение (13). Изучение таких уравнений приводит к понятию об *особых решениях* дифференциального уравнения и к рассмотрению уравнений на поверхностях. Эти вопросы, однако, в книге рассматриваться не будут.

Примеры

1. Решим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{14}$$

где ω — положительная константа.

Непосредственно проверяется, что функция

$$x = r\cos(\omega t + \alpha), \qquad r \geqslant 0, \tag{15}$$

где r и α — постоянные, удовлетворяет этому уравнению. Покажем, что формула (15) охватывает совокупность всех решений. Пусть $x = \varphi(t)$ — произвольное решение уравнения (14). В силу теоремы 3 (см. конец предложения А)) можно считать, что решение $x = \varphi(t)$ определено для всех значений t. Положим $\varphi(0) = x_0$, $\dot{\varphi}(0) = \dot{x}_0$. Непосредственно проверяется, что можно подобрать постоянные r и α таким образом, чтобы имели место равенства $r\cos\alpha = x_0$, $-r\omega\sin\alpha = \dot{x}_0$. Если эти равенства выполнены, то решения (15) и $\varphi(t)$ имеют одинаковые начальные значения 0, x_0, $\dot{x}_0$ и потому совпадают (см. предложение А)).

Функция (15) описывает *гармонический колебательный процесс*. Положительная константа r называется *амплитудой* колебания (15), а α — его *начальной фазой* или просто *фазой*. Уравнение (14) называется уравнением гармонических колебаний. Число ω называется *частотой* колебаний, хотя в действительности число колебаний в секунду определяется формулой

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}.$$

2. Рассмотрим движение точки p массы m по горизонтальной прямой l под действием силы F, притягивающей ее к точке o на

той же прямой и пропорциональной расстоянию между точками p и o. Для составления уравнения движения точки p введем на прямой l координату, приняв за начало точку o. Переменную координату точки p обозначим через $x = x(t)$. Тогда в силу второго закона Ньютона уравнение движения точки p будет иметь вид:

$$m\ddot{x} = F = -kx.$$

Это уравнение обычно записывается в виде:

$$m\ddot{x} + kx = 0. \qquad (16)$$

Физически сила F может быть осуществлена какой-либо пружиной (рис. 5). Число k называется *коэффициентом упругости* этой пружины. Согласно формуле (15) решение уравнения (16) имеет вид:

$$x = r\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \alpha\right), \qquad r \geqslant 0.$$

Таким образом, частота колебаний $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ точки p определяется ее массой m и упругостью пружины k; она не зависит от начальных условий. От начальных условий, т. е. от положения x_0 точки p и ее скорости $\dot{x}_0$ в момент $t = 0$, зависят амплитуда r колебания и его начальная фаза α.

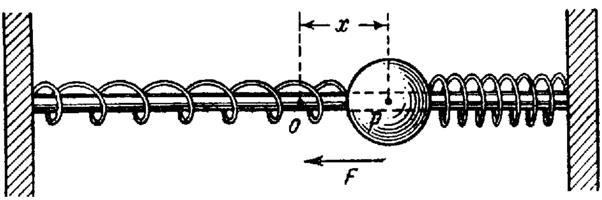

Рис. 5.

3. Составим и решим приближенно уравнение *математического маятника*. Математический маятник представляет собой точку p массы m, которая под действием силы тяжести движется по окружности K радиуса l, лежащей в вертикальной плоскости. Величина l называется *длиной* маятника. На окружности K введем угловую координату, приняв за начало координат самую нижнюю точку o окружности K (рис. 6). Переменную координату точки p обозначим через $\varphi = \varphi(t)$. Точка p находится под действием силы тяжести $P = mg$, направленной вертикально вниз. Составляющая этой силы, направленная по нормали к окружности, уравновешивается благодаря реакции связи (окружности или нити, заставляющей точку двигаться по окружности); составляющая, направленная по касательной к окружности в точке p, равна $-mg\sin\varphi$ (если за положительное

направление на касательной принять направление, соответствующее возрастанию угла φ). Таким образом, уравнение движения точки p имеет вид:

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

или, иначе,

$$l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0. \tag{17}$$

Уравнение это нелинейно, и его решение представляет большие трудности. Если предположить, что координата φ точки p в процессе движения мало отклоняется от нуля, то приближенно в уравнении (17) можно заменить $\sin\varphi$ через φ, и мы получим «приближенное» линейное уравнение маятника:

$$l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0.$$

Его решение имеет вид (см. (15)):

$$\varphi = r\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha\right).$$

Таким образом, частота «малых колебаний» маятника определяется формулой $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

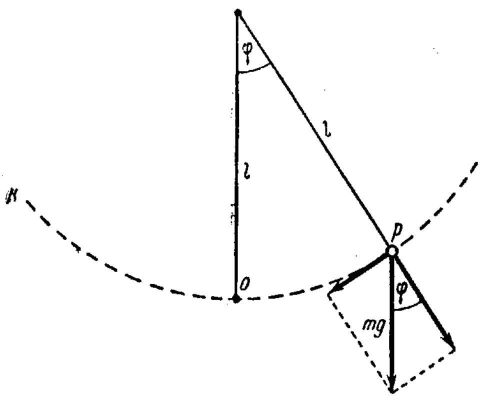

Рис. 6.

Число ν малых колебаний маятника в секунду определяется формулой

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Например, длина *секундного маятника*, т. е. маятника, совершающего одно колебание в секунду ($\nu = 1/сек$), определяется формулой

$$l = \frac{g}{4\pi^2}\,сек^2 \approx 0{,}25\ м.$$

§ 5. Комплексные дифференциальные уравнения

До сих пор мы рассматривали лишь действительные уравнения и их действительные решения. В некоторых случаях, однако, например при решении линейных уравнений с постоянными коэффициентами, бывает легче найти сначала **комплексные решения** действительного уравнения, а затем уже выделить из них действительные решения. Для изложения этого подхода мы должны ввести понятия комплексной функции действительного переменного и комплексной системы дифференциальных уравнений.

А) Говорят, что задана *комплексная функция* $\chi(t)$ действительного переменного t, если на некотором интервале $r_1 < t < r_2$ каждому значению переменного t поставлено в соответствие комплексное число

$$\chi(t) = \varphi(t) + i\psi(t),$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ являются действительными функциями действительного переменного t. Функция $\varphi(t)$ называется *действительной частью* комплексной функции $\chi(t)$, а функция $\psi(t)$ называется *мнимой частью* комплексной функции $\chi(t)$. Комплексная функция $\chi(t)$ называется *непрерывной*, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны. Точно так же комплексная функция $\chi(t)$ называется *дифференцируемой*, если дифференцируемы функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$; производная $\dot{\chi}(t)$ комплексной функции $\chi(t)$ определяется формулой

$$\dot{\chi}(t) = \dot{\varphi}(t) + i\dot{\psi}(t).$$

Непосредственно проверяется, что имеют место обычные правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух комплексных функций действительного переменного.

Б) Пусть

$$\dot{z}^j = h^j(t, z^1, \ldots, z^n); \qquad j = 1, \ldots, n \tag{1}$$

— нормальная система дифференциальных уравнений. Относительно функций $h^j(t, z^1, \ldots, z^n)$, стоящих в правых частях уравнений, мы предположим, что они определены для комплексных значений переменных $z^1, \ldots, z^n$. Мы можем ограничиться, например, случаем, когда функции эти являются многочленами относительно переменных $z^1, \ldots, z^n$ с коэффициентами, являющимися действительными или комплексными непрерывными функциями действительного переменного t, определенными и непрерывными на интервале $q_1 < t < q_2$. При этих условиях вполне законна постановка вопроса об отыскании к о м п л е к с н ы х р е ш е н и й системы (1). Систему

$$z^j = \chi^j(t); \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

комплексных функций действительного переменного t, заданных на некотором интервале $r_1 < t < r_2$, будем называть *решением* системы (1), если при замене переменных z^j функциями переменного t по формулам (2), мы получим систему тождеств по t на этом интервале. Так как по предположению, правые части уравнений (1) являются многочленами относительно $z^1, \ldots, z^n$, то они определены для всех значений этих переменных. Оказывается, что имеет место следующая теорема существования и единственности для системы (1). Пусть

$$t_0, z_0^1, z_0^2, \ldots, z_0^n$$

— произвольная система начальных значений. Здесь $z_0^1, \ldots, z_0^n$ — произвольные комплексные числа, а t_0 — произвольное действительное число, удовлетворяющее условию $q_1 < t_0 < q_2$. Тогда существует решение

$$z^j = \chi^j(t); \qquad j = 1, \ldots, n,$$

системы (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\chi^j(t_0) = z_0^j; \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Всякие два решения с одинаковыми начальными условиями совпадают на общей части их интервалов определения. Если система (1) линейна, т. е. многочлены h^j имеют степень 1, то для любых начальных значений существует решение уравнения (1), определенное на всем интервале $q_1 < t < q_2$.

Эта теорема существования и единственности для нормальной системы комплексных уравнений непосредственно вытекает из теоремы 2 после расщепления каждой комплексной неизвестной функции z^j на ее действительную и мнимую части. В самом деле, положим:

$$z^j = x^j + iy^j; \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

и заменим переменные z^j; $j = 1, \ldots, n$, в системе (1) по формулам (3); тогда будем иметь:

$$\dot{x}^j + i\dot{y}^j = f^j(t, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) + \\ + ig^j(t, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n), \tag{4}$$

где f^j и g^j — действительные функции действительных аргументов, удовлетворяющие соотношениям

$$f^j(t, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) + ig^j(t, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) = \\ = h^j(t, x^1 + iy^1, \ldots, x^n + iy^n).$$

Из (4) следует:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^j &= f^j(t, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n), \qquad j = 1, \ldots, n, \\ \dot{y}^j &= g^j(t, x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n), \qquad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Таким образом, нормальная система (1) комплексных уравнений заменилась нормальной системой (5) действительных уравнений. Так как правые части уравнений (1) являются многочленами относительно $z^1, \ldots, z^n$, то правые части уравнений (5) являются многочленами относительно $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$. Так как коэффициенты многочленов h^j являются непрерывными функциями переменного t на интервале $q_1 < t < q_2$, то на том же интервале и коэффициенты многочленов f^j и g^j являются непрерывными функциями. Таким образом, правые части системы (5) определены и удовлетворяют условиям теоремы 2 в открытом множестве Γ, определяемом единственным условием $q_1 < t < q_2$, налагаемым на t, в то время как остальные переменные $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^n$ остаются произвольными. Полагая

$$z_0^j = x_0^j + iy_0^j, \qquad j = 1, \ldots, n,$$
$$\chi^j(t) = \varphi^j(t) + i\psi^j(t), \quad j = 1, \ldots, n,$$

мы приходим к задаче отыскания решения системы (5) при начальных условиях

$$\left.\begin{aligned} \varphi^j(t_0) &= x_0^j, \qquad j = 1, \ldots, n, \\ \psi^j(t_0) &= y_0^j, \qquad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\}$$

В силу теоремы 2 решение это существует; всякие два решения с одинаковыми начальными условиями совпадают на общей части их интервалов определения.

Если система (1) линейна, то система (5) также линейна, и потому заключительная часть предложения Б) вытекает из теоремы 3.

