Activités Mentales

24 Août 2023

Question 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -0.16u_n^2 + 1.16u_n \\ u_0 = 0.54 \end{cases}.$$

On pose pour tout $x \in [0;1], f(x) = -0.16x^2 + 1.16x$.

1. Étudier les variations de f sur $[0;1]$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
3. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire finalement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

Question 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -0.32u_n^2 + 1.32u_n \\ u_0 = 0.69 \end{cases}.$$

On pose pour tout $x \in [0;1], f(x) = -0.32x^2 + 1.32x$.

1. Étudier les variations de f sur $[0;1]$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
3. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire finalement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

Question 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -0.73u_n^2 + 1.73u_n \\ u_0 = 0.52 \end{cases}.$$

On pose pour tout $x \in [0;1], f(x) = -0.73x^2 + 1.73x$.

1. Étudier les variations de f sur $[0;1]$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1$.
3. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire finalement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

Question 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 u_n \\ u_0 = 0.21 \end{cases} .$$

On pose pour tout $x \in [0;1], f(x) = x^2 x$.

1. Étudier les variations de f sur $[0;1]$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
3. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. En déduire finalement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

Question 5

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.21u_n^2 + 0.79u_n \\ u_0 = 0.5 \end{cases}.$$

On pose pour tout $x \in [0;1], f(x) = 0.21x^2 + 0.79x$.

1. Étudier les variations de f sur $[0;1]$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
3. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. En déduire finalement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

Correction 1

On a $\begin{cases} u_{n+1} = -0.16u_n^2 + 1.16u_n \\ u_0 = 0.54 \end{cases}$ et $f(x) = -0.16x^2 + 1.16x$.

1. f est une fonction définie et dérivable sur $[0;1]$. On a

$$\forall x \in [0;1],\ f'(x) = -0.32x + 1.16$$

Or $f'(x) \geq 0$ sur $[0;1]$ (étude du signe à réaliser).
La fonction f est donc croissante sur $[0;1]$.

On a $\begin{cases} u_{n+1} = -0.16u_n^2 + 1.16u_n \\ u_0 = 0.54 \end{cases}$ et $f(x) = -0.16x^2 + 1.16x$.

2. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence $H_n :$ "$0 \leq u_n \leq 1$".

   Initialisation : On a $u_0 = 0.54 \in [0;1]$, donc H_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons H_k vraie pour k fixé et montrons que H_{k+1} est vraie. C'est-à-dire, montrons que si $0 \leq u_k \leq 1$ alors $0 \leq u_{k+1} \leq 1$.
   Par croissance de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$, on a

$$0 \leq u_k \leq 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) \leq f(u_k) \leq f(1).$$

   Or $f(0) = 0$, $f(1) = -0.16 \times 1^2 + 1.16 = 1$ et $f(u_k) = u_{k+1}$.
   Finalement $0 \leq u_k \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u_{k+1} \leq 1$. Donc $H_k \Rightarrow H_{k+1}$.
   On a finalement démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

On a $\begin{cases} u_{n+1} = -0.16u_n^2 + 1.16u_n \\ u_0 = 0.54 \end{cases}$ et $f(x) = -0.16x^2 + 1.16x$.

3. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence H_n : "$u_n \leq u_{n+1}$".

   Initialisation : On a $u_0 = 0.54$ et $u_1 = -0.16 \times 0.54^2 + 1.16 \times 0.54 = 0.5797439999999999 \geq 0.54$, donc H_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons H_k vraie pour k fixé et montrons que H_{k+1} est vraie. C'est-à-dire, montrons que si $u_k \leq u_{k+1}$ alors $u_{k+1} \leq u_{k+2}$.
   Par croissance de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$ et puisque les termes en jeu sont dans $[0;1]$, on a

$$u_k \leq u_{k+1} \quad \Rightarrow \quad f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \quad \Rightarrow \quad u_{k+1} \leq u_{k+2}.$$

   Donc $H_k \Rightarrow H_{k+1}$.
   On a finalement démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .

4. D'après les questions 3) et 2) , $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Donc d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction 2

On a $\begin{cases} u_{n+1} = -0.32u_n^2 + 1.32u_n \\ u_0 = 0.69 \end{cases}$ et $f(x) = -0.32x^2 + 1.32x$.

1. f est une fonction définie et dérivable sur $[0;1]$. On a

$$\forall x \in [0;1],\ f'(x) = -0.64x + 1.32$$

Or $f'(x) \geq 0$ sur $[0;1]$ (étude du signe à réaliser).
La fonction f est donc croissante sur $[0;1]$.

On a $\begin{cases} u_{n+1} = -0.32u_n^2 + 1.32u_n \\ u_0 = 0.69 \end{cases}$ et $f(x) = -0.32x^2 + 1.32x$.

2. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence H_n : "$0 \leq u_n \leq 1$".

   Initialisation : On a $u_0 = 0.69 \in [0;1]$, donc H_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons H_k vraie pour k fixé et montrons que H_{k+1} est vraie. C'est-à-dire, montrons que si $0 \leq u_k \leq 1$ alors $0 \leq u_{k+1} \leq 1$.
   Par croissance de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$, on a

   $$0 \leq u_k \leq 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) \leq f(u_k) \leq f(1).$$

   Or $f(0) = 0$, $f(1) = -0.32 \times 1^2 + 1.32 = 1$ et $f(u_k) = u_{k+1}$.
   Finalement $0 \leq u_k \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u_{k+1} \leq 1$. Donc $H_k \Rightarrow H_{k+1}$.
   On a finalement démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

On a $\begin{cases} u_{n+1} = -0.32u_n^2 + 1.32u_n \\ u_0 = 0.69 \end{cases}$ et $f(x) = -0.32x^2 + 1.32x$.

3. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence H_n : "$u_n \leq u_{n+1}$".

   Initialisation : On a $u_0 = 0.69$ et
   $u_1 = -0.32 \times 0.69^2 + 1.32 \times 0.69 = 0.758448 \geq 0.69$, donc H_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons H_k vraie pour k fixé et montrons que H_{k+1} est vraie. C'est-à-dire, montrons que si $u_k \leq u_{k+1}$ alors $u_{k+1} \leq u_{k+2}$.
   Par croissance de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$ et puisque les termes en jeu sont dans $[0;1]$, on a

$$u_k \leq u_{k+1} \quad \Rightarrow \quad f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \quad \Rightarrow \quad u_{k+1} \leq u_{k+2}.$$

   Donc $H_k \Rightarrow H_{k+1}$.
   On a finalement démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .

4. D'après les questions $3)$ et $2)$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Donc d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction 3

On a $\begin{cases} u_{n+1} = -0.73u_n^2 + 1.73u_n \\ u_0 = 0.52 \end{cases}$ et $f(x) = -0.73x^2 + 1.73x$.

1. f est une fonction définie et dérivable sur $[0;1]$. On a

$$\forall x \in [0;1],\ \ f'(x) = -1.46x + 1.73$$

Or $f'(x) \geq 0$ sur $[0;1]$ (étude du signe à réaliser).
La fonction f est donc croissante sur $[0;1]$.

On a $\begin{cases} u_{n+1} = -0.73u_n^2 + 1.73u_n \\ u_0 = 0.52 \end{cases}$ et $f(x) = -0.73x^2 + 1.73x$.

2. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence $H_n :$ "$0 \le u_n \le 1$".

   Initialisation : On a $u_0 = 0.52 \in [0;1]$, donc H_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons H_k vraie pour k fixé et montrons que H_{k+1} est vraie. C'est-à-dire, montrons que si $0 \le u_k \le 1$ alors $0 \le u_{k+1} \le 1$.
   Par croissance de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$, on a

   $$0 \le u_k \le 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) \le f(u_k) \le f(1).$$

   Or $f(0) = 0$, $f(1) = -0.73 \times 1^2 + 1.73 = 1$ et $f(u_k) = u_{k+1}$.
   Finalement $0 \le u_k \le 1 \Rightarrow 0 \le u_{k+1} \le 1$. Donc $H_k \Rightarrow H_{k+1}$.
   On a finalement démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le 1$.

On a $\begin{cases} u_{n+1} = -0.73u_n^2 + 1.73u_n \\ u_0 = 0.52 \end{cases}$ et $f(x) = -0.73x^2 + 1.73x$.

3. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence H_n : "$u_n \leq u_{n+1}$".

   Initialisation : On a $u_0 = 0.52$ et $u_1 = -0.73 \times 0.52^2 + 1.73 \times 0.52 = 0.702208 \geq 0.52$, donc H_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons H_k vraie pour k fixé et montrons que H_{k+1} est vraie. C'est-à-dire, montrons que si $u_k \leq u_{k+1}$ alors $u_{k+1} \leq u_{k+2}$.
   Par croissance de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$ et puisque les termes en jeu sont dans $[0;1]$, on a

$$u_k \leq u_{k+1} \quad \Rightarrow \quad f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \quad \Rightarrow \quad u_{k+1} \leq u_{k+2}.$$

   Donc $H_k \Rightarrow H_{k+1}$.
   On a finalement démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .

4. D'après les questions $3)$ et $2)$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Donc d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction 4

On a $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 u_n \\ u_0 = 0.21 \end{cases}$ et $f(x) = x^2 x$.

