Учреждение образования

«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»

Кафедра информатики

Отчет по лабораторной работе №5

Вычисление собственных значений и векторов

Выполнил:

студент группы 153503

Щиров П.Д.

Руководитель:

доцент

Анисимов В.Я.

Минск 2022

**Содержание**

[1. Цель работы 3](#_Toc66912307)

[2. Теоретические сведения 3](#_Toc66912308)

[3. Программная реализация 7](#_Toc66912309)

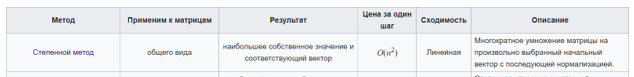
[4. Выводы 11](#_Toc66912310)

1. **Цель работы**

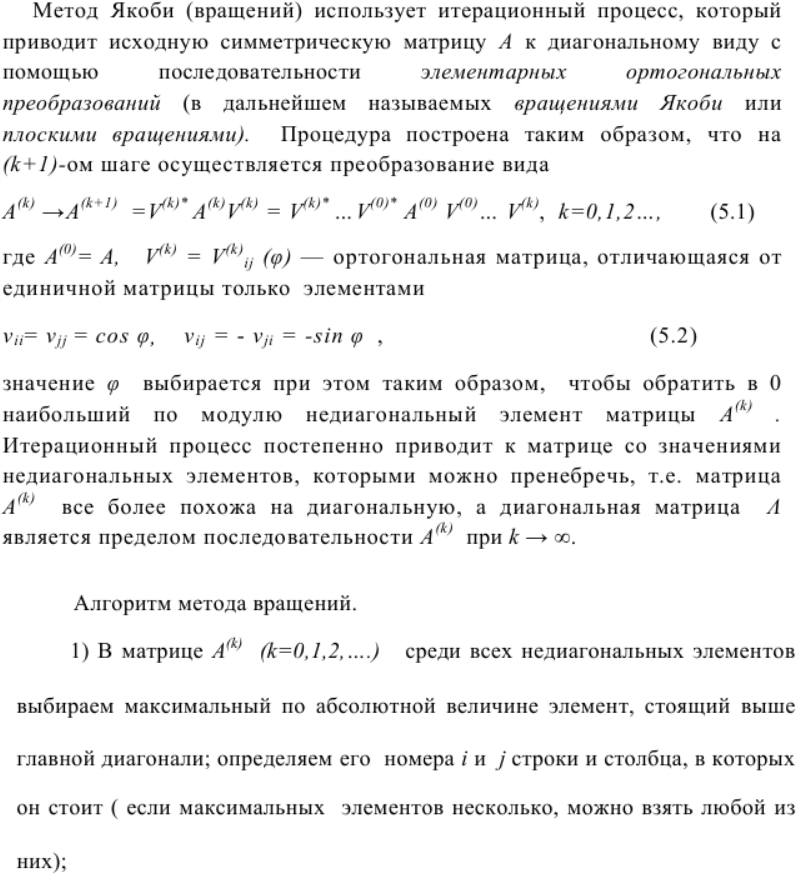
1)Освоить метод вращений Якоби для вычисления собственных значений и собственных векторов вещественной симметричной матрицы, а также степенной метод поиска максимального по модулю собственного значения и соответствующего ему собственного вектора.

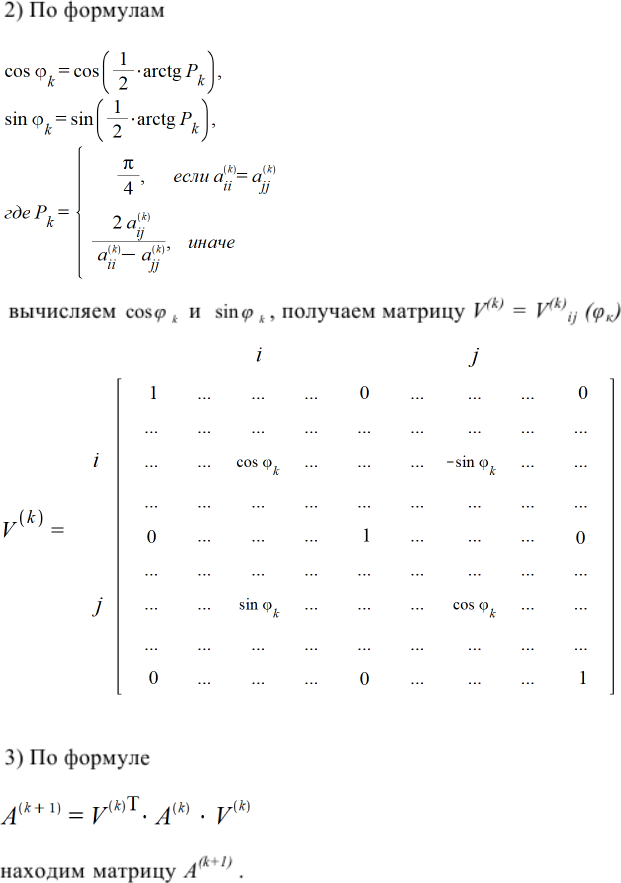
1. **Теоретические сведения**

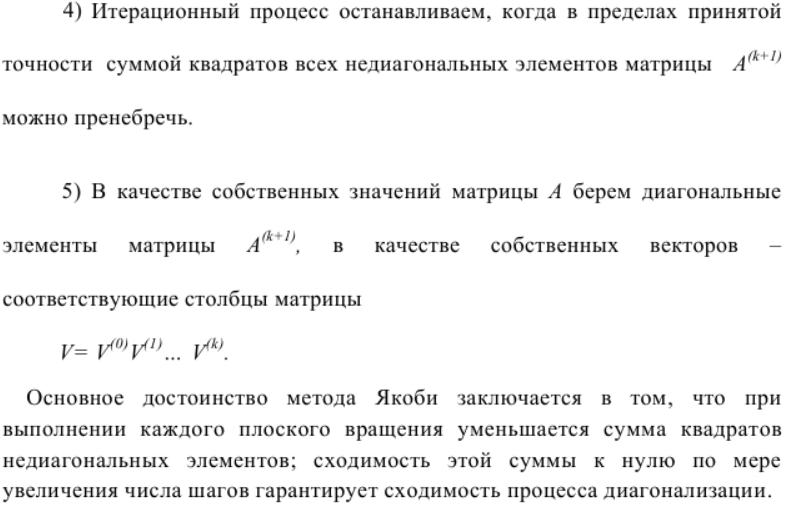
Итеративные алгоритмы решают задачу вычисления собственных значений путём построения последовательностей, сходящихся к собственным значениям. Некоторые алгоритмы дают также последовательности векторов, сходящихся к собственным векторам. Чаще всего последовательности собственных значений выражаются через последовательности подобных матриц, которые сходятся к треугольной или диагональной форме, что позволяет затем просто получить собственные значения. Последовательности собственных векторов выражаются через соответствующие матрицы подобия.











**Степенной метод** **или метод степенных итераций** — итерационный алгоритм поиска собственного значения с максимальной абсолютной величиной и одного из соответствующих собственных векторов для произвольной матрицы.

Алгоритм прост и сходится со скоростью геометрической прогрессии если все максимальные по модулю собственные значения совпадают, в противном случае сходимости нет.

В начале алгоритма генерируется случайный вектор . Далее проводятся последовательные вычисления по итеративной формуле:



Последовательность



при указанном выше условии сходится к максимальному по модулю собственному значению, а вектор  образует соответствующий собственный вектор.

# **Программная реализация**

Тестовый пример 1

Вычислить с точностью 0.0001 собственные значения и собственные векторы матрицы **A** =

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| [ | 1 | 0 | ] |
| [ | 0 | 2 | ] |

Ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип алгоритма | Вращений Якоби | Степенной | |
| Собственные значения: | λ = [1.0000, 2.0000] | λmax = | 2.0000 |
| Собственные векторы: | X1 = [1.0000, 0.0000] T  X2 = [0.0000, 1.0000] T | Xmax = | [0.0005]  [1.0000] |
| Количество итераций: | 1 | 11 | |

Тестовый пример 2

Вычислить с точностью 0.0001 собственные значения и собственные векторы матрицы **A** =

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| [ | 1 | 0 | ] |
| [ | 0 | 20 | ] |

Ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип алгоритма | Вращений Якоби | Степенной | |
| Собственные значения: | λ = [1.0000, 20.0000] | λmax = | 20.0000 |
| Собственные векторы: | X1 = [1.0000, 0.0000] T  X2 = [0.0000, 1.0000] T | Xmax = | [0.0000]  [1.0000] |
| Количество итераций: | 1 | 4 | |

Тестовый пример 3

Вычислить с точностью 0.0001 собственные значения и собственные векторы матрицы **A** =

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| [ | 1 | 0.001 | ] |
| [ | 0 | 2 | ] |

Ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип алгоритма | Вращений Якоби | Степенной | |
| Собственные значения: | *Ошибка* | λmax = | 2.0000 |
| Собственные векторы: | Ошибка: Матрица не симметрична | Xmax= | [0.0012]  [1.0000] |
| Количество итераций: | - | 12 | |

Тестовый пример 4

Вычислить с точностью 0.0001 собственные значения и собственные векторы матрицы **A** =

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| [ | 0 | 1 | 0 | ] |
| [ | 1 | 0 | 1 | ] |
| [ | 0 | 1 | 0 | ] |

Ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип алгоритма | Вращений Якоби | Степенной | |
| Собственные значения: | λ = [-1.4142, 0.0000, 1.4142] | λmax = | 1.3333 |
| Собственные векторы: | X1 = [0.5001, -0.7070, 0.5001] T  X2 = [0.7071, 0.0000, -0.7071] T  X3 = [0.4999, 0.7072, 0.4999] T | Xmax = | [0.4082]  [0.8165]  [0.4082] |
| Количество итераций: | 7 | 1 | |
| Степенной метод даёт неточный ответ, так как существует  несколько максимальных по модулю собственных значений | | | |

Тестовый пример 5

Вычислить с точностью 0.0001 собственные значения и собственные векторы матрицы **A** =

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| [ | 520 | 37 | 29 | 15 | 0 | ] |
| [ | 37 | -330 | -13 | -12 | -30 | ] |
| [ | 29 | -13 | 10 | 2 | 1 | ] |
| [ | 15 | -12 | 2 | -210 | -1 | ] |
| [ | 0 | -30 | 1 | -1 | 990 | ] |

Ответ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип алгоритма | Вращений Якоби | Степенной | |
| Собственные значения: | λ = [-334.1564 ,-209.0250, 9.0295, 523.4670 , 990.6850] | λmax = | 990.6850 |
| Собственные векторы: | X1 = [ 0.0462 0.0148 0.0536 0.9974 0.0017] T  X2 = [-0.9927 0.1014 0.0442 0.0420 0.0228] T  X3 = [-0.0407 0.0131 -0.9975 0.0553 -0.0013]T  X4 = [-0.1011 -0.9947 -0.0079 0.0199 0.0006] T  X5 = [-0.0225 0.0017 0.0024 0.0026 -0.9997]T | Xmax = | [-0.0017]  [-0.0228]  [0.0013]  [-0.0006]  [0.9997] |
| Количество итераций: | 20 | 17 | |

ЗАДАНИЕ

Вариант 15

Вычислить с точностью 0.0001 собственные значения и собственные векторы матрицы **A** =

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| [ | 5.33 | 0.81 | 3.67 | 0.92 | -0.53 | ] |
| [ | 0.81 | 5.33 | 0.81 | 3.67 | 0.92 | ] |
| [ | 3.67 | 0.81 | 5.33 | 0.81 | 3.92 | ] |
| [ | 0.92 | 3.67 | 0.81 | 5.33 | -0.53 | ] |
| [ | -0.53 | 0.92 | 3.92 | -0.53 | 5.33 | ] |

Ответ:

|  |
| --- |
| **Метод вращений Якоби** |
| Собственные значения:  λ = [-0.4373., 1.6271, 5.7931, 8.2050, 11.4620] |
| Собственные векторы:  X1 = [0.4656, 0.2236, 0.7334, 0.0599, 0.4379] T  X2 = [-0.1698, 0.6703, -0.2989, -0.5148, 0.4092] T  X3 = [-0.6610, -0.2058, 0.0891, 0.3806, 0.6066] T  X4 = [0.1758, -0.6769, -0.0688, -0.6149, 0.3579] T  X5 = [0.5353, -0.0136, -0.6001, 0.4565, 0.3804] T |
| Количество итераций = 29 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Степенной метод** | | |
| Собственное значение: | λmax = | 11.4620 |
| Собственный вектор | Xmax = | [0.4379]  [0.4095]  [0.6064]  [0.3582]  [0.3802] |
| Количество итераций | 16 | |

# **Выводы**

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы были освоены метод вращений Якоби для вычисления собственных значений и собственных векторов вещественной симметричной матрицы, а также степенной метод поиска максимального по модулю собственного значения и соответствующего ему собственного вектора. Составлена компьютерная программа, на тестовых примерах проверена правильность её работы, с заданной точностью вычислены собственные значения и векторы матрицы заданного варианта.