Activités Mentales

24 Août 2023

Question 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 30 \\ u_0 = -17 \end{cases} .$$

Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .

Question 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 6u_n + 15 \\ u_0 = 13 \end{cases} .$$

Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .

Question 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 25 \\ u_0 = -17 \end{cases} .$$

Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .

Question 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 10u_n + 37 \\ u_0 = -3 \end{cases} .$$

Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .

Question 5

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 6u_n + 39 \\ u_0 = -15 \end{cases} .$$

Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .

Correction 1

On rappelle que $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 30 \\ u_0 = -17 \end{cases}$.

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence $H_n :$ "$u_n \leq u_{n+1}$".

Initialisation : On a $u_0 = -17$ et $u_1 = 2u_0 + 30 = 2 \times (-17) + 30 = -4$. Comme $-17 \leq -4$, on a bien $u_0 \leq u_{0+1}$ et H_0 est vraie.

Hérédité : Supposons H_k vraie pour k fixé et montrons que H_{k+1} est vraie. C'est-à-dire, montrons que si $u_k \leq u_{k+1}$ alors $u_{k+1} \leq u_{k+2}$.Or

$$\begin{aligned} u_k \leq u_{k+1} &\Rightarrow 2u_k \leq 2u_{k+1} \quad \text{car } 2 > 0 \\ &\Rightarrow 2u_k + 30 \leq 2u_{k+1} + 30 \\ &\Rightarrow u_{k+1} \leq u_{k+2} \end{aligned}$$

Donc $H_k \Rightarrow H_{k+1}$. On a finalement démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et la suite est donc croissante.

Correction 2

On rappelle que $\begin{cases} u_{n+1} = 6u_n + 15 \\ u_0 = 13 \end{cases}$.

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence
H_n : "$u_n \leq u_{n+1}$".

Initialisation : On a $u_0 = 13$ et $u_1 = 6u_0 + 15 = 6 \times 13 + 15 = 93$.
Comme $13 \leq 93$, on a bien $u_0 \leq u_{0+1}$ et H_0 est vraie.

Hérédité : Supposons H_k vraie pour k fixé et montrons que H_{k+1} est vraie.
C'est-à-dire, montrons que si $u_k \leq u_{k+1}$ alors $u_{k+1} \leq u_{k+2}$.Or

$$\begin{aligned} u_k \leq u_{k+1} &\Rightarrow 6u_k \leq 6u_{k+1} \quad \text{car } 6 > 0 \\ &\Rightarrow 6u_k + 15 \leq 6u_{k+1} + 15 \\ &\Rightarrow u_{k+1} \leq u_{k+2} \end{aligned}$$

Donc $H_k \Rightarrow H_{k+1}$. On a finalement démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et la suite est donc croissante.

Correction 3

On rappelle que $\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 25 \\ u_0 = -17 \end{cases}$.

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence H_n : "$u_n \leq u_{n+1}$".

Initialisation : On a $u_0 = -17$ et $u_1 = 5u_0 + 25 = 5 \times (-17) + 25 = -60$. Comme $-17 \leq -60$, on a bien $u_0 \leq u_{0+1}$ et H_0 est vraie.

Hérédité : Supposons H_k vraie pour k fixé et montrons que H_{k+1} est vraie. C'est-à-dire, montrons que si $u_k \leq u_{k+1}$ alors $u_{k+1} \leq u_{k+2}$.Or

$$\begin{aligned} u_k \leq u_{k+1} &\Rightarrow 5u_k \leq 5u_{k+1} \quad \text{car } 5 > 0 \\ &\Rightarrow 5u_k + 25 \leq 5u_{k+1} + 25 \\ &\Rightarrow u_{k+1} \leq u_{k+2} \end{aligned}$$

Donc $H_k \Rightarrow H_{k+1}$. On a finalement démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et la suite est donc croissante.

Correction 4

On rappelle que $\begin{cases} u_{n+1} = 10u_n + 37 \\ u_0 = -3 \end{cases}$.

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence H_n : "$u_n \leq u_{n+1}$".

Initialisation : On a $u_0 = -3$ et $u_1 = 10u_0 + 37 = 10 \times (-3) + 37 = 7$. Comme $-3 \leq 7$, on a bien $u_0 \leq u_{0+1}$ et H_0 est vraie.

Hérédité : Supposons H_k vraie pour k fixé et montrons que H_{k+1} est vraie. C'est-à-dire, montrons que si $u_k \leq u_{k+1}$ alors $u_{k+1} \leq u_{k+2}$.Or

$$\begin{aligned} u_k \leq u_{k+1} &\Rightarrow 10u_k \leq 10u_{k+1} \quad \text{car } 10 > 0 \\ &\Rightarrow 10u_k + 37 \leq 10u_{k+1} + 37 \\ &\Rightarrow u_{k+1} \leq u_{k+2} \end{aligned}$$

Donc $H_k \Rightarrow H_{k+1}$. On a finalement démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et la suite est donc croissante.

Correction 5

On rappelle que $\begin{cases} u_{n+1} = 6u_n + 39 \\ u_0 = -15 \end{cases}$.

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence H_n : "$u_n \leq u_{n+1}$".

Initialisation : On a $u_0 = -15$ et $u_1 = 6u_0 + 39 = 6 \times (-15) + 39 = -51$. Comme $-15 \leq -51$, on a bien $u_0 \leq u_{0+1}$ et H_0 est vraie.

Hérédité : Supposons H_k vraie pour k fixé et montrons que H_{k+1} est vraie. C'est-à-dire, montrons que si $u_k \leq u_{k+1}$ alors $u_{k+1} \leq u_{k+2}$.Or

$$\begin{aligned} u_k \leq u_{k+1} &\Rightarrow 6u_k \leq 6u_{k+1} \quad \text{car } 6 > 0 \\ &\Rightarrow 6u_k + 39 \leq 6u_{k+1} + 39 \\ &\Rightarrow u_{k+1} \leq u_{k+2} \end{aligned}$$

Donc $H_k \Rightarrow H_{k+1}$. On a finalement démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et la suite est donc croissante.