Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
Кафедра информатики

Отчет по лабораторной работе №5
Вычисление собственных значений и векторов

Выполнил:
студент группы 153503
Щиров П.Д.

Руководитель:
доцент
Анисимов В.Я.

Минск 2022

Содержание

1. Цель работы

1)Освоить метод вращений Якоби для вычисления собственных значений и собственных векторов вещественной симметричной матрицы, а также степенной метод поиска максимального по модулю собственного значения и соответствующего ему собственного вектора.

2. Теоретические сведения

Итеративные алгоритмы решают задачу вычисления собственных значений путём построения последовательностей, сходящихся к собственным значениям. Некоторые алгоритмы дают также последовательности векторов, сходящихся к собственным векторам. Чаще всего последовательности собственных значений выражаются через последовательности подобных матриц, которые сходятся к треугольной или диагональной форме, что позволяет затем просто получить собственные значения. Последовательности собственных векторов выражаются через соответствующие матрицы подобия.

Метод	Применим к матрицам	Результат	Цена за один шаг	Сходимость	Описание
Степенной метод	общего вида	наибольшее собственное значение и соответствующий вектор	$O(n^2)$	Линейная	Многократное умножение матрицы на произвольно выбранный начальный вектор с последующей нормализацией.
Метод Якоби	вещественная симметричная	все собственные значения	$O(n^3)$	квадратичная	Использует поворот Гивенса в попытке избавиться от недиагональных элементов. Попытка не удаётся, но усиливает диагональ.

Метод Якоби (вращений) использует итерационный процесс, который приводит исходную симметрическую матрицу A к диагональному виду с помощью последовательности *элементарных ортогональных преобразований* (в дальнейшем называемых *вращениями Якоби* или *плоскими вращениями)*. Процедура построена таким образом, что на $(k+1)$-ом шаге осуществляется преобразование вида

$$A^{(k)} \rightarrow A^{(k+1)} = V^{(k)*} A^{(k)} V^{(k)} = V^{(k)*} \dots V^{(0)*} A^{(0)} V^{(0)} \dots V^{(k)}, \ k=0,1,2\dots, \qquad (5.1)$$

где $A^{(0)} = A$, $V^{(k)} = V^{(k)}{}_{ij}(\varphi)$ — ортогональная матрица, отличающаяся от единичной матрицы только элементами

$$v_{ii} = v_{jj} = \cos\varphi, \quad v_{ij} = -v_{ji} = -\sin\varphi, \qquad (5.2)$$

значение φ выбирается при этом таким образом, чтобы обратить в 0 наибольший по модулю недиагональный элемент матрицы $A^{(k)}$. Итерационный процесс постепенно приводит к матрице со значениями недиагональных элементов, которыми можно пренебречь, т.е. матрица $A^{(k)}$ все более похожа на диагональную, а диагональная матрица Λ является пределом последовательности $A^{(k)}$ при $k \rightarrow \infty$.

Алгоритм метода вращений.

1) В матрице $A^{(k)}$ $(k=0,1,2,\dots.)$ среди всех недиагональных элементов выбираем максимальный по абсолютной величине элемент, стоящий выше главной диагонали; определяем его номера i и j строки и столбца, в которых он стоит (если максимальных элементов несколько, можно взять любой из них);

2) По формулам

$$\cos\varphi_k = \cos\left(\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg} P_k\right),$$
$$\sin\varphi_k = \sin\left(\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg} P_k\right),$$
$$\text{где } P_k = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & \text{если } a_{ii}^{(k)} = a_{jj}^{(k)} \\ \dfrac{2\,a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}, & \text{иначе} \end{cases}$$

вычисляем $\cos\varphi_k$ и $\sin\varphi_k$, получаем матрицу $V^{(k)} = V^{(k)}_{ij}(\varphi_k)$

$$V^{(k)} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & i & & & & j & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \cos\varphi_k & \dots & \dots & \dots & -\sin\varphi_k & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \sin\varphi_k & \dots & \dots & \dots & \cos\varphi_k & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

3) По формуле

$$A^{(k+1)} = V^{(k)\mathrm{T}} \cdot A^{(k)} \cdot V^{(k)}$$

находим матрицу $A^{(k+1)}$.

4) Итерационный процесс останавливаем, когда в пределах принятой точности суммой квадратов всех недиагональных элементов матрицы $A^{(k+1)}$ можно пренебречь.

5) В качестве собственных значений матрицы A берем диагональные элементы матрицы $A^{(k+1)}$, в качестве собственных векторов – соответствующие столбцы матрицы

$$V = V^{(0)} V^{(1)} \dots V^{(k)}.$$

Основное достоинство метода Якоби заключается в том, что при выполнении каждого плоского вращения уменьшается сумма квадратов недиагональных элементов; сходимость этой суммы к нулю по мере увеличения числа шагов гарантирует сходимость процесса диагонализации.

Степенной метод или метод степенных итераций — итерационный алгоритм поиска собственного значения с максимальной абсолютной величиной и одного из соответствующих собственных векторов для произвольной матрицы.

Алгоритм прост и сходится со скоростью геометрической прогрессии если все максимальные по модулю собственные значения совпадают, в противном случае сходимости нет.

В начале алгоритма генерируется случайный вектор r_0. Далее проводятся последовательные вычисления по итеративной формуле:

$$r_{k+1} = \frac{Ar_k}{\|Ar_k\|}$$

Последовательность

$$\mu_k = \frac{r_k^T A r_k}{r_k^T r_k}$$

при указанном выше условии сходится к максимальному по модулю собственному значению, а вектор r_k образует соответствующий собственный вектор.

