Trabalho de Cálculo II

Pablo Caballero Maciel

Agosto 2024

Contents

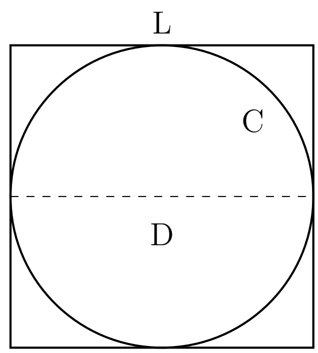
1 Aproximações para PI

Começaremos abordando alguns métodos geométricos para aproximações de PI. Por definição, adotaremos que

$$\pi = \frac{C}{D}$$

sendo C o comprimento da circunferência e D o diâmetro da mesma.

Em um primeiro momento, vamos criar um quadrado de lado L e inscrever uma circunferência de diâmetro D e comprimento C como a figura abaixo:



Dada a figura, podemos dizer que:

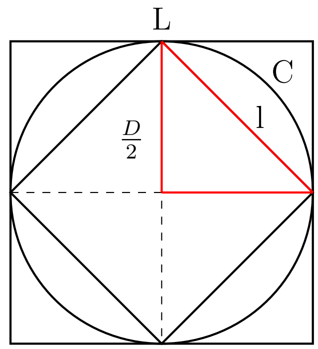
$$2D < C < 4L = 4D$$

$$2 < \frac{C}{D} < 4$$

$$2 < \pi < 4$$

Ou seja, o valor de PI está entre 2 e 4, o que ainda é algo muito vago.

Desta vez vamos inserir um outro quadrado de lado l na figura:



Assim, temos que:

$$4l < C < 4L = 4D$$

e por Teorema de Pitágoras temos que:

$$l^2 = 2\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 2\frac{L^2}{4} = \frac{D^2}{2} \Rightarrow l = \frac{D}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}D$$

Portanto:

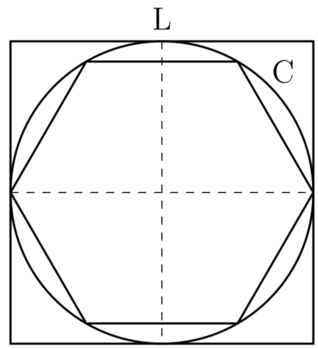
$$4\frac{\sqrt{2}}{2}D < C < 4D$$

$$2\sqrt{2} < \frac{C}{D} < 4$$

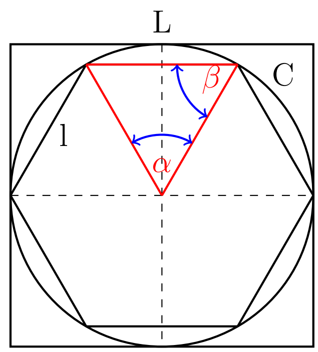
$$2\sqrt{2} < \pi < 4$$

Isso nos deixa com um valor de PI que está entre aproximadamente 2,82 e 4. Ainda longe do desejado.

Então vamos tentar fazer o mesmo mas dessa vez com um héxagono regular inscrito:



Antes de começarmos o cálculo da aproximação, precisamos descobrir quanto vale o lado do hexágono. E, para isso, vamos desenhar um triângulo nele:



Com isso, temos que:

$$6\alpha = 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Por outro lado:

$$2\beta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3}$$

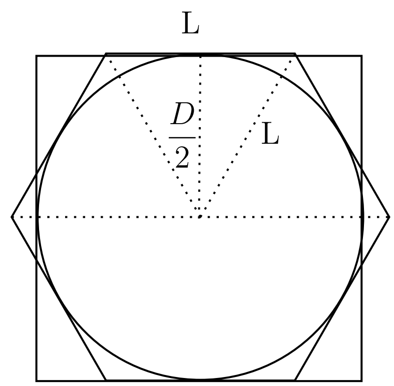
Portanto, como

$$\alpha = \beta$$

o triângulo é equilátero e descobrimos que:

$$l = \frac{D}{2}$$

Agora vamos encontrar o lado no caso de a circunferência estiver inscrita ao hexágono:



Deste modo:

$$L^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{L^2}{4}$$

E:

$$\frac{3}{4}L^2 = L^2(1 - \frac{1}{4}) = \frac{D^2}{4} \Rightarrow L = \frac{D}{\sqrt{3}}$$

Portanto, unindo os dois casos:

$$6l < C < 6L$$

$$6\frac{D}{2} < C < 6\frac{D}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3}}D = 2\sqrt{3}D$$

$$3 < \frac{C}{D} < 2\sqrt{3}$$

$$3 < \pi < 2\sqrt{3}$$

O que revela um intervalo entre 3 e aproximadamente 3,46 para o valor de PI, um pouco melhor do que os anteriores.

Se quando passamos a usar o hexágono no lugar do quadrado para aproximar o valor de PI nós obtivemos valores mais próximos, o que aconteceria se usássemos polígonos de mais lados?

Em 250 a.c, Arquimedes usou um polígono de 96 lados (16 vezes maior que o hexágono) e obteve:

$$\pi \approx \frac{22}{7} = 3,1428571$$

Em 265 d.c, Liu Hui usou um polígono de 3072 lados (512 vezes maior que o hexágono) e estimou:

$$\frac{307}{98} < \pi < \frac{307}{99}$$

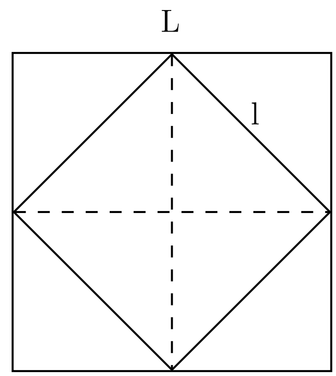
$$3,1416 < \pi < 3,1427$$

Em 480 d.c, Zu Chongzhi usou um polígono de 12888 lados (2048 vezes maior que o hexágono) e calculou:

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3,1415929$$

1.1 Duplicação do quadrado

Vamos fazer uma pausa para discutir sobre o problema da duplicação do quadrado.
Supondo que queremos duplicar um quadrado de lado L:



