Лабораторная работа №1, Щиров П.Д., 153503, Вариант 10

Задание №1. Упростить алгебраическое выражение:

 # Для упрощения выражения воспользуемся встроенной командой simplify:

> $expr1 := \dfrac{(x)^3 - 3 \cdot x - 2}{(x)^2 + 40 \cdot x + 400}$:

> $expr2 := \dfrac{(x)^4 + (x)^3 - 3 \cdot (x)^2 - 5 \cdot x - 2}{9 \cdot (x)^3 - 351 \cdot (x)^2 + 3240 \cdot x + 3600}$:

> $'answer' = simplify\left(\dfrac{expr1}{expr2}\right)$

$$answer = \frac{9\,(x-20)^2}{(x+20)^2} \qquad \textbf{(1.1)}$$

Результат упрощения находиться в выражении (1.1)

Задание №2. Приведите выражение к многочлену стандартного вида:

#Используем команду expand для приведения многослена к общему виду

> $'answer' = expand\left((3 \cdot x - 8) \cdot \left(2 \cdot (x)^2 + 3\right) \cdot (4 \cdot x + 5)\right)$

$$answer = 24\,x^4 - 34\,x^3 - 44\,x^2 - 51\,x - 120 \qquad \textbf{(2.1)}$$

#***Результат приведения находиться в выражении (2.1)***

Задание №3. Разложите многочлен на множители:

#Используем команду factor для разложения многочлена на множители

> $'answer' = factor\left((x)^4 - 16 \cdot (x)^3 + 67 \cdot (x)^2 - 64 \cdot x + 252\right)$

$$answer = (x-7)\,(x-9)\,\left(x^2+4\right) \qquad \textbf{(3.1)}$$

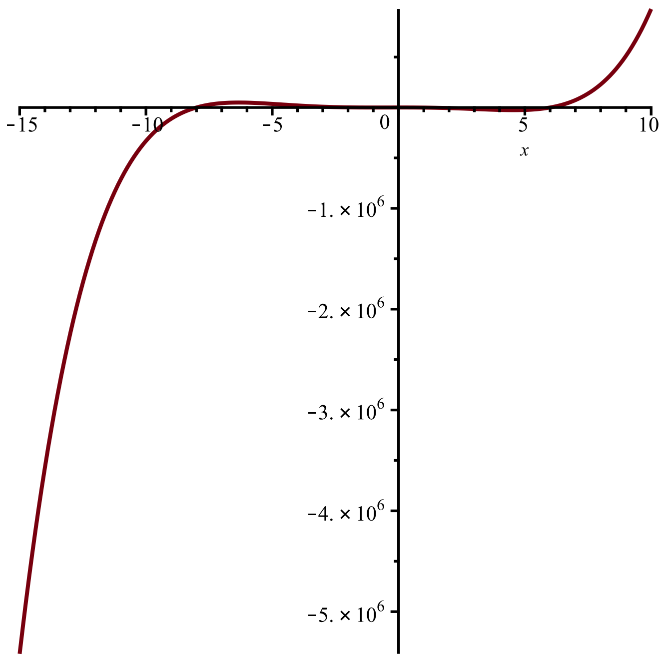
#***Результат разложения находится в выражении (3.1)***

Задание №4. Постройте график многочлена P(x) и найдите все его корни:

#Для построения графика используем команду plot

> $expr4 := 12 \cdot (x)^5 + 40 \cdot (x)^4 - 547 \cdot (x)^3 - 778 \cdot (x)^2 + 136 \cdot x + 192 :$

> $plot(expr4)$



#Для нахождения корней многочлена приравняем его к нулю и воспользуемся встроенной командой solve

> $'answer' = solve\left(12 \cdot (x)^5 + 40 \cdot (x)^4 - 547 \cdot (x)^3 - 778 \cdot (x)^2 + 136 \cdot x + 192 = 0\right)$

$$answer = \left(6, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, -8\right) \qquad \textbf{(4.1)}$$

#Корни многочлена представлены в выражении (4.1)

Задание №5. Разложите рациональную дробь на сумму простейших дробей:

