Activités Mentales

24 Août 2023

Question 1

Soit d la droite d'équation cartésienne $-8x+5y-103=0$ et le point $A(-3;-2)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur d.

Question 2

Soit d la droite d'équation cartésienne $-3x+8y-110=0$ et le point $A(2;-22)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur d.

Question 3

Soit d la droite d'équation cartésienne $-9x+3y-117=0$ et le point $A(-8;5)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur d.

Question 4

Soit d la droite d'équation cartésienne $2x-2y-10=0$ et le point $A(5;-26)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur d.

Question 5

Soit d la droite d'équation cartésienne $8x+4y+88=0$ et le point $A(-5;-2)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur d.

Correction 1

Tout d'abord, $A \notin d$ car $-8 \times (-3) + 5 \times (-2) - 103 = -89 \neq 0$. H est l'intersection des deux droites d et (AH). Déterminons une équation cartésienne de la droite (AH) : d admet comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-8\end{pmatrix}$.

Donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à (AH) et une équation cartésienne de (AH) est :

$$-5x - 8y + c = 0 \quad \text{où } c \text{ est un réel à déterminer.}$$

(AH) passe par A si et seulement si :

$$\begin{array}{rrcl} & -5 \times (-3) - 8 \times (-2) + c & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & 31 + c & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & c & = & -31 \end{array}$$

(AH) admet pour équation cartésienne $-5x - 8y - 31 = 0$.

H est l'intersection des deux droites d et (AH) donc ses coordonnées $(x;y)$ vérifient le système :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 5y - 103 = 0 \\ -5x - 8y - 31 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 5y = 103 \\ -5x - 8y = 31 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 40x - 25y = -515 & (L_1) \leftarrow -5 \times (L_1) \\ 40x + 64y = -248 & (L_2) \leftarrow -8 \times (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 40x - 25y = -515 & (L_1) \\ 40x - 40x + 64y + 25y = -248 + 515 & (L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 40x - 25y = -515 & (L_1) \\ 89y = 267 & (L_2) \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 40x & - & 25y & = & -515 & (L_1) \\ & & 89y & = & 267 & (L_2) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 40x & - & 25y & = & -515 & \\ & & y & = & \dfrac{267}{89} & = 3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 40x - 25 \times 3 & = -515 \\ y & = 3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 40x & = -515 + 75 \\ y & = 3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = \dfrac{-440}{40} = -11 \\ y & = 3 \end{array} \right.$$

D'où les solutions de (S) sont $\{(-11\ ;\ 3)\}$. Donc H a pour coordonnées $(-11\ ;\ 3)$.

Correction 2

Tout d'abord, $A \notin d$ car $-3 \times 2 + 8 \times (-22) - 110 = -292 \neq 0$. H est l'intersection des deux droites d et (AH). Déterminons une équation cartésienne de la droite (AH) : d admet comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -8 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à (AH) et une équation cartésienne de (AH) est :

$$-8x - 3y + c = 0 \quad \text{où } c \text{ est un réel à déterminer.}$$

(AH) passe par A si et seulement si :

$$\begin{array}{rrcl} & -8 \times 2 - 3 \times (-22) + c & = & 0 \\ \iff & 50 + c & = & 0 \\ \iff & c & = & -50 \end{array}$$

(AH) admet pour équation cartésienne $-8x - 3y - 50 = 0$.

H est l'intersection des deux droites d et (AH) donc ses coordonnées $(x;y)$ vérifient le système :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x & + & 8y & -110 & = & 0 \\ -8x & - & 3y & -50 & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x & + & 8y & = & 110 \\ -8x & - & 3y & = & 50 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24x & - & 64y & = & -880 & (L_1) \leftarrow -8 \times (L_1) \\ 24x & + & 9y & = & -150 & (L_2) \leftarrow -3 \times (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24x & - & 64y & = & -880 & (L_1) \\ 24x - 24x & + & 9y + 64y & = & -150 + 880 & (L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24x & - & 64y & = & -880 & (L_1) \\ & & 73y & = & 730 & (L_2) \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 24x - 64y = -880 & (L_1) \\ 73y = 730 & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24x - 64y = -880 \\ y = \dfrac{730}{73} = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24x - 64 \times 10 = -880 \\ y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24x = -880 + 640 \\ y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-240}{24} = -10 \\ y = 10 \end{cases}$$

D'où les solutions de (S) sont $\{(-10\ ;\ 10)\}$. Donc H a pour coordonnées $(-10\ ;\ 10)$.

Correction 3

Tout d'abord, $A \notin d$ car $-9 \times (-8) + 3 \times 5 - 117 = -30 \neq 0$. H est l'intersection des deux droites d et (AH). Déterminons une équation cartésienne de la droite (AH) : d admet comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à (AH) et une équation cartésienne de (AH) est :

$$-3x - 9y + c = 0 \quad \text{où } c \text{ est un réel à déterminer.}$$

(AH) passe par A si et seulement si :

$$\begin{array}{lrcl} & -3 \times (-8) - 9 \times 5 + c & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & -21 + c & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & c & = & 21 \end{array}$$

(AH) admet pour équation cartésienne $-3x - 9y + 21 = 0$.