Pelo Teorema de Pitágoras:

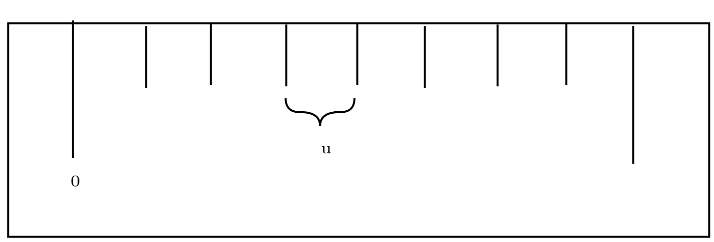
$$l^2 = 2\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 2\frac{L^2}{4}$$

$$2l^2 = L^2$$

Mas será que isso está certo? vamos tentar provar!
Supondo um régua onde "u" seja a unidade de medição e "m" e "n" sejam números tais que:

$$m \cdot u = L$$

$$n \cdot u = l$$



Resgatando o resultado do Teorema de Pitágoras:

$$2 = \frac{L^2}{l^2} = \frac{m^2 \cdot u^2}{n^2 \cdot u^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

Teorema: não existe nenhum número irracional tal que:

$$r^2 = 2$$

Demostração: por redução ao absurdo, suponha que:

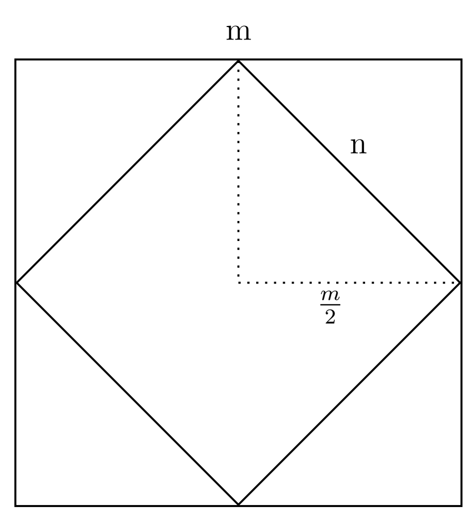
$$r = \frac{m}{n}$$

tal que:

$$2 = r^2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 2n = \frac{m^2}{n} \Rightarrow 2n - m = \frac{m^2}{n} - m \cdot \frac{n}{n} = \frac{m}{n}(m-n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2n-m}{m-n} = \frac{m}{n}$$

Agora, observe que:



A partir disso:

$$\frac{m}{2} < n \Rightarrow m < 2n$$

$$n < \frac{m}{2} + \frac{m}{2} = m$$

Portanto:

$$2n - m > 0$$

e

$$m - n > 0$$

são inteiros **positivos!** Além disso, tem-se que:

$$n < m < 2n \Rightarrow 0 < m - n < n$$

e

$$n < m < 2n \Rightarrow 2n < 2m = m + m \Rightarrow 2n - m < m$$

Em suma:

$$m, 2n - m, \cdots$$

é uma sequência estritamente decrescente de inteiros positivos, o que é um **absurdo!**

Prova alternativa: Seja

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

e suponha, sem perda de generalidade, que "m" e "n" são coprimos, ou seja, (m,n) = 1.

Agora, observe que:
$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$$
"m" será par se:

$$\begin{cases} m = 2k + 1 \Rightarrow m^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k\,(2k + 2) + 1. \;\; \textbf{impar, absurdo!} \\ m = 2k \;\; \textbf{par} \end{cases}$$

Portanto:
$$m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow \textbf{n par}$$

Porém:
$$n = 2k \;\; e \;\; m = 2k \Rightarrow (m, n) \geq 2 \;\; \textbf{absurdo!}$$

Corolário: Ou a duplicação do quadrado é impossível (**falso**) ou existe em magnitudes incomensuráveis.

1.2 Teorema do quadrado perfeito

Teorema: Se "N" não é um quadrado perfeito, então $\sqrt{N}$ é irracional
Demonstração: Se $\sqrt{N} = \frac{m}{n}$, então:

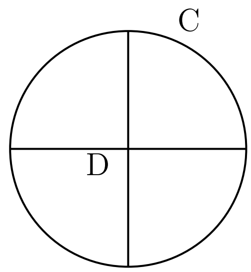
$$N = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = N \cdot n^2 = N \cdot n \cdot n$$

$$\frac{n}{m^2} = m \cdot m \Rightarrow \frac{n}{m} \quad se \quad (m, n) = 1$$

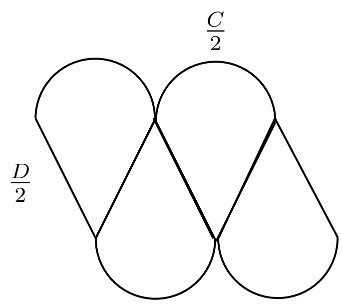
Agora dado que obviamente $\frac{n}{n}$ segue que $(m, n) \geq n$.
Portanto, é um **absurdo** ou n = 1, em cujo caso $N = m^2$, sendo um quadrado perfeito.

1.3 Área do círculo

Voltando às aproximações de PI, vamos usar a área do circulo para chegar nos resultados. Lembrando que adotamos PI como $\pi = \frac{C}{D}$
Em um primeiro momento, podemos dividir o círculo em quatro setores:



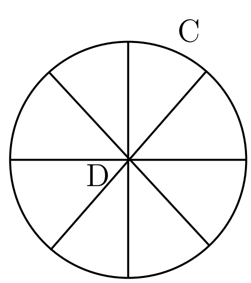
E vamos distribuir os setores de tal forma:



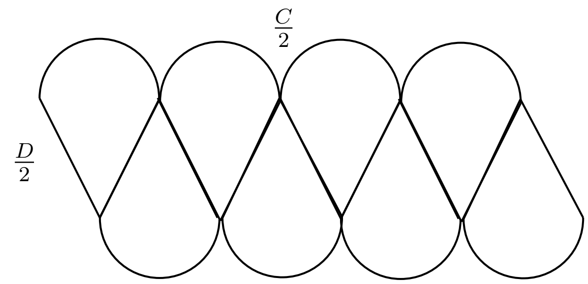
Tal que:

$$A \approx \frac{C}{2} \cdot \frac{D}{2}$$

Se dividirmos mais:



