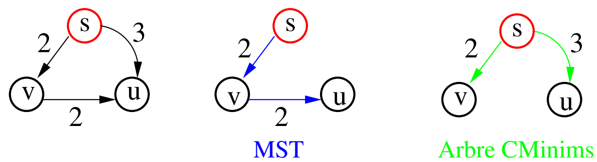
Algorísmia QP 2018–2019

Una solució per al Segon Examen parcial **11 de Juny de 2019**

Exercici 1 (4 punts)

(a) (0.5 punts) Donat un digraf $\vec{G} = (V, \vec{E}, w)$ amb pesos, i un vèrtex $s \in V$, és cert que l'arbre de camins mínims arrelat a s ha de ser necessàriament un MST de $\vec{G}$? **Solució:** FALS veure figura



(b) (0.5 punts) Si una iteració de Ford-Fulkerson envia 1 unitat de flux a través de l'aresta (u, v) aleshores, en el flux màxim en finalitzar l'execució, el flux a través de (u, v) serà ≥ 1?

Solució: FALS Pot passar que a una iteració posterior el camí d'augmentació baixe a 0 el flux a traves (u, v).

(c) (0.5 punts) Donat un graf bipartit $G = (V, E)$ i un matching M a G, podem determinar si M té cardinalitat máxima en $O(|V| + |E|)$?

Solució: CERT. Si considerem la red de flux corresponent al graf bipartit que hem vis t a classe i fem que el flux inicial tingui valor 1 a cada aresta de M, només cal una iteracóper determinar si el flux es màxim o no. Això triga el temps estipulat.

(d) (0.5 punts) Un problema de programació lineal sempre ha de tenir un nombre finit de solucions.

Solució: FALS si una de les restriccions és paralela a l'equació objectiu, tindra un nombre infinit de solucions.

(e) (0.75 punts) Considereu una xarxa de comunicació formada per n servidors que modelitzem com un graf $G = (V, E)$ no dirigit amb $|V| = n$ vèrtexs i $|E| = m$ arestes. Per a cada $(i, j) \in E$, sigui $b_{ij} = b_{ji}$ l'amplada de banda (bandwith) entre i i j. Donat un camí P de $v \to u$ definim l'amplada de banda del camí P com el valor de l'amplada de banda de l'aresta a P amb mínima amplada de banda. Donats dos vèrtexs fixats s i t doneu un algorisme per a trobar el camí amb màxima amplada de banda entre s i t. Doneu la complexitat del vostre algorisme.

Solució: Podem adaptar qualsevol algorisme per calcular distancies, canviant suma per mínim. En aquest cas els pesos son positius i podem adaptar Dijkstra amb cost $O(m + n \lg n)$.

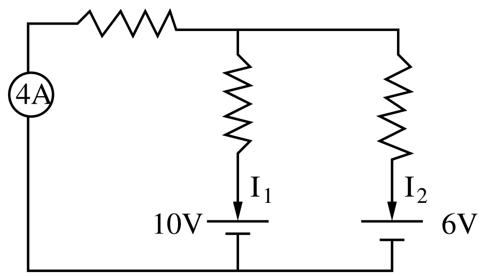
(f) (0.75 punts) Tenim un digraf $\vec{G} = (V, \vec{E}, w)$ ponderat amb $|V| = n$ vèrtexs i $|\vec{E}| = m$ arestes, i amb pesos $w : \vec{E} \to \mathbb{Z}$. Sabem que $\vec{G}$ no té cicles negatius. De totes les distàncies més curtes entre qualsevol parell de vèrtexs, volem trobar quins son els vèrtexs $u, v \in V$ tals que la seva distància més curta és la mediana de totes les distancies més curtes. Digueu i expliqueu quins dels algorismes explicats a classe utilitzaríeu, i com, per a solucionar el problema i doneu-ne la complexitat en funció de n quan:

i. $\vec{G}$ no te pesos negatius i el graf és dens.
ii. $\vec{G}$ pot tenir pesos negatius i el graf és dens.
iii. $\vec{G}$ pot tenir pesos negatius i el graf és dispers (*sparse* en anglès).