#Для разложения по простейшие дроби используем функцию expand

> $'answer' = convert\left(\frac{4 \cdot (x)^4 + 3 \cdot (x)^3 + 2 \cdot x - 5}{\left((x)^2 + 1\right) \cdot (x - 3)^2 \cdot \left((x)^2 - 4\right)}, parfrac, x\right)$

(5.1)

$$answer = -\frac{1079}{250\,(x-3)} + \frac{7\,x+1}{250\,(x^2+1)} + \frac{87}{20\,(x-2)} + \frac{203}{25\,(x-3)^2} - \frac{31}{500\,(x+2)} \quad \textbf{(5.1)}$$

#Разложение находиться в выражении (5.1)

Задание №6. Решите графически уравнение и найдите его приближенные корни с точностью до 10^{-5}:

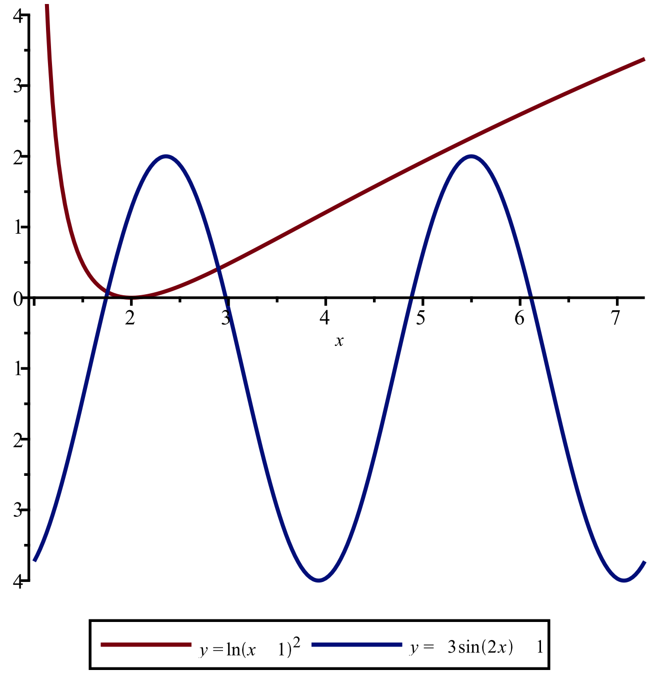
#Построим графики функций с помощью функции plot, для удобства используя опцию legend

> $with(RootFinding):$

> $Digits := 6:$

> $expr6 := (\ln(x-1))^2 = -3\sin(2\cdot x) - 1:$

> $plot\left(\left[(\ln(x-1))^2,\ -3\sin(2\cdot x)-1\right], legend = \left['y = (\ln(x-1))^2', 'y = -3\sin(2\cdot x) - 1'\right]\right)$



#Находим первый корень

> $'answer1' = fsolve(\ expr6, x\ = 1\ ..2.5)$

$$answer1 = 1.75478 \quad \textbf{(6.1)}$$

#Находим второй корень

> $'answer2' = fsolve(\ expr6, x\ = 2.5\ ..4)$

$$answer2 = 2.89696 \quad \textbf{(6.2)}$$

#В результате получаем два корня, **в** $\cdot$ **(6.1) и** $\cdot$ **(6.2)** ***соответсвтенно***

Задание №7. Докажите, что
$\lim_{n \to \infty} (a_n) = a$, определив номер n_ε,

начиная с которого все члены последовательности $\cdot (a_n)$ попадут в ε-окрестность точки *a*. Проиллюстрируйте полученный результат с помощью чертежа в Maple, положив ε = 0.1:

#Воспользуемся свойствами пределов и составим неравенство с соответствующими параметрами