3. Программная реализация

Тестовый пример 1

Вычислить с точностью 0.0001 собственные значения и собственные векторы матрицы **A** =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ответ:

Тип алгоритма	Вращений Якоби	Степенной
Собственные значения:	$\lambda = [1.0000, 2.0000]$	$\lambda_{max} = 2.0000$
Собственные векторы:	$X_1 = [1.0000, 0.0000]^T$ $X_2 = [0.0000, 1.0000]^T$	$X_{max} = \begin{matrix}[0.0005]\\ [1.0000]\end{matrix}$
Количество итераций:	1	11

Тестовый пример 2

Вычислить с точностью 0.0001 собственные значения и собственные векторы матрицы **A** =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Ответ:

Тип алгоритма	Вращений Якоби	Степенной
Собственные значения:	$\lambda = [1.0000, 20.0000]$	$\lambda_{max} = 20.0000$
Собственные векторы:	$X_1 = [1.0000, 0.0000]^T$ $X_2 = [0.0000, 1.0000]^T$	$X_{max} = \begin{matrix}[0.0000]\\ [1.0000]\end{matrix}$
Количество итераций:	1	4

Тестовый пример 3

Вычислить с точностью 0.0001 собственные значения и собственные векторы матрицы **A** =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.001 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ответ:

Тип алгоритма	Вращений Якоби	Степенной
Собственные значения:	*Ошибка*	λ_{max} = 2.0000
Собственные векторы:	Ошибка: Матрица не симметрична	X_{max}= [0.0012] [1.0000]
Количество итераций:	-	12

Тестовый пример 4

Вычислить с точностью 0.0001 собственные значения и собственные векторы матрицы **A** =

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ответ:

Тип алгоритма	Вращений Якоби	Степенной
Собственные значения:	λ = [-1.4142, 0.0000, 1.4142]	λ_{max} = 1.3333
Собственные векторы:	X_1 = [0.5001, -0.7070, 0.5001] ^{T} X_2 = [0.7071, 0.0000, -0.7071] ^{T} X_3 = [0.4999, 0.7072, 0.4999] ^{T}	X_{max} = [0.4082] [0.8165] [0.4082]
Количество итераций:	7	1
Степенной метод даёт неточный ответ, так как существует несколько максимальных по модулю собственных значений		

Тестовый пример 5

Вычислить с точностью 0.0001 собственные значения и собственные векторы матрицы **A** =

$$\begin{bmatrix} 520 & 37 & 29 & 15 & 0 \\ 37 & -330 & -13 & -12 & -30 \\ 29 & -13 & 10 & 2 & 1 \\ 15 & -12 & 2 & -210 & -1 \\ 0 & -30 & 1 & -1 & 990 \end{bmatrix}$$

Ответ:

Тип алгоритма	Вращений Якоби	Степенной
Собственные значения:	λ = [-334.1564 ,-209.0250, 9.0295, 523.4670 ,	λ_{max} = 990.6850

	990.6850]	
Собственные векторы:	X_1 = [0.0462 0.0148 0.0536 0.9974 0.0017]^T X_2 = [-0.9927 0.1014 0.0442 0.0420 0.0228]^T X_3 = [-0.0407 0.0131 -0.9975 0.0553 -0.0013]^T X_4 = [-0.1011 -0.9947 -0.0079 0.0199 0.0006]^T X_5 = [-0.0225 0.0017 0.0024 0.0026 -0.9997]^T	X_{max} = [-0.0017] [-0.0228] [0.0013] [-0.0006] [0.9997]
Количество итераций:	20	17

ЗАДАНИЕ

Вариант 15

Вычислить с точностью 0.0001 собственные значения и собственные векторы матрицы **A** =

$$
\begin{bmatrix}
5.33 & 0.81 & 3.67 & 0.92 & -0.53 \\
0.81 & 5.33 & 0.81 & 3.67 & 0.92 \\
3.67 & 0.81 & 5.33 & 0.81 & 3.92 \\
0.92 & 3.67 & 0.81 & 5.33 & -0.53 \\
-0.53 & 0.92 & 3.92 & -0.53 & 5.33
\end{bmatrix}
$$

Ответ:

Метод вращений Якоби
Собственные значения: λ = [-0.4373., 1.6271, 5.7931, 8.2050, 11.4620]
Собственные векторы: $X_1 = [0.4656,\ 0.2236,\ 0.7334,\ 0.0599,\ 0.4379]^T$ $X_2 = [-0.1698,\ 0.6703,\ -0.2989,\ -0.5148,\ 0.4092]^T$ $X_3 = [-0.6610,\ -0.2058,\ 0.0891,\ 0.3806,\ 0.6066]^T$ $X_4 = [0.1758,\ -0.6769,\ -0.0688,\ -0.6149,\ 0.3579]^T$ $X_5 = [0.5353,\ -0.0136,\ -0.6001,\ 0.4565,\ 0.3804]^T$
Количество итераций = 29

Степенной метод		
Собственное значение:	λ_{max} =	11.4620
Собственный вектор	X_{max} =	[0.4379] [0.4095] [0.6064] [0.3582] [0.3802]
Количество итераций	16	

4. Выводы

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы были освоены метод вращений Якоби для вычисления собственных значений и собственных векторов вещественной симметричной матрицы, а также степенной метод поиска максимального по модулю собственного значения и соответствующего ему собственного вектора. Составлена компьютерная программа, на тестовых примерах проверена правильность её работы, с заданной точностью вычислены собственные значения и векторы матрицы заданного варианта.