1. f est une fonction définie et dérivable sur $[0;1]$. On a

$$\forall x \in [0;1],\ f'(x) = 2.0x$$

Or $f'(x) \geq 0$ sur $[0;1]$ (étude du signe à réaliser).
La fonction f est donc croissante sur $[0;1]$.

On a $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 u_n \\ u_0 = 0.21 \end{cases}$ et $f(x) = x^2 x$.

2. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence $H_n :$ "$0 \leq u_n \leq 1$".

   Initialisation : On a $u_0 = 0.21 \in [0;1]$, donc H_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons H_k vraie pour k fixé et montrons que H_{k+1} est vraie. C'est-à-dire, montrons que si $0 \leq u_k \leq 1$ alors $0 \leq u_{k+1} \leq 1$.
   Par croissance de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$, on a

   $$0 \leq u_k \leq 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) \leq f(u_k) \leq f(1).$$

   Or $f(0) = 0$, $f(1) = 1.0 \times 1^2 = 1$ et $f(u_k) = u_{k+1}$.
   Finalement $0 \leq u_k \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u_{k+1} \leq 1$. Donc $H_k \Rightarrow H_{k+1}$.
   On a finalement démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

On a $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 u_n \\ u_0 = 0.21 \end{cases}$ et $f(x) = x^2 x$.

3. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence H_n : "$u_n \geq u_{n+1}$".

   Initialisation : On a $u_0 = 0.21$ et $u_1 = 1.0 \times 0.21^2 + 0.0 \times 0.21 = 0.044099999999999999 \leq 0.21$, donc H_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons H_k vraie pour k fixé et montrons que H_{k+1} est vraie. C'est-à-dire, montrons que si $u_k \geq u_{k+1}$ alors $u_{k+1} \geq u_{k+2}$.
   Par croissance de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$ et puisque les termes en jeu sont dans $[0;1]$, on a

$$u_k \geq u_{k+1} \quad \Rightarrow \quad f(u_k) \geq f(u_{k+1}) \quad \Rightarrow \quad u_{k+1} \geq u_{k+2}.$$

   Donc $H_k \Rightarrow H_{k+1}$.
   On a finalement démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$ et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante .

4. D'après les questions $3)$ et $2)$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Donc d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction 5

On a $\begin{cases} u_{n+1} = 0.21u_n^2 + 0.79u_n \\ u_0 = 0.5 \end{cases}$ et $f(x) = 0.21x^2 + 0.79x$.

1. f est une fonction définie et dérivable sur $[0;1]$. On a

$$\forall x \in [0;1],\ f'(x) = 0.42x + 0.79$$

Or $f'(x) \geq 0$ sur $[0;1]$ (étude du signe à réaliser).
La fonction f est donc croissante sur $[0;1]$.

On a $\begin{cases} u_{n+1} = 0.21u_n^2 + 0.79u_n \\ u_0 = 0.5 \end{cases}$ et $f(x) = 0.21x^2 + 0.79x$.

2. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence H_n : "$0 \leq u_n \leq 1$".

   Initialisation : On a $u_0 = 0.5 \in [0;1]$, donc H_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons H_k vraie pour k fixé et montrons que H_{k+1} est vraie. C'est-à-dire, montrons que si $0 \leq u_k \leq 1$ alors $0 \leq u_{k+1} \leq 1$.
   Par croissance de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$, on a

$$0 \leq u_k \leq 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) \leq f(u_k) \leq f(1).$$

   Or $f(0) = 0$, $f(1) = 0.21 \times 1^2 + 0.79 = 1$ et $f(u_k) = u_{k+1}$.
   Finalement $0 \leq u_k \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u_{k+1} \leq 1$. Donc $H_k \Rightarrow H_{k+1}$.
   On a finalement démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

On a $\begin{cases} u_{n+1} = 0.21u_n^2 + 0.79u_n \\ u_0 = 0.5 \end{cases}$ et $f(x) = 0.21x^2 + 0.79x$.

3. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence H_n : "$u_n \geq u_{n+1}$".

   Initialisation : On a $u_0 = 0.5$ et $u_1 = 0.21 \times 0.5^2 + 0.79 \times 0.5 = 0.4475 \leq 0.5$, donc H_0 est vraie.

   Hérédité : Supposons H_k vraie pour k fixé et montrons que H_{k+1} est vraie. C'est-à-dire, montrons que si $u_k \geq u_{k+1}$ alors $u_{k+1} \geq u_{k+2}$. Par croissance de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$ et puisque les termes en jeu sont dans $[0;1]$, on a

$$u_k \geq u_{k+1} \quad \Rightarrow \quad f(u_k) \geq f(u_{k+1}) \quad \Rightarrow \quad u_{k+1} \geq u_{k+2}.$$

   Donc $H_k \Rightarrow H_{k+1}$.
   On a finalement démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante .

4. D'après les questions $3)$ et $2)$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Donc d'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.