>

> $solve\left(\frac{7 \cdot n + 3}{6 \cdot n - 1} - \frac{7}{6} < 0.1\right)$

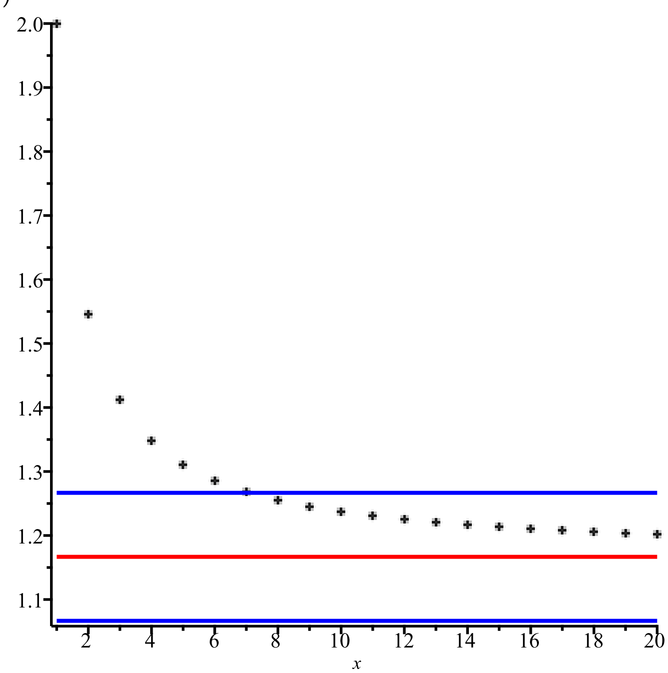
$$(-\infty, 0.166667), (7.11088, \infty) \quad (7.1)$$

#В выражении (7.1) содержится промежуток, которому должно соответсвовать n

> $Y1 := plots[pointplot]\left(\left\{seq\left(\left[n, \frac{7 \cdot n + 3}{6 \cdot n - 1}\right], n = 1..20\right)\right\}\right):$

> $Y2 := plot\left(\left[\frac{7}{6} - 0.1, \frac{7}{6}, \frac{7}{6} + 0.1\right], x = 1..20, color = [blue, red, blue]\right):$

> $plots[display](Y1, Y2)$



*#**Из графика четко видно, что все члены последовательности, начиная с 7***

включительно, будут попадать в ε-окрестность точки а

Задание №8

. Вычислите пределы числовых последовательностей :

\#***Вычислим данный предел* с *помощью функции* lim.**

#Вычислим первый предел:

> $'answer' = \lim_{n \to \text{infinity}} \left(\left(\frac{3 \cdot (n)^2 + 6 \cdot n - 1}{3 \cdot (n)^2 - 2 \cdot n + 4} \right) \right)^{1 - 3n}$

$$answer = e^{-8} \tag{8.1}$$

#Предел равен выражению (8.1)

#Рассчитаем второй предел:

> $'answer' = \lim_{n \to \infty} (\mathrm{sqrt}(n + 2) \cdot (\mathrm{sqrt}(n + 3) - \mathrm{sqrt}(n - 4)))$

$$answer = \frac{7}{2} \tag{8.2}$$

> \#***Предел равен выражению (8.2)***

Задание №9. Для заданной кусочно-непрерывной функции выполните следующие действия:

1. Определите ее через функциональный оператор и постройте график.

2. В точке разрыва и на бесконечности найдите односторонние пределы.

3. Найдите производную и неопределенный интеграл на каждом из промежутков непрерывности.

4. Постройте в одной системе координат графики функции, производной

и какой-нибудь первообразной.

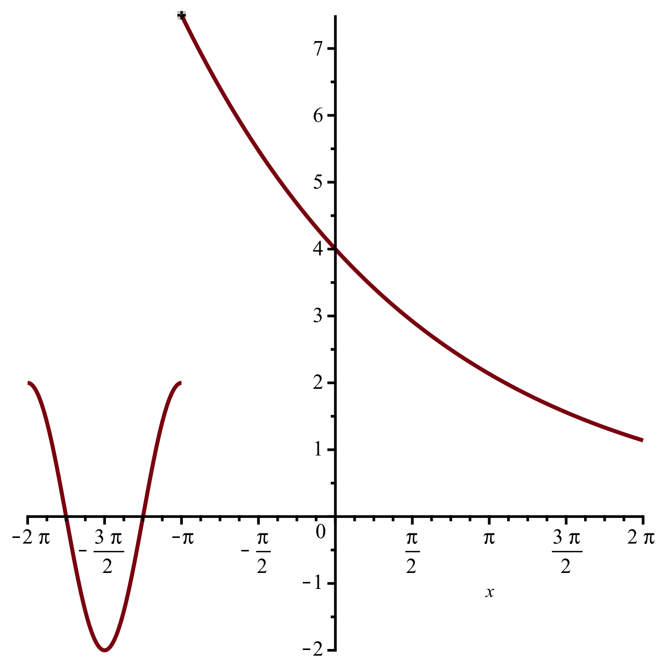
5. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком
функции и прямыми x = 1, x = 5, y = 0. Сделайте чертеж:

1. Определите ее через функциональный оператор и постройте график.

