

# Trabajo Práctico 2 — Algoritmos D&C y Programacion Dinamica

[75.29/95.06] Teoria de Algoritmos I  
Primer cuatrimestre de 2022

Alumno	Padron	Email
BENITO, Agustin	108100	abenito@fi.uba.ar
BLÁZQUEZ, Sebastián	99673	sblazquez@fi.uba.ar
DEALBERA, Pablo Andres	106585	pdealbera@fi.uba.ar
DUARTE, Luciano	105604	lduarte@fi.uba.ar
PICCO, Martín	99289	mpicco@fi.uba.ar

Nombre:	Grupo 1
Entrega:	Segunda
Fecha:	Miercoles 25 de Mayo del 2022

## Índice

<b>1. Parte 1: Un evento exclusivo</b>	<b>2</b>
1.1. Resolución por Fuerza Bruta . . . . .	2
1.1.1. Pseudocódigo . . . . .	2
1.1.2. Complejidad temporal . . . . .	2
1.1.3. Complejidad espacial . . . . .	2
1.2. Resolución por División y Conquista . . . . .	2
1.2.1. Idea General . . . . .	2
1.2.2. Pseudocódigo . . . . .	3
1