

# Лабораторная работа №2

## Ряды Фурье.

### Щиров Павел, 153503

### Вариант 10

#### Процедура-функция построения тригонометрического ряда Фурье.

```

BuildFourierSeries := proc( func, leftBorder, rightBorder, count)
    local l, a0, fourierSeries :
description "Построение ряда Фурье для функции 'func' на заданном промежутке" :
    l := 
$$\frac{\text{rightBorder} - \text{leftBorder}}{2}$$
 ;

    a0 := 
$$\frac{1}{l} \cdot \int_{\text{leftBorder}}^{\text{rightBorder}} \text{func}(x) dx$$
 :

    assume(n ∈ ℤ) :

    a(n) := 
$$\frac{1}{l} \cdot \int_{\text{leftBorder}}^{\text{rightBorder}} \text{func}(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right) dx$$
 :

    b(n) := 
$$\frac{1}{l} \cdot \int_{\text{leftBorder}}^{\text{rightBorder}} \text{func}(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right) dx$$
 :

    fourierSeries := 
$$\frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{\text{count}} \left( a(n) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right) + b(n) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right) \right)$$
 :

    return fourierSeries :
end proc;
```

#### Построение графика.

```

PlotFourierSeries := proc( func, leftBorder, rightBorder, count, selected_color, legend_)
    local l, fourierSeries :
description "Построение графика ряда Фурье для функции 'func' на заданном промежутке" :
```

```

    fourierSeries(x) := BuildFourierSeries( func, leftBorder, rightBorder, count) :
        l :=  $\frac{rightBorder - leftBorder}{2}$  :

    return plot(fourierSeries(x), x = leftBorder - 2·l .. rightBorder + 2·l, discount
        = [showremovable], color = selected_color, legend = legend_) :
        end proc:

```

## Процедура для анимации построения графика.

```

> AnimatePlottingProcess := proc( func, leftBorder, rightBorder, count)
    local l, a0, fourierSeries :
    description "Построение графика ряда Фурье для функции 'func' на заданном
        промежутке" :
        l :=  $\frac{rightBorder - leftBorder}{2}$  :

        a0 :=  $\frac{1}{l} \cdot \int_{leftBorder}^{rightBorder} func(x) dx$  :

        assume(n ∈ ℤ) :

        a(n) :=  $\frac{1}{l} \cdot \int_{leftBorder}^{rightBorder} func(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right) dx$  :

        b(n) :=  $\frac{1}{l} \cdot \int_{leftBorder}^{rightBorder} func(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right) dx$  :

        fourierSeries(x, number) :=  $\frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{number} \left( a(n) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right) + b(n) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right) \right)$  :
    return plots[animate](plot, [[func(x), fourierSeries(x, number)], x = leftBorder - 2·l
        .. rightBorder + 2·l], number = 1 .. count, digits = 1, frames = count) :
        end proc:

```

**Задание 1: (получить разложение в тригонометрический ряд Фурье для  $2\pi$ -периодической функции, построить на промежутке  $[-3\pi, 3\pi]$  графики  $S_1(x)$ ,  $S_3(x)$ ,  $S_7(x)$  и  $S(x)$ )**

```

> fl := x →  $\begin{cases} -\pi - x & -\pi \leq x < 0 \\ \pi & 0 \leq x < \pi \end{cases}$  :

```

>

$f(x)' = \text{BuildFourierSeries}(f1, -\pi, \pi, \infty);$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{((-1)^n - 1) \cos(nx)}{\pi n^2} + \frac{\left( \frac{\pi}{n} - \frac{\pi((-1)^n - 1)}{n} \right) \sin(nx)}{\pi} \right) \quad (4.1)$$

>  $\text{fourierPlot1} := \text{PlotFourierSeries}(f1, -\pi, \pi, 1000, \text{blue},$

