# Activités Mentales

24 Août 2023

# Question 1

On considère la fonction $f$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression

$$f(x) = (2x-8)e^{-8x-8}.$$

Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$

# Question 2

On considère la fonction $f$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression

$$f(x) = (x+4)e^{-3x-7}.$$

Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$

# Question 3

On considère la fonction $f$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression

$$f(x) = (10x - 8)e^{5x}.$$

Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$

# Question 4

On considère la fonction $f$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression

$$f(x) = (-9x - 9)e^{-6x+10}.$$

Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$

# Question 5

On considère la fonction $f$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ d'expression

$$f(x) = (-9x+9)e^{3x-6}.$$

Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$

# Correction 1

Pour tout réel $x$, on a $f(x) = (2x-8)e^{-8x-8}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{cc} u(x) = 2x-8 & v(x) = e^{-8x-8} \\ u'(x) = 2 & v'(x) = -8e^{-8x-8} \end{array}$$

et pour tout réel $x$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 2e^{-8x-8} + (2x-8) \times (-8)\, e^{-8x-8} \\ &= (2-16x+64)e^{-8x-8} \\ &= (-16x+66)e^{-8x-8} \end{aligned}$$

On a pour tout réel $x$, $f'(x) = (-16x+66)e^{-8x-8}$.
Le signe de la dérivée est donnée par la fonction affine $x \mapsto -16x+66$ car pour tout réel $x$, $e^{-8x-8} > 0$.
Or comme $-16 < 0$, cette fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x = \dfrac{33}{8}$.
Finalement, le tableau de variation de $f$ est

| $x$ | $-\infty$ | | $\dfrac{33}{8}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

# Correction 2

Pour tout réel $x$, on a $f(x) = (x+4)e^{-3x-7}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{cc} u(x) = x+4 & v(x) = e^{-3x-7} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = -3e^{-3x-7} \end{array}$$

et pour tout réel $x$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= e^{-3x-7} + (x+4) \times (-3)\, e^{-3x-7} \\ &= (1-3x-12)e^{-3x-7} \\ &= (-3x-11)e^{-3x-7} \end{aligned}$$

On a pour tout réel $x$, $f'(x) = (-3x-11)e^{-3x-7}$.
Le signe de la dérivée est donnée par la fonction affine $x \mapsto -3x-11$ car pour tout réel $x$, $e^{-3x-7} > 0$.
Or comme $-3 < 0$, cette fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x = \dfrac{-11}{3}$.
Finalement, le tableau de variation de $f$ est

| $x$ | $-\infty$ | | $\dfrac{-11}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

# Correction 3

Pour tout réel $x$, on a $f(x) = (10x-8)e^{5x}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{cc} u(x) = 10x-8 & v(x) = e^{5x} \\ u'(x) = 10 & v'(x) = 5e^{5x} \end{array}$$

et pour tout réel $x$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 10e^{5x} + (10x-8) \times 5e^{5x} \\ &= (10+50x-40)e^{5x} \\ &= (50x-30)e^{5x} \end{aligned}$$

On a pour tout réel $x$, $f'(x) = (50x - 30)e^{5x}$.
Le signe de la dérivée est donnée par la fonction affine $x \mapsto 50x - 30$ car pour tout réel $x$, $e^{5x} > 0$.

Or comme $50 > 0$, cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x = \dfrac{3}{5}$.

Finalement, le tableau de variation de $f$ est

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

# Correction 4

Pour tout réel $x$, on a $f(x) = (-9x-9)e^{-6x+10}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{cc} u(x) = -9x-9 & v(x) = e^{-6x+10} \\ u'(x) = -9 & v'(x) = -6e^{-6x+10} \end{array}$$

et pour tout réel $x$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= -9e^{-6x+10} + (-9x-9) \times (-6)\, e^{-6x+10} \\ &= (-9+54x+54)e^{-6x+10} \\ &= (54x+45)e^{-6x+10} \end{aligned}$$

On a pour tout réel $x$, $f'(x) = (54x+45)e^{-6x+10}$.
Le signe de la dérivée est donnée par la fonction affine $x \mapsto 54x+45$ car pour tout réel $x$, $e^{-6x+10} > 0$.

Or comme $54 > 0$, cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x = \dfrac{-5}{6}$.

Finalement, le tableau de variation de $f$ est

| $x$ | $-\infty$ | | $\dfrac{-5}{6}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

# Correction 5

Pour tout réel $x$, on a $f(x) = (-9x+9)e^{3x-6}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(x) &= -9x+9 & v(x) &= e^{3x-6} \\ u'(x) &= -9 & v'(x) &= 3e^{3x-6} \end{aligned}$$

et pour tout réel $x$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= -9e^{3x-6} + (-9x+9) \times 3e^{3x-6} \\ &= (-9-27x+27)e^{3x-6} \\ &= (-27x+18)e^{3x-6} \end{aligned}$$

On a pour tout réel $x$, $f'(x) = (-27x + 18)e^{3x-6}$.
Le signe de la dérivée est donnée par la fonction affine $x \mapsto -27x + 18$ car pour tout réel $x$, $e^{3x-6} > 0$.
Or comme $-27 < 0$, cette fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x = \dfrac{2}{3}$.
Finalement, le tableau de variation de $f$ est

| $x$ | $-\infty$ | | $\dfrac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |