Algorísmia QP 2019–2020

Tercer control online | **Una solución** | **25 de Mayo de 2020**

Durada: 1h

Exercici 1 (0.75 punts) Cierto o Falso?: En una red de flujo en la que todas las capacidades son múltiplos de 5 el el valor del flujo máximo puede no ser múltiplo de 5.

Una solución
Falso. Razonando de manera inductiva, en cada paso de FF escogeremos un camino de aumentación con bottleneck que es un múltiplo de 5, y el valor del flujo aumentará en un múltiplo de 5. Las capacidades actualizadas en la red residual también serán multiplos de 5 porque sustraemos un múltiplo de 5 o es un arco de retroceso con un flujo que es múltiplo.

Una solución
Falso. Usando los mismos argumentos que en el teorema de integralidad, el flujo maximo en esta red es múltiplo de 5.

Exercici 2 (0.75 punts) Cierto o Falso?: Si en una iteración de Ford-Fulkerson se envia 1 unidad de flujo a través de (u, v), entonces, en el flujo máximo obtenido, el flujo a través de la arista (u, v) será mayor o igual que 1.

Una solución

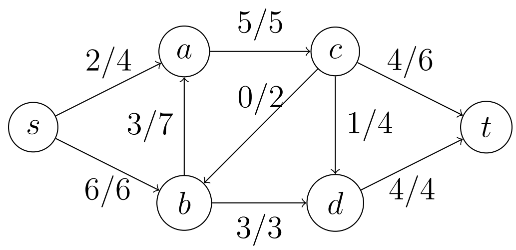
Falso. El flujo enviado a través de (u, v) puede ser retrotraido en una iteracion posterior del algoritmo de FF.

Exercici 3 (0.75 punts) Tenemos una red de flujo y podemos añadir una nueva conexión entre dos vértices de la red. Construir una conexión e tiene coste unitario de 10000 euros, es decir una conexión con cacidad $c(e)$ tiene coste $10000 \cdot c(e)$, independienteente de los extremos de e. Por otra parte, el beneficio que obtiene la empresa por unidad de flujo que llega a destino es 101000 euros. La empresa puede invertir en la modificación 1 millon de euros. Indicar dónde debería añadir la conexión y con qué capacidad, de manera que la empresa maximice el beneficio obtenido, sin superar la cantidad máxima destinada a esta inversión.

Una solución

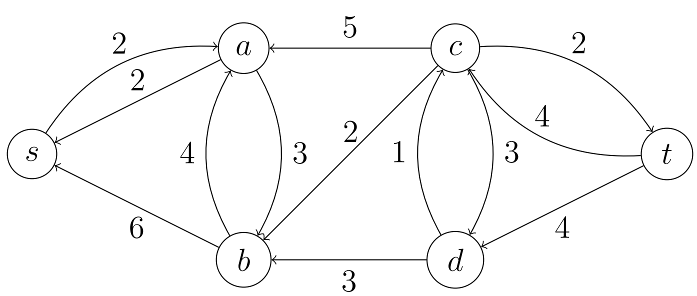
Añadir un arco (s, t) con capacidad 100, gastandonos el millón de euros y aumentando así el flujo máximo en estas 100 unidades. Por lo tanto, el beneficio para la empresa es máximo.

Exercici 4 (0.75 punts) Dada la red de flujo de la figura de abajo, dónde la notación a/b describe a unidades de flujo en una arista con capacidad b, es cierto que no podemos incrementar más el flujo actual?



Una solución
No podemos aumentar el flujo. $(\{s, a, b\}, \{c, d, t\})$ es un s, t-corte de capacidad 8 y en la figura se muestra un flujo de valor 8, así que dicho flujo es máximo.

Una solución
El grafo residual es



Como se puede ver no hay camino de s a t por lo que el flujo es máximo.

Exercici 5 (1.5 punts) Tenemos un grafo bipartido $G = (V, E)$ y un matching M. Proporcionad un algoritmo con coste $O(|V|+|E|)$ para determinar si M tiene cardinalidad máxima.

