Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
Кафедра информатики

Отчет по лабораторной работе №6
Интерполяционные многочлены

Выполнил:
студент группы 153503
Щиров П.Д.

Руководитель:
доцент
Анисимов В.Я.

Минск 2022

Содержание

1. Цель работы

Изучить интерполяцию функций с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона, рассчитать значение функции в заданной точке.

2. Теоретические сведения

АППРОКСИМАЦИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ

Из математического анализа известно, что в окрестности точки x_0 любую n раз непрерывно дифференцируемую функцию можно аппроксимировать (приблизить) ее многочленом Тейлора:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!},$$

причем

$$\begin{aligned}
&f(x_0) = P_n(x_0),\\
&f'(x_0) = P_n'(x_0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0).
\end{aligned}$$

Очевидно, такая аппроксимация во многих отношениях является очень хорошей, но она имеет локальный характер, т.е. хорошо аппроксимирует функцию только вблизи точки x_0. Это главный недостаток аппроксимации с помощью многочлена Тейлора.

Если речь идет об аппроксимации функции на отрезке, применяются другие методы.

Пусть $f(x) \in C[a,b]$ – непрерывная функция. Рассмотрим задачу аппроксимации (приближения) ее более простой функцией (обычно многочленом).

Известно из математического анализа, что в силу теоремы Вейерштрасса, любую функцию можно с какой угодно точностью приблизить многочленом по норме $\|f(x)\| = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$ пространства C[a, b], т. е. в смысле равномерной сходимости. Но существуют и другие нормы:

$$\|f(x)\| = \int_a^b |f(x)|dx \quad \text{или} \quad \|f(x)\| = \sqrt{\int_b^a |f(x)|^2 dx}.$$

Тогда $\|f(x) - P(x)\| < \varepsilon$ означает, что площадь или усредненная площади фигуры, заключенной между графиками функции $f(x)$ и многочлена $P(x)$, должна быть меньше ε (заданной точности).

Возможен и другой подход, когда в качестве аппроксимирующей функции берут многочлен или другую достаточно простую функцию, значения которых совпадают со значениями исходной функции в заданных заранее точках, так называемых узлах. Такого рода приближение функций имеет свое собственное название - интерполяция.

Интерполяционный многочлен

Пусть *f(x)* – функция, непрерывная на отрезке [*a,b*].

Выберем на этом отрезке точки, называемые *узлами интерполяции*:

$a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$.

Предположим, что известны значения функции в узлах интерполяции:

$f(x_k) = y_k, \quad k = 0,1,...,n$.

Ставится задача найти многочлен $P_n(x)$ такой, что

$$P_n(x_k) = y_k, \qquad \forall k = 0,1,...,n. \tag{7.1}$$

Такой многочлен $P_n(x)$ называется *интерполяционным многочленом*, а задача его нахождения – *задачей интерполяции*.

Покажем, что задача интерполяции имеет решение, причем единственное.

Пусть $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$.

Тогда для определения коэффициентов многочлена из условия (7.1) получаем систему:

$$\begin{cases} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + ... + a_n = y_0 \\ a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + ... + a_n = y_1 \\ .... \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + ... + a_n = y_n . \end{cases}$$

Ее определитель Δ с точностью до знака совпадает с так называемым определителем Вандермонда.

$$W(x_0,...,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ x_0 & x_1 & ... & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & ... & x_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ x_0^n & x_1^n & ... & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i) \ne 0 .$$

Поскольку все x_i различны, определитель Δ отличен от нуля, и, следовательно, система имеет единственное решение. Отсюда вытекает существование и единственность интерполяционного многочлена.

Погрешность интерполяции.

Обозначим

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ и будем искать ее оценку.

Пусть $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$. Положим $R_n(x) = \omega(x) r(x)$,

где $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n)$.

Зафиксируем произвольную точку x, отличную от узлов интерполяции x_i, $i = \overline{0,n}$, и построим вспомогательную функцию:

$$F(t) = P_n(t) + \omega(t) r(x) - f(t), \qquad a \le t \le b \quad . \tag{7.2}$$

Очевидно, $F(x) = 0$ и, кроме того $F(x_k) = 0, \qquad k = \overline{0,n}$.