Следует отметить, что система (1), в правых частях которой стоят многочлены относительно переменных $z^1, \ldots, z^n$, может быть действительной, т. е. коэффициенты этих многочленов могут быть действительными функциями переменного t; тем не менее мы можем и в этом случае рассматривать систему (1) как комплексную, именно искать ее комплексные решения, считая, что функции $z^1, \ldots, z^n$ комплексны. Этот подход к действительным уравнениям применяется потому, что в некоторых случаях легче найти комплексные решения действительных уравнений, чем их действительные решения. В этом случае находят сначала комплексные решения действительной системы уравнений, затем из комплексных решений выделяют действительные решения, т. е. рассматривают только такие комплексные решения, мнимая часть которых обращается в нуль. Именно таким приемом будут в дальнейшем решаться линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Так же, как в действительном случае, и в комплексном случае к нормальной системе можно свести довольно общие системы дифференциальных уравнений. Таким образом, мы имеем в комплексном случае предложения, аналогичные предложениям А), Б) § 4. Здесь дадим только формулировку теоремы существования для одного уравнения n-го порядка.

В) Пусть

$$z^{(n)} = f(t, z, \dot{z}, \ldots, z^{(n-1)}) \tag{6}$$

— уравнение порядка n, в котором правая часть является многочленом относительно переменных $z, \dot{z}, \ldots, z^{(n-1)}$ с коэффициентами, являющимися непрерывными действительными или комплексными функциями переменного t, определенными на интервале $q_1 < t < q_2$. Если теперь $t_0, z_0, \dot{z}_0, \ldots, z_0^{(n-1)}$ — произвольные начальные значения, где $z_0, \dot{z}_0, \ldots, z_0^{(n-1)}$ — произвольные комплексные числа, а t_0 — действительное число, удовлетворяющее неравенствам $q_1 < t_0 < q_2$, то существует решение $z = \varphi(t)$ уравнения (6), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(t_0) = z_0, \qquad \dot{\varphi}(t_0) = \dot{z}_0, \ \ldots, \ \varphi^{(n-1)}(t_0) = z_0^{(n-1)}.$$

Всякие два решения с одинаковыми начальными условиями совпадают на общей части их интервалов определения. Если уравнение (6) линейно, т. е. многочлен f имеет степень 1, то для любых начальных значений существует решение, определенное на всем интервале $q_1 < t < q_2$.

В § 7 и далее важную роль будет играть комплексная функция $e^{\lambda t}$ действительного переменного t, где λ — комплексное число. Дадим здесь определение этой функции и докажем некоторые её свойства.

Г) Пусть $w = u + iv$ — произвольное комплексное число; положим:

$$e^w = e^u(\cos v + i \sin v). \tag{7}$$

Легко видеть, что имеет место соотношение

$$\overline{e^w} = e^{\overline{w}}.$$

Ниже будет доказана формула

$$e^{w_1}e^{w_2} = e^{w_1 + w_2}. \tag{8}$$

Из (7) непосредственно следуют известные **ф о р м у л ы Э й л е р а**:

$$\cos v = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2}, \qquad \sin v = \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}.$$

Пусть $\lambda = \mu + i\nu$ есть комплексное число. В силу формулы (7) мы имеем:

$$e^{\lambda t} = e^{\mu t}(\cos \nu t + i \sin \nu t).$$

Мы покажем, что для комплексных значений λ имеет место следующая формула дифференцирования:

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}, \tag{9}$$

хорошо известная для действительных значений параметра λ.

Формула (7), принятая здесь за *о п р е д е л е н и е* функции e^w комплексного переменного w, может быть *д о к а з а н а*, если функцию e^w определить с помощью ряда

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \ldots + \frac{w^n}{n!} + \ldots$$

Мы, однако, будем считать, что функция e^w определяется формулой (7).

Докажем формулу (8). Пусть

$$w_1 = u_1 + iv_1, \qquad w_2 = u_2 + iv_2.$$

Тогда имеем:

$$e^{w_1} e^{w_2} = e^{u_1} (\cos v_1 + i \sin v_1) e^{u_2} (\cos v_2 + i \sin v_2) =$$
$$= e^{u_1 + u_2} (\cos (v_1 + v_2) + i \sin (v_1 + v_2)) = e^{w_1 + w_2}.$$

Докажем теперь формулу (9). Рассмотрим сначала случай чисто мнимого числа $\lambda = i\nu$. Мы имеем:

$$\frac{d}{dt} e^{i\nu t} = \frac{d}{dt} (\cos \nu t + i \sin \nu t) = -\nu \sin \nu t + i\nu \cos \nu t =$$
$$= i\nu (\cos \nu t + i \sin \nu t) = i\nu e^{i\nu t}.$$

Далее, для произвольного $\lambda = \mu + i\nu$ в силу формулы дифференцирования произведения имеем:

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \frac{d}{dt} (e^{\mu t} \cdot e^{i\nu t}) = \frac{d}{dt} (e^{\mu t}) e^{i\nu t} + e^{\mu t} \frac{d}{dt} (e^{i\nu t}) =$$
$$= \mu e^{\mu t} e^{i\nu t} + i\nu e^{\mu t} e^{i\nu t} = (\mu + i\nu) e^{\mu t + i\nu t} = \lambda e^{\lambda t}.$$

Примеры

1. Рассмотрим комплексное уравнение

$$\dot{z} = \lambda z, \tag{10}$$

где $z = x + iy$ есть комплексная неизвестная функция действительного переменного t, а $\lambda = \mu + i\nu$ — комплексное число. Из (9) следует, что

$$z = ce^{\lambda t} \tag{11}$$

есть решение уравнения (10) при произвольной комплексной постоянной c. Покажем, что формула (11) охватывает совокупность всех решений. Для этого, как и в примере 1 § 1, можно было бы воспользоваться теоремой единственности, но мы используем здесь и теорему 3, для того чтобы показать, как при ее помощи можно несколько упростить вычисления. В данном случае эти упрощения очень незначительны, но в дальнейшем аналогичный прием может дать более существенные результаты. Итак, пусть $z = \chi(t)$ — произвольное решение уравнения (10). В силу теоремы 3 (см. заключительную часть предложения В)) можно считать, что решение это определено для всех значений t. Полагая $\chi(0) = z_0$, мы видим, что решение $z = \chi(t)$ имеет своими начальными значениями числа 0, z_0. Те же начальные значения имеет, очевидно, и решение

$$z = z_0 e^{\lambda t},$$

получаемое из (11) при $c = z_0$.