Una solución

Supongo que V está bipartido en $A \cup B$, consideramos la red de flujo que hemos visto en clase para obtener un maximum matching: añadimos s y t, conectamos s con los vértices en A, los de B con t, y orientamos las aristas de A hacia B. Asignamos capacidad 1 en todas las arisats. La red se puede obtener en tiempo $O(|V| + |E|)$.

Construimos el flujo f, para $e \in E$, $f(e) = 1$ si $e \in M$ y $f(e) = 0$ si no. Completamos la asignación de flujo en las aristas que salen de s y entran en t para obtener un flujo válido. Una iteración de FF $O(|V| + |E|)$ nos permite decidir si este flujo es máximo o no. En el primer caso M tiene cardinalidad máxima y en el segundo no.

Exercici 6 (1.5 punts) Diseñad un algoritmo para resolver en tiempo polinómico el siguiente problema. Dado un grafo dirigido $G = (V, E)$, dos vértices $x, y \in V$ y un entero no negativo p, determinar el mínimo entero k tal que podemos garantizar que en G hay al menos p caminos de x a y tales que una arista de E no forma parte de más de k tales caminos.

Una solución

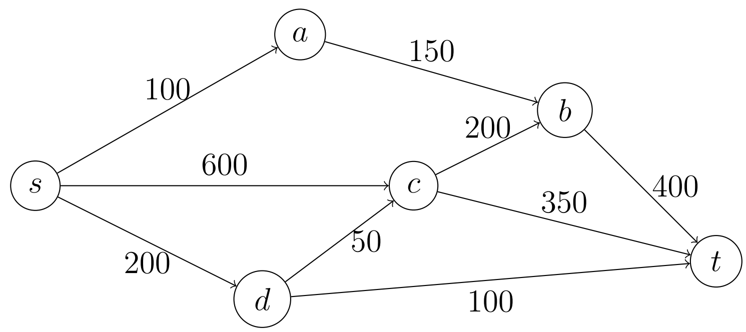
Para un valor de k dado tenemos que resolver un problema similar al de caminos disjuntos pero ahora cada arista se puede usar k veces.

Para ello consideramos la red de flujo formada por G con capacidad k en cada arista. Tomando $s = x$ y $t = y$, si el valor del flujo máximo es mayor o igual que p tenemos los caminos requeridos, en caso contrario no hay p o más caminos que cumplan la condición para k.

p puede ser un número con valor grande, pore ello utilizaremos EK. Podemos, decidir si k es suficiente en tiempo polinómico $O(nm^2)$.

Para localizar el valor de k más pequeño que permite los p caminos, observemos primero que si no hay camino de x a y no existe tal valor de k. Si hay camino, $k = p$ verifica la condición. Utilizando búsqueda dicotómica podemos localizar el valor óptimo de k en el intervalo $[1, p]$. En total tenemos que ejecutar $\log p$ veces el algoritmo anterior y tenemos un algoritmo con coste polinómico.

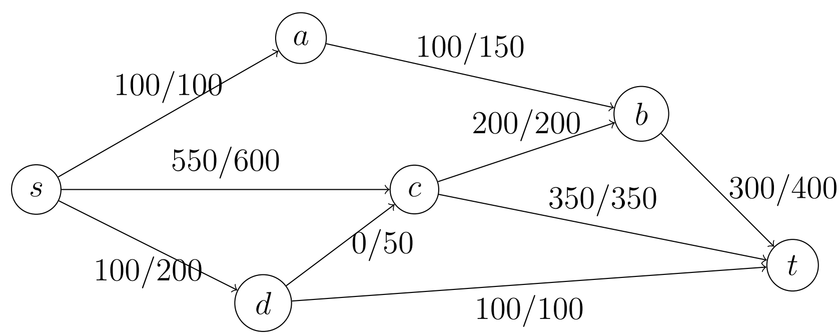
Exercici 7 (1.5 punts) Considera la siguiente red de carreteras, con el máximo número de vehículos que pueden circular en cada una de ellas.

