Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

Дисциплина: Прикладные задачи математического анализа

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
к курсовой работе
на тему

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

БГУИР КП 1-40 04 01

Студент: гр.153503 Щиров П.Д.

Руководитель: канд. ф-м. н., доцент
Анисимов В.Я.

Минск 2022

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения играют особо важную роль в повседневной жизни. Очень многие и важные законы окружающего мира и природы выражаются в форме дифференциальных уравнений. Невозможно найти науку, которая не использовала бы дифференциальных уравнений для трактовки всяческих законов и закономерностей. Казалось бы, даже законы свободного падения описываются дифференциальными уравнениями. Без уравнений Максвелла, например, не было бы электродинамики и ее приложений к электротехнике. Без теории упругости, без механики сплошных сред у человечества не было бы возможности строить серьезные здания, мосты, метро. Современная химия не совершила бы огромный скачок вперед в производстве материалов и химикатов, ведь без дифференциальных уравнений невозможно было бы описать течение химических реакций. Реактивное движение, которое используют ракеты, самолеты и другие изобретения человечества, также основано на дифференциальных уравнениях.

Также, решая дифференциальные уравнения, можно получить информацию о том, как будет развиваться та или иная система со временем. Начиная от информации о том, как будет меняться температура грунта вокруг трубы, уложенной в землю, при изменении уличной температуры, заканчивая поведением самолета в воздухе

Цель данной курсовой работы – проанализировать, собрать и обобщить теоретические данные по дифференциальным уравнениям, осмыслить связь теоретических данных со сферами человеческой деятельности и сделать заключительные выводы о применении дифференциальных уравнений к решению прикладных задач.

Исследование данной темы будет проходить в двух разделах. Первый раздел, он же теоретический, будет освещать теорию дифференциальных уравнений. Также в этом разделе будут собраны все основные термины и определения, которые в дальнейшем будут использованы в практической части.

Второй раздел, посвященный применению теоретических данных по теме дифференциальных уравнений, будет применять изученную теорию на практике. Будет рассмотрена практическая задача, решение которой будет базировано на дифференциальных уравнениях.

В процессе изучения теоретических данных и решения практической задачи по выбранной теме будет использоваться программный инструмент – система компьютерной алгебры (СКА) Maple.

Maple − одна из лидирующих систем для выполнения символьных преобразований математических выражений, проведения численных расчетов с очень большой степенью точности, обработки данных и визуализации результатов. К настоящему времени программа, ежегодно обновляясь, превратилась в мощный вычислительный комплекс, предназначенный для реализации сложных научно-технических проектов и моделирования. Интуитивно понятный алгоритмический язык Maple позволяет программировать решение задач при отсутствии в системе нужной встроенной команды и создавать пользовательские библиотеки. Наличие отличного редактора предоставляет возможность получения документа с высоким полиграфическим качеством.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Понятие дифференциального уравнения возникло практически одновременно с созданием во второй половине XVII века Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем теории дифференциального и интегрального исчисления, как естественное обобщение обычных алгебраических уравнений. В дифференциальном уравнении неизвестной является функция, а само уравнение должно содержать в себе хотя бы одну производную искомой функции.

Первоначально дифференциальные уравнения появились в физических задачах. Например, второй закон Ньютона, связывающий ускорение тела (т.е. производную скорости тела или вторую производную его положения) с действующей на это тело силой, автоматически превращается в дифференциальное уравнение, если рассматриваемая сила зависит либо от скорости тела, либо от его местоположения.

Другим важным источником дифференциальных уравнений на первых порах оказались геометрические задачи, в которых по известному свойству касательных к некоторой кривой требовалось найти кривую, удовлетворяющую заданному свойству. Классической задачей этого типа является задача о трактрисе, в которой нужно найти кривую, отрезок касательной к которой, заключенный между точкой касания и осью координат, имел бы постоянную длину.

Уравнение для определения функции называют дифференциальным, если в нем участвуют дифференциалы или производные искомой функции. Таким образом, дифференциальное уравнение учитывает не только величину искомой функции, но и поведение (прежде всего скорость изменения в том или ином направлении) её бесконечно малой окрестности рассматриваемого значения аргумента

Решением дифференциального уравнения называют функцию, заданную на связном множестве и обращающую дифференциальное уравнение в тождество. Характерной особенностью дифференциального уравнения является то, что каждое уравнение определяет сразу целое семейство решений, зависящее от некоторой совокупности параметров.

