Activités Mentales

24 Août 2023

Question 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 30$ et de raison $r = 12$.

1. Donner les trois premiers termes de la suite.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Démontrer le sens de variation.
5. On donne maintenant $u_n = 30 + 12n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_{10}.

Question 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = 16 - 12n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner les trois premiers termes de la suite.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
3. Quelle est la nature de la suite ? On démontrera le résultat
4. Après avoir conjecturer le sens de variation de la suite, le démontrer.

Question 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = 10 - 5n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner les trois premiers termes de la suite.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
3. Quelle est la nature de la suite ? On démontrera le résultat
4. Après avoir conjecturer le sens de variation de la suite, le démontrer.

Question 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 21$ et de raison $r = -15$.

1. Donner les trois premiers termes de la suite.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Démontrer le sens de variation.
5. On donne maintenant $u_n = 21 - 15n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_{10}.

Question 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que $u_0 = 8$ et $u_1 = -6$.

1. Quelle est la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Donner la valeur de u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Démontrer le sens de variation.
5. On donne maintenant $u_n = 8 - 14n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_{10}.

Correction 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 30$ et de raison $r = 12$.

1. $u_0 = 30$

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ &= 30 + 12 \\ &= 42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + r \\ &= 42 + 12 \\ &= 54 \end{aligned}$$

2. On a de manière immédiate d'après l'énoncé : $\begin{cases} u_0 = 30 \\ u_{n+1} = u_n + 12 \end{cases}$
3. Comme $u_0 < u_1 < u_2$, on peut conjecturer que la suite est croissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n + 12 - u_n \\ &= 12 > 0 \end{aligned}$$

La suite est donc bien croissante.

5. On donne maintenant $u_n = 30 + 12n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$u_{10} = 30 + 12 \times 10 = 150$.

Correction 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = 16 - 12n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $$\begin{aligned} u_0 &= 16 - 12 \times 0 \\ &= 16 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_1 &= 16 - 12 \times 1 \\ &= 16 - 12 \\ &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_2 &= 16 - 12 \times 2 \\ &= 16 - 24 \\ &= -8 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 16 - 12(n+1) \\ &= 16 - 12n - 12 \\ &= 4 - 12n \end{aligned}$$

3. Il semblerait que la suite soit arithmétique. Démontrons le. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 4 - 12n - (16 - 12n) \\ &= 4 - 12n - 16 + 12n \\ &= -12 \end{aligned}$$

4. D'après la question précédente, comme $u_{n+1} - u_n = -12 < 0$, la suite est décroissante.

Correction 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = 10 - 5n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $$\begin{aligned} u_0 &= 10 - 5\times 0 \\ &= 10 \end{aligned}$$ $$\begin{aligned} u_1 &= 10 - 5\times 1 \\ &= 10 - 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$ $$\begin{aligned} u_2 &= 10 - 5\times 2 \\ &= 10 - 10 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 10 - 5(n+1) \\ &= 10 - 5n - 5 \\ &= 5 - 5n \end{aligned}$$

3. Il semblerait que la suite soit arithmétique. Démontrons le. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 5 - 5n - (10 - 5n) \\ &= 5 - 5n - 10 + 5n \\ &= -5 \end{aligned}$$

4. D'après la question précédente, comme $u_{n+1} - u_n = -5 < 0$, la suite est décroissante.

Correction 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 21$ et de raison $r = -15$.

1. $u_0 = 21$

   $$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ &= 21 - 15 \\ &= 6 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + r \\ &= 6 - 15 \\ &= -9 \end{aligned}$$

2. On a de manière immédiate d'après l'énoncé : $\begin{cases} u_0 = 21 \\ u_{n+1} = u_n - 15 \end{cases}$
3. Comme $u_0 > u_1 > u_2$, on peut conjecturer que la suite est décroissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n - 15 - u_n \\ &= -15 < 0 \end{aligned}$$

La suite est donc bien décroissante

5. On donne maintenant $u_n = 21 - 15n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$$u_{10} = 21 - 15 \times 10 = -129.$$

Correction 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que $u_0 = 8$ et $u_1 = -6$.

1. On sait que la suite est arithmétique donc la raison est donnée par $u_1 - u_0 = -6 - 8 = -14$.
   La raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est -14
   On a alors $u_2 = u_1 + r = -6 - 14 = -20$
2. On a de manière immédiate d'après la question précédente :
   $$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = u_n - 14 \end{cases}$$
3. Comme $u_0 > u_1 > u_2$, on peut conjecturer que la suite est décroissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n - 14 - u_n \\ &= -14 < 0 \end{aligned}$$

La suite est donc bien décroissante

5. On donne maintenant $u_n = 8 - 14n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{10} = 8 - 14 \times 10 = -132.$$