Solució: Un cop tinguem les distancies mínimes, podem ordenar-les fent servir counting per trobar-ne la mediana en temps $O(n)$. El cost major vindrà del càlcul de les distancies.

i. Con no té pesos negatius i el graf es dens, farem servir l'algorisme de Bernard-Floyd-Warshall amb cost $O(n^3)$.
ii. Per a cada vèrtex una execució de Bellmann- Ford, ja que tenim pesos negatius, el cost és $O(n^2 m)$.
iii. En aquest cas faria servir l'algorisme de Johnson amb cost $O(n^2 \log n)$

(g) (0.5 punts) Volem carregar dues bateries de 10 i 6 volts, respectivament. Per fer això dissenyem un circuit com el de la següent figura:



Volem determinar les intensitats de corrent I_1 i I_2 que maximitzen la potència total del circuit. Cal tenir en compte que si donem més de 3 ampers d'intensitat a cada bateria, les cremarem, i que el sistema pot mantenir una intensitat total de 4 ampers com a màxim. Finalment, per tal d'assegurar que cap bateria es descarrega, necessitem assegurar que les intensitats I_1 i I_2 són sempre més grans o iguals a 0.

Enuncieu el problema com un sistema de programació lineal, on maximitzeu una funció objectiu amb unes restriccions. Dibuixeu el polítop resultant i la funció objectiu. Quina serà la una solució optima? (Recordeu la potencia $P = V \cdot I$ i que, a un circuit muntat en paral·lel, la intensitat resultant és la suma de les intensitats a cada línea).

Solució:

$$
\begin{aligned}
\text{max} \;\; & 10I_1 + 6I_2 \\
\text{subject to: } & I_1 \leq 3 \\
& I_2 \leq 3 \\
& I_1 + I_2 \leq 4 \\
& I_1 \geq 0 \\
& I - 2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Exercici 2 (3 punts) – Copistes –

Abans de la invenció de la impremta, era molt difícil fer una còpia d'un llibre. Tots els continguts havien de ser redactats a mà pels anomenats copistes. A un copista se li donava un llibre i, després de diversos mesos de treball, tornava una còpia del mateix. El temps que trigava era, molt probablement, proporcional al nombre de pàgines del llibre. La feina devia ser prou avorrida i per això podríem assumir que tots els copistes d'un monestir trigaven el mateix temps a copiar una pàgina.

El monestir de Pedralbes va decidir fer una còpia dels llibres de la seva biblioteca i, donat que no tenen copistes propis, han d'enviar els llibres a un altre monestir que sí que en tingui.

Podeu assumir que hi ha un total de n llibres per copiar i que el llibre i-ésim té p_i pàgines. A més, els llibres tenen un ordre predeterminat. Una vegada triat el monestir on es faran les còpies, s'hauran de repartir els llibres entre el seus m copistes. Cada llibre només se li pot assignar a un copista, i a cada copista només se li pot assgnar una seqüència contigua de llibres (d'acord amb l'ordre inicial del llibres). Amb aquesta forma d'assignar llibres a copistes es minimitza el temps de buidar i tornar a omplir la biblioteca. El temps necessari per fer la còpia total de la biblioteca queda determinat pel temps que necessita el darrer copista que finalitza la còpia dels llibres que se li han assignat.

El que no tenen molt clar els encarregats de la biblioteca és com fer l'assignació de llibres a copistes per garantir que el temps de còpia total de la biblioteca sigui el més curt possible. Ajudeu a aquests monjos i dissenyeu un algorisme eficient per a trobar l'assignació òptima dels n llibres als m copistes del monestir. Podeu assumir que coneixeu el temps t_p que necessita cadascun dels copistes per a copiar una pàgina.

Solució:

Todos los copistas copian a la misma velocidad, asumo que $t_p = 1$ y multiplicaremos por t_p al final.

Los libros no se pueden desordenar, una asignación a un copista será de todos los libros entre el i y el j, para $i \leq j$ adecuados.

Una solución óptima del problema es una asignación de un segmento inicial de libros a un copista seguida de una asignación óptima de los libros restantes a $m-1$ copistes. El coste es el máximo de los dos valores.

Vamos a calcular $T[i][k]$, el tiempo mínimo para copiar los libros $i, \ldots, n$ cuando disponemos de k copistas.

Utilizaremos $P[i][j]$, $1 \leq i \leq j \leq n$ que nos indica el número de páginas de los libros i a j.