Если положить $c = re^{i\alpha}$, где $r \geqslant 0$ и α — действительные числа, то решение (11) записывается в форме

$$z = re^{\lambda t + i\alpha}. \tag{12}$$

Расщепим теперь уравнение (10) на действительную и мнимую части. Мы имеем:

$$\dot{x} + i\dot{y} = (\mu + i\nu)(x + iy) = (\mu x - \nu y) + i(\nu x + \mu y),$$

или

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - \nu y, \\ \dot{y} &= \nu x + \mu y. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Таким образом, система (13) двух действительных уравнений равносильна одному комплексному уравнению (10), и потому произвольное решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ системы (13) связано с произвольным решением (12) уравнения (10) соотношением

$$\varphi(t) + i\psi(t) = re^{\lambda t + i\alpha} = r(e^{\mu t}\cos(\nu t + \alpha) + i\sin(\nu t + \alpha)).$$

Отсюда получаем:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) = re^{\mu t}\cos(\nu t + \alpha), \\ y &= \psi(t) = re^{\mu t}\sin(\nu t + \alpha). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Итак, пользуясь комплексными функциями и уравнениями, мы нашли решение (14) системы (13) действительных уравнений.

2. Дадим еще один пример расщепления комплексного уравнения на два действительных. Пусть

$$\dot{z} = z^2 + iz$$

— комплексное уравнение, где $z = x + iy$ есть комплексная неизвестная функция действительного переменного t. Мы имеем:

$$\dot{x} + i\dot{y} = (x + iy)^2 + i(x + iy) = (x^2 - y^2 - y) + i(2xy + x)$$

и потому

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - y^2 - y, \\ \dot{y} &= 2xy + x. \end{aligned}\right.$$

§ 6. Некоторые сведения о линейных дифференциальных уравнениях

Система дифференциальных уравнений называется *линейной*, если все неизвестные функции и их производные, вместе взятые, входят в уравнения системы линейно. Таким образом, система линейных уравнений самого общего вида может быть записана в форме

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(x^j)^{(k)} + b_i(t) = 0; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь $x^1, \ldots, x^n$ — неизвестные функции независимого переменного t, а коэффициенты $a_{ijk}(t)$ и свободные члены $b_i(t)$ уравнений являются функциями t. Если все свободные члены системы (1) тождественно равны нулю, то система называется *однородной*. Каждой линейной системе соответствует однородная линейная система, получающаяся из нее отбрасыванием свободных членов. Таким образом, линейной системе (1) соответствует линейная однородная система

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(y^j)^{(k)} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Отметим несколько непосредственно проверяемых свойств линейных систем. При их формулировке будет предполагаться, что все коэффициенты и свободные члены линейной системы определены и непрерывны на интервале $q_1 < t < q_2$; все рассматриваемые решения будут предполагаться заданными на всем интервале $q_1 < t < q_2$.

А) Если $y^i = \varphi^i(t)$ и $y^i = \psi^i(t)$; $i = 1, \ldots, n$ — два решения линейной однородной системы (2), а c_1 и c_2 — два произвольных числа, то система функций

$$y^i = c_1\varphi^i(t) + c_2\psi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

также представляет собой решение однородной системы (2). Аналогичное утверждение справедливо также для трех и большего числа решений однородной системы (2).

Б) Если $x^i = \psi^i(t)$ и $x^i = \chi^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, — два решения линейной системы (1), то система функций

$$y^i = \chi^i(t) - \psi^i(t); \qquad i = 1, \ldots, n,$$

представляет собой решение системы однородных уравнений (2). Далее, если $y^i = \varphi^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, есть решение однородной системы уравнений (2), а $x^i = \psi^i(t)$; $i = 1, \ldots, n$, есть решение линейной системы (1), то система функций

$$x^i = \varphi^i(t) + \psi^i(t); \qquad i = 1, \ldots, n,$$

представляет собой решение линейной системы (1).

В) Допустим, что свободные члены системы линейных уравнений (1) представлены в виде сумм:

$$b_i(t) = \alpha c_i(t) + \beta d_i(t); \qquad i = 1, \ldots, n;$$

рассмотрим наряду с системой (1) две системы уравнений:

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(x^j)^{(k)} + c_i(t) = 0; \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\sum_{j,k} a_{ijk}(t)(x^j)^{(k)} + d_i(t) = 0; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Если $x^i = \psi^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, есть решение системы (3), а $x^i = \chi^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, есть решение системы (4), то система функций

$$x^i = \alpha\psi^i(t) + \beta\chi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

представляет собой решение системы (1).

ГЛАВА ВТОРАЯ

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами представляют собой большой и важный класс обыкновенных дифференциальных уравнений, решающихся до конца при помощи элементарных функций. Ввиду того, что решение этих уравнений принципиально не представляет больших трудностей, часто считают, что они не имеют сколько-нибудь значительного интереса для теории, и в учебниках им обычно отводят место простого примера к общей теории линейных уравнений. Между тем линейные уравнения с постоянными коэффициентами имеют многочисленные технические применения, так как работа весьма многих технических объектов достаточно адэкватным образом описывается этими уравнениями. Именно технические применения выдвигают ряд новых задач теоретического характера в теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Решению этих теоретических задач посвящено немало работ, имеющих прикладную направленность, и некоторые из них нашли отражение в настоящей главе. Так, в этой главе используются обычные для инженерной практики операционные обозначения, которые очень удобны для решения систем уравнений методом исключения. Рассматривается вопрос об устойчивости решений систем линейных уравнений, очень важный в теории автоматического управления. Далее, излагается так называемый метод комплексной амплитуды, представляющий собой удобный способ нахождения частных установившихся решений и широко применяемый в электротехнике.