> $f := x \rightarrow piecewise\left(x < -\mathrm{Pi}, 2 \cdot \cos(2 \cdot x), x \geq -\mathrm{Pi}, 4 \cdot (\mathrm{e})^{-0.2 \cdot x}\right);$

$$f := x \mapsto \begin{cases} 2 \cdot \cos(2 \cdot x) & x < -\pi \\ 4 \cdot (\mathrm{e})^{-0.2 \cdot x} & -\pi \leq x \end{cases} \quad \mathbf{(9.1.1)}$$

> $plot(f(x), x, discont = true);$



2. В точке разрыва и на бесконечности найдите односторонние пределы.

#Последовательно рассчитаем пределы для обеих функций в метсе разрыва и на бесконечностях

> $limit(2 \cdot \cos(2 \cdot x), x = -\mathrm{Pi});$

$$2 \quad \mathbf{(9.2.1)}$$

> $limit\left(4 \cdot (\mathrm{e})^{-\frac{1}{5} \cdot x}, x = -\mathrm{Pi}\right);$

$$4\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{5}} \quad \mathbf{(9.2.2)}$$

> $limit(2 \cdot \cos(2 \cdot x), x = -\mathrm{infinity});$

(9.2.3)

$$-2..2 \qquad (9.2.3)$$

#Предел функции косинуса на бесконечности отсутствует

> $limit\left(4\cdot(e)^{-\frac{1}{5}\cdot x}, x=\text{infinity}\right);$

$$0 \qquad (9.2.4)$$

3. Найдите производную и неопределенный интеграл на каждом из промежутков непрерывности.

#Вычислим приозводную и неопределенный интеграл с помощью встроенных функций int и diff

> $df := diff(f(x), x);$

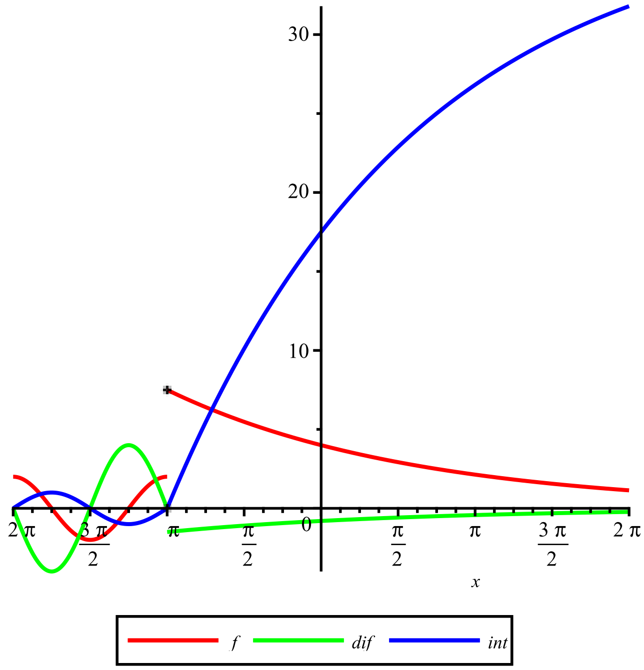
$$df := \begin{cases} -4.\ \sin(2.\ x) & x < -3.14159 \\ \text{Float(undefined)} & x = -3.14159 \\ -0.800000\ 2.71828^{-0.200000 x} & -3.14159 < x \end{cases} \qquad (9.3.1)$$

> $integral := int(f(x), x);$

$$integral := \begin{cases} \sin(2.\ x) & x \le -3.14159 \\ -20.\ 2.71828^{-0.200000 x} + 37.4891 & -3.14159 < x \end{cases} \qquad (9.3.2)$$

4. Постройте в одной системе координат графики функции, производной
и какой-нибудь первообразной.