$\text{'Разложение в тригонометрический ряд'}) :$

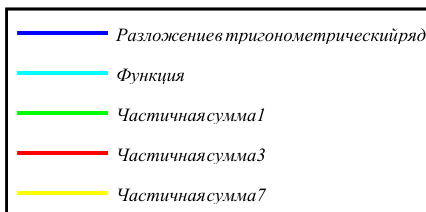
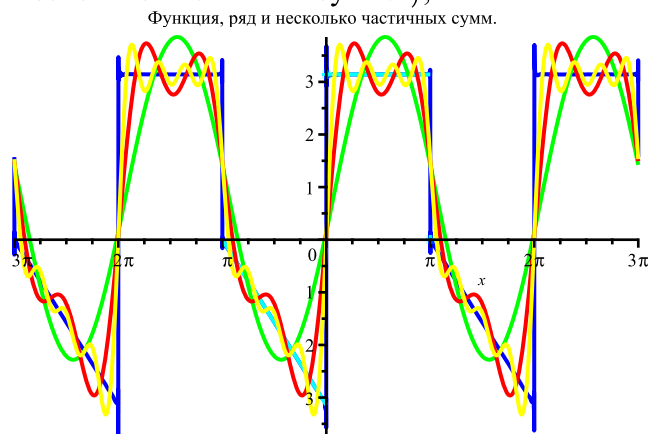
$\text{partSum1} := \text{PlotFourierSeries}(f1, -\pi, \pi, 1, \text{green}, \text{'Частичная сумма1'}) :$

$\text{partSum3} := \text{PlotFourierSeries}(f1, -\pi, \pi, 3, \text{red}, \text{'Частичная сумма3'}) :$

$\text{partSum7} := \text{PlotFourierSeries}(f1, -\pi, \pi, 7, \text{yellow}, \text{'Частичная сумма7'}) :$

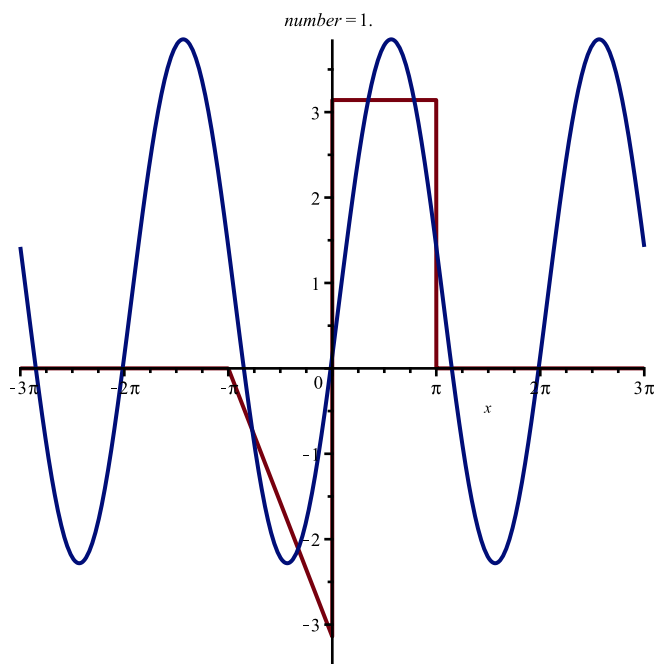
$\text{funcPlot1} := \text{plot}(f1(x), x = -\pi.. \pi, \text{discont} = [\text{showremovable}], \text{color} = \text{cyan}, \text{legend} = \text{'Функция'}) :$

$\text{plots[display]}([ \text{fourierPlot1}, \text{funcPlot1}, \text{partSum1}, \text{partSum3}, \text{partSum7}], \text{title} = \text{'Функция, ряд и несколько частичных сумм.'}) ;$