Не ограничиваясь решением чисто математических задач, порожденных практикой, я привожу здесь в очень краткой догматической форме изложение теории электрических цепей. Расчет электрических цепей дает хорошую и важную с технической точки зрения иллюстрацию развитых в этой главе математических методов.

Кроме того, в настоящую главу включено исследование фазовой плоскости линейных систем второго порядка, которому предшествует самое начальное изучение фазовых пространств автономных (вообще говоря, нелинейных) систем. Фазовые пространства автономных систем также находят важные приложения в технике.

Благодаря всему сказанному глава о линейных уравнениях с постоянными коэффициентами занимает в этой книге значительно больше места, чем это обычно бывает в учебниках по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изложение всего материала настоящей главы очень элементарно, за исключением лишь § 14, где используется жорданова форма матриц. Все сделанное при помощи жордановой формы в дальнейшем не употребляется и может быть пропущено, как это подробно указано в § 14.

§ 7. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами (случай простых корней)

В этом и следующем параграфах будет решено линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами порядка n, т. е. уравнение

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \dot{z} + a_n z = 0, \qquad (1)$$

где z есть неизвестная функция независимого переменного t, а коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ суть постоянные числа (действительные или комплексные). Сначала будут найдены все комплексные решения этого уравнения, а затем (в случае, когда коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ действительны) из них будут выделены действительные решения. Уравнение (1) можно записать в виде:

$$z^{(n)} = -a_1 z^{(n-1)} - \ldots - a_{n-1} \dot{z} - a_n z, \qquad (2)$$

так что к нему применима теорема существования и единственности (см. предложение В) § 5). В дальнейшем будет использована лишь единственность, так как решения уравнения (2) будут найдены явно и тем самым существование их будет установлено; единственность же будет использована для доказательства того, что найдены все решения.

В инженерных применениях обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами важную роль играет операционное исчисление. Мы используем здесь *символические* (или, иначе, *операционные*) *обозначения*, лежащие в основе операционного исчисления. Суть этих обозначений заключается в том, что производная по времени t от произвольной функции $z = z(t)$ обозначается не через $\frac{d}{dt} z$, а через pz, так что буква p, стоящая слева от функции, является символом дифференцирования по t. Если позволить себе применить к символу дифференцирования p некоторые алгебраические действия, то мы приходим к обозначению

$$\frac{d^k}{dt^k}z = p^k z.$$

Пользуясь этим обозначением, мы можем написать

$$a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{z} + a_n z =$$
$$= a_0 p^n z + a_1 p^{n-1} z + \ldots + a_{n-1} p z + a_n z.$$

Если теперь в правой части последнего равенства позволить себе вынести за скобку функцию z, то мы получаем равенство

$$a_0 z^n + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{z} + a_n z =$$
$$= (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n) z.$$

Таким образом, мы приходим к формальному определению.

А) Пусть

$$L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$$

— произвольный многочлен относительно символа p с постоянными коэффициентами (действительными или комплексными) и z — некоторая действительная или комплексная функция действительного переменного t. Положим:

$$L(p) z = a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{z} + a_n z. \tag{3}$$

Если $L(p)$ и $M(p)$ суть два произвольных многочлена относительно символа p (или, как говорят, *оператора дифференцирования* p), а z, z_1, z_2 — функции переменного t, то, как легко видеть, мы имеем тождества

$$L(p)(z_1 + z_2) = L(p) z_1 + L(p) z_2,$$
$$(L(p) + M(p)) z = L(p) z + M(p) z,$$
$$L(p)(M(p) z) = (L(p) M(p)) z.$$

В силу введенных обозначений уравнение (1) может быть записано в виде:

$$L(p) z = 0, \tag{4}$$

где

$$L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n.$$

Б) Пусть $L(p)$ — произвольный многочлен относительно символа p. Тогда

$$L(p) e^{\lambda t} = L(\lambda) e^{\lambda t}. \tag{5}$$

Докажем формулу (5). Мы имеем

$$p e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$$

(см. формулу (9) § 5). Из этого следует, что $p^k e^{\lambda t} = \lambda^k e^{\lambda t}$. Отсюда формула (5) вытекает непосредственно (см. (3)).

Из формулы (5) следует, что функция $e^{\lambda t}$ тогда и только тогда является решением уравнения (4), когда число λ есть корень многочлена $L(p)$. Многочлен $L(p)$ называется *характеристическим многочленом* уравнения (4). В том случае, когда он не имеет кратных корней, совокупность всех решений уравнения (4) описывается следующей теоремой.

Теорема 4. *Предположим, что характеристический многочлен $L(p)$ уравнения*

$$L(p)z = 0 \tag{6}$$

(см. (1) и (4)) *не имеет кратных корней, и обозначим его корни через*

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n.$$

Положим:

$$z_1 = e^{\lambda_1 t}, \; z_2 = e^{\lambda_2 t}, \; \ldots, \; z_n = e^{\lambda_n t}. \tag{7}$$

Тогда при любых комплексных постоянных $c^1, c^2, \ldots, c^n$ функция

$$z = c^1 z_1 + c^2 z_2 + \ldots + c^n z_n \tag{8}$$

является решением уравнения (6). *Решение это является общим в том смысле, что каждое решение уравнения* (6) *может быть получено по формуле* (8) *при надлежащем выборе констант $c^1, c^2, \ldots, c^n$. При этом константы $c^1, c^2, \ldots, c^n$ (называемые постоянными интегрирования) однозначно определяются для каждого данного решения z.*

Заметим, что функции (7) определены на всей числовой прямой $-\infty < t < +\infty$.

