Activités Mentales

24 Août 2023

Question 1

On considère la fonction polynôme de degré 3 f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3x^3 + 12x^2 + 123x + 108$$

1. Vérifier que -1 est racine de f.
2. Déterminer les valeurs de a, b et c tels que pour tout réel x :

$$f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$

On pourra développer l'expression et identifier les coefficients du polynôme. On pose $g(x) = -3x^2 + 15x + 108$

3. Déterminer la forme factorisée de g.
4. En déduire une forme factorisée de f.

Question 2

On considère la fonction polynôme de degré 3 f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 17x + 90$$

1. Vérifier que -2 est racine de f.
2. Déterminer les valeurs de a, b et c tels que pour tout réel x :

   $$f(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$$

   On pourra développer l'expression et identifier les coefficients du polynôme. On pose $g(x) = x^2 - 14x + 45$

3. Déterminer la forme factorisée de g.
4. En déduire une forme factorisée de f.

Question 3

On considère la fonction polynôme de degré 3 f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 14x^2 + 53x + 40$$

1. Vérifier que -1 est racine de f.
2. Déterminer les valeurs de a, b et c tels que pour tout réel x :

   $$f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$

   On pourra développer l'expression et identifier les coefficients du polynôme. On pose $g(x) = x^2 + 13x + 40$

3. Déterminer la forme factorisée de g.
4. En déduire une forme factorisée de f.

Question 4

On considère la fonction polynôme de degré 3 f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3x^3 - 21x^2 + 78x + 216$$

1. Vérifier que -2 est racine de f.
2. Déterminer les valeurs de a, b et c tels que pour tout réel x :

   $$f(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$$

   On pourra développer l'expression et identifier les coefficients du polynôme. On pose $g(x) = -3x^2 - 15x + 108$
3. Déterminer la forme factorisée de g.
4. En déduire une forme factorisée de f.

Question 5

On considère la fonction polynôme de degré 3 f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^3 - 33x^2 + 93x - 63$$

1. Vérifier que 1 est racine de f.
2. Déterminer les valeurs de a, b et c tels que pour tout réel x :

   $$f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

   On pourra développer l'expression et identifier les coefficients du polynôme. On pose $g(x) = 3x^2 - 30x + 63$
3. Déterminer la forme factorisée de g.
4. En déduire une forme factorisée de f.

Correction 1

1. -1 est racine de f si et seulement si $f(-1)=0$. On calcule :

$$\begin{aligned} f(-1) &= -3\times(-1)^3+12\times(-1)^2+123\times(-1)+108 \\ &= 3+12-123+108 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   -1 est bien racine de f.

2. On développe le membre de droite. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} (x+1)(ax^2+bx+c) &= ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c \\ &= ax^3+(b+a)x^2+(c+b)x+c \\ &= -3x^3+12x^2+123x+108 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3. Par identification des coefficients (c'est-à-dire que les coefficients devant x^3 doivent être égaux, idem pour x^2 idem pour x et la constante), on a le système suivant :

$$\begin{cases} a & = -3 \\ b+a & = 12 \\ c+b & = 123 \\ c & = 108 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = -3 \\ b-3 & = 12 \\ c+b & = 123 \\ c & = 108 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & = -3 \\ b & = 15 \\ c+15 & = 123 \\ c & = 108 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = -3 \\ b & = 15 \\ c & = 108 \\ c & = 108 \end{cases}$$

On a donc $a = -3$, $b = 15$ et $c = 108$ d'où
$f(x) = (x+1)(-3x^2 + 15x + 108)$ pour tout réel x.

4. g est une fonction polynôme du second degré. Pour trouver sa forme factorisée on déterminer ses éventuelles racines.
On a $a = -3$, $b = 15$ et $c = 108$. On calcule son discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 15^2 - 4 \times (-3) \times 108 = 1521 > 0$
Ainsi g admet racines réelles distinctes données par :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15 - \sqrt{1521}}{-6} = 9 \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15 + \sqrt{1521}}{-6} = -4$$

Ainsi pour tout réel x, $g(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = -3\,(x - 9)\,(x + 4)$.

5. Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)\underbrace{\left(-3x^2+15x+108\right)}_{=g(x)} \\ &= (x-1)\times g(x) \\ &= (x+1)\times(-3)(x-9)(x+4) \\ &= -3(x+1)(x-9)(x+4) \end{aligned}$$

Correction 2

1. -2 est racine de f si et seulement si $f(-2)=0$. On calcule :

$$\begin{aligned} f(-2) &= 1\times(-2)^3-12\times(-2)^2+17\times(-2)+90 \\ &= -8-48-34+90 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   -2 est bien racine de f.

2. On développe le membre de droite. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} (x+2)(ax^2+bx+c) &= ax^3+bx^2+cx+2ax^2+2bx+2c \\ &= ax^3+(b+2a)x^2+(c+2b)x+2c \\ &= x^3-12x^2+17x+90 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3. Par identification des coefficients (c'est-à-dire que les coefficients devant x^3 doivent être égaux, idem pour x^2 idem pour x et la constante), on a le système suivant :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ b + 2a & = -12 \\ c + 2b & = 17 \\ 2c & = 90 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 1 \\ b + 2 & = -12 \\ c + 2b & = 17 \\ 2c & = 90 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & = 1 \\ b & = -14 \\ c - 28 & = 17 \\ 2c & = 90 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 1 \\ b & = -14 \\ c & = 45 \\ c & = 45 \end{cases}$$

On a donc $a = 1$, $b = -14$ et $c = 45$ d'où $f(x) = (x + 2)(x^2 - 14x + 45)$ pour tout réel x.

4. g est une fonction polynôme du second degré. Pour trouver sa forme factorisée on déterminer ses éventuelles racines.
On a $a=1$, $b=-14$ et $c=45$. On calcule son discriminant :
$\Delta = b^2-4ac = (-14)^2-4\times 1\times 45 = 16>0$
Ainsi g admet racines réelles distinctes données par :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14-\sqrt{16}}{2} = 5 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14+\sqrt{16}}{2} = 9$$

Ainsi pour tout réel x, $g(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = (x-5)(x-9)$.

❺ Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)\underbrace{\left(x^2-14x+45\right)}_{=g(x)} \\ &= (x-2)\times g(x) \\ &= (x+2)\times 1(x-5)(x-9) \\ &= (x+2)(x-5)(x-9) \end{aligned}$$

Correction 3

1. -1 est racine de f si et seulement si $f(-1) = 0$. On calcule :

$$\begin{aligned} f(-1) &= 1 \times (-1)^3 + 14 \times (-1)^2 + 53 \times (-1) + 40 \\ &= -1 + 14 - 53 + 40 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   -1 est bien racine de f.

2. On développe le membre de droite. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} (x+1)(ax^2 + bx + c) &= ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c \\ &= ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c \\ &= x^3 + 14x^2 + 53x + 40 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3. Par identification des coefficients (c'est-à-dire que les coefficients devant x^3 doivent être égaux, idem pour x^2 idem pour x et la constante), on a le système suivant :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ b+a & = 14 \\ c+b & = 53 \\ c & = 40 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a & = 1 \\ b+1 & = 14 \\ c+b & = 53 \\ c & = 40 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a & = 1 \\ b & = 13 \\ c+13 & = 53 \\ c & = 40 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a & = 1 \\ b & = 13 \\ c & = 40 \\ c & = 40 \end{cases}$$

On a donc $a = 1$, $b = 13$ et $c = 40$ d'où $f(x) = (x+1)(x^2+13x+40)$ pour tout réel x.

4. g est une fonction polynôme du second degré. Pour trouver sa forme factorisée on déterminer ses éventuelles racines.
On a $a=1$, $b=13$ et $c=40$. On calcule son discriminant :
$\Delta = b^2-4ac = 13^2-4\times1\times40 = 9>0$
Ainsi g admet racines réelles distinctes données par :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13-\sqrt{9}}{2} = -8 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13+\sqrt{9}}{2} = -5$$

Ainsi pour tout réel x, $g(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = (x+8)(x+5)$.

5. Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)\underbrace{\left(x^2+13x+40\right)}_{=g(x)} \\ &= (x-1)\times g(x) \\ &= (x+1)\times 1\,(x+8)\,(x+5) \\ &= (x+1)\,(x+8)\,(x+5) \end{aligned}$$

Correction 4

1. -2 est racine de f si et seulement si $f(-2) = 0$. On calcule :

$$\begin{aligned} f(-2) &= -3 \times (-2)^3 - 21 \times (-2)^2 + 78 \times (-2) + 216 \\ &= 24 - 84 - 156 + 216 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   -2 est bien racine de f.

2. On développe le membre de droite. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} (x+2)(ax^2+bx+c) &= ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c \\ &= ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c \\ &= -3x^3 - 21x^2 + 78x + 216 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3. Par identification des coefficients (c'est-à-dire que les coefficients devant x^3 doivent être égaux, idem pour x^2 idem pour x et la constante), on a le système suivant :

$$\begin{cases} a & = -3 \\ b+2a & = -21 \\ c+2b & = 78 \\ 2c & = 216 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = -3 \\ b-6 & = -21 \\ c+2b & = 78 \\ 2c & = 216 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & = -3 \\ b & = -15 \\ c-30 & = 78 \\ 2c & = 216 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = -3 \\ b & = -15 \\ c & = 108 \\ c & = 108 \end{cases}$$

On a donc $a = -3$, $b = -15$ et $c = 108$ d'où
$f(x) = (x+2)(-3x^2 - 15x + 108)$ pour tout réel x.

4. g est une fonction polynôme du second degré. Pour trouver sa forme factorisée on déterminer ses éventuelles racines.
On a $a = -3$, $b = -15$ et $c = 108$. On calcule son discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4 \times (-3) \times 108 = 1521 > 0$
Ainsi g admet racines réelles distinctes données par :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{15-\sqrt{1521}}{-6} = 4 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{15+\sqrt{1521}}{-6} = -9$$

Ainsi pour tout réel x, $g(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = -3\,(x-4)\,(x+9)$.

❺ Pour tout réel x on a :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x+2)\underbrace{\left(-3x^2-15x+108\right)}_{=g(x)} \\
&= (x-2)\times g(x) \\
&= (x+2)\times(-3)(x-4)(x+9) \\
&= -3(x+2)(x-4)(x+9)
\end{aligned}
$$

Correction 5

1. 1 est racine de f si et seulement si $f(1) = 0$. On calcule :

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \times 1^3 - 33 \times 1^2 + 93 \times 1 - 63 \\ &= 3 - 33 + 93 - 63 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   1 est bien racine de f.

2. On développe le membre de droite. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} (x-1)(ax^2+bx+c) &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \\ &= 3x^3 - 33x^2 + 93x - 63 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3. Par identification des coefficients (c'est-à-dire que les coefficients devant x^3 doivent être égaux, idem pour x^2 idem pour x et la constante), on a le système suivant :

$$\begin{cases} a & = 3 \\ b-a & = -33 \\ c-b & = 93 \\ -c & = -63 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 3 \\ b-3 & = -33 \\ c-b & = 93 \\ -c & = -63 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & = 3 \\ b & = -30 \\ c+30 & = 93 \\ -c & = -63 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 3 \\ b & = -30 \\ c & = 63 \\ c & = 63 \end{cases}$$

On a donc $a = 3$, $b = -30$ et $c = 63$ d'où $f(x) = (x-1)(3x^2 - 30x + 63)$ pour tout réel x.

4. g est une fonction polynôme du second degré. Pour trouver sa forme factorisée on déterminer ses éventuelles racines.
On a $a=3$, $b=-30$ et $c=63$. On calcule son discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-30)^2 - 4 \times 3 \times 63 = 144 > 0$
Ainsi g admet racines réelles distinctes données par :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{30-\sqrt{144}}{6} = 3 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{30+\sqrt{144}}{6} = 7$$

Ainsi pour tout réel x, $g(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = 3\,(x-3)\,(x-7)$.

5. Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)\underbrace{\left(3x^2-30x+63\right)}_{=g(x)} \\ &= (x+1)\times g(x) \\ &= (x-1)\times 3(x-3)(x-7) \\ &= 3(x-1)(x-3)(x-7) \end{aligned}$$