Таким образом, функция *F(t)* имеет по крайней мере (*n+2*) нуля на отрезке [*a,b*]. Применим теорему Ролля, по которой между каждой парой нулей функции находится по крайней мере один нуль производной этой функции. Тогда производная $F'(t)$ имеет по крайней мере (*n+1*) нулей на данном интервале (a,b). Продолжая рассуждение, получим в итоге, что $F^{(n)}(t)$ имеет, по крайней мере, два нуля, а $F^{(n+1)}(t)$ − один нуль в некоторой точке ξ на (a,b).

Продифференцируем равенство (7.2) (*n+1*) раз и подставим $t = \xi$. Получим

$$F^{(n+1)}(\xi) = (n+1)! \cdot r(x) - f^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Откуда $r(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.

Тогда

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x),$$

где $\xi \in [a,b]$ (очевидно формула напоминает остаток формулы Тейлора в форме Лагранжа). В итоге имеем оценку погрешности интерполяции:

$$\left| R_n(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \omega(x) \right|, \qquad \text{где} \qquad M_{n+1} = \max_{a \le x \le b} \left| f^{(n+1)}(x) \right|.$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть даны узлы на отрезке $[a,b]$, $a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$, и значения функции $F(x)$ в узлах

$$f(x_i) = y_i, \qquad i = \overline{0,n}.$$

Пусть $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n)$,

$$\omega_j(x) = (x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdot ... \cdot (x - x_n),$$

т. е. $\omega_j(x) = \dfrac{\omega(x)}{x - x_j}$.

Положим $l_j(x) = \dfrac{\omega_j(x)}{\omega_j(x_j)}$,

т. е. $$l_j(x) = \frac{(x - x_0) \cdot ... \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdot ... \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdot ... \cdot (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdot ... \cdot (x_j - x_n)}.$$

Очевидно $l_j(x_i) = \begin{cases} 0, & npu\ i \ne j \\ 1, & npu\ i = j. \end{cases}$

Построим многочлен $L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} l_j(x) y_j$.

Легко видеть, что $L_n(x_i) = l_i(x_i) y_i = 1 \cdot y_i = y_i$, $i = \overline{0,n}$, т.е. это интерполяционный многочлен. Его называют интерполяционным многочленом Лагранжа.

Интерполяционный многочлен Ньютона

Пусть $x_0, x_1, ..., x_n$ − набор узлов интерполирования,

$y_0, y_1, ..., y_n$ − значения функции $f(x)$ в узлах.

Величину $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ называют конечной разностью первого порядка в *к*-м узле.

Аналогично определяются конечные разности высших порядков.

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = y_{k+2} - y_{k+1} - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$$

....

$$\Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i y_{k+i}\ \Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i y_{k+i}.$$

Конечные разности обычно считают по схеме:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0 x_1 x_2 x_3	y_0 y_1 y_2 y_3	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$ $\Delta y_1 = y_2 - y_1$ $\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$ $\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$

Разделенной разностью первого порядка называется выражение

$$f_1(x_k, x_{k+1}) = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}.$$

Разделенной разностью второго порядка называется выражение

$$f_2(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = \frac{f_1(x_{k+1}, x_{k+2}) - f_1(x_k, x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k}$$ и т. д.

Пусть x – любая точка отрезка, не совпадающая с узлами. Тогда

$$f_1(x, x_0) = \frac{y_0 - f(x)}{x_0 - x},$$

откуда $f(x) = y_0 + f_1(x, x_0)(x - x_0)$. (7.3)

Далее $f_2(x, x_0, x_1) = \dfrac{f_1(x_0, x_1) - f_1(x, x_0)}{x_1 - x}$,

откуда $f_1(x, x_0) = f_1(x_0, x_1) + f_2(x, x_0, x_1)(x - x_1)$.

Подставляя в (7.3), получаем

$$f(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + f_2(x, x_0, x_1)(x - x_0)(x - x_1). \tag{7.4}$$

Далее $f_3(x, x_0, x_1, x_2) = \dfrac{f_2(x_0, x_1, x_2) - f_2(x, x_0, x_1)}{x_2 - x}$,

откуда $f_2(x, x_0, x_1) = f_2(x_0, x_1, x_2) + f_3(x, x_0, x_1, x_2)(x - x_2)$.