Доказательство. Из формулы (5) следует, что каждая функция системы (7) является решением уравнения (6), а из того, что уравнение (6) линейно и однородно, вытекает (см. § 6, А)), что при произвольных комплексных константах $c^1, c^2, \ldots, c^n$ формула (8) дает решение уравнения (6). Покажем, что если $z_* = z_*(t)$ есть произвольное решение уравнения (6), то оно может быть записано в виде (8). В силу предложения B) § 5 мы можем считать, что решение z_* определено на всей прямой $-\infty < t < \infty$. Положим:

$$z_*(0) = z_0, \quad \dot{z}_*(0) = \dot{z}_0, \quad \ldots, \quad z_*^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}.$$

Покажем теперь, что константы $c_1, c_2, \ldots, c_n$ можно выбрать так, чтобы и решение $z(t)$, определяемое формулой (8), удовлетворяло тем же начальным условиям

$$z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0, \quad \ldots, \quad z^{(n-1)}(0) = z_0^{n-1}. \tag{9}$$

Подставляя функцию z из формулы (8) в уравнения (9), получаем:

$$c^1 z_1^{(s)}(0) + \ldots + c^n z_n^{(s)}(0) = z_0^{(s)}; \qquad s = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{10}$$

Соотношения (10) представляют собой систему из n уравнений относительно неизвестных $c^1, c^2, \ldots, c^n$. Для того чтобы система (10) была разрешима, достаточно, чтобы детерминант матрицы

$$\begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) & \ldots & z_n(0) \\ \dot{z}_1(0) & \dot{z}_2(0) & \ldots & \dot{z}_n(0) \\ \ddot{z}_1(0) & \ddot{z}_2(0) & \ldots & \ddot{z}_n(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{(n-2)}(0) & z_2^{(n-2)}(0) & \ldots & z_n^{(n-2)}(0) \\ z_1^{(n-1)}(0) & z_2^{(n-1)}(0) & \ldots & z_n^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} \tag{11}$$

не обращался в нуль.

Непосредственно видно, что матрица (11) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

и потому ее детерминант (детерминант Вандермонда) отличен от нуля, так как все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ попарно различны. Однако мы дадим другое (непосредственное) доказательство того, что детерминант матрицы (11) отличен от нуля. Доказательство это в дальнейшем будет обобщено и на случай кратных корней.

Если бы детерминант матрицы (11) обращался в нуль, то существовала бы линейная зависимость между ее строками. Допустим, что эта линейная зависимость имеет место. Это значит, что существуют такие числа $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0$, не обращающиеся одновременно в нуль, что, умножая на них строки матрицы (11) и складывая, получаем нулевую строку. Выписывая k-й член этой нулевой строки, получаем:

$$b_{n-1}z_k(0) + b_{n-2}\dot{z}_k(0) + \ldots + b_1 z_k^{(n-2)}(0) + b_0 z_k^{(n-1)}(0) = 0. \tag{12}$$

Если обозначить через $M(p)$ многочлен $b_0p^{n-1} + b_1p^{n-2} + \ldots + b_{n-2}p + b_{n-1}$, то соотношение (12) можно записать в виде:

$$M(p)z_k\,|_{t=0} = 0.$$

В силу формул (5) и (7), отсюда получаем:

$$M(\lambda_k) = 0,$$

а это невозможно, так как степень многочлена $M(p)$ не превосходит $n-1$, потому он не может иметь n различных корней

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_n$. Полученное противоречие показывает, что детерминант системы (10) отличен от нуля, и потому константы $c^1, \ldots, c^n$ можно (и притом однозначно) выбрать так, чтобы решения $z_*(t)$ и $z(t)$ удовлетворяли одинаковым начальным условиям. При таком (и только при таком) выборе этих констант решение (8) совпадает с заданным решением $z_*(t)$.

Итак, теорема 4 доказана.

Если коэффициенты многочлена $L(p)$, входящего в уравнение (6), действительны, то возникает вопрос о выделении действительных решений из совокупности (8) всех комплексных решений.

Решение этого вопроса опирается на предложение Г), при формулировке и доказательстве которого мы будем пользоваться векторными обозначениями. Напомним их здесь.

В) *Вектором* n-мерного пространства будем называть последовательность, состоящую из n чисел:

$$\boldsymbol{u} = (u^1, u^2, \ldots, u^n).$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ — вектор, а $u^1, u^2, \ldots, u^n$ — числа, называемые его *координатами*. Векторы всегда будем обозначать жирными буквами. Если координаты вектора — действительные числа, то вектор считается *действительным*, если же координаты его *комплексны*, то и сам вектор считается комплексным. Вектор $\bar{\boldsymbol{u}}$, *комплексно сопряженный* с вектором $\boldsymbol{u}$, определяется равенством

$$\bar{\boldsymbol{u}} = (\overline{u^1}, \overline{u^2}, \ldots, \overline{u^n}).$$

Очевидно, что вектор $\boldsymbol{u}$ тогда и только тогда является действительным, когда

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}.$$

Произведение вектора $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2, \ldots, u^n)$ на действительное или комплексное число α определяется формулой

$$\alpha\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\alpha = (\alpha u^1, \alpha u^2, \ldots, \alpha u^n).$$

Сумма векторов

$$\boldsymbol{u} = (u^1, u^2, \ldots, u^n) \text{ и } \boldsymbol{v} = (v^1, v^2, \ldots, v^n)$$

определяется формулой

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u^1 + v^1, u^2 + v^2, \ldots, u^n + v^n).$$

Нулевым вектором называется вектор $\boldsymbol{0}$, все координаты которого равны нулю.