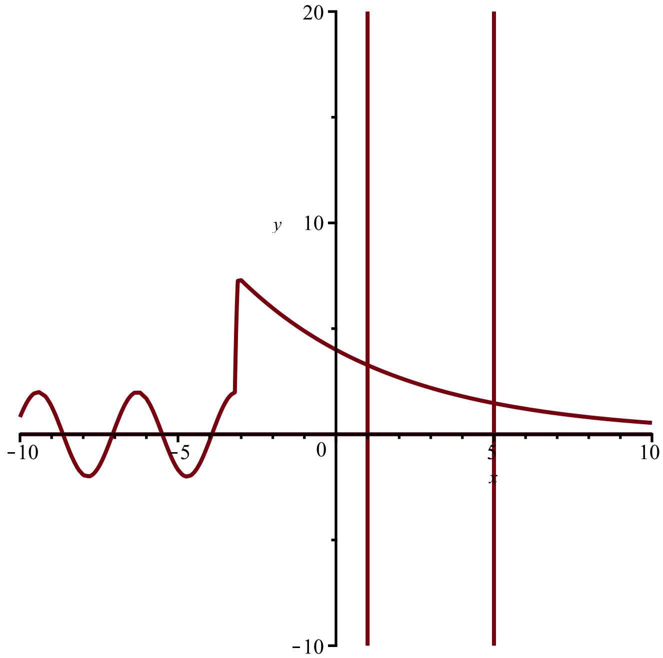
> $plot([f(x), df, integral], x, color=[red, green, blue], discont=true, legend=[f, dif, int]);$



5. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком
функции и прямыми x = 1, x = 5, y = 0. Сделайте чертеж:

```
> with(plots);
  implicitplot([y=f(x), x = 1, x=5, y=0], x= 10..10, y= 10..20);
  S := int(f(x), x=1..5);
```

[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, shadebetween, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]



$S := 9.01703$ **(9.5.1)**

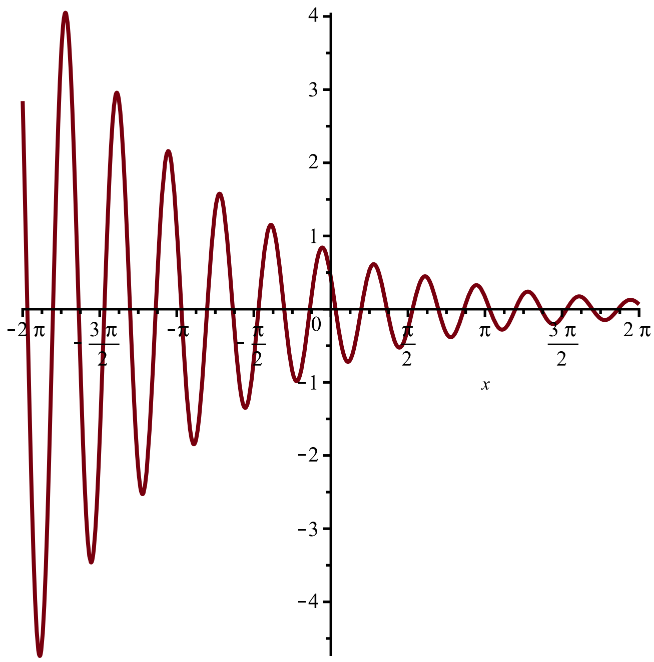
#В Выражении (9.5.1) находиться численное значение площади этой трапеции

Задание №10. Постройте кривые на плоскости. Для кривой 2 -го порядка (пункт 2) найдите каноническое уравнение с помощью ортогонального преобразования