Ficamos com:



E concluímos que:

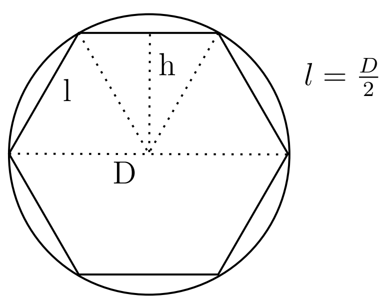
$$A \approx \frac{C}{2} \cdot \frac{D}{2}$$

Se continuarmos com fatias menores, obteremos:

$$A = \frac{C}{2} \cdot \frac{D}{2} = \frac{C}{D} \cdot \frac{D^2}{4} = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

1.4 Área de hexágonos

Agora vamos tentar usando a área de hexágonos:



Desse modo:

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = \frac{D^2}{4} - \frac{D^2}{4^2} = \frac{D^2}{4^2}(4-1) = \frac{3}{4^2}D^2$$

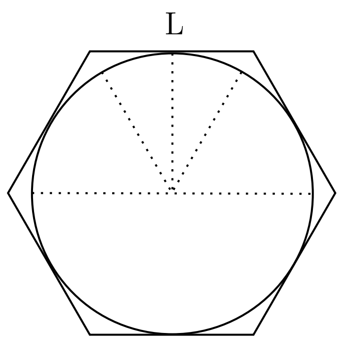
$$h = \frac{\sqrt{3}}{4}D$$

E, portanto:

$$6 \cdot l \cdot h \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}D \cdot \frac{1}{2} < \pi\frac{D^2}{4}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} < \pi$$

Por outro lado, se usarmos a circunferência inscrita ao hexágono:



$$L = \frac{D}{\sqrt{3}}$$

Temos que:

$$\pi \cdot \frac{D^2}{4} < 6 \cdot L \cdot h \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{D}{\sqrt{3}} \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\pi < \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Concluindo que:

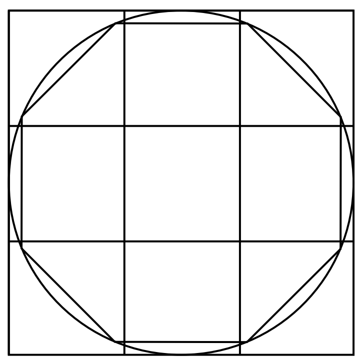
$$\frac{3\sqrt{3}}{2} < \pi < 2\sqrt{3}$$

Ou seja, descobrimos que PI está entre aproximadamente 2,6 e 3,46

1.5 Papiro de Rhind

O Papiro de Rhind, datado de 1550 a.C., é um dos mais antigos tratados matemáticos conhecidos, oferecendo uma visão detalhada sobre a matemática praticada no Antigo Egito. Escrito pelo escriba Ahmes, o documento abrange problemas que envolvem aritmética, álgebra simples e geometria.[1]

As técnicas que vamos ver a seguir foram utilizadas para calcular a área do círculo, mas que também resultou em uma aproximação de PI não intencional.
Comecemos com uma circunferência inscrita a um octógono:


D

A partir disso, temos que:

$$A \approx \left(\frac{D^2}{3}\right) \cdot (9-2) = \frac{7}{9}D^2$$

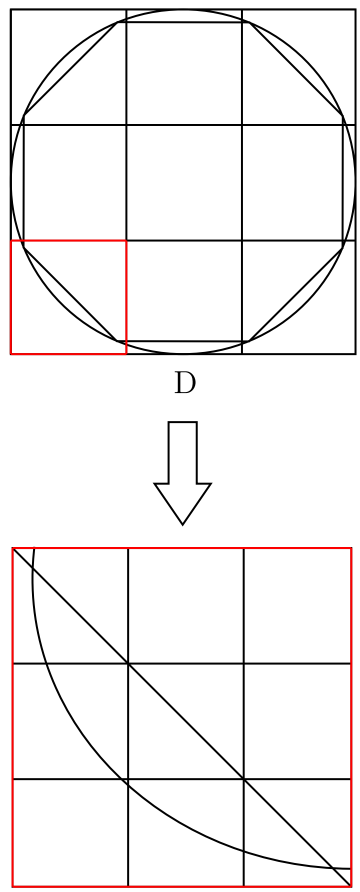
Então:

$$\pi\frac{D^2}{4} = A \approx \frac{7}{9}D^2$$

$$\pi \approx \frac{28}{9} = 3,\bar{1}$$

[1] Gillings, R. J. (1972). Mathematics in the Time of the Pharaohs. Dover Publications.

Agora se pegarmos apenas um quadrante e dividirmos ele em 9:



Podemos ver que:

$$A \approx \left(\frac{D}{9}\right)^2 \cdot (9^2 - 4 \cdot \frac{9}{2}) = \frac{D^2}{9^2} \cdot (9 - 2)$$

$$\frac{7}{9}D^2$$

Porém:

$$A \approx \left(\frac{D}{9}\right)^2 \cdot (9^2 - 4 \cdot \frac{9}{2}) = \left(\frac{D^2}{9}\right) \cdot (81 - 18)$$

$$\left(\frac{D}{9}\right)^2 \cdot 63 \approx \left(\frac{D}{9}\right)^2 \cdot 64 = \left(\frac{8}{9}D\right)^2$$