Подставляя в (4), имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + f_2(x, x_0, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ &+ f_3(x, x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned} \tag{7.5}$$

Продолжая процесс, получим:

$$f(x) = N_n(x) + f_{n+1}(x, x_0, \ldots, x_n)(x - x_0)\ldots(x - x_n),$$

где $N_n(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + \ldots + f_n(x_0, \ldots, x_n)(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$.

Очевидно, при $x = x_i$, $\forall i = \overline{0, n}$, $f(x_i) = N_n(x_i)$, $i = \overline{0, n}$,

т. е. $N_n(x)$ − интерполяционный многочлен. Его называют интерполяционным многочленом Ньютона.

Достоинство интерполяционного многочлена Ньютона: он удобен при расширении интерполяции и добавлении узлов.

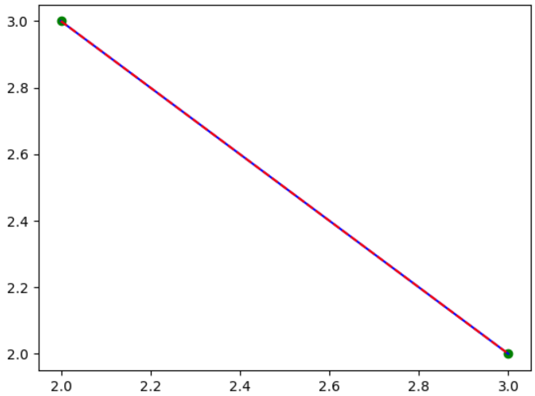
Недостаток: в какой-то степени он сложнее в подсчете конечных разностей по сравнению с многочленом Лагранжа.

3. Программная реализация

Построить интерполяционные многочлены в формах Лагранжа и Ньютона

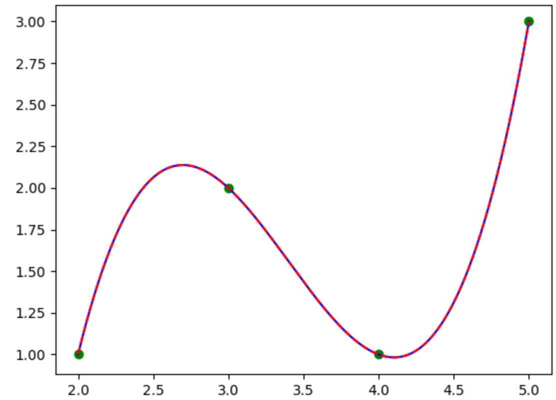
Тестовый пример 1

x	*3*	*2*
y	*2*	*3*



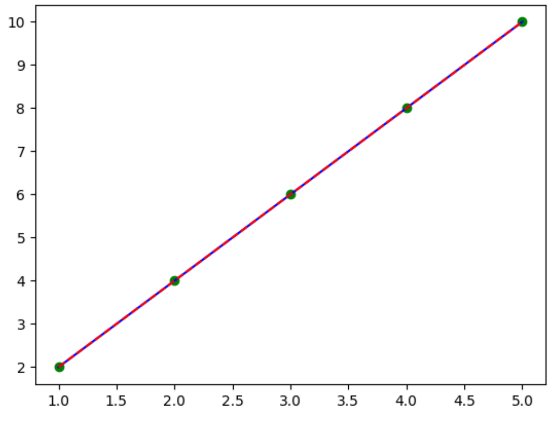
Тестовый пример 2

x	*2*	*3*	*4*	*5*
y	*1*	*2*	*1*	*3*



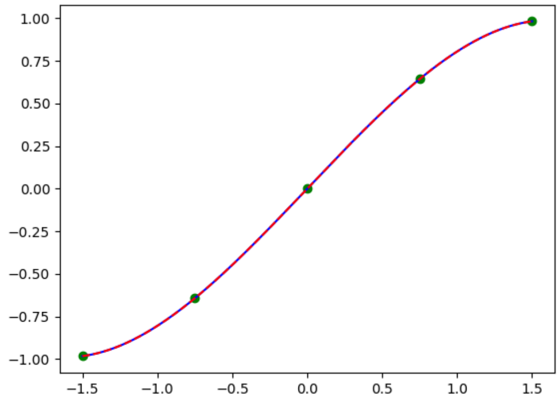
Тестовый пример 3

x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
y	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*



