Activités Mentales

24 Août 2023

Question 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E): \ \mathrm{e}^{-9x+4} - \mathrm{e}^{8x-4} = 0$$

Question 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E):\ \mathrm{e}^{-x^2+11x}-\mathrm{e}^{x-4}=0$$

Question 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E) : \ \mathrm{e}^{6x+1} - \mathrm{e}^{4x-6} = 0$$

Question 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E) : \; \mathrm{e}^{-2x^2+5x} - \mathrm{e}^{2x+6} = 0$$

Question 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E): \ \mathrm{e}^{-6x^2+2x} - \mathrm{e}^{x-10} = 0$$

Correction 1

$$
\begin{aligned}
(E) &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-9x+4} - \mathrm{e}^{8x-4} = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-9x+4} = \mathrm{e}^{8x-4} \\
&\Leftrightarrow -9x + 4 = 8x - 4 \\
&\Leftrightarrow -9x + 4 - 8x = 8x - 4 - 8x \\
&\Leftrightarrow -17x + 4 = -4 \\
&\Leftrightarrow -17x + 4 - 4 = -4 - 4 \\
&\Leftrightarrow -17x = -8 \\
&\Leftrightarrow \frac{-17x}{-17} = \frac{-8}{-17} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{8}{17}
\end{aligned}
$$

Finalement l'ensemble des solutions de (E) est $S = \left\{\frac{8}{17}\right\}$.

Correction 2

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x^2+11x} - \mathrm{e}^{x-4} = 0\\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x^2+11x} = \mathrm{e}^{x-4}\\ &\Leftrightarrow -x^2+11x = x-4\\ &\Leftrightarrow -x^2+10x+4 = 0\end{aligned}$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2+10x+4$
f est un polynôme de degré 2 dont les coefficients sont $a=-1$, $b=10$ et $c=4$.
On a $\Delta = b^2-4ac = 10^2-4\times(-1)\times 4 = 100+16 = 116 > 0$.

Comme $\Delta > 0$, f admet deux racines distinctes.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10-2\sqrt{29}}{2\times(-1)} = \frac{-10-2\sqrt{29}}{-2} = 5+\sqrt{29}$$

et

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10+2\sqrt{29}}{2\times(-1)} = \frac{-10+2\sqrt{29}}{-2} = 5-\sqrt{29}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \left\{5+\sqrt{29}; 5-\sqrt{29}\right\}$

Correction 3

$$\begin{aligned}
(E) &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{6x+1} - \mathrm{e}^{4x-6} = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{6x+1} = \mathrm{e}^{4x-6} \\
&\Leftrightarrow 6x + 1 = 4x - 6 \\
&\Leftrightarrow 6x + 1 - 4x = 4x - 6 - 4x \\
&\Leftrightarrow 2x + 1 = -6 \\
&\Leftrightarrow 2x + 1 - 1 = -6 - 1 \\
&\Leftrightarrow 2x = -7 \\
&\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-7}{2} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-7}{2}
\end{aligned}$$

Finalement l'ensemble des solutions de (E) est $S = \left\{ \frac{-7}{2} \right\}$.

Correction 4

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2x^2+5x} - \mathrm{e}^{2x+6} = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2x^2+5x} = \mathrm{e}^{2x+6} \\ &\Leftrightarrow -2x^2+5x = 2x+6 \\ &\Leftrightarrow -2x^2+3x-6 = 0\end{aligned}$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2+3x-6$
f est un polynôme de degré 2 dont les coefficients sont $a=-2$, $b=3$ et $c=-6$.
On a $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times(-2)\times(-6) = 9-48 = -39 < 0$.
Comme $\Delta < 0$, f ne possède pas de racines réelles et l'équation n'admet pas de solution : $S = \emptyset$.

Correction 5

$$
\begin{aligned}
(E) &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-6x^2+2x} - \mathrm{e}^{x-10} = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-6x^2+2x} = \mathrm{e}^{x-10} \\
&\Leftrightarrow -6x^2 + 2x = x - 10 \\
&\Leftrightarrow -6x^2 + x + 10 = 0
\end{aligned}
$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -6x^2 + x + 10$
f est un polynôme de degré 2 dont les coefficients sont $a = -6$, $b = 1$ et $c = 10$.
On a $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-6) \times 10 = 1 + 240 = 241 > 0$.

Comme $\Delta > 0$, f admet deux racines distinctes.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{241}}{2\times(-6)} = \frac{-1-\sqrt{241}}{-12} = \frac{1+\sqrt{241}}{12}$$

et

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{241}}{2\times(-6)} = \frac{-1+\sqrt{241}}{-12} = \frac{1-\sqrt{241}}{12}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \left\{ \frac{1+\sqrt{241}}{12} ; \frac{1-\sqrt{241}}{12} \right\}$