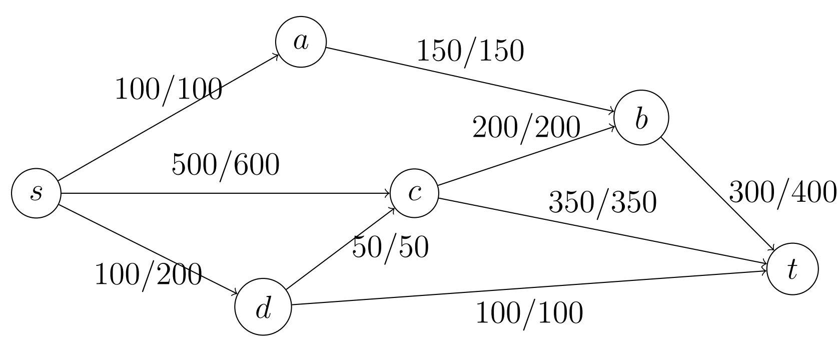


(a) ¿Cuántos vehículos transitan por la ciudad c en un flujo con valor máximo de vehículos de s a t?

Una solución

El valor máximo del flujo es 750, tenemos dos flujos con valor máximo





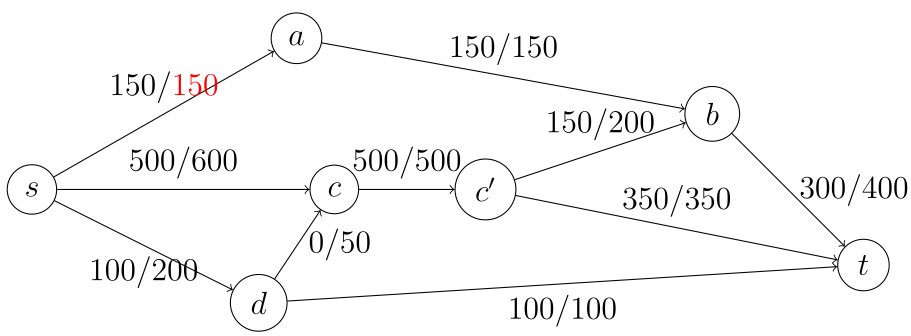
El valor del flujo es máximo ya que su capacidad coincide con la del s,t-corte $\{s,c,d\},\{a,b,t\}$. Los caminos de s a t que no pasan por c tienen todos una arista con su capacidad saturada, es imposible reencaminar flujo por ellas.

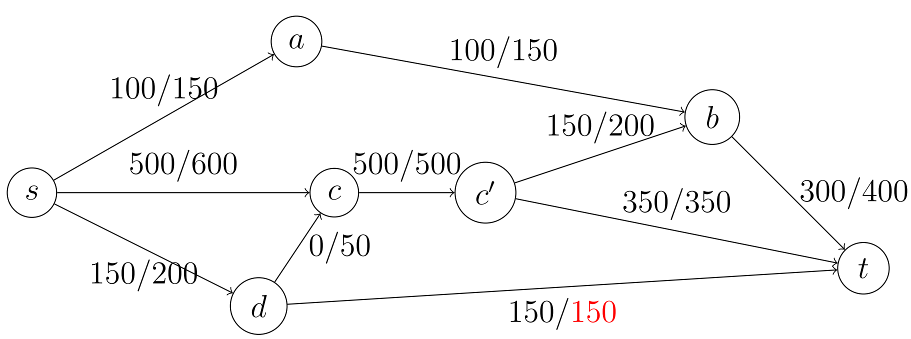
Formalmente podemos eliminar c de la red y comprobar que el valor del flujo máximo es 200. Por tanto, en todos los flujos con valor máximo el tráfico a través de c es de 550.

(b) Dentro del plan de reducción de polución atmosférica, el tránsito de vehículos en c se ha de restringir a 500 vehículos. ¿Es posible aumentar la capacidad de una única carretera de manera que se cumpla esta restricción, pero que se mantenga el mismo flujo máximo de vehículos entre s y t que en el apartado (a)?

Una solución
Si examinamos el flujo con valor máximo, hay 50 unidades de flujo que no pueden pasar por c. Aumentar la capacidad del arco (s, a) o el (d, t) en 50 unidades (de 100 a 150) permite un flujo máximo de 500 en el que el flujo de entrada y de salida en c cumple $f_in(c) = f_out(c) \leq 500$.