#Построим графики всех выражений

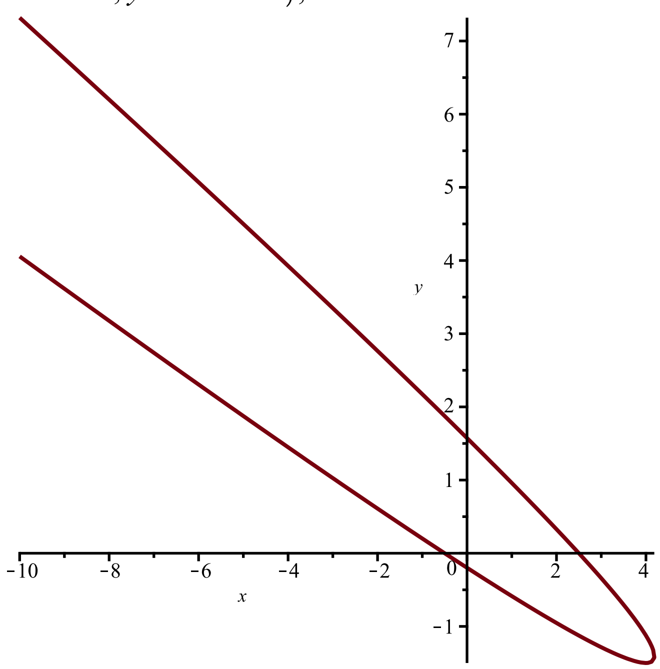
> $expr1 := 0.8 \cdot (\mathrm{e})^{-0.3 \cdot x} \cdot \cos(6 \cdot x + 1)$:

> $plot(expr1);$

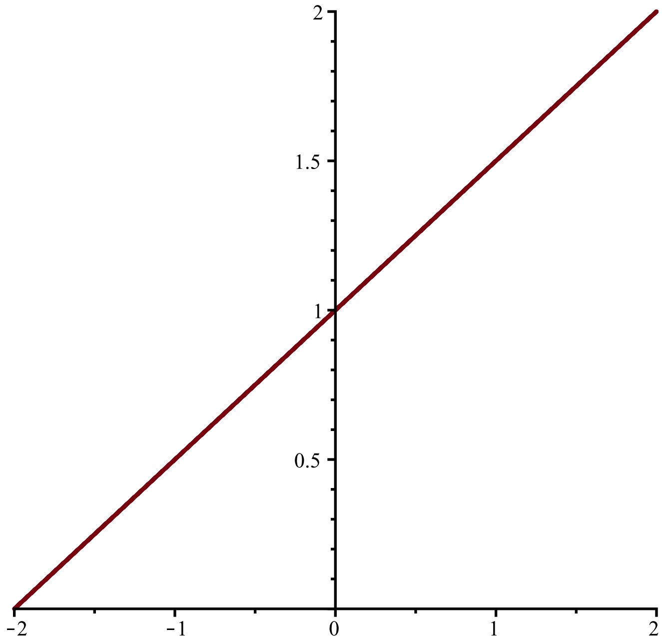


> $expr2 := 4 \cdot (x)^2 + 16 \cdot x \cdot y + 16 \cdot (y)^2 - 8 \cdot x - 22 \cdot y - 5 = 0:$

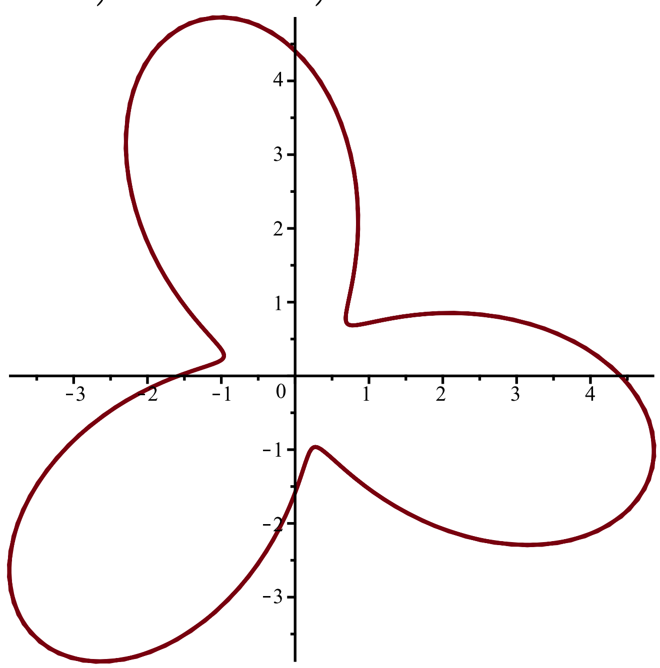
> $implicitplot(expr2, x = -10..10, y = -10..10);$



