Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
Кафедра информатики

Отчет по лабораторной работе №7
Интерполяция сплайнами

Выполнил:
студент группы 153503
Щиров П.Д.

Руководитель:
доцент
Анисимов В.Я.

Минск 2022

Содержание

1. Цель работы

Изучить и реализовать построение кубических интерполяционных сплайнов.

2. Теоретические сведения

Интерполяция сплайнами

Рассмотрим задачу интерполяции функции *f(x)* на отрезке [*a, b*]. Пусть мы имеем узлы $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ и значения функции $y_0,...,y_n$ в данных узлах. Отрезок разбивается узлами на *n* элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $h_i = x_i - x_{i-1}$ − длина элементарного отрезка, $i = \overline{1,n}$.

Сплайном называется функция *S(x)*, которая на каждом элементарном отрезке является многочленом и непрерывна на всем отрезке [*a, b*], вместе со своими производными до некоторого порядка.

Степенью сплайна называется наивысший порядок степени многочлена.

Дефектом сплайна называется разность между его степенью и наивысшим порядком непрерывной на [*a, b*] производной.

Пример. Рассмотрим функцию

$$S(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x < 3 \\ \dfrac{x^3}{27} - x + 4, & 3 \le x < 4. \end{cases}$$

Очевидно, функция $S(x)$ является кубическим сплайном на отрезке [*0, 4*], так как она непрерывна в узловых точках.

Действительно,

$S(1-0) = S(1+0) = 1$, $S(2-0) = S(2+0) = 2$, $S(3-0) = S(3+0) = 2$.

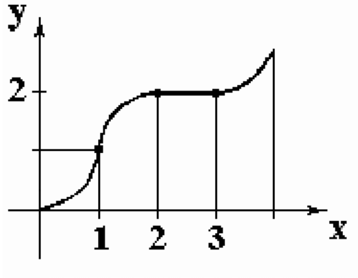


Рис. 7.3.

Найдем дефект сплайна.

$S'(1-0)=S'(1+0)=2,\ S'(2-0)=S'(2+0)=0,\ S'(3-0)=S'(3+0)=0.$

В то же время $S''(2-0)=-2,\ \ S''(2+0)=0.$

Таким образом, наибольший порядок непрерывной производной функции S на отрезке $[0,4]$ равен 1 и, следовательно, дефект сплайна равен 2. (См. рис. 7.3).

Отметим, что в общем случае сам сплайн многочленом не является. Чтобы он был многочленом, необходимо и достаточно, чтобы его дефект равнялся нулю.

Будем рассматривать кубические сплайны, у которых непрерывны первая и вторая производные.

Тогда на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ сплайн *S(x)* имеет вид

$$S(x)=a_i+b_i(x-x_{i-1})+c_i(x-x_{i-1})^2+d_i(x-x_{i-1})^3, \quad i=\overline{1,n}.$$

Очевидно, $S(x_i)=y_i$, $i=\overline{0,n}$. Найдем *S(x)*. Для этого требуется определить значения *4n* неизвестных коэффициентов. Очевидно, для этого необходимо иметь *4n* уравнений для определения коэффициентов.

Подставим левый конец отрезка (x_{i-1}) в уравнение:

$$S(x_{i-1})=y_{i-1}=a_i, \qquad i=\overline{1,n}$$

$$S(x_{i+1})=y_i=a_i+b_ih_i+c_ih_i^2+d_ih_i^3, \qquad i=\overline{1,n}.$$

В итоге получаем *2n* уравнений:

$$\begin{cases} y_{i-1}=a_i & i=\overline{1,n} \\ a_i+b_ih_i+c_ih_i^2+d_ih_i^3=y_i & i=\overline{1,n}. \end{cases}$$

Далее во всех внутренних узлах должны совпадать первая и вторая производные *S(x)*. Имеем

$$S'(x)=b_i+2c_i(x-x_{i-1})+3d_i(x-x_{i-1})^2,$$

$$S''(x)=2c_i+6d_i(x-x_{i-1}), \qquad i=\overline{1,n-1}.$$

Приравниваем во внутренних узлах значения левых и правых производных. Получим:

$$\begin{cases} b_i+2c_ih_i+3d_ih_i^2=b_{i+1} & i=\overline{1,n}, \\ c_i+3d_ih_i=c_{i+1}, \end{cases}$$

т. е. (*2n-2*) уравнений.