Пусть

$$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$$

— конечная система векторов. Соотношение

$$\alpha^1\boldsymbol{u}_1 + \alpha^2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + \alpha^r\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{0},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — числа, среди которых имеются не равные нулю, называется *линейной зависимостью* между векторами $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$. Если между векторами не существует линейной зависимости, то они называются *линейно независимыми*. Пусть

$$\boldsymbol{u}_j = (u_j^1, u_j^2, \ldots, u_j^n), \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Числа u_j^l образуют матрицу (u_j^i); $l = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, r$. Если считать, что верхний индекс l указывает номер строки, а нижний j — номер столбца, то матрица (u_j^i) имеет высоту n и ширину r. Таким образом, вектору $\boldsymbol{u}_j$ в матрице (u_j^l) соответствует j-й столбец (состоящий из координат этого вектора). Отсюда видно, что линейной зависимости векторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ соответствует линейная зависимость столбцов матрицы (u_j^i). В случае $r = n$ матрица (u_j^i) квадратна, и векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ тогда и только тогда линейно независимы, когда детерминант $|u_j^i|$ этой матрицы отличен от нуля.

Г) Пусть

$$\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_n \tag{13}$$

— система из n линейно независимых комплексных векторов в n-мерном пространстве. Допустим, что система (13) вместе с каждым вектором содержит сопряженный ему вектор. При этих предположениях вектор $\boldsymbol{z}$, определяемый формулой

$$\boldsymbol{z} = c^1\boldsymbol{z}_1 + \ldots + c^n\boldsymbol{z}_n, \tag{14}$$

тогда и только тогда действителен, когда коэффициенты, стоящие при сопряженных векторах, сопряжены, а коэффициенты, стоящие при действительных векторах, действительны.

Докажем это. Будем предполагать для определенности, что выполнены соотношения

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\boldsymbol{z}}_1 = \boldsymbol{z}_2, \ \ldots, \ \overline{\boldsymbol{z}_{2k-1}} = \boldsymbol{z}_{2k}, \\ &\overline{\boldsymbol{z}}_j = \boldsymbol{z}_j; \ j = 2k+1, \ \ldots, \ n. \end{aligned}\right\}$$

Тогда вектор $\boldsymbol{z}$ согласно (14) имеет вид:

$$\boldsymbol{z} = c^1\boldsymbol{z}_1 + c^2\boldsymbol{z}_2 + \ldots + c^{2k-1}\boldsymbol{z}_{2k-1} + c^{2k}\boldsymbol{z}_{2k} + c^{2k+1}\boldsymbol{z}_{2k+1} + \ldots + c^n\boldsymbol{z}_n, \tag{15}$$

а вектор $\overline{\boldsymbol{z}}$ — вид:

$$\overline{\boldsymbol{z}} = \overline{c^2}\boldsymbol{z}_1 + \overline{c^1}\boldsymbol{z}_2 + \ldots + \overline{c^{2k}}\boldsymbol{z}_{2k-1} + \overline{c^{2k-1}}\boldsymbol{z}_{2k} + \overline{c^{2k+1}}\boldsymbol{z}_{2k+1} + \ldots + \overline{c^n}\boldsymbol{z}_n. \tag{16}$$

Если

$$c^1 = \overline{c^2}, \ \ldots, \ c^{2k-1} = \overline{c^{2k}}, \quad c^{2k+1} = \overline{c^{2k+1}}, \ \ldots, \ c^n = \overline{c^n}, \tag{17}$$

то из равенств (15) и (16) следует, что $\overline{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{z}$, т. е. что вектор $\boldsymbol{z}$ действителен. Если, наоборот, предположить, что вектор $\boldsymbol{z}$ действителен, т. е. что $\bar{z} = z$, то равенства (15) и (16) дают (в силу линейной независимости векторов (13)) систему соотношений (17).

Итак, предложение Г) доказано.

Нижеследующее предложение Д) дает способ выделения действительных решений из совокупности всех комплексных решений уравнения (6) в случае, когда коэффициенты многочлена $L(p)$ действительны.

Д) Допустим, что коэффициенты многочлена $L(p)$ действительны; тогда наряду с каждым комплексным корнем λ многочлен $L(p)$ имеет сопряженный с ним корень $\bar{\lambda}$. Решения $e^{\lambda t}$ и $e^{\bar{\lambda} t}$ уравнения (6) сопряжены между собой (см. § 5,Г)). Если же корень λ действителен, то решение $e^{\lambda t}$ действительно. Таким образом, наряду с каждым решением в системе решений (7) имеется также комплексно сопряженное с ним решение. Для того чтобы решение (8) уравнения (6) было действительным, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты, стоящие при комплексно сопряженных решениях, были сопряжены, а коэффициенты при действительных решениях действительны.

Для доказательства обозначим через z_k вектор с координатами $\{z_k(0), \dot{z}_k(0), \ldots, z_k^{(n-2)}(0), z_k^{(n-1)}(0)\}$ и через z — вектор с координатами $\{z_0, \dot{z}_0, \ldots, z_0^{(n-1)}\}$. Тогда соотношения (10) принимают вид:

$$c^1 z_1 + c^2 z_2 + \ldots + c^n z_n = z.$$

Векторы $z_1, z_2, \ldots, z_n$ линейно независимы, так как детерминант матрицы (11) отличен от нуля. Таким образом, необходимость приведенного в Д) условия следует непосредственно из Г). С другой стороны, если это условие выполнено, то решение (8) действительно. В самом деле, если λ_1 и λ_2 — два комплексно сопряженных корня, а c^1 и c^2 — две комплексно сопряженные константы, то функции $c^1 e^{\lambda_1 t}$ и $c^2 e^{\lambda_2 t}$ комплексно сопряжены, а следовательно, их сумма действительна.