Дифференциальное уравнение обычно выражает некоторый закон, которому подчиняется бесконечное множество конкретных процессов. Для выделения конкретного процесса, которому соответствует отдельное решение дифференциального уравнения, называются дополнительные условия – начальные и граничные, которые в совокупности называются краевыми [1].

По классификации дифференциальных уравнений, существует два основных типа дифференциальных уравнений:

- Обыкновенные – определяющие функции одного переменного
- В частных производных – в которые входят производные от искомой функции по нескольким переменным

Порядком дифференциального уравнения называют порядок старшей производной, участвующей в уравнении.

Дифференциальное уравнение имеет нормальную форму, если оно разрешено относительно старшей производной. В противном случае форма дифференциального уравнения становится общей. К отдельному виду относятся линейные дифференциальные уравнения.

Семейство решений обыкновенного дифференциального уравнения зависит от скалярных параметров, что проявляется в присутствии произвольных постоянных в решении уравнения. Если число произвольных постоянных совпадает с порядком уравнения, то найденное семейство решений называется общим решением уравнения.

Общее решение может быть заданным как в явном, так и в неявном виде. В частности, общее решение уравнения первого порядка, разрешенное относительно произвольной постоянной, называется общим интегралом.

Придавая произвольным постоянным фиксированные значения, получаются частные решения уравнения.

Общим решением простейшего дифференциального уравнения первого порядка:

$$f x, y, y'=0,$$

Где f – заданная функция, называется общее выражение бесконечного множества функций, удовлетворяющих данному дифференциальному уравнению, определяемое в явном виде:

$$y=F(x, C)$$

или в неявном:

$$\Phi x, y, C=0,$$

где C – произвольная постоянная.

Все решения некоторых дифференциальных уравнений могут быть найдены с помощью конечного числа простейших аналитических операций и интегрирований. Такие уравнения называются элементарными [1].

Среди дифференциальных уравнений первого порядка важнейшим элементарным уравнением является уравнение в полных дифференциалах, то есть уравнение с условием:

$$dP(x, y)dy=dQ(x, y)dx$$

В односвязной области задания, все решения которого (общий интеграл) дает формула:

$$(x0, y0)(x,y)Px,ydx+Qx,ydy=C$$

Где C – произвольная постоянная, а криволинейный интеграл берется по произвольному пути с фиксированным началом (x0, y0) и переменным концом (x, y).

Основным элементарным дифференциальным уравнением произвольного порядка является линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами ai i=1, 2, …, n:

$$y(n)+a1y(n-t)+\ldots+any=f(x)$$

Общее решение однородного уравнения можно построить с помощью алгебраических операций. Общее решение неоднородного уравнения дает сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения.

В некоторых случаях дифференциальные уравнения приводятся к основным элементарным формам с помощью преобразования уравнения или замены переменных. Особую роль играют равносильные и допустимые преобразования и замены. При равносильных преобразованиях семейство решений транспонированного уравнения совпадает с семейством решений исходного уравнения.

Преобразование уравнения некоторой прикладной задачи называется допустимым, если оно сохраняет решения, имеющие смысл с точки зрения условия поставленной задачи (при допустимых преобразованиях могут теряться или приобретаться только решения, не имеющие физического смысла).

Примером допустимого преобразования служит деление обеих частей уравнения на искомую функцию y=y(x), если по смыслу задачи разыскиваемое решение не должно обращаться в нуль.

В настоящее время именно элементарные дифференциальные уравнения служат главным поставщиком математических моделей различных устройств и процессов. В частности, рассматриваемые далее в практической части прикладные задачи чаще всего приводят к элементарным дифференциальным уравнениям, что позволяет провести исследование до конца.

Большинство прикладных задач сводится к построению функций, удовлетворяющих как некоторым обыкновенным дифференциальным уравнениям, так и различным дополнительным условиям, общее число которых обычно совпадает с порядком уравнения. При заданных начальных условиях для решений и их производных возникает начальная задача, называемая задачей Коши. Для дифференциального уравнения n-го порядка задача Коши состоит в построении того решения y=y(x) данного уравнения:

$$Fx, y, y', \ldots, y(n)=0,$$

Которое вместе со своими n-1 первыми производными принимает в заданной точке x=x0 заданные значения y0, y0', …, y0(n-1):

$$yx0=y0,\ y'x0=y'0, \ldots,\ yn-1x0=y0(n-1)$$

Задача Коши для уравнения первого порядка сводится к заданию значения искомой функции y(x) при x=x0.

Итак, дифференциальные уравнения объединяют и обобщают многие идеи математического анализа, раскрывают сущность метода бесконечно малых как важнейшего средства познания явлений действительности [1].

Дифференциальные уравнения возникают при математической формулировке прикладных задач в дифференциальных символах. Составить дифференциальное уравнение – это значит найти зависимость между аргументом, функцией и ее производной (или дифференциалом).

Составление дифференциального уравнения по условию задачи (механической, физической, химической, технической или любой другой) состоит обычно в определении математической зависимости между переменными величинами и их приращениями, которые сразу же заменяются соответствующими дифференциалами.

В ряде случаев дифференциальное уравнение получается без рассмотрения приращений – за счет их предварительного учета. Так, представляя скорость выражением u=dsdt, мы не привлекаем приращений Δs и Δt, хотя они фактически учтены в силу того, что:

$$u=dsdt=\Delta s\Delta t$$

Ускорение в любой момент времени t выражается зависимостью:

$$a=d2sdt2=dudt=ududs$$

Изучение любого процесса сводится к определению его отдельных моментов и установлению общего закона его течения.

Отдельный момент процесса выражается дифференциальным уравнением, связывающим переменные величины процесса с их дифференциалами или производными. Закон общего течения процесса, получаемый после интегрирования, выражается уравнением, связывающим переменные величины процесса.

В большинстве случаев методика решения прикладных задач с применением обыкновенных дифференциальных уравнений сводится к следующему:

- Подробный разбор условия задачи
- Составление дифференциального уравнения рассматриваемого процесса
- Интегрирование этого уравнения и определение его общего решения
- Определение частного решения задачи на основании начальных условий
- Определение по мере необходимости вспомогательных параметров
- Вывод общего закона рассматриваемого процесса
- Анализ ответа и проверка исходного положения задачи

Схема составления дифференциального уравнения состоит из двух этапов. Подготовительный этап включает в себя:

1. Установление в результате анализа задачи аргумента и искомой функции
2. Исследование наличия конкретного смысла у производной искомой функции
3. Поиск соотношения между дифференциалами переменных, если производная не имеет конкретного смысла
4. Фиксирование произвольного значения аргумента и соответствующего ему значения функции. Придание аргументу приращения и определения соответствующего приращения функции

Основной этап состоит из следующих шагов:

1. Попытка найти соотношение между приращением Δy функции и приращением Δx ее аргумента, то есть выражение Δy в виде функции Δx и x. Искомую функцию y можно также выразить элементарным суммированием ее последовательных приращений на отрезке от a до x.

2. Введение (в случае невозможности определение соотношения между Δx и Δy) условного элемента, заменяющего приращения Δy искомой функции и характеризуемого условным приращением, которое получила бы искомая функция при наличии допущений, упрощающих характер ее изменения и не отражающихся на точности результата. Этот элемент принимается в качестве дифференциала искомой функции.
3. Проверка корректности допущений, которые по мере приближения Δx и Δy к нулю с возрастающей степенью точности приближались бы к полной истинности. Уравнение, связывающее дифференциалы dx и dy, должно составляться на основе известных законов математики, физики, химии, механики и так далее.
4. Установление зависимости между дифференциалами искомой функции dy и ее аргумента dx в общем случае в виде простейшего уравнения

5. $fx,ydx+\varphi x,ydy=0$

6. (или дифференциального уравнения более высокого порядка) на основе сделанных допущений, которые дают возможность заменить неравномерный процесс равномерным, используя общетеоретические законы или соотношения данной прикладной области.
7. Интегрирование полученного дифференциального уравнения задачи и определение искомой функции с учетом начальных (и дополнительных) условий.
8. Исследование полученного закона задачи в предельных случаях и изучение характера зависимости решений от параметров.**(Теоретическая часть еще не закончена)**

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ИСТОЧНИКИ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович, Б. П., Моденов, В. П. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. 3-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 288 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
2. Матвеев Н. М. Дифференциальные уравнения. Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец.— М.: Просвещение, 1988.— 256 с.
3. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Для вузов.— 6-е изд., испр. и доп.— Мн.: Выш. шк., 1987.— 319 с.
4. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - 4 изд. — М., Наука, 1974. — 331 с.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - 6 изд. , 1950. — 473 с.
6. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: Учебник. Изд. 2-е, испр. — М.: КомКнига, 2007. — 240 с.
7. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. — 424 с.