A partir de la estructura de suboptimalidad obtenemos la siguiente recurrencia:

$$T[i][k] = \begin{cases} P[i][n] & \text{k=1,} \\ P[n][n] & \text{i=n,} \\ \min_{i<j\leq n}\{\max\{P[i][j], T[j][k-1]\}\} & \end{cases}$$

Podemos precalcular P en tiempo $O(n)$ o precalcular $Q[i]$ el número de páginas de los libros 1 a i en tiempo $O(n)$. Así podemos utilizar $Q[j] - Q[i]$ en vez de $P[i][j]$, si $i < j$, y ahorrar algo de espacio y tiempo.

Para obtener la solución utilizaremos PD, calculando la tabla T de acuerdo con la recurrencia, empezando por la ultima columna. Como tenemos que obtener la solución, tambien guardaremos en una tabla auxiliar, para cada valor $[i][k]$ el valor j dónde se alcanza el mínimo.

Si precalculamos P, utilizando PD podemos obtener T en tiempo $O(n)$ por elemento, lo que nos da un coste de $O(n^2m)$ para todo el algoritmo.

Exercici 3 (3 punts) – Congrés –

Suposeu que esteu organitzant un congrés on els investigadors presentin els articles que han escrit. Els investigadors que vulguin presentar un article envien un document als organitzadors de la conferència. Els organitzadors de la conferència tenen accés a un comitè de revisors que estan disposats a llegir-ne com a molt R articles cadascun. Tots els articles enviats han de ser revisat per, com a mínim, A revisors.

El congrés té declarats un conjunt de temes. Cada enviament té assignat un tema concret i cada revisor té declarada una especialització per a un conjunt de temes. Els articles sobre un tema determinat només es revisen per part dels revisors experts en aquell tema.

Els organitzadors del congrés han de decidir (sempre que es pugui) quins avaluadors revisaran cadascun dels articles o, equivalentment, quins articles seran revisats per cada revisor. Es demana:

(a) Proporcioneu un algorisme eficient per a resoldre aquest problema d'assignació.

(b) Observeu que podria ser el cas que, degut a les restriccions en la dedicació dels revisors, al mínim de revisions requerides per cada article, i a les especialitats d'aquests revisors, no es pogués fer una assignació vàlida. En aquest cas, els organitzadors volen saber quin tipus d'experts caldria afegir al comitè de revisors per a poder portar a terme la revisió completa de tots els articles enviats. Com a pas preliminar per resoldre això, volen confeccionar una llista de temes que, si fossin l'especialitat d'un nou revisor, permetria incrementar el màxim possible el nombre total de revisions fetes (en relació a les que ja es podien fer).

    Proporcioneu un algorisme per a resoldre aquesta nova selecció.

Solució:

(a) Lo resolveremos como un problema de circulación en una red de flujo. La red tendrá un vértice por cada artículo $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y un vértice por cada revisor $\{r-1, \ldots, r_m\}$. Añadimos las aristas (s, v_i) con cota inferior A y cota superior m, las aristas (r_j, t) con capacidad R y aristas (v_i, r_j) con capacidad 1, siempre que el revisor j sea experto en el tema del artículo v_i.

    Una unidad de flujo que se transmita de s a t, pasará a través de un camino $s \to v_i \to r_j \to t$ representando que el trabajo i se asigna al revisor j.

    La capacidad 1 en las aristas (v_i, r_j) garantiza que no se asigna un artículo más de una vez a un revisor. La capacidad R en las aristas (r_j, t) evita que se asignen más de R artículos a un revisor. La cota inferior en las otras aristas garantiza que cada artículo tiene al menos A revisiones. La red admite una circulación si y solo si el problema planteado tiene solución.

    Sea $t(j)$ el número de temas en el que es experto el revisor j y T la suma de los valores de $t(j)$. La red tiene $N = n + m + 2$ nodos Y $M = n + T + m$ aristas.

    El flujo máximo está acotado por mR, así el coste será $O(mR(n + m + T))$ si utilizamos la cota superior al flujo.

(b) Podemos considerar lla red de flujo anterior en la que cambiamos la cota inferior en la aristas que salen de s por capacidad A. Calculariamos un flujo f con valor máximo.

Así tenemo s el número máximo de revisiones que se puden hacer. Si el flujo máximo no tiene valor An podemos añadir un nuevo revisor que es experto en todos los temas y ejecutar Ford Fulkerson con flujo inicial f. Al acabar, los temas en los que el nuevo revisor tiene flujo asignado nos proporcionará el tipo de revisor que nos piden.