Activités Mentales

24 Août 2023

Question 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 48x^3x^2 - 16x - 19$.

1. Donner l'expression de la dérivée de la fonction f que l'on notera f'.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-4(6x+2)(-6x+2) = 144x^2x - 16$.
3. Construire le tableau de signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $-4(6x+2)(-6x+2)$
4. En déduire les variations de la fonction f.

Question 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = -16x^3 - 56x^2 + 20x - 10$.

1. Donner l'expression de la dérivée de la fonction f que l'on notera f'.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
   $4(2x+5)(-6x+1) = -48x^2 - 112x + 20$.
3. Construire le tableau de signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
   $4(2x+5)(-6x+1)$
4. En déduire les variations de la fonction f.

Question 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 16x^3 - 36x^2 - 48x + 30$.

1. Donner l'expression de la dérivée de la fonction f que l'on notera f'.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $6(-4x-2)(-2x+4) = 48x^2 - 72x - 48$.
3. Construire le tableau de signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $6(-4x-2)(-2x+4)$
4. En déduire les variations de la fonction f.

Question 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 15x^3 + 15x^2 - 120x + 20$.

1. Donner l'expression de la dérivée de la fonction f que l'on notera f'.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $5(-3x-6)(-3x+4) = 45x^2 + 30x - 120$.
3. Construire le tableau de signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $5(-3x-6)(-3x+4)$
4. En déduire les variations de la fonction f.

Question 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 40x^3 - 36x^2 - 48x - 6$.

1. Donner l'expression de la dérivée de la fonction f que l'on notera f'.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-6(5x+2)(-4x+4) = 120x^2 - 72x - 48$.
3. Construire le tableau de signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $-6(5x+2)(-4x+4)$
4. En déduire les variations de la fonction f.

Correction 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = 48x^3 - 16x - 19$$
On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 48 \times 3x^2 - 16 \times 1 + 0 = 144x^2 - 16$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} -4(6x+2)(-6x+2) &= -4\left(-36x^2 + 12x - 12x + 4\right) \\ &= -4\left(-36x^2 x + 4\right) \\ &= 144x^2 x - 16 \end{aligned}$$

3. On pose $A(x)=6x+2$ et $B(x)=-6x+2$.

   - A est une fonction affine avec $m=6>0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord négative puis positive. .
     De plus $A(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{3}$.
   - B est une fonction affine avec $m=-6<0$. B est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord positive puis négative. sur $\mathbb{R}$.
     De plus $B(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

   On compare les deux racines obtenues : $\dfrac{-1}{3}<\dfrac{1}{3}$

On rappelle que $A(x) = 6x + 2$ et $B(x) = -6x + 2$ et $f'(x) = -4(6x + 2)(-6x + 2)$. Son tableau de signe est alors

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
-4		$-$		$-$		$-$	
$A(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$B(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Correction 2

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = -16x^3 - 56x^2 + 20x - 10$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -16 \times 3x^2 - 56 \times 2x + 20 \times 1 + 0 = -48x^2 - 112x + 20$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 4(2x+5)(-6x+1) &= 4\left(-12x^2 + 2x - 30x + 5\right) \\ &= 4\left(-12x^2 - 28x + 5\right) \\ &= -48x^2 - 112x + 20 \end{aligned}$$

3. On pose $A(x) = 2x + 5$ et $B(x) = -6x + 1$.

- A est une fonction affine avec $m = 2 > 0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord négative puis positive. .
  De plus $A(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5}{2}$.

- B est une fonction affine avec $m = -6 < 0$. B est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord positive puis négative. sur $\mathbb{R}$.
  De plus $B(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{6}$.

On compare les deux racines obtenues : $\dfrac{-5}{2} < \dfrac{1}{6}$

On rappelle que $A(x) = 2x + 5$ et $B(x) = -6x + 1$ et $f'(x) = 4(2x+5)(-6x+1)$. Son tableau de signe est alors

x	$-\infty$		$\frac{-5}{2}$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
4		$+$		$+$		$+$	
$A(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$B(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4. On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\frac{-5}{2}$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Correction 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = 16x^3 - 36x^2 - 48x + 30$$
On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 16 \times 3x^2 - 36 \times 2x - 48 \times 1 + 0 = 48x^2 - 72x - 48$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} 6(-4x-2)(-2x+4) &= 6\left(8x^2 - 16x + 4x - 8\right) \\ &= 6\left(8x^2 - 12x - 8\right) \\ &= 48x^2 - 72x - 48 \end{aligned}$$

3. On pose $A(x) = -4x - 2$ et $B(x) = -2x + 4$.

   - A est une fonction affine avec $m = -4 < 0$. f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord positive puis négative. .
     De plus $A(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{2}$.

   - B est une fonction affine avec $m = -2 < 0$. B est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord positive puis négative. sur $\mathbb{R}$.
     De plus $B(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

   On compare les deux racines obtenues : $\dfrac{-1}{2} < 2$

On rappelle que $A(x) = -4x - 2$ et $B(x) = -2x + 4$ et $f'(x) = 6(-4x-2)(-2x+4)$. Son tableau de signe est alors

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		2		$+\infty$
6		$+$		$+$		$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$B(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		2		$+\infty$
f		↗		↘		↗	

Correction 4

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = 15x^3 + 15x^2 - 120x + 20$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 15 \times 3x^2 + 15 \times 2x - 120 \times 1 + 0 = 45x^2 + 30x - 120$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 5(-3x-6)(-3x+4) &= 5\left(9x^2 - 12x + 18x - 24\right) \\ &= 5\left(9x^2 + 6x - 24\right) \\ &= 45x^2 + 30x - 120 \end{aligned}$$

③ On pose $A(x) = -3x - 6$ et $B(x) = -3x + 4$.

- A est une fonction affine avec $m = -3 < 0$. f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord positive puis négative. .
  De plus $A(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

- B est une fonction affine avec $m = -3 < 0$. B est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord positive puis négative. sur $\mathbb{R}$.
  De plus $B(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$.

On compare les deux racines obtenues : $-2 < \dfrac{4}{3}$

On rappelle que $A(x) = -3x - 6$ et $B(x) = -3x + 4$ et $f'(x) = 5(-3x-6)(-3x+4)$. Son tableau de signe est alors

x	$-\infty$		-2		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
5		$+$		$+$		$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$B(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-2		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Correction 5

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = 40x^3 - 36x^2 - 48x - 6$$
On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 40 \times 3x^2 - 36 \times 2x - 48 \times 1 + 0 = 120x^2 - 72x - 48$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} -6(5x+2)(-4x+4) &= -6\left(-20x^2 + 20x - 8x + 8\right) \\ &= -6\left(-20x^2 + 12x + 8\right) \\ &= 120x^2 - 72x - 48 \end{aligned}$$

3. On pose $A(x) = 5x + 2$ et $B(x) = -4x + 4$.

   - A est une fonction affine avec $m = 5 > 0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord négative puis positive. .
     De plus $A(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2}{5}$.
   - B est une fonction affine avec $m = -4 < 0$. B est donc décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle est donc d'abord positive puis négative. sur $\mathbb{R}$.
     De plus $B(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

   On compare les deux racines obtenues : $\dfrac{-2}{5} < 1$

On rappelle que $A(x) = 5x + 2$ et $B(x) = -4x + 4$ et $f'(x) = -6(5x + 2)(-4x + 4)$. Son tableau de signe est alors

x	$-\infty$		$\frac{-2}{5}$		1		$+\infty$
-6		$-$		$-$		$-$	
$A(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$B(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. On en déduit les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$\frac{-2}{5}$		1		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	