Se puede demostrar que el flujo máximo no cambia, utilizando la siguiente red en la que desdoblamos c en dos vertices c' y c'', unidos por un arco de capacidad 500; lo que entraba en c entra en c', lo que salia de c sale de c''; aumentamos la capacidad de uno de los dos arcos en 50. El valor del flujo máximo sigue siendo 750. Como se puede ver en las figuras:





Exercici 8 (2.5 punts) La compañía VideoFast quiere utilizar la red para transmitir vídeo a sus clientes. Para ello ha contratado una red de comunicación formada por n servidores que representamos con un grafo dirigido $G = (V, E)$ con $|V| = n$ vértices y $|E| = m$ aristas.

Para cada $e \in E$, $b(e) \geq 0$ es el *ancho de banda* de la arista e contratado por VideoFast. El total de bits transmitido por un arco e no puede superar el ancho de banda contratado, $b(e)$. Por otra parte, VideoFast quiere establecer contratos con sus clientes, un subconjunto $X \subset V$. Para cada cliente $x \in X$, un contrato establece el tamaño total (en bits) de la transmisión $t(x)$. VideoFast quiere iniciar la transmisión desde un servidor $s \in V - X$.

Proporcionad un algoritmo con coste polinómico, para determinar si los anchos de banda contratados permiten efectuar o no la transmisión que se prevee establecer en los contratos con los clientes. En caso de que los contratos se puedan cumplir, el algoritmo debe proporcionar un nodo en $V - X$ desde dónde VideoFast pueda iniciar las transmisiones y cumplir con sus compromisos con los clientes.

Una solución

Lo plantearemos como un problema de asignación con restricciones en una red de flujo en la que una unidad de flujo de $s \in V - X$ a $x \in X$ represente la transmisión de un bit de s a t. Para controlar la transmisión añadiremos un nodo t a la red y conectaremos X a t.

La red $\mathcal{N}_v$, para $v \notin X$, tiene

- Nodos: t y V, tomamos $s = v$
- Aristas y capacidades:

$$\begin{array}{rl} e \in E & \text{capacidad } b(e) \\ \{(x,t) \mid x \in X\} & \text{capacidad } t(x) \end{array}$$

Un camino de s a t tiene la forma $s \to \cdots \to x \to t$, si transporta una unidad de flujo interpretaremos que se envía un bit desde s a $x \in X$. La capacidad de las aristas que entran en t garantiza que se puede realizar la transmisión requerida si el flujo máximo en la red es $\sum_{x \in X} t(x)$.

Resolveremos MaxFlow, para cada $v \in V - X$, hasta encontrar un v tal que el valor del flujo máximo en $\mathcal{N}_v$ es $\sum_{x \in X} t(x)$, y devolveremos este nodo, o comprobar que no es posible.

Las capacidades son enteras, pero los valores pueden ser grandes, por ello utilizarremos EK para calcular un flujo con valor máximo. Como tenemos que hacerlo para cada $s \in V - X$, el coste total del algritmo es $O(|V|^2|E|^2)$.

Una solución
Alternativamente se puede plantear el problema como un problema de circuación en vez de flujo.

La red $\mathcal{N}_v$, para $v \notin X$, tiene

- Nodos: V
- Aristas y capacidades:

$$\begin{array}{rl} e \in E & \text{capacidad } b(e) \\ \{(x,t) \mid x \in X\} & \text{capacidad } t(x) \end{array}$$

- Demandas: $d(v) = -\sum_{x \in X} t(x)$ y $d(x) = t(x)$, $x \in X$.

Una solución
Alternativamente se puede plantear el problema como un problema de circuación con cotas inferiores en vez de flujo.

La red $\mathcal{N}_v$, para $v \notin X$, tiene

- Nodos: t y V, tomamos $s = v$
- Aristas y capacidades:

$$\begin{array}{rl} e \in E & \text{capacidad } b(e) \\ \{(x,t) \mid x \in X\} & \text{cotas } [t(x), t(x)] \end{array}$$