Activités Mentales

24 Août 2023

Question 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 12x^3 - 6x^2 - 3x + 13$.

1. Donner l'expression de la dérivée de la fonction f que l'on notera f'.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $3(-6x-1)(-2x+1) = 36x^2 - 12x - 3$.
3. Construire le tableau de signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $3(-6x-1)(-2x+1)$
4. En déduire les variations de la fonction f.

Question 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 20x^3 - 38x^2 - 40x + 19$.

1. Donner l'expression de la dérivée de la fonction f que l'on notera f'.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-4(5x+2)(-3x+5) = 60x^2 - 76x - 40$.
3. Construire le tableau de signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $-4(5x+2)(-3x+5)$
4. En déduire les variations de la fonction f.

Question 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x + 14$.

1. Donner l'expression de la dérivée de la fonction f que l'on notera f'.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-6(x+3)(-2x+4) = 12x^2 + 12x - 72$.
3. Construire le tableau de signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $-6(x+3)(-2x+4)$
4. En déduire les variations de la fonction f.

Question 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = -8x^3 + 50x^2 + 100x - 19$.

1. Donner l'expression de la dérivée de la fonction f que l'on notera f'.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
   $4(6x+5)(-x+5) = -24x^2 + 100x + 100$.
3. Construire le tableau de signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
   $4(6x+5)(-x+5)$
4. En déduire les variations de la fonction f.

Question 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 12x^3 + 24x^2 - 48x + 23$.

1. Donner l'expression de la dérivée de la fonction f que l'on notera f'.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $3(-2x-4)(-6x+4) = 36x^2 + 48x - 48$.
3. Construire le tableau de signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $3(-2x-4)(-6x+4)$
4. En déduire les variations de la fonction f.

Correction 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = 12x^3 - 6x^2 - 3x + 13$$
On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 12 \times 3x^2 - 6 \times 2x - 3 \times 1 + 0 = 36x^2 - 12x - 3$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} 3(-6x-1)(-2x+1) &= 3\left(12x^2 - 6x + 2x - 1\right) \\ &= 3\left(12x^2 - 4x - 1\right) \\ &= 36x^2 - 12x - 3 \end{aligned}$$

3. On pose $A(x) = -6x - 1$ et $B(x) = -2x + 1$.

   - A est une fonction affine avec $m = -6 < 0$. f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord positive puis négative. .
     De plus $A(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{6}$.

   - B est une fonction affine avec $m = -2 < 0$. B est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord positive puis négative. sur $\mathbb{R}$.
     De plus $B(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

   On compare les deux racines obtenues : $\dfrac{-1}{6} < \dfrac{1}{2}$

On rappelle que $A(x) = -6x - 1$ et $B(x) = -2x + 1$ et $f'(x) = 3(-6x-1)(-2x+1)$. Son tableau de signe est alors

x	$-\infty$		$\frac{-1}{6}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
3		$+$		$+$		$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$B(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{6}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Correction 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = 20x^3 - 38x^2 - 40x + 19$$
On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 20 \times 3x^2 - 38 \times 2x - 40 \times 1 + 0 = 60x^2 - 76x - 40$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} -4(5x+2)(-3x+5) &= -4\left(-15x^2 + 25x - 6x + 10\right) \\ &= -4\left(-15x^2 + 19x + 10\right) \\ &= 60x^2 - 76x - 40 \end{aligned}$$

3. On pose $A(x) = 5x + 2$ et $B(x) = -3x + 5$.

   - A est une fonction affine avec $m = 5 > 0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord négative puis positive. .
     De plus $A(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2}{5}$.
   - B est une fonction affine avec $m = -3 < 0$. B est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord positive puis négative. sur $\mathbb{R}$.
     De plus $B(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$.

   On compare les deux racines obtenues : $\dfrac{-2}{5} < \dfrac{5}{3}$

On rappelle que $A(x) = 5x + 2$ et $B(x) = -3x + 5$ et $f'(x) = -4(5x+2)(-3x+5)$. Son tableau de signe est alors

x	$-\infty$		$\frac{-2}{5}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
-4		$-$		$-$		$-$	
$A(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$B(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\frac{-2}{5}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Correction 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x + 14$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 4 \times 3x^2 + 6 \times 2x - 72 \times 1 + 0 = 12x^2 + 12x - 72$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
-6(x+3)(-2x+4) &= -6\left(-2x^2 + 4x - 6x + 12\right) \\
&= -6\left(-2x^2 - 2x + 12\right) \\
&= 12x^2 + 12x - 72
\end{aligned}$$

3. On pose $A(x) = x + 3$ et $B(x) = -2x + 4$.

   - A est une fonction affine avec $m = 1 > 0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
     Elle est donc d'abord négative puis positive. .
     De plus $A(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

   - B est une fonction affine avec $m = -2 < 0$. B est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord positive puis négative. sur $\mathbb{R}$.
     De plus $B(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

   On compare les deux racines obtenues : $-3 < 2$

On rappelle que $A(x) = x+3$ et $B(x) = -2x+4$ et $f'(x) = -6(x+3)(-2x+4)$. Son tableau de signe est alors

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
-6		$-$		$-$		$-$	
$A(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$B(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Correction 4

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = -8x^3 + 50x^2 + 100x - 19$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -8 \times 3x^2 + 50 \times 2x + 100 \times 1 + 0 = -24x^2 + 100x + 100$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 4(6x+5)(-x+5) &= 4\left(-6x^2 + 30x - 5x + 25\right) \\ &= 4\left(-6x^2 + 25x + 25\right) \\ &= -24x^2 + 100x + 100 \end{aligned}$$

3. On pose $A(x) = 6x + 5$ et $B(x) = -x + 5$.

- A est une fonction affine avec $m = 6 > 0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord négative puis positive. .
  De plus $A(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5}{6}$.
- B est une fonction affine avec $m = -1 < 0$. B est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord positive puis négative. sur $\mathbb{R}$.
  De plus $B(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

On compare les deux racines obtenues : $\dfrac{-5}{6} < 5$

On rappelle que $A(x)=6x+5$ et $B(x)=-x+5$ et $f'(x)=4(6x+5)(-x+5)$. Son tableau de signe est alors

x	$-\infty$		$\frac{-5}{6}$		5		$+\infty$
4		$+$		$+$		$+$	
$A(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$B(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\frac{-5}{6}$		5		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Correction 5

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = 12x^3 + 24x^2 - 48x + 23$$
On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 12 \times 3x^2 + 24 \times 2x - 48 \times 1 + 0 = 36x^2 + 48x - 48$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} 3(-2x-4)(-6x+4) &= 3\left(12x^2 - 8x + 24x - 16\right) \\ &= 3\left(12x^2 + 16x - 16\right) \\ &= 36x^2 + 48x - 48 \end{aligned}$$

3. On pose $A(x) = -2x - 4$ et $B(x) = -6x + 4$.

- A est une fonction affine avec $m = -2 < 0$. f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord positive puis négative. .
  De plus $A(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

- B est une fonction affine avec $m = -6 < 0$. B est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord positive puis négative. sur $\mathbb{R}$.
  De plus $B(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$.

On compare les deux racines obtenues : $-2 < \dfrac{2}{3}$

On rappelle que $A(x) = -2x - 4$ et $B(x) = -6x + 4$ et $f'(x) = 3(-2x-4)(-6x+4)$. Son tableau de signe est alors

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
3		$+$		$+$		$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$B(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	