>

$\text{AnimatePlottingProcess}(f1, \pi, \pi, 15);$



**Задание 2:** Получить разложение тригонометрический в ряд Фурье для  $x_2$ -периодической функции, заданной на промежутке  $(0, x_1)$  формулой  $y=ax+b$ , а на промежутке  $[x_1, x_2]$  —  $y = c$ . Построить на промежутке  $[-2 \cdot x_2, 2 \cdot x_2]$  графики  $S_1(x)$ ,  $S_3(x)$ ,  $S_7(x)$  и  $S(x)$

```

> f2 := x -> {
    - 1/2 * x + 3    0 < x < 2
    - 2              2 ≤ x ≤ 6
    :
};

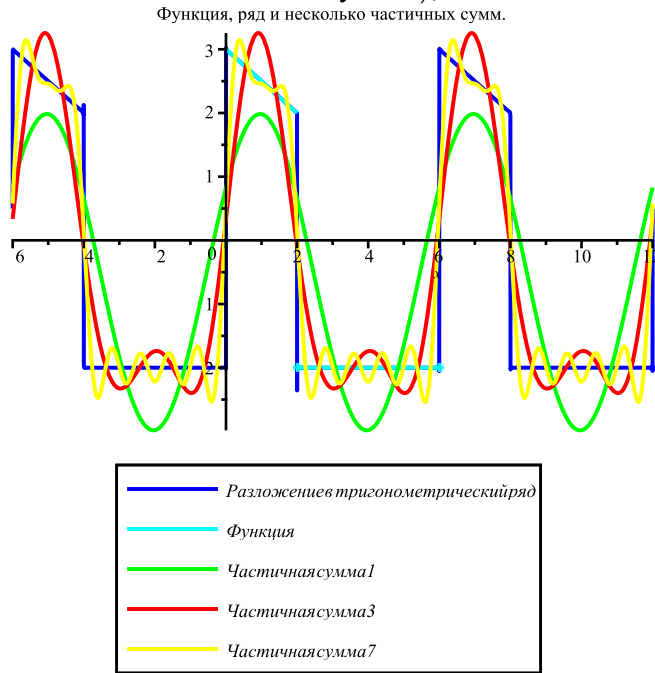
> 'f(x)' = simplify(BuildFourierSeries(f2, 0, 6, ∞));

f(x) = 1/2 * (sum_{n=1}^∞ 1/(n^2 * π^2) * (
    (8 * π * n * sin(2 * π * n / 3) - 3 * cos(2 * π * n / 3) + 3) * cos(π * n * x / 3)
    - 8 * (π * n * cos(2 * π * n / 3) - 5 * π * n / 4 + 3 * sin(2 * π * n / 3)) * sin(π * n * x / 3)
)) - 1/2

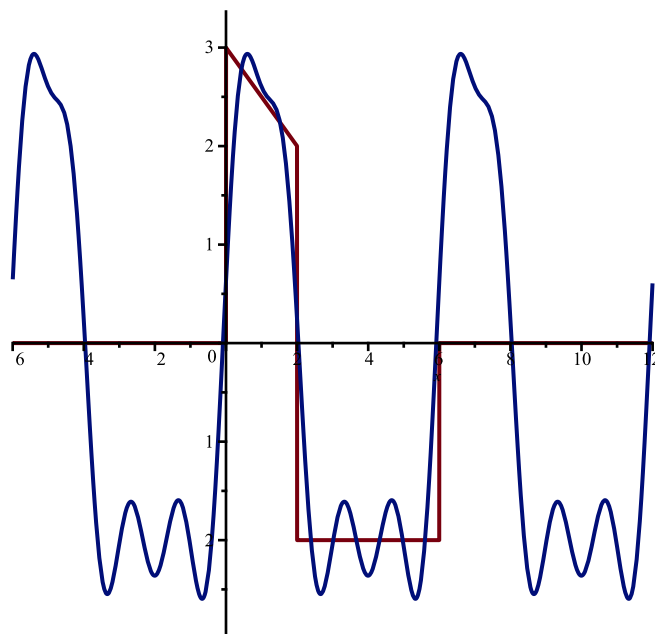
> fourierPlot2 := PlotFourierSeries(f2, 0, 6, 10000, blue,
    'Разложение в тригонометрический ряд'):
    partSum1_2 := PlotFourierSeries(f2, 0, 6, 1, green, 'Частичная сумма1'):
    partSum3_2 := PlotFourierSeries(f2, 0, 6, 3, red, 'Частичная сумма3'):
    partSum7_2 := PlotFourierSeries(f2, 0, 6, 7, yellow, 'Частичная сумма7'):
    funcPlot2 := plot(f2(x), x = 0..6, discont = [showremovable], color = cyan, legend = 'Функция
    ');