Тестовый пример 4

x	*-1.5*	*-0.75*	*0*	*0.75*	*1.5*
$y = arctg(x)$					



ЗАДАНИЕ

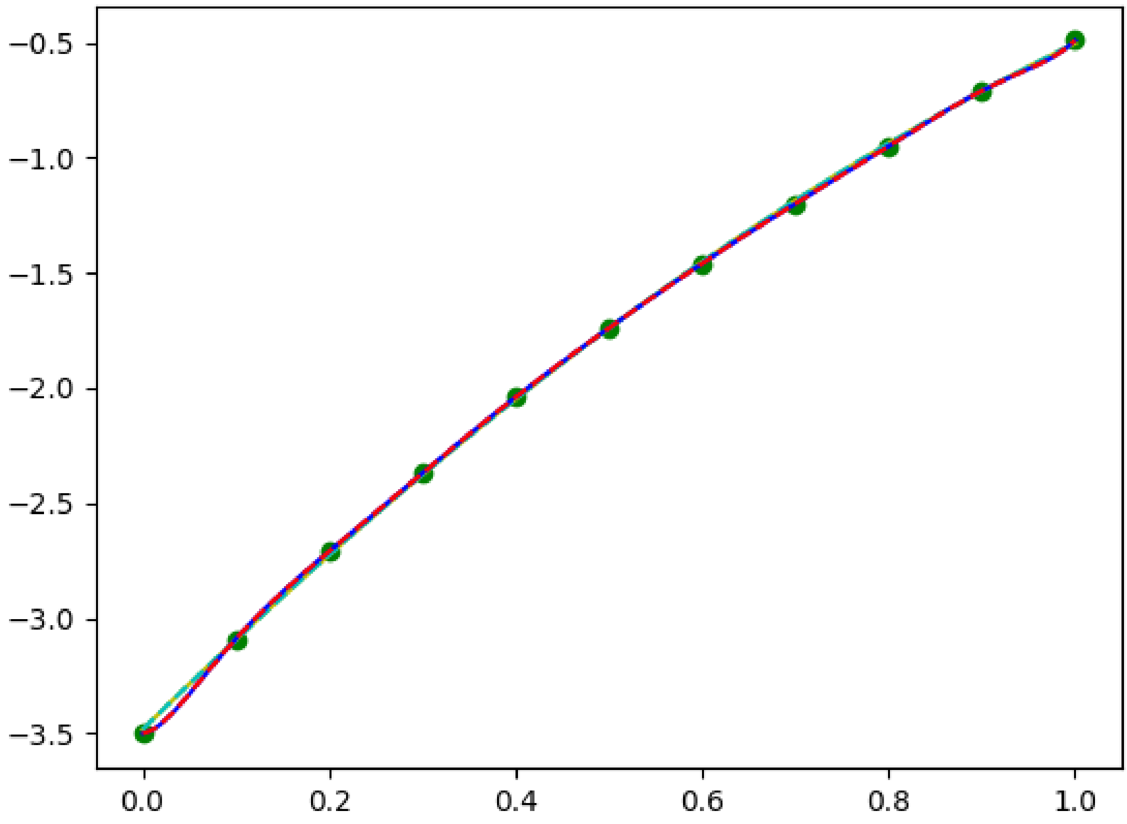
Вариант 13

Построить интерполяционные многочлены в форме Лагранжа и Ньютона. Оценить погрешность. Вычислить значение функции в точке 0.47 с помощью интерполяционного многочлена и многочлена наилучшего приближения. Сравнить значения.

x	*0.0*	*0.1*	*0.2*	*0.3*	*0.4*	*0.5*	*0.6*	*0.7*	*0.8*	*0.9*	*1.0*
y	*-5.33*	*-4.92*	*-4.54*	*-4.2*	*-4.2*	*-3.57*	*-3.29*	*-3.03*	*-2.78*	*-2.54*	*-2.32*

Ответ:

Значение в точке x = 0.47	
Многочлен Лагранжа	Многочлен Ньютона
≈ -3.65734	≈ -3.65734



4. Выводы

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы была освоена интерполяция функций с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона. Составлена компьютерная программа, на тестовых примерах проверена правильность её работы, построены интерполяционные многочлены в форме Лагранжа и Ньютона, вычислено значение функции в точке согласно заданному варианту.