1.5.1 Quadratura do círculo

A partir disso, parece que a área do círculo tende a área do quadrado. Então, vamos verificar:

$$L^2 = A = \frac{7}{9}D^2$$

$$L = \sqrt{\frac{7}{9}}D$$

Por outro lado:

$$L^2 = A = \left(\frac{8}{9}D\right)^2$$

$$L = \frac{8}{9}D$$

Por fim, obtemos como subproduto uma estimativa de PI:

$$\pi \cdot \frac{D^2}{4} = A = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot D^2$$

$$\pi \approx \frac{4 \cdot 8^2}{9^2} = \frac{2^8}{9^2}$$

$$\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3,16$$

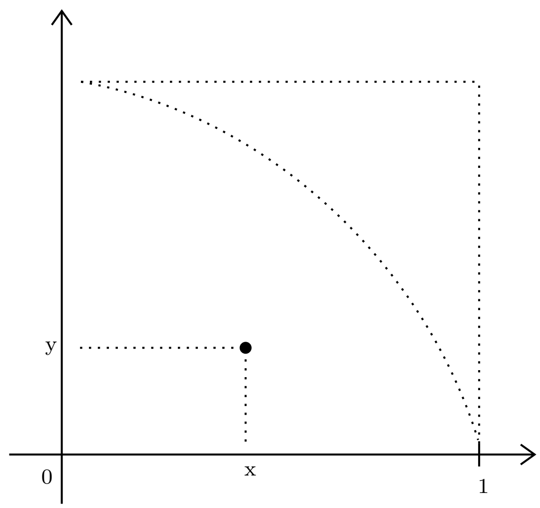
1.6 PI via Monte Carlo

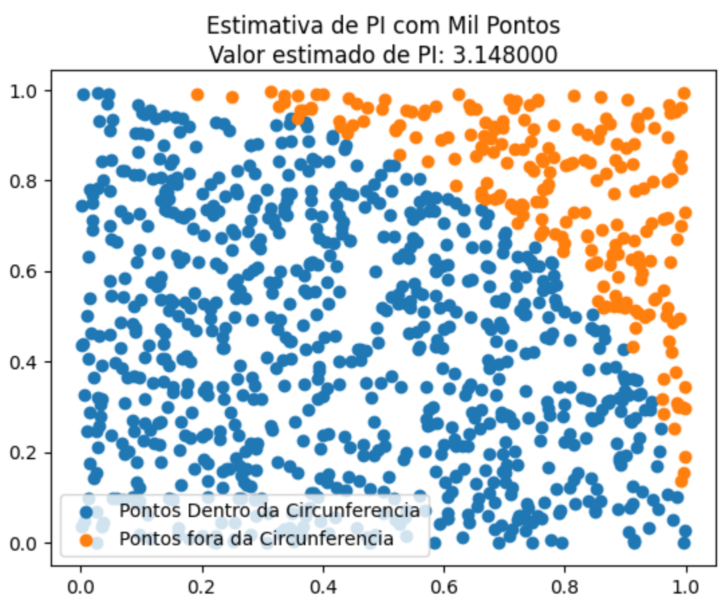
O método de Monte Carlo é uma técnica estatística que utiliza a geração de números aleatórios para resolver problemas matemáticos. Neste experimento, usaremos esse método para estimar o valor de π. A ideia é gerar pontos aleatórios em um quadrado, verificar quantos caem dentro de um círculo inscrito, e usar essa proporção para calcular uma aproximação de π.

1.6.1 Implementação em R

```r
n = 100000
m = 1000
var = numeric(m)

for (i in 1:m) var[i] = single_shot(n)

single_shot = function(n) {
  x = runif(n)
  y = runif(n)
  z = x*x + y*y
  ins = which(z <= 1)
  pi = 4 * length(ins) / n
  return(pi)
}

plot(x[ins], y[ins], col='red', pch=19, cex=0.1, xlim=c
   (0,1), ylim=c(0,1))
points(x[-ins], y[-ins], col='blue', pch=19, cex=0.1)

mean(var)
sd(var) / sqrt(m)
```

Listing 1: Pi via Monte Carlo em R


y
0
x
1


Estimativa de PI com Mil Pontos
Valor estimado de PI: 3.148000
Pontos Dentro da Circunferencia
Pontos fora da Circunferencia
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

1.6.2 Implementação em C

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>

int main(){
    double x, y;
    int n = 1000000;
    unsigned long long i, j;
    j = 0;
    srand(time(0));
    for (i = 1; i <= n; i++){
        x = (double)rand()/RAND_MAX;
        y = (double)rand()/RAND_MAX;
        if ((x*x + y*y) <= 1) j+=1;
    }
```

