

Activités Mentales

24 Août 2023

Question 1

On considère la fonction f , définie et dérivable sur \mathbb{R} d'expression

$$f(x) = (2x - 8)e^{-8x-8}.$$

Étudier les variations de f sur \mathbb{R}

Question 2

On considère la fonction f , définie et dérivable sur \mathbb{R} d'expression

$$f(x) = (x + 4)e^{-3x-7}.$$

Étudier les variations de f sur \mathbb{R}

Question 3

On considère la fonction f , définie et dérivable sur \mathbb{R} d'expression

$$f(x) = (10x - 8)e^{5x}.$$

Étudier les variations de f sur \mathbb{R}

Question 4

On considère la fonction f , définie et dérivable sur \mathbb{R} d'expression

$$f(x) = (-9x - 9)e^{-6x+10}.$$

Étudier les variations de f sur \mathbb{R}

Question 5

On considère la fonction f , définie et dérivable sur \mathbb{R} d'expression

$$f(x) = (-9x + 9)e^{3x-6}.$$

Étudier les variations de f sur \mathbb{R}

Correction 1

Pour tout réel x , on a $f(x) = (2x - 8)e^{-8x-8}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}u(x) &= 2x - 8 & v(x) &= e^{-8x-8} \\u'(x) &= 2 & v'(x) &= -8e^{-8x-8}\end{aligned}$$

et pour tout réel x on a

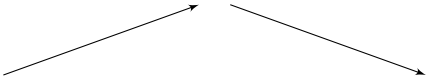
$$\begin{aligned}f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\&= 2e^{-8x-8} + (2x - 8) \times (-8)e^{-8x-8} \\&= (2 - 16x + 64)e^{-8x-8} \\&= (-16x + 66)e^{-8x-8}\end{aligned}$$

On a pour tout réel x , $f'(x) = (-16x + 66)e^{-8x-8}$.

Le signe de la dérivée est donnée par la fonction affine $x \mapsto -16x + 66$ car pour tout réel x , $e^{-8x-8} > 0$.

Or comme $-16 < 0$, cette fonction est décroissante sur \mathbb{R} et s'annule en $x = \frac{33}{8}$.

Finalement, le tableau de variation de f est

x	$-\infty$	$\frac{33}{8}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f			

Correction 2

Pour tout réel x , on a $f(x) = (x+4)e^{-3x-7}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}u(x) &= x+4 & v(x) &= e^{-3x-7} \\u'(x) &= 1 & v'(x) &= -3e^{-3x-7}\end{aligned}$$

et pour tout réel x on a

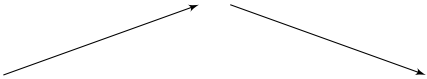
$$\begin{aligned}f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\&= e^{-3x-7} + (x+4) \times (-3)e^{-3x-7} \\&= (1-3x-12)e^{-3x-7} \\&= (-3x-11)e^{-3x-7}\end{aligned}$$

On a pour tout réel x , $f'(x) = (-3x - 11)e^{-3x-7}$.

Le signe de la dérivée est donnée par la fonction affine $x \mapsto -3x - 11$ car pour tout réel x , $e^{-3x-7} > 0$.

Or comme $-3 < 0$, cette fonction est décroissante sur \mathbb{R} et s'annule en $x = \frac{-11}{3}$.

Finalement, le tableau de variation de f est

x	$-\infty$	$\frac{-11}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f			

Correction 3

Pour tout réel x , on a $f(x) = (10x - 8)e^{5x}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}u(x) &= 10x - 8 & v(x) &= e^{5x} \\u'(x) &= 10 & v'(x) &= 5e^{5x}\end{aligned}$$

et pour tout réel x on a

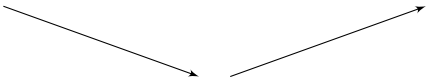
$$\begin{aligned}f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\&= 10e^{5x} + (10x - 8) \times 5e^{5x} \\&= (10 + 50x - 40)e^{5x} \\&= (50x - 30)e^{5x}\end{aligned}$$

On a pour tout réel x , $f'(x) = (50x - 30)e^{5x}$.

Le signe de la dérivée est donnée par la fonction affine $x \mapsto 50x - 30$ car pour tout réel x , $e^{5x} > 0$.

Or comme $50 > 0$, cette fonction est croissante sur \mathbb{R} et s'annule en $x = \frac{3}{5}$.

Finalement, le tableau de variation de f est

x	$-\infty$	$\frac{3}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

Correction 4

Pour tout réel x , on a $f(x) = (-9x - 9)e^{-6x+10}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}u(x) &= -9x - 9 & v(x) &= e^{-6x+10} \\u'(x) &= -9 & v'(x) &= -6e^{-6x+10}\end{aligned}$$

et pour tout réel x on a

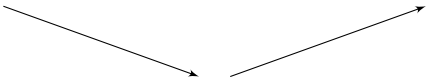
$$\begin{aligned}f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\&= -9e^{-6x+10} + (-9x - 9) \times (-6)e^{-6x+10} \\&= (-9 + 54x + 54)e^{-6x+10} \\&= (54x + 45)e^{-6x+10}\end{aligned}$$

On a pour tout réel x , $f'(x) = (54x + 45)e^{-6x+10}$.

Le signe de la dérivée est donnée par la fonction affine $x \mapsto 54x + 45$ car pour tout réel x , $e^{-6x+10} > 0$.

Or comme $54 > 0$, cette fonction est croissante sur \mathbb{R} et s'annule en $x = \frac{-5}{6}$.

Finalement, le tableau de variation de f est

x	$-\infty$	$\frac{-5}{6}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

Correction 5

Pour tout réel x , on a $f(x) = (-9x + 9)e^{3x-6}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}u(x) &= -9x + 9 & v(x) &= e^{3x-6} \\u'(x) &= -9 & v'(x) &= 3e^{3x-6}\end{aligned}$$

et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned}f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\&= -9e^{3x-6} + (-9x + 9) \times 3e^{3x-6} \\&= (-9 - 27x + 27)e^{3x-6} \\&= (-27x + 18)e^{3x-6}\end{aligned}$$

On a pour tout réel x , $f'(x) = (-27x + 18)e^{3x-6}$.

Le signe de la dérivée est donnée par la fonction affine $x \mapsto -27x + 18$ car pour tout réel x , $e^{3x-6} > 0$.

Or comme $-27 < 0$, cette fonction est décroissante sur \mathbb{R} et s'annule en $x = \frac{2}{3}$.

Finalement, le tableau de variation de f est

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	