```

```
plots[display]([fourierPlot2, funcPlot2, partSum1_2, partSum3_2, partSum7_2], title
= "Функция, ряд и несколько частичных сумм.");
```



```
AnimatePlottingProcess(f2, 0, 6, 15);
number = 4.
```



**Задание 3: Для графически заданной функции построить три разложения в тригонометрический ряд Фурье, считая, что функция определена:**

- на полном периоде,
- на полупериоде и является четной,
- на полупериоде и является нечетной.

**Построить графики сумм полученных рядов на промежутке, превышающем длину заданного в 3 раза.**

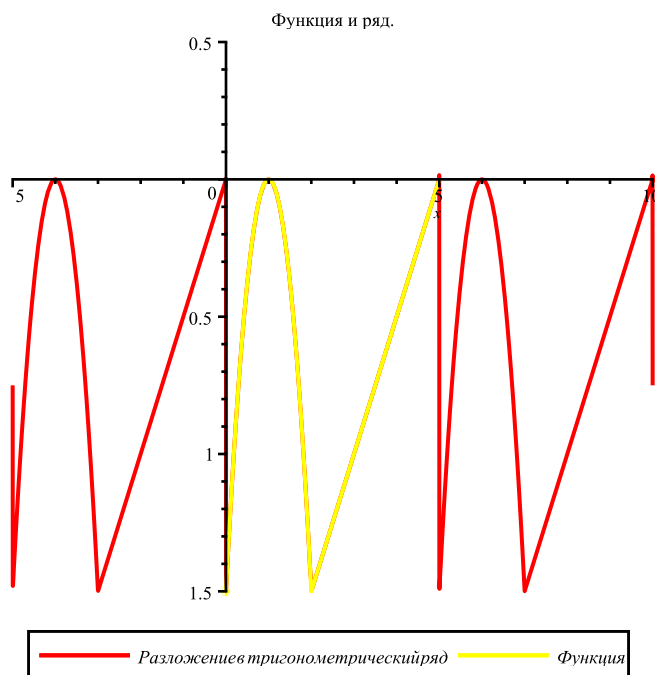
$$\begin{aligned}
 & \text{f3\_default} := x \mapsto \begin{cases} -\frac{3}{2} \cdot (x-1)^2 & 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2} \cdot x - \frac{5}{2} & 2 \leq x \leq 5 \end{cases} \\
 & \text{f3\_default} := x \mapsto \begin{cases} -\frac{3 \cdot (x-1)^2}{2} & 0 \leq x < 2 \\ \frac{x}{2} - \frac{5}{2} & 2 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{'f(x)'} = \text{simplify}(\text{BuildFourierSeries}(\text{f3\_default}, 0, 5, \infty)); \\
 & f(x) = -\frac{1}{4} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \pi^3} \left( \left( 6 \pi^2 n^2 + 35 \pi n \sin\left(\frac{4 \pi n}{5}\right) + 75 \cos\left(\frac{4 \pi n}{5}\right) \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - 75 \right) \sin\left(\frac{2 \pi n x}{5}\right) + 35 \cos\left(\frac{2 \pi n x}{5}\right) \right) \left( \pi n \cos\left(\frac{4 \pi n}{5}\right) + \frac{5 \pi n}{7} \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{15 \sin\left(\frac{4 \pi n}{5}\right)}{7} \right) \right) - \frac{13}{20} \quad (6.2)
 \end{aligned}$$

```

> fourierPlot3_default := PlotFourierSeries(f3_default, 0, 5, 10000, red,
      'Разложение в тригонометрический ряд'):
funcPlot3_default := plot(f3_default(x), x = 0..5, y = -1.2..0.5,
      color = yellow, legend = 'Функция'):
plots[display]([fourierPlot3_default, funcPlot3_default], title = "Функция и ряд.")

```

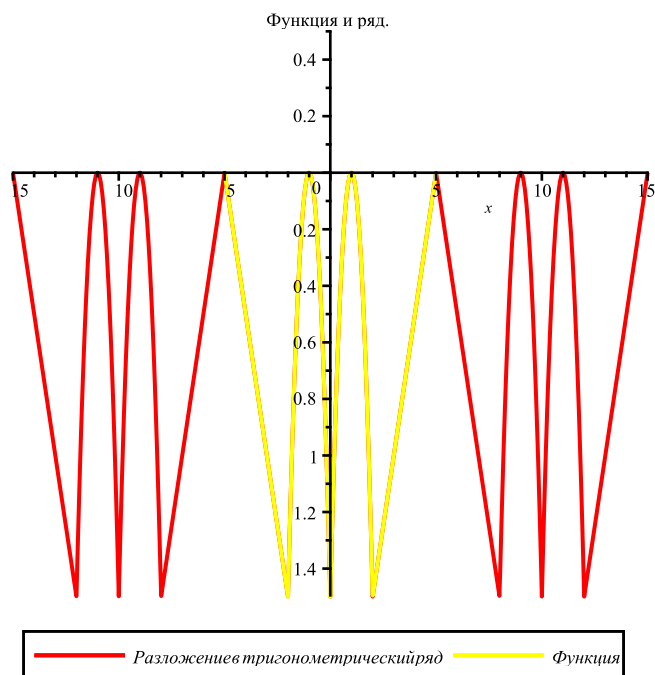


$$\begin{aligned}
 & \text{f3\_even} := x \rightarrow \begin{cases} \text{f3\_default}(x) & -5 \leq x < 0 \\ \text{f3\_default}(x) & 0 \leq x \leq 5 \end{cases} \\
 & \text{f3\_even} := x \mapsto \begin{cases} \text{f3\_default}(x) & -5 \leq x < 0 \\ \text{f3\_default}(x) & 0 \leq x \leq 5 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

> 'f(x)' = simplify(BuildFourierSeries(f3\_even, 5, 5, ∞));

$$f(x) = \frac{13}{20} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\pi (-1)^n n - 7 \pi n \cos\left(\frac{2 \pi n}{5}\right) + 6 \pi n + 30 \sin\left(\frac{2 \pi n}{5}\right)}{n^3 \pi^3} \cos\left(\frac{\pi n x}{5}\right) \right) \right) \tag{6.4}$$

> fourierPlot3\_even := PlotFourierSeries(f3\_even, 5, 5, 10000, red,  
'Разложение в тригонометрический ряд') :  
funcPlot3\_even := plot(f3\_even(x), x = -5..5, y = 1.2..0.5, discount = [showremovable], color  
= yellow, legend = 'Функция') :  
plots[display]([fourierPlot3\_even, funcPlot3\_even], title = "Функция и ряд.")



$$\begin{aligned}
 & \text{f3\_odd} := x \rightarrow \begin{cases} \text{f3\_default}(x) & -5 \leq x < 0 \\ \text{f3\_default}(x) & 0 \leq x \leq 5 \end{cases} \\
 & \text{f3\_odd} := x \mapsto \begin{cases} \text{f3\_default}(x) & -5 \leq x < 0 \\ \text{f3\_default}(x) & 0 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{'f(x)'} = \text{simplify}(\text{BuildFourierSeries}(\text{f3\_odd}, 5, 5, \infty)); \\
 & f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3 \sin\left(\frac{\pi n x}{5}\right) \left( n^2 \pi^2 + \frac{35 \pi n \sin\left(\frac{2 \pi n}{5}\right)}{3} + 50 \cos\left(\frac{2 \pi n}{5}\right) 50 \right)}{n^3 \pi^3} \right) \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

```

> fourierPlot3_odd := PlotFourierSeries(f3_odd, 5, 5, 10000, red,
    'Разложение в тригонометрический ряд'):
funcPlot3_odd := plot(f3_odd(x), x = -5..5, y = 1.2..1.2, discont = [showremovable], color
    = yellow, legend = 'Функция'):
plots[display]([fourierPlot3_odd, funcPlot3_odd], title = "Функция и ряд.")

```