Итак, предложение Д) доказано.

Примеры

1. Найдем все комплексные решения уравнения

$$\dddot{z} - 3\ddot{z} + 9\dot{z} + 13z = 0.$$

Его можно записать в виде (6), где

$$L(p) = p^3 - 3p^2 + 9p + 13.$$

Непосредственно проверяется, что $p = -1$ есть корень характеристического многочлена $L(p)$. Разделив $L(p)$ на $p + 1$, получаем:

$$L(p) = (p + 1)(p^2 - 4p + 13),$$

откуда находим еще два корня $2 \pm 3i$. Таким образом, корнями многочлена $L(p)$ являются числа

$$\lambda_1 = 2 + 3i, \quad \lambda_2 = 2 - 3i, \quad \lambda_3 = -1.$$

В силу теоремы 4 общее комплексное решение рассматриваемого уравнения имеет вид:

$$z = c^1 e^{(2+3i)t} + c^2 e^{(2-3i)t} + c^3 e^{-t}.$$

В нижеследующих примерах 2 и 3 даются два общих правила выделения действительных решений. Правила эти непосредственно вытекают из предложения Д).

2. Будем считать, что система решений (7) удовлетворяет условиям

$$\bar{z}_1 = z_2, \ \ldots, \bar{z}_{2k-1} = z_{2k}, \quad \overline{z_{2k+1}} = z_{2k+1}, \ \ldots, \bar{z}_n = z_n, \tag{18}$$

и положим:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \ \ldots, \ z_{2k-1} = x_k + iy_k,$$

где $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k$ — действительные функции. Будем, далее, считать, что числа $c^1, c^2, \ldots, c^n$ удовлетворяют условиям (17) и положим:

$$c^1 = \frac{1}{2}(a^1 - ib^1), \ \ldots, \ c^{2k-1} = \frac{1}{2}(a^k - ib^k),$$

где $a^1, \ldots, a^k, b^1, \ldots, b^k$ — действительные числа. При этих обозначениях общее действительное решение уравнения (6) записывается в виде:

$$z = a^1 x_1 + b^1 y_1 + \ldots + a^k x_k + b^k y_k + c^{2k+1} z_{2k+1} + \ldots + c^n z_n,$$

где

$$a^1, b^1, \ldots, a^k, b^k, c^{2k+1}, \ldots, c^n$$

суть произвольные действительные числа.

3. Опять будем считать, что решения (7) удовлетворяют условиям (18); положим:

$$\lambda_1 = \mu_1 + i\nu_1, \ \ldots, \ \lambda_{2k-1} = \mu_k + i\nu_k.$$

В предположении, что числа $c^1, c^2, \ldots, c^n$ удовлетворяют условиям (17), мы можем положить:

$$c^1 = \frac{1}{2}\rho_1 e^{i\alpha_1}, \ \ldots, \ c^{2k-1} = \frac{1}{2}\rho_k e^{i\alpha_k}.$$

В этих обозначениях каждое действительное решение z записывается в виде:

$$z = \rho_1 e^{\mu_1 t}\cos(\nu_1 t + \alpha_1) + \ldots + \rho_k e^{\mu_k t}\cos(\nu_k t + \alpha_k) + \\ + c^{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} + \ldots + c^n e^{\lambda_n t}.$$

Здесь $\rho_1, \ldots, \rho_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, c^{2k+1}, \ldots, c^n$ суть произвольные действительные константы. Из последней записи видно, что каждая мнимая часть $\nu_j \neq 0$ корня λ_j придает решению колебательный характер частоты ν_j, а каждая действительная часть μ_j корня λ_j дает ему либо рост (при $\mu_j > 0$), либо убывание (при $\mu_j < 0$).

4. Используя результаты примеров 2 и 3, мы можем записать все действительные решения уравнения, рассмотренного в примере 1, в двух следующих формах:

$$z = a^1 e^{2t} \cos 3t + b^1 e^{2t} \sin 3t + c^3 e^{-t},$$
$$z = \rho_1 e^{2t} \cos (3t + \alpha_1) + c^3 e^{-t}.$$

§ 8. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами (случай кратных корней)

Если характеристический многочлен

$$L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$$

уравнения

$$L(p) z = 0 \qquad (1)$$

(см. § 7, А)) имеет кратные корни, то среди функций вида $e^{\lambda t}$ нельзя найти n различных решений уравнения (1). Для нахождения в этом случае решений другого вида можно воспользоваться следующим наводящим соображением. Пусть λ_1 и λ_2 — два различных действительных корня характеристического многочлена $L(p)$; тогда функция $\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ является решением уравнения (1). Если теперь предположить, что при изменении коэффициентов многочлена $L(p)$ число λ_2 стремится к λ_1, то это решение переходит (в пределе) в функцию $te^{\lambda_1 t}$, о которой естественно предположить, что она является решением уравнения (1) в случае, если λ_1 есть двукратный корень многочлена $L(p)$. Аналогично мы приходим к догадке, что если λ есть k-кратный корень характеристического многочлена $L(p)$, то решениями уравнения (1) являются все функции:

$$e^{\lambda t}, \ te^{\lambda t}, \ \ldots, \ t^{k-1} e^{\lambda t}.$$

Распространяя эту догадку на случай комплексных кратных корней, мы приходим к предположению о справедливости нижеследующей теоремы (являющейся обобщением теоремы 4):

Теорема 5. *Пусть*

$$L(p) z = 0 \qquad (2)$$

— линейное однородное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами. Пусть, далее, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — совокупность всех попарно различных корней характеристического многочлена $L(p)$ уравнения (2), причем корень λ_j имеет кратность k_j, так что