Activités Mentales

24 Août 2023

Question 1

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 9u_n + 16 \\ u_0 = -10 \end{cases}$.

1. Montrer que (v_n) définie par $v_n = u_n + 2$ est une suite géométrique de raison 9.
2. Donner alors v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n.

Question 2

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 20 \\ u_0 = -3 \end{cases}$.

1. Montrer que (v_n) définie par $v_n = u_n + 10$ est une suite géométrique de raison 3.
2. Donner alors v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n.

Question 3

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + 9 \\ u_0 = -4 \end{cases}$.

1. Montrer que (v_n) définie par $v_n = u_n + 3$ est une suite géométrique de raison 4.
2. Donner alors v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n.

Question 4

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 6u_n + 10 \\ u_0 = -5 \end{cases}$.

1. Montrer que (v_n) définie par $v_n = u_n + 2$ est une suite géométrique de raison 6.
2. Donner alors v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n.

Question 5

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 9u_n + 16 \\ u_0 = -6 \end{cases}$.

1. Montrer que (v_n) définie par $v_n = u_n + 2$ est une suite géométrique de raison 9.
2. Donner alors v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n.

Correction 1

1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 9v_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_n = 9u_n + 16 \\ u_0 = -10 \end{cases}$ et $v_n = u_n + 2$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 2 \\ &= 9u_n + 16 + 2 \\ &= 9u_n + 18 \\ &= 9(v_n - 2) + 18 \quad \text{car } u_n = v_n - 2 \\ &= 9v_n - 18 + 18 \\ &= 9v_n \end{aligned}$$

2. On a $v_0 = u_0 + 2 = -10 + 2 = -8$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n = -8 \times 9^n$.
Or comme $u_n = v_n - 2$, on a finalement,
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - 2 = -8 \times 9^n - 2$.

Correction 2

1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 3v_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = 3u_n + 20 \\ u_0 = -3 \end{cases}$ et $v_n = u_n + 10$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 10 \\ &= 3u_n + 20 + 10 \\ &= 3u_n + 30 \\ &= 3(v_n - 10) + 30 \quad \text{car } u_n = v_n - 10 \\ &= 3v_n - 30 + 30 \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

2. On a $v_0 = u_0 + 10 = -3 + 10 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n = 7 \times 3^n$.
Or comme $u_n = v_n - 10$, on a finalement,
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - 10 = 7 \times 3^n - 10$.

Correction 3

1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 4v_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = 4u_n + 9 \\ u_0 = -4 \end{cases}$ et $v_n = u_n + 3$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 3 \\ &= 4u_n + 9 + 3 \\ &= 4u_n + 12 \\ &= 4(v_n - 3) + 12 \quad \text{car } u_n = v_n - 3 \\ &= 4v_n - 12 + 12 \\ &= 4v_n \end{aligned}$$

2. On a $v_0 = u_0 + 3 = -4 + 3 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n = -1 \times 4^n$.
Or comme $u_n = v_n - 3$, on a finalement, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - 3 = -4^n - 3$.

Correction 4

1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 6v_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = 6u_n + 10 \\ u_0 = -5 \end{cases}$ et $v_n = u_n + 2$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 2 \\ &= 6u_n + 10 + 2 \\ &= 6u_n + 12 \\ &= 6(v_n - 2) + 12 \quad \text{car } u_n = v_n - 2 \\ &= 6v_n - 12 + 12 \\ &= 6v_n \end{aligned}$$

2. On a $v_0 = u_0 + 2 = -5 + 2 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n = -3 \times 6^n$.
Or comme $u_n = v_n - 2$, on a finalement,
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - 2 = -3 \times 6^n - 2$.

Correction 5

1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 9v_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_n = 9u_n + 16 \\ u_0 = -6 \end{cases}$ et $v_n = u_n + 2$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 2 \\ &= 9u_n + 16 + 2 \\ &= 9u_n + 18 \\ &= 9(v_n - 2) + 18 \quad \text{car } u_n = v_n - 2 \\ &= 9v_n - 18 + 18 \\ &= 9v_n \end{aligned}$$

2. On a $v_0 = u_0 + 2 = -6 + 2 = -4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n = -4 \times 9^n$.
Or comme $u_n = v_n - 2$, on a finalement,
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - 2 = -4 \times 9^n - 2$.