```c
    double PI = 4*((double) j/n);
    printf("Valor de PI: %f", PI);
    return 0;
}
```

Listing 2: Pi via Monte Carlo em C

1.6.3 Exercício: Determine o "valor médio" de π. Interprete estatisticamente o resultado.

Após realizar 100.000 simulações utilizando o método de Monte Carlo, o valor médio estimado de π foi 3,1416.
O valor médio de π obtido (3,1416) está muito próximo do valor real de π (3,14159), o que indica que o método de Monte Carlo é eficaz para estimar π com alta precisão. Além disso, o desvio padrão das estimativas foi baixo, refletindo que as simulações são consistentes e que a variabilidade das estimativas individuais de π é mínima. Isso reforça a confiabilidade da média calculada como uma boa aproximação do valor verdadeiro de π.

2 Taylor via Série Geométrica

Seja:

$f(x) = -ln(1-x)$	$f(0) = -ln(1) = 0$
$f'(x) = +(1-x)^{-1}$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = +(1-x)^{-2}$	$f''(0) = 1$
$f'''(x) = +(1-x)^{-3}$	$f'''(0) = 2$
$f^4(x) = +(1-x)^{-4}$	$f^4(0) = 3!$
$\vdots$	$\vdots$
$f^n(x) = (n-1)! \cdot (1-x)^{-n}$	$f^n(0) = (n-1)!$

Portanto:

$$-ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Prova da convergência:

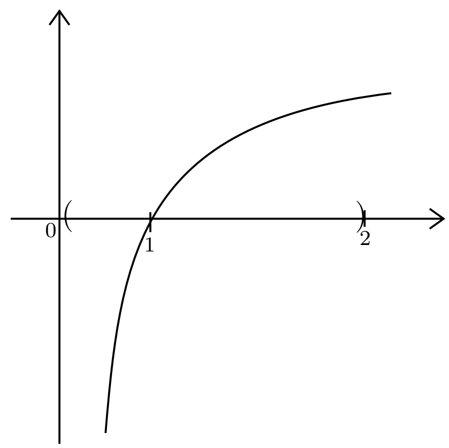
$$\frac{a_n+1}{a\,n} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} = \frac{n}{n+1} x \ \ , \quad tal \ \ que \ \ n+1 < 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n+1}{a_n} \right| = |x| \ \ , \ se \ \ |x| < 1$$

Então:

$$-ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \ \ , \ se \ \ |x| < 1$$



Em particular, se $x = \frac{1}{2}$ tem-se:

$$0 = ln(1) = ln\left(\frac{2}{2}\right) = ln\,(2) + ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$ln(2) = -ln\left(\frac{1}{2}\right) = -ln\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n}$$

Esta fórmula era conhecida por Jakob Bernoulli e serve para calcular os dígitos binários de $ln(2)$, ou seja, em base 2.

2.1 Exercício

Analogamente, prove que:

$$ln(x+1) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot x^{k+1}}{(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Prove convergência no caso $x = 1$.

Resolução:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Reescrevendo:

$$\ln(1+x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}$$

Expandindo os primeiros termos da série:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Por outro lado:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = -\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$$

Portanto:

$$\ln(1+x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}$$

Prova da convergência:

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Pelo Teste de Leibniz, se os termos de uma série alternada diminuem monotonamente para zero, a série converge.
Portanto:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

converge para (x = 1):

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

2.2 Série Geométrica de razão a:

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1 + a + a^2 + \cdots + a^n \\
- \qquad a \cdot S_n &= a + a^2 + \cdots + a^n + a^{n+1}
\end{aligned}
$$

$$S_n - aS_n = 1 - a^{n+1}$$

$$(1-a)S_n = 1 - a^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

Portanto:

$$\frac{1}{1-a} = S_n + \frac{a^{n+1}}{1-a} = \sum_{k=0}^{n} a^k + \frac{a^{n+1}}{1-a}$$

$$\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{f'(x)} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{x^k}_{\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)'} + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Então:

$$-ln(1-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} \ \ ?$$

Teorema: $P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}$ é o polinômio de Taylor da função $-ln(1-x)$ na origem.

Demonstração:

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{-ln(1-x) - P_{n+1}(x)}{x^{n+1}} \xrightarrow{L'Hôpital} \lim_{x\to 0} \frac{x^{n+1}}{1-x} \cdot \frac{1}{(n+1)x^n} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 0.$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Trocando x por $-x^2$:

$$\underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{arctg'(x)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \underbrace{x^2k}_{\left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right)'} + \frac{(-1)^{n+1}}{1+x^2} \cdot x^{2n+2}$$

Teorema: $P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ é o polinomio de Taylor da função $arctg(x)$ de ordem $2n+1$ na origem.

Analogamente:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k + \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

Portanto:

$$ln(1+x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}}_{P_{n+1}} + R_{n+1}(x)$$

$$\frac{R_{n+1}(x) + R_{n+1}(0)}{x-0} = \frac{R_{n+1}(x)}{x} = R'_{n+1}(\xi) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\xi^{n+1}}{1+x} \ \ , \ \xi \in (0,x)$$

Assim:

$$|R_{n+1}(x)| = |x| \cdot \frac{|\xi|^{n+1}}{|1+x|} < |x| \cdot |\xi| \underbrace{\leqslant}_{0<x\leq 1} |\xi|^{n+1}$$

3 Leibniz Aprimorado

$$arctg(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}}_{P_n(x)} + R_n(x) \ ; \ |R_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^11}{11} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = arctg(1) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \cdots \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

Como $n = 2k$:

$$\frac{1}{2(2k)+1} - \frac{1}{2(2k)+3} = \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3}$$

Então:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+3-4k-1}{(4k+1)(4k+3)}$$

$$\pi = 8 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$$

Sabe-se que $ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

E também que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{cos(k\pi)}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = ln(1+1) = ln(2).$$

E:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{sen(\frac{k\pi}{2})}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{sen(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}}{(2k+1)+1}.$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{sen(k\pi)\cdot cos(\frac{\pi}{2}) + cos(k\pi)\cdot sen(\frac{\pi}{2})}{k+1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot ln(1+1) = \frac{1}{2} \cdot ln(2)$$

