Activités Mentales

24 Août 2023

Question 1

On considère le plan $\mathscr{P}$: $-4x-4y-8z-3=0$ et le point $M(-7\ ;\ 6\ ;\ 4)$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur $\mathscr{P}$.

Question 2

On considère le plan $\mathscr{P}: \ 3x+4y-2z-5=0$ et le point $M(9\ ;\ 7\ ;\ 0)$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur $\mathscr{P}$.

Question 3

On considère le plan $\mathscr{P}$: $-9x-10y+6z-10=0$ et le point $M(8\ ;\ 9\ ;\ 8)$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur $\mathscr{P}$.

Question 4

On considère le plan $\mathscr{P}$: $9x+9y-10z-8=0$ et le point $M(-10\ ;\ 0\ ;\ -10)$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur $\mathscr{P}$.

Question 5

On considère le plan $\mathscr{P}$: $7x + y - 10z - 10 = 0$ et le point $M(-5\ ;\ -2\ ;\ 4)$.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur $\mathscr{P}$.

Correction 1

On a $\mathscr{P}: -4x-4y-8z-3=0$ et le point $M(-7\ ;\ 6\ ;\ 4)$.

Vérifions que $M \notin \mathscr{P}$: $(-4)\times(-7)+(-4)\times 6+(-8)\times 4-3=-31\neq 0$. Donc $M\notin\mathscr{P}$.

Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\-8\end{pmatrix}$ et une représentation paramétrique de la droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par M est de la forme :

$$\begin{cases} x = x_M + t x_{\vec{n}} \\ y = y_M + t y_{\vec{n}} \\ z = z_M + t z_{\vec{n}} \end{cases}, t\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -7-4t \\ y = 6-4t \\ z = 4-8t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

On cherche maintenant l'intersection entre d et $\mathscr{P}$.
Soit $M_t \in d$, on a :

$$\begin{aligned}
M_t \in \mathscr{P} &\Leftrightarrow -4x_{M_t} - 4y_{M_t} - 8z_{M_t} - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow -4(-7-4t) - 4(6-4t) - 8(4-8t) - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow 28 + 16t - 24 + 16t - 32 + 64t - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow -31 + 96t = 0 \\
&\Leftrightarrow t = \frac{31}{96}
\end{aligned}$$

Finalement le projeté orthogonal de $M(-7\ ;\ 6\ ;\ 4)$ sur $\mathscr{P}:\ -4x - 4y - 8z - 3 = 0$ est le point

$$M\left(-7 + (-4) \times \frac{31}{96}\ ;\ 6 + (-4) \times \frac{31}{96}\ ;\ 4 + (-8) \times \frac{31}{96}\right) = \left(\frac{-199}{24}\ ;\ \frac{113}{24}\ ;\ \frac{17}{12}\right).$$

Correction 2

On a $\mathscr{P}: \ 3x+4y-2z-5=0$ et le point $M(9\ ;\ 7\ ;\ 0)$.

Vérifions que $M \notin \mathscr{P}$: $3\times 9+4\times 7+(-2)\times 0-5=50\neq 0$. Donc $M\notin\mathscr{P}$.

Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$ et une représentation paramétrique de la droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par M est de la forme :

$$\begin{cases} x = x_M + t x_{\vec{n}} \\ y = y_M + t y_{\vec{n}} \\ z = z_M + t z_{\vec{n}} \end{cases}, t\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 9+3t \\ y = 7+4t \\ z = -2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

On cherche maintenant l'intersection entre d et $\mathscr{P}$.
Soit $M_t \in d$, on a :

$$\begin{aligned} M_t \in \mathscr{P} &\Leftrightarrow 3x_{M_t} + 4y_{M_t} - 2z_{M_t} - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(9+3t) + 4(7+4t) - 2(-2t) - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow 27 + 9t + 28 + 16t + 4t - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow 50 + 29t = 0 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{-50}{29} \end{aligned}$$

Finalement le projeté orthogonal de $M(9\ ;\ 7\ ;\ 0)$ sur $\mathscr{P} :\ 3x + 4y - 2z - 5 = 0$ est le point

$$M\left(9 + 3 \times \frac{-50}{29}\ ;\ 7 + 4 \times \frac{-50}{29}\ ;\ (-2) \times \frac{-50}{29}\right) = \left(\frac{111}{29}\ ;\ \frac{3}{29}\ ;\ \frac{100}{29}\right).$$

Correction 3

On a $\mathscr{P}$: $-9x-10y+6z-10=0$ et le point $M(8\ ;\ 9\ ;\ 8)$.

Vérifions que $M \notin \mathscr{P}$: $(-9)\times 8+(-10)\times 9+6\times 8-10=-124\neq 0$. Donc $M\notin\mathscr{P}$.

Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9\\ -10\\ 6\end{pmatrix}$ et une représentation paramétrique de la droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par M est de la forme :

$$\begin{cases} x=x_M+tx_{\vec{n}}\\ y=y_M+ty_{\vec{n}}\\ z=z_M+tz_{\vec{n}}\end{cases},t\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=8-9t\\ y=9-10t\\ z=8+6t\end{cases},t\in\mathbb{R}.$$

On cherche maintenant l'intersection entre d et $\mathscr{P}$.
Soit $M_t \in d$, on a :

$$\begin{aligned} M_t \in \mathscr{P} &\Leftrightarrow -9x_{M_t} - 10y_{M_t} + 6z_{M_t} - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow -9(8-9t) - 10(9-10t) + 6(8+6t) - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow -72 + 81t - 90 + 100t + 48 + 36t - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow -124 + 217t = 0 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Finalement le projeté orthogonal de $M(8\ ;\ 9\ ;\ 8)$ sur
$\mathscr{P}:\ -9x - 10y + 6z - 10 = 0$ est le point

$$M\left(8 + (-9) \times \frac{4}{7}\ ;\ 9 + (-10) \times \frac{4}{7}\ ;\ 8 + 6 \times \frac{4}{7}\right) = \left(\frac{20}{7}\ ;\ \frac{23}{7}\ ;\ \frac{80}{7}\right).$$

Correction 4

On a $\mathscr{P}:\ 9x+9y-10z-8=0$ et le point $M(-10\ ;\ 0\ ;\ -10)$.

Vérifions que $M \notin \mathscr{P}$: $9\times(-10)+9\times 0+(-10)\times(-10)-8=2\neq 0$. Donc $M\notin\mathscr{P}$.

Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\9\\-10\end{pmatrix}$ et une représentation paramétrique de la droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par M est de la forme :

$$\begin{cases}x=x_M+tx_{\vec{n}}\\ y=y_M+ty_{\vec{n}}\\ z=z_M+tz_{\vec{n}}\end{cases},t\in\mathbb{R}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=-10+9t\\ y=+9t\\ z=-10-10t\end{cases},t\in\mathbb{R}.$$

On cherche maintenant l'intersection entre d et $\mathscr{P}$.
Soit $M_t \in d$, on a :

$$\begin{aligned}
M_t \in \mathscr{P} &\Leftrightarrow 9x_{M_t} + 9y_{M_t} - 10z_{M_t} - 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow 9(-10+9t) + 9(9t) - 10(-10-10t) - 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow -90 + 81t + 81t + 100 + 100t - 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2 + 262t = 0 \\
&\Leftrightarrow t = \frac{-1}{131}
\end{aligned}$$

Finalement le projeté orthogonal de $M(-10\ ;\ 0\ ;\ -10)$ sur $\mathscr{P}:\ 9x+9y-10z-8=0$ est le point

$$M\left(-10+9\times\frac{-1}{131}\ ;\ 9\times\frac{-1}{131}\ ;\ -10+(-10)\times\frac{-1}{131}\right) = \left(\frac{-1319}{131}\ ;\ \frac{-9}{131}\ ;\ \frac{-1300}{131}\right)$$

Correction 5

On a $\mathscr{P}:\ 7x+y-10z-10=0$ et le point $M(-5\ ;\ -2\ ;\ 4)$.

Vérifions que $M \notin \mathscr{P}$: $7\times(-5)-2+(-10)\times 4-10=-87\neq 0$. Donc $M\notin\mathscr{P}$.

Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7\\ 1\\ -10\end{pmatrix}$ et une représentation paramétrique de la droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par M est de la forme :

$$\begin{cases} x = x_M + t x_{\vec{n}} \\ y = y_M + t y_{\vec{n}} \\ z = z_M + t z_{\vec{n}} \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -5+7t \\ y = -2+t \\ z = 4-10t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

On cherche maintenant l'intersection entre d et $\mathscr{P}$.
Soit $M_t \in d$, on a :

$$\begin{aligned}
M_t \in \mathscr{P} &\Leftrightarrow 7x_{M_t} + y_{M_t} - 10z_{M_t} - 10 = 0 \\
&\Leftrightarrow 7(-5+7t) - 2 + t - 10(4-10t) - 10 = 0 \\
&\Leftrightarrow -35 + 49t - 2 + t - 40 + 100t - 10 = 0 \\
&\Leftrightarrow -87 + 150t = 0 \\
&\Leftrightarrow t = \frac{29}{50}
\end{aligned}$$

Finalement le projeté orthogonal de $M(-5\ ;\ -2\ ;\ 4)$ sur $\mathscr{P}:\ 7x+y-10z-10=0$ est le point

$$M\left(-5+7\times\frac{29}{50}\ ;\ -2+\frac{29}{50}\ ;\ 4+(-10)\times\frac{29}{50}\right) = \left(\frac{-47}{50}\ ;\ \frac{-71}{50}\ ;\ \frac{-9}{5}\right).$$