> $plot([2 \cdot \cos(2 \cdot t), 2 \cdot (\cos(t))^2, \ t = -10..10]);$



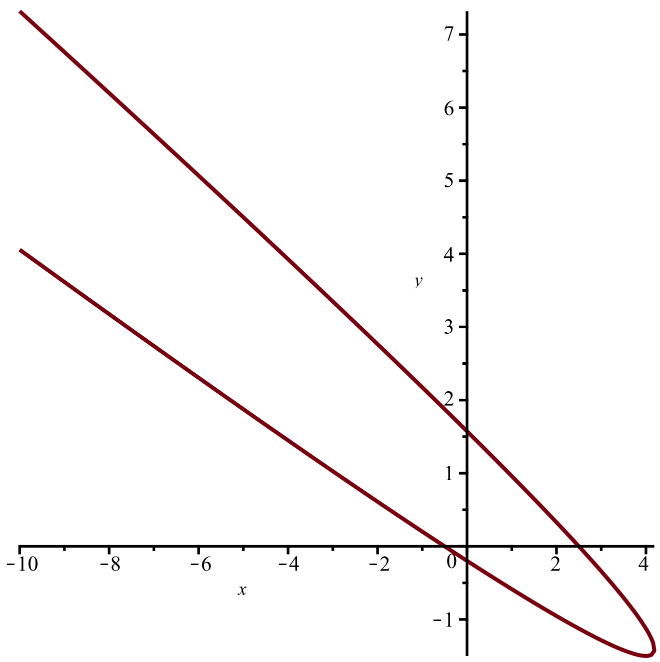
> $plot\left(3 + 2\cdot\cos\left(3\cdot\varphi + \frac{\pi}{4}\right), coords = \mathrm{polar}\right);$



#Найдем кононическое уравнений для кривой второго порядка для выражения 2) с помощью ортогонального преобразования

> $with(plots) : with(LinearAlgebra) :$

> $plots[implicitplot]\left(4\cdot(x)^2 + 16\cdot x\cdot y + 16\cdot(y)^2 - 8\cdot x - 22\cdot y - 5 = 0, x = -10 ..10, y = -10 ..10\right)$



> $M := Matrix([[4, 8], [8, 16]]) :$

> $v := LinearAlgebra[Eigenvectors](M);$

$$v := \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.1}$$

> $e1 := Normalize(Column(v[2], [1]), Euclidean)$

$$e1 := \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \tag{10.2}$$

> $e2 := Normalize(Column(v[2], [2]), Euclidean)$

$$e2 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \tag{10.3}$$

> $subs\big(x = e1[1] \cdot x1 + e2[1] \cdot y1, y = e1[2] \cdot x1 + e2[2] \cdot y1, 4 \cdot (x)^2 + 16 \cdot x \cdot y + 16 \cdot (y)^2 - 8 \cdot x - 22 \cdot y - 5\big) : expr := simplify(\%);$

$$expr := \frac{(-6\,x1 - 52\,y1)\sqrt{5}}{5} + 20\,y1^2 - 5 \tag{10.4}$$

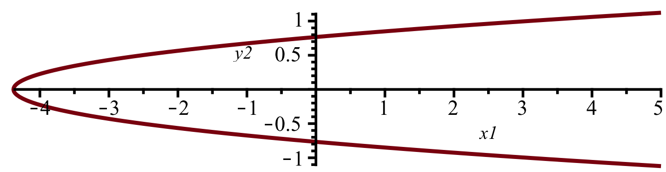
> $expr\_pseudocanon := Student[Precalculus][CompleteSquare](expr)$

$$expr\_pseudocanon := 20\left(y1 - \frac{13\sqrt{5}}{50}\right)^2 - \frac{6\,x1\sqrt{5}}{5} - \frac{294}{25} \tag{10.5}$$

> $expr\_canon := subs\left(y1 = y2 + \frac{13 \cdot \mathrm{sqrt}(5)}{50},\ expr\_pseudocanon\right)$

$$expr\_canon := 20\, y2^2 - \frac{6\, x1 \sqrt{5}}{5} - \frac{294}{25} \qquad \mathbf{(10.6)}$$

> $implicitplot(expr\_canon = 0,\ x1 = -5\,..5,\ y2 = -5\,..5,\ scaling = constrained)$



#В итоге получаем приведенную к каноническому виду кривую 2-го порядка.