Portanto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{cos(k\pi) - 2sen(\frac{k\pi}{2})}{k+1} = 0$$

Teorema: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(k)}{k+1} = 0$; onde $a(k) = cos(k\pi) - 2sen(\frac{k\pi}{2})$

Agora, observe que: $n = 4k + r$, $0 \leq r < 4$.
Assim:

$$cos(n\pi) = cos(4k+r)\pi = cos(4k\pi)\cdot cos(r\pi) - sen(4k\pi)\cdot sen(r\pi)$$

$$= (-1)^r$$

E:

$$sen(\frac{n\pi}{2}) = sen(4k+r)\frac{\pi}{2} = sen(2k\pi)\cdot cos(r\cdot\frac{\pi}{2}) + cos(2k\pi)\cdot sen(r\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$= sen(r \cdot \frac{\pi}{2}) \begin{cases} 0 & se \;\; r = 0 \\ 1 & se \;\; r = 1 \\ 0 & se \;\; r = 2 \\ -1 & se \;\; r = 3 \end{cases}$$

Portanto:

$$a(k) = cos(k\pi) - 2sen(k \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$= (-1)^k - 2\{0, 1, 0, -1\} \;\; mod \;\; 4$$

$$= \{1, -1, 1, -1\} - 2\{0, 1, 0, -1\} \;\; mod \;\; 4$$

$$= \{1, -3, 1, 1\} \;\; mod \;\; 4$$

Então:

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{3}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+4} \right)$$

$$+ \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} \right)$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{4k+1} - \frac{3}{4k+2} + \frac{1}{4k+4} \right)$$

Continuando:

$$\frac{2}{4k+1}-\frac{3}{4k+2}+\frac{1}{4k+4}=\frac{A}{(4k+1)\cdot 2(2k+1)\cdot 4(k+1)}$$

$$A=4^2\cdot(2k+1)(k+1)-3\cdot 4(4k+1)(k+1)+2(4k+1)(2k+1)$$

$$A=4^2\left(2k^2+3k+1\right)-3\cdot 4\left(4k^2+5k+1\right)+2\left(8k^2-6k+1\right)$$

$$=k^2\left(2\cdot 16-3\cdot 16+16\right)=0$$

$$+k\left(3\cdot 16-3\cdot 20+3\cdot 4\right)=0$$

$$+16-12+2=6$$

Portanto:

$$\pi=\frac{4\cdot 6}{2\cdot 4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(2k+1)(k+1)}$$

Alternativamente:

$$\pi=24\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+4)}$$

Adotando $(4k+1)(4k+2)(4k+4)$ como $(i+1)(i+2)(i+4)$ temos que:

$$(i+1)(i+2)(i+4)=(i+1)(i+2)(i+2+2)$$

$$=(i+1)\left[(i+2)^2+2(i+2)\right]$$

$$=(i+1)\left[(i+1)^2+2(i+1)+1+2(i+1)+2\right]$$

$$=(i+1)\left[(i+1)^2+4(i+1)+3\right]$$

$$=(i+1)\left[(i+1)\left\{(i+1)+4\right\}+3\right]$$

Além disso:

$$(k+a)(k+b) = k^2 + (a+b)k + ab$$

Então:

$$(k+a)(k+b)(k+c) = k^3 + ck^2 + (a+b)k^2 + (a+b)ck + abk + abc$$

$$= k^3 + (a+b+c)k^2 + (ab+ac+bc)k + abc$$

$$\frac{1}{k+1} - \frac{3}{k+2} = \frac{k+2-3k-3}{(k+1)(k+2)} = \frac{-(2k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

Assim:

$$\frac{1}{k+1} - \frac{3}{k+2} + \frac{1}{k+4} = \frac{-(2k+1)(k+4) + k^2 + 3k + 2}{(k+1)(k+2)(k+4)}$$

$$= \frac{-2k^2 - 9k - 4 + k^2 + 3k + 2}{(k+1)(k+2)(k+4)} = \frac{-k^2 - 6k - 2}{(k+1)(k+2)(k+4)}$$

Desse modo:

$$\frac{1}{k+1} - \frac{3}{k+2} + \frac{1}{k+4} + \frac{1}{k+3} = \frac{-(k^2+6k+2)(k+3) + k^3 + 7k^2 + 14k + 8}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$= \frac{-k^3 - 9k^2 - 20k - 6 + k^3 + 7k^2 + 14k + 8}{\prod_{i=1}^{4}(k+i)}$$

$$= \frac{-2k^2 - 6k + 2}{\prod_{i=1}^{4}(k+i)} = \frac{-2(k^2 + 3k - 1)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

Pegando a equação quadrática:

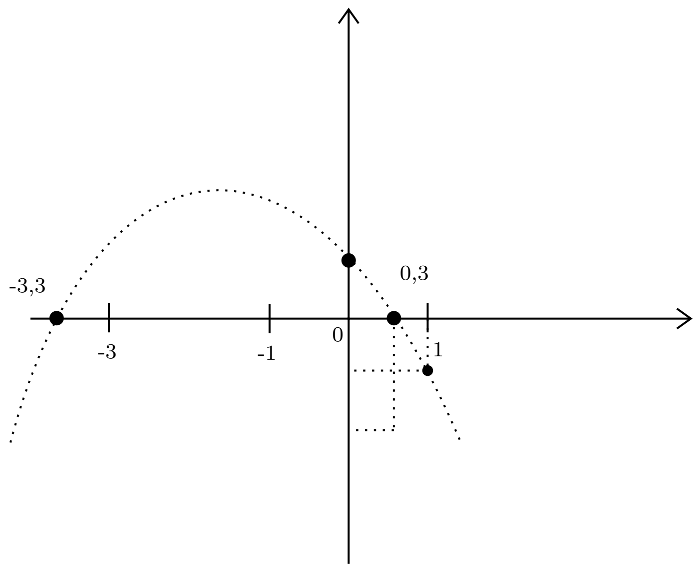
$$k^2 + 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$b(k) = \frac{1}{k+1} - \frac{3}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4}$$

E, portanto:

$$b(k) < 0 \qquad \forall k \geq 1.$$

$$b(0) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \;\; ; \;\; b(1) = \frac{-6}{24 \cdot 5} = -\frac{1}{20}$$



4 Fórmula de Machin

$$\frac{\pi}{6} = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{1}{3^k(2k+1)} + R_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$|R_n| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{2n+3}$$

$$arctg(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{4k+1} - \frac{x^{4k+3}}{4k+3} = x^{4k+1}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{x^2}{4k+3}\right)$$

Portanto:

$$\frac{\pi}{6} = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} \cdot \frac{12k+9-4k-1}{3(4k+1)(4k+3)}$$

$$\pi = \frac{6 \cdot 4}{\sqrt{3} \cdot 3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} \cdot \frac{2k+2}{(2(2k)+1)(2(2k)+3)}$$

$$\pi = \frac{8\sqrt{3}}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{i}} \cdot \frac{i+2}{(2i+1)(2i+3)} \ \ , \ \ i = i+2$$

Tratamento do erro: $2(m+1) = 2m+2 < 2m+3 \Rightarrow \frac{1}{2m+3} < \frac{1}{2(m+1)}$

Assim:

$$6R_n \leq \frac{6}{2n+3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3^{n+1}} < \frac{6}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3^{n+1}} < \varepsilon \ \ ?$$

Então:

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{6}{2\sqrt{3}} < 3^{n+1}(n+1)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \cdot \sqrt{3}$$

Tratamento do erro no caso geral:

$$A \cdot arctg\left(\frac{1}{a}\right) = A \cdot P_n\left(\frac{1}{a}\right) + A \cdot R_n\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$= A \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \cdot \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{2k+1}}{2k+1} + A \cdot R_n\left(\frac{1}{a}\right) \ \ , \ \ |R_n| \leq \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{2m+3}}{2m+3}$$

Seguindo:

$$A \cdot \frac{1}{a^{2m+3}} \cdot \frac{1}{2m+3} < \frac{1}{a^{2m+3}} \cdot \frac{1}{2(m+1)} < \frac{\varepsilon}{q} \ \ ?$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{qA}{2a} < a^{2(m+1)} \cdot (m+1)$$

Se $\varepsilon = 10^{-d}$ tem-se:

$$10^d \cdot \frac{qA}{2a} < a^{2(m+1)} \cdot (m+1)$$

4.1 Exercício:

Integrando por partes, tem-se:

$$\int arctg(x)dx = x \cdot arctg(x) - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{1+x^2}dx = x \cdot arctg(x) - \frac{1}{2} \cdot ln(1+x^2)$$

Então:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 arctg(x)dx + \frac{1}{2} \cdot ln(2)$$

Agora:

$$\int_0^1 arctg(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \left[\frac{1}{(2k+1)} - \frac{1}{2k+2}\right]$$

Por outro lado:

$$ln(1+x) = \sum_{k-0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1} \ , \ \ -1 < x \leq 1 \ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ln(2) = ln(1+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right]$$

E:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}(1+\frac{1}{2}) \cdot \left[\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+2}\right] + (-1+\frac{1}{2}) \cdot \left[\frac{1}{4k+3} - \frac{1}{4k+4}\right]$$

Portanto:

$$\pi = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{3}{4k+1} - \frac{3}{4k+2} - \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+4} \right]$$

4.2 Exercício:

Sejam $a > 0$ e $0 < \varepsilon < a^2$.
Prove que $min(a - \sqrt{a^2 - \varepsilon}, \sqrt{a^2 - \varepsilon} - a) = \sqrt{a^2 - \varepsilon} - a$
Demonstração: Observe que:

$$(a^2 - \varepsilon)(a^2 + \varepsilon) = a^4 - \varepsilon^2 < a^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 - \varepsilon} \cdot \sqrt{a^2 + \varepsilon} < a^2$$

$$2 \cdot \sqrt{a^2 - \varepsilon} \cdot \sqrt{a^2 + \varepsilon} < 2a^2$$

$$2 \cdot \sqrt{a^2 - \varepsilon} \cdot \sqrt{a^2 + \varepsilon} + \underbrace{2a^2}_{a^2 + a^2 = (a^2 + \varepsilon) + (a^2 - \varepsilon)} < 2a^2 + 2a^2 = 4a^2 = (2a)^2$$

Assim:

$$(a^2 + \varepsilon) + 2 \cdot \sqrt{a^2 - \varepsilon} \cdot \sqrt{a^2 + \varepsilon} + (a^2 - \varepsilon) < (2a)^2$$

$$\left(\sqrt{a^2 - \varepsilon} + \sqrt{a^2 + \varepsilon} \right)^2 < (2a)^2$$

$$\sqrt{a^2 - \varepsilon} + \sqrt{a^2 + \varepsilon} \underbrace{<}_{\text{se } a > 0} (2a) = a + a \ \ (*)$$

Portanto:

$$\sqrt{a^2 + \varepsilon} - a < a - \sqrt{a^2 - \varepsilon}$$

O/F:

$$* \Rightarrow 1 < \frac{2a}{\sqrt{a^2+\varepsilon}+\sqrt{a^2-\varepsilon}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2a}{\sqrt{a^2+\varepsilon}+\sqrt{a^2-\varepsilon}} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\varepsilon + \frac{2a \cdot \overbrace{2\varepsilon}^{=\varepsilon+\varepsilon = a^2+\varepsilon-a^2+\varepsilon = (a^2+\varepsilon)-(a^2-\varepsilon)}}{\sqrt{a^2+\varepsilon}+\sqrt{a^2-\varepsilon}} > 0$$

$$-2\varepsilon + 2a \cdot \frac{(a^2+\varepsilon)-(a^2-\varepsilon)}{\sqrt{a^2+\varepsilon}+\sqrt{a^2-\varepsilon}} > 0$$

$$-2\varepsilon + 2a \cdot \frac{(\sqrt{a^2+\varepsilon}-\sqrt{a^2-\varepsilon})(\sqrt{a^2+\varepsilon}+\sqrt{a^2-\varepsilon})}{\sqrt{a^2+\varepsilon}+\sqrt{a^2-\varepsilon}} > 0$$

$$-2\varepsilon + 2a \cdot (\sqrt{a^2+\varepsilon}-\sqrt{a^2-\varepsilon}) > 0$$

Então:

$$0 < 2a\sqrt{a^2+\varepsilon} - 2a\sqrt{a^2-\varepsilon} \underbrace{-\varepsilon + 2a^2 - 2a^2 - \varepsilon}_{(a^2-\varepsilon)+a^2-(a^2+\varepsilon)-a^2}$$

$$= 2a\sqrt{a^2+\varepsilon} - (a^2+\varepsilon) - a^2 + (a^2-\varepsilon) - 2a\sqrt{a^2-\varepsilon} + a^2$$

$$= (\sqrt{a^2-\varepsilon}-a)^2 - (\sqrt{a^2+\varepsilon}-a)^2$$

$$= (\underbrace{a-\sqrt{a^2-\varepsilon}}_{=:\,\delta_1})^2 - (\underbrace{\sqrt{a^2+\varepsilon}-a}_{=:\,\delta_2})^2$$

Portanto:

$$\delta_1^2 - \delta_2^2 > 0 \ \ (*)$$

Por outro lado, tem-se:

$$a^2 - \varepsilon < a^2 \Rightarrow \sqrt{a^2 - \varepsilon} < a \Rightarrow 0 < a - \sqrt{a^2 - \varepsilon} = \delta_1$$

E, analogamente:

$$a^2 + \varepsilon > a^2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + \varepsilon} > a \Rightarrow 0 < \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a = \delta_2$$

Desse modo:

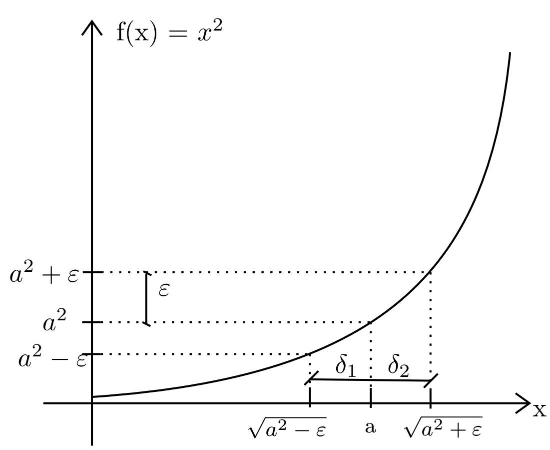
$$\delta_1 > 0 \ \ e \ \ \delta_2 > 0 \ \ \Rightarrow \ \ \delta_1 + \delta_2 > 0 \ \ (**)$$

Portanto:

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{\overbrace{\delta_1^2 - \delta_2^2}^{>0 \quad \text{por} \quad (*)}}{\underbrace{\delta_1 + \delta_2}_{>0 \quad \text{por} \quad (**)}} > 0 \Rightarrow \delta_1 > \delta_2$$

Ou seja:

$$\sqrt{a^2 + \varepsilon} - a < a - \sqrt{a^2 - \varepsilon}$$



5 Exercícios

5.1 Exercício 1:

Nicole Oresme (1320–1382) foi um clérigo e matemático francês associado à Universidade de Paris, na Baixa Idade Média. (Katz, p. 392). Oresme determinou o espaço total percorrido por um móvel com velocidade variável, supondo que na primeira metade do tempo a velocidade é 1, no próximo quarto igual a 2, etc. (Katz, p. 398). Portanto, o cálculo equivale a determinar a soma da série:

$$r_n = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \cdots + \frac{1}{2^n} \cdot n + \ldots$$

Ou seja, $r_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a^k$, onde $a = \frac{1}{2}$.

1. Determine o valor de r_n em função de a.
2. Calcule o valor do limite $\lim_{n\to\infty} r_n$, no caso $|a| < 1$.

Resolução:

1)

$$r_n = \sum_{k=1}^{n} ka^k$$

Reescrevendo:

$$r_n = a \sum_{k=1}^{n} ka^{k-1}$$

Seguindo a sugestão:

$$r_n = a \cdot \frac{-(n+1)a^n \cdot (1-a) + (1 - a^{n+1})}{(1-a)^2}$$

$$= a \cdot \frac{1 - a^{n+1} + (n+1)a^{n+1} - n \cdot a^n - a^n}{(1-a)^2}$$

$$= a \cdot \frac{1 - a^{n+1} + n \cdot a^{n+1} + a^{n+1} - n \cdot a^n - a^n}{(1-a)^2}$$

$$= a \cdot \frac{1 - a^n - n \cdot a^n(1-a)}{(1-a)^2}$$

Portanto:

$$r_n = \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2} - \frac{a \cdot n \cdot a^n}{1-a}$$

2)

Sabe-se que quando $|a| < 1$, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

Então, basta provar que $\lim_{n\to\infty} n \cdot a^n = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^{-n}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Aplicando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{-n \cdot \ln(a) \cdot a^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{-n \cdot \ln(a)}$$

Como o numerador cresce muito mais rápido que o denominador, o limite será 0:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot a^n = 0.$$

Portanto:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2} - \frac{a \cdot n \cdot a^n}{1-a} \right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = \frac{a}{(1-a)^2}$$

5.2 Execício 2:

Calcule as 100 primeiras casas decimais de π usando a fórmula de Machin original, ou seja,

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Para isso, implemente o código em alguma linguagem de programação com precisão arbitrária, por exemplo Python.

Resolução:

```python
from mpmath import mp

# calcula as 100 casas decimais
mp.dps = 100

# formula de Machin
pi = 4 * (4 * mp.atan(1/5) - mp.atan(1/239))

print(pi)
```

Listing 3: Implementação do cálculo em Python

O valor de π com 100 casas decimais é:
$\pi \approx$ 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706 8.

5.3 Exercício 3

Calcule as casas decimais de π quebrando algum recorde histórico pós-1949. Por exemplo, 2.037 casas obtidas pelo ENIAC em setembro de 1949. Para tanto, use as fórmulas:

$$\frac{\pi}{4} = 12 \cdot \arctan\left(\frac{1}{49}\right) + 32 \cdot \arctan\left(\frac{1}{57}\right) - 5 \cdot \arctan\left(\frac{1}{239}\right) + 12 \cdot \arctan\left(\frac{1}{110443}\right)$$

(K. Takano, 1982)

$$\frac{\pi}{4} = 44 \cdot \arctan\left(\frac{1}{57}\right) + 7 \cdot \arctan\left(\frac{1}{239}\right) - 12 \cdot \arctan\left(\frac{1}{682}\right) + 24 \cdot \arctan\left(\frac{1}{12943}\right)$$

(F.C.M. Størmer, 1896)

Usando a segunda fórmula para verificar o resultado obtido pela primeira.
Resolução: Implementando o código em Python, como no exercício anterior:

```
from mpmath import mp

# calcula as 2100 casas decimais
mp.dps = 2100

# formula de K. Takano
pi_takano = 4 * (12 * mp.atan(1/49) + 32 * mp.atan(1/57)
    - 5 * mp.atan(1/239) + 12 * mp.atan(1/110443))

# formula de F.C.M. Stormer
pi_stormer = 4 * (44 * mp.atan(1/57) + 7 * mp.atan(1/
    239) - 12 * mp.atan(1/682) + 24 * mp.atan(1/12943))

print("Valor de pi usando K. Takano: ", pi_takano)
```

```
print("Valor de pi usando F.C.M. Stormer: ", pi_stormer)
```

Listing 4: Calculando 2100 casas decimais de PI

O valor de π com 2100 casas decimais usando a fórmula de **K. Takano** é:

$$3.14159265358979304292966393855205629426724692974968 2\cdots$$

O valor de π com 2100 casas decimais usando a fórmula de **F.C.M. Størmer** é:

$$3.14159265358979305692442579676614890653644377459194 2\cdots$$

Assim, vemos que o resultado obtido através da segunda fórmula coincide com o da primeira até as 16 primeiras casas decimais, divergindo posteriormente.

Comparando também com o resultado obtido pela Fórmula de Machin original (1706):

$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 5\cdots$$

Vemos que do resultado dela coincidem apenas as 15 primeiras casas decimais quando comparadas com os resultados acima.