Недостающие два уравнения можно задать разными способами. Обычно берут $S''(x_0)=S''(x_n)=0$.

Отсюда

$$2c_1=0, \qquad 2c_n+6d_nh_n=0.$$

Для удобства положим еще $c_{n+1}=0$.

Объединяя все уравнения, получим систему

$$\begin{cases} y_{i-1} = a_i & i=\overline{1,n} \\ a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i & i=\overline{1,n} \\ b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} & i=\overline{1,n-1} \\ c_i + 3d_i h_i = c_{i+1} & i=\overline{1,n-1} \\ c_n + 3d_n h_k = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$\begin{cases} b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i - y_{i-1} & i=\overline{1,n} \\ 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} - b_i & i=\overline{1,n-1} \\ d =_i \dfrac{c_{i+1}-c_i}{3h_i} \\ c_1 = c_{n+1} = 0, \end{cases}$$

далее

$$\begin{cases} a_i = y_{i-1} & i=\overline{1,n} \\ b_i h_i + c_i h_i^2 + \left(\dfrac{(c_{i+1}-c_i)h_i^2}{3}\right) = y_i - y_{i-1} & i=\overline{1,n} \\ 2c_i h_i + (c_{i+1}-c_i)h_i = b_{i+1} - b_i & i=\overline{1,n-1} \\ d =_i \dfrac{c_{i+1}-c_i}{3h_i} & i=\overline{1,n} \\ c_1 = c_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Откуда

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - c_i h_i - \frac{(c_{i+1}-c_i)h_i}{3}, \qquad i=\overline{1,n}.$$

$$2c_i h_i + (c_{i+1}-c_i)h_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - c_{i+1}h_{i+1} - \frac{(c_{i+2}-c_{i+1})h_{i+1}}{3} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + c_i h_i + \frac{(c_{i+1}-c_i)h_i}{3}.$$

Таким образом, задача определения коэффициентов сплайна свелась к решению системы

$$c_i(\frac{h_i}{3}) + c_{i+1}(\frac{2}{3}h_i + \frac{2}{3}h_{i+1}) + c_{i+2}(\frac{h_{i+1}}{3}) = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \qquad i=\overline{1,n-1}$$

$$c_1 = c_{n+1} = 0.$$

Система трехдиагональна. Будем решать ее методом прогонки. Поскольку для матрицы системы выполнено условие доминирования диагональных элементов

$$\frac{2}{3}h_i + \frac{2}{3}h_{i+1} > \frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3},$$

то задача имеет решение, причем единственное, и это решение можно найти методом прогонки.

Описание

Функция $f(x)$задана на отрезке $[a, b]$, разбитом на части $[x_{i-1}, x_i]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Кубическим сплайном дефекта 1 (разность между степенью и гладкостью сплайна) называется функция $S(x)$, которая:

- на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ является многочленом степени не выше третьей;
- имеет непрерывные первую и вторую производные на всём отрезке $[a, b]$;
- в точках x_i выполняется равенство $S(x_i) = f(x_i)$, т. е. сплайн $S(x)$ интерполирует функцию fв точках x_i.

Для однозначного задания сплайна перечисленных условий недостаточно, для построения сплайна необходимо наложить дополнительные требования — граничные условия:

1. "Естественный сплайн" — граничные условия вида: $S''(a) = S''(b) = 0$;
2. Непрерывность второй производной — граничные условия вида: $S'''(a) = S'''(b) = 0$;
3. Периодический сплайн — граничные условия вида: $S'(a) = S'(b)$и $S''(a) = S''(b)$.

Теорема: Для любой функции f и любого разбиения отрезка $[a, b]$на части $[x_{i-1}, x_i]$существует ровно один естественный сплайн $S_i(x)$, удовлетворяющий перечисленным выше условиям.

Эта теорема является следствием более общей теоремы Шёнберга-Уитни об условиях существования интерполяционного сплайна.

Построение

На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, N}$ функция $S(x)$ есть полином третьей степени $S_i(x)$, коэффициенты которого надо определить. Запишем для удобства $S_i(x)$ в виде:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

тогда

$$S_i\,(x_i) = a_i, \quad S_i'(x_i) = b_i, \quad S_i''(x_i) = 2c_i, \quad S_i'''\,(x_i) = 6d_i \quad i = \overline{1, N}.$$

Условия непрерывности всех производных до второго порядка включительно записываются в виде

$$\begin{aligned} S_i\,(x_{i-1}) &= S_{i-1}(x_{i-1}), \\ S_i'\,(x_{i-1}) &= S_{i-1}'(x_{i-1}), \\ S_i''\,(x_{i-1}) &= S_{i-1}''(x_{i-1}), \end{aligned}$$

где i меняется от 1 до N, а условия интерполяции в виде

$$S_i\,(x_i) = f(x_i).$$

Обозначим: $\quad h_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = \overline{1, N}), \quad f_i = f(x_i) \quad (i = \overline{0, N})$

Отсюда получаем формулы для вычисления коэффициентов "Естественного сплайна":

$$\begin{aligned} &a_i = f(x_i); \\ &d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{3 \cdot h_i}; \\ &b_i = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i} + \frac{2 \cdot c_i + c_{i-1}}{3} \cdot h_i; \\ &c_{i-1} \cdot h_i + 2 \cdot c_i \cdot (h_i + h_{i+1}) + c_{i+1} \cdot h_{i+1} = 3 \cdot \left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h_{i+1}} - \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i} \right), \end{aligned}$$

причем $c_N = S''(x_N) = 0$ и $c_1 - 3 \cdot d_1 \cdot h_1 = S''(x_0) = 0$.

Если учесть, что $c_0 = c_N = 0$, то вычисление c можно провести с помощью метода прогонки для трёхдиагональной матрицы.

Метод прогонки применяется для трехдиагональных систем, которые имеют матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix},$$

т. е. матрицу, у которой ненулевыми могут быть только элементы, стоящие на главной и двух смежных с главной диагоналях. Т.е. трехдиагональная систем имеет вид:

$$\begin{cases} b_1x_1 + c_1x_2 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 = d_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = d_{n-1} \\ a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n \end{cases}$$

Суть метода прогонки заключается в построении рекуррентной последовательности для нахождения прогоночных коэффициентов A_i и B_i, а каждое неизвестное представляется в виде

$$x_i = A_ix_{i+1} + B_i.$$

Для удобства полагают, что $a_n = 0$, $c_n = 0$ и тогда формулы для прогоночных коэффициентов принимают следующий вид:

$$\begin{cases} A_i = \dfrac{-c_i}{a_iA_{i-1} + b_i} \\ B_i = \dfrac{d_i - a_iB_{i-1}}{a_iA_{i-1} + b_i}. \end{cases} \qquad i = \overline{1,n}.$$

При этом

$$\begin{cases} \mathrm{x_i} = A_i \cdot x_{i+1} + B_i, \quad i = \overline{1,n-1} \\ x_n = B_n. \end{cases}$$

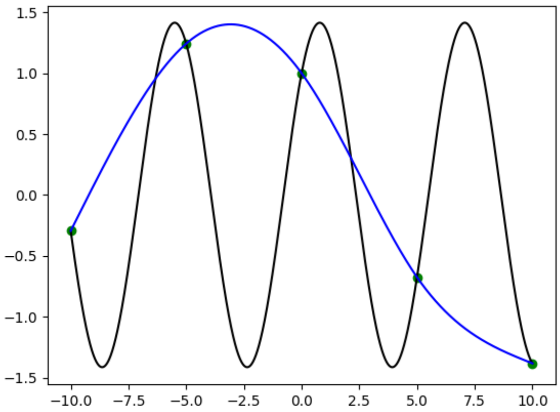
Проводя обратный ход метода прогонки, последовательно найдем значения неизвестных $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$.

3. Программная реализация

Построить кубические интерполяционные сплайны

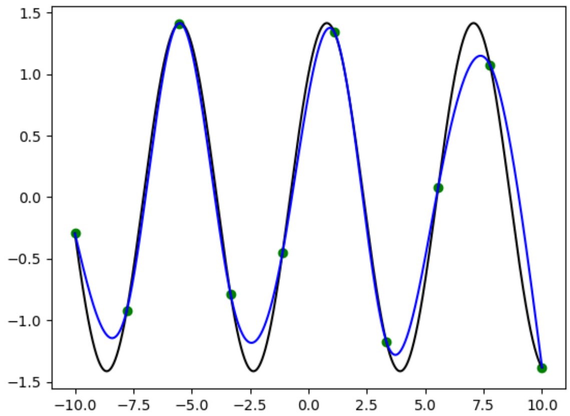
Тестовый пример 1

Функция	*a*	*узлов*	*b*
$y = \sin(x) + \cos(x)$	*-10*	*5*	*10*



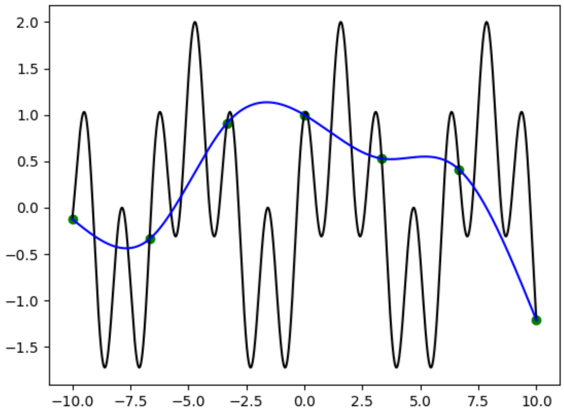
Тестовый пример 2

Функция	*a*	*узлов*	*b*
$y = \sin(x) + \cos(x)$	*-10*	*10*	*10*



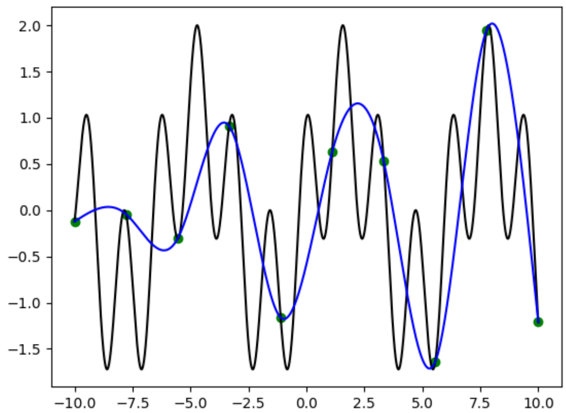
Тестовый пример 3

Функция	*a*	*узлов*	*b*
$y = \sin(x) + \cos(4x)$	*-10*	*7*	*10*



Тестовый пример 4

Функция	*a*	*узлов*	*b*
$y = \sin(x) + \cos(4x)$	*-10*	*10*	*10*

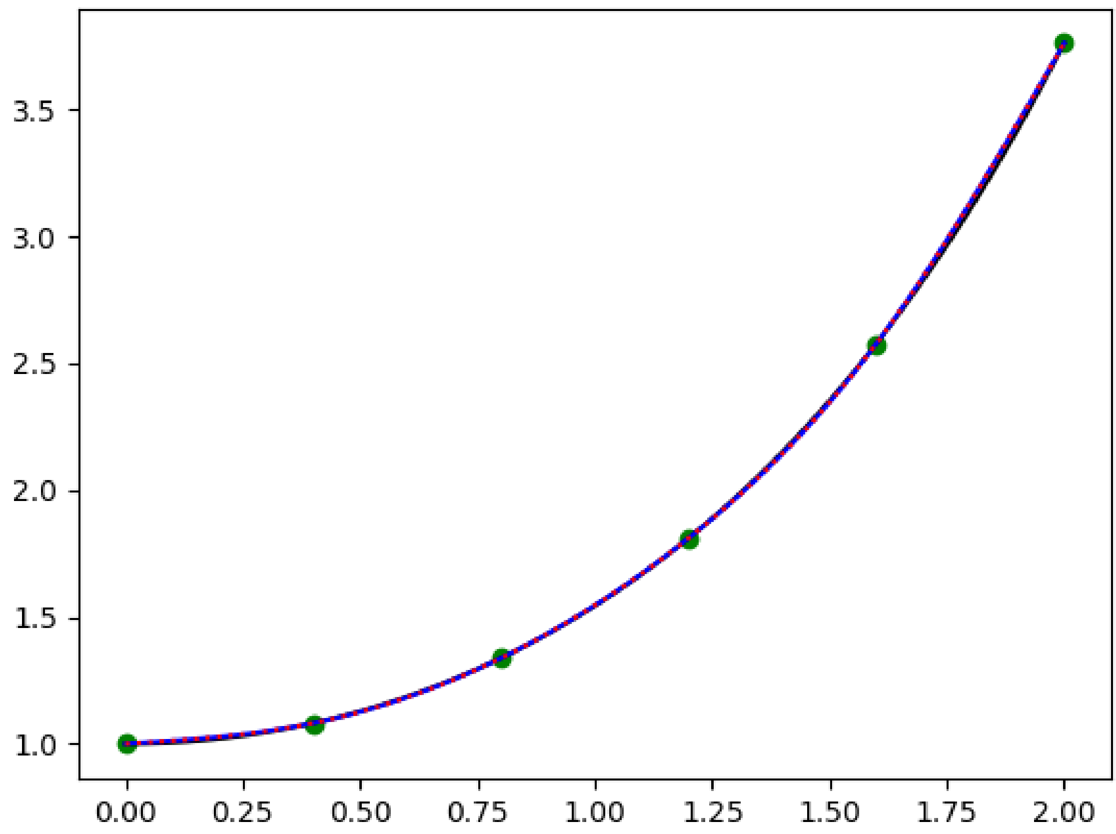


ЗАДАНИЕ

Вариант 7

Произвести интерполирование кубическими сплайнами функции заданного варианта. Вычислить значение сплайна в точке. Сравнить полученное значение со значением исходной функции.

Ответ:

<table>
<tr><td colspan="2">Функция</td><td colspan="2">Интервал</td><td colspan="2">Число узлов</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = ch(x)$</td><td colspan="2">$[0, 2]$</td><td colspan="2">6</td></tr>
<tr><td colspan="6">Значение в точке $x = \frac{b-a}{2} = 1$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Исходная функция</td><td colspan="3">Кубический сплайн</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\approx\ 1.5431$</td><td colspan="3">$\approx\ 1.5455$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$|\Delta| \approx 0.0024$</td></tr>
<tr><td colspan="6">
</td></tr>
</table>

4. Выводы

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы была освоена интерполяция функций с помощью кубических сплайнов. Составлена компьютерная программа, на тестовых примерах проверена правильность её работы, построены кубические интерполяционные сплайны, вычислено значение функции в точке согласно заданному варианту.