H est l'intersection des deux droites d et (AH) donc ses coordonnées $(x;y)$ vérifient le système :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -9x & + & 3y & -117 & = & 0 \\ -3x & - & 9y & +21 & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9x & + & 3y & = & 117 \\ -3x & - & 9y & = & -21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27x & - & 9y & = & -351 & (L_1) \leftarrow -3 \times (L_1) \\ 27x & + & 81y & = & 189 & (L_2) \leftarrow -9 \times (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27x & - & 9y & = & -351 & (L_1) \\ 27x - 27x & + & 81y + 9y & = & 189 + 351 & (L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27x & - & 9y & = & -351 & (L_1) \\ & & 90y & = & 540 & (L_2) \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 27x - 9y = -351 & (L_1) \\ 90y = 540 & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27x - 9y = -351 \\ y = \dfrac{540}{90} = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27x - 9 \times 6 = -351 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27x = -351 + 54 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-297}{27} = -11 \\ y = 6 \end{cases}$$

D'où les solutions de (S) sont $\{(-11\ ;\ 6)\}$. Donc H a pour coordonnées $(-11\ ;\ 6)$.

Correction 4

Tout d'abord, $A \notin d$ car $2 \times 5 - 2 \times (-26) - 10 = 52 \neq 0$. H est l'intersection des deux droites d et (AH). Déterminons une équation cartésienne de la droite (AH) : d admet comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à (AH) et une équation cartésienne de (AH) est :

$$2x + 2y + c = 0 \quad \text{où } c \text{ est un réel à déterminer.}$$

(AH) passe par A si et seulement si :

$$\begin{array}{rrcl} & 2 \times 5 + 2 \times (-26) + c & = & 0 \\ \iff & -42 + c & = & 0 \\ \iff & c & = & 42 \end{array}$$

(AH) admet pour équation cartésienne $2x + 2y + 42 = 0$.

H est l'intersection des deux droites d et (AH) donc ses coordonnées $(x;y)$ vérifient le système :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x & - & 2y & -10 & = & 0 \\ 2x & + & 2y & +42 & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x & - & 2y & = & 10 \\ 2x & + & 2y & = & -42 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x & - & 4y & = & 20 & (L_1) \leftarrow 2 \times (L_1) \\ 4x & + & 4y & = & -84 & (L_2) \leftarrow 2 \times (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x & - & 4y & = & 20 & (L_1) \\ 4x - 4x & + & 4y + 4y & = & -84 - 20 & (L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x & - & 4y & = & 20 & (L_1) \\ & & 8y & = & -104 & (L_2) \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4y = 20 & (L_1) \\ 8y = -104 & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4y = 20 \\ y = \dfrac{-104}{8} = -13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4 \times (-13) = 20 \\ y = -13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 20 - 52 \\ y = -13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-32}{4} = -8 \\ y = -13 \end{cases}$$

D'où les solutions de (S) sont $\{(-8\ ;\ -13)\}$. Donc H a pour coordonnées $(-8\ ;\ -13)$.

Correction 5

Tout d'abord, $A \notin d$ car $8 \times (-5) + 4 \times (-2) + 88 = 40 \neq 0$. H est l'intersection des deux droites d et (AH). Déterminons une équation cartésienne de la droite (AH) : d admet comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$. Donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à (AH) et une équation cartésienne de (AH) est :

$$-4x + 8y + c = 0 \quad \text{où } c \text{ est un réel à déterminer.}$$

(AH) passe par A si et seulement si :

$$\begin{array}{rrcl} & -4 \times (-5) + 8 \times (-2) + c & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & 4 + c & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & c & = & -4 \end{array}$$

(AH) admet pour équation cartésienne $-4x + 8y - 4 = 0$.

H est l'intersection des deux droites d et (AH) donc ses coordonnées $(x;y)$ vérifient le système :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y + 88 = 0 \\ -4x + 8y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y = -88 \\ -4x + 8y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -32x - 16y = 352 & (L_1) \leftarrow -4 \times (L_1) \\ -32x + 64y = 32 & (L_2) \leftarrow 8 \times (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -32x - 16y = 352 & (L_1) \\ -32x + 32x + 64y + 16y = 32 - 352 & (L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -32x - 16y = 352 & (L_1) \\ 80y = -320 & (L_2) \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -32x - 16y = 352 & (L_1) \\ 80y = -320 & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -32x - 16y = 352 \\ y = \dfrac{-320}{80} = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -32x - 16 \times (-4) = 352 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -32x = 352 - 64 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{288}{-32} = -9 \\ y = -4 \end{cases}$$

D'où les solutions de (S) sont $\{(-9\ ;\ -4)\}$. Donc H a pour coordonnées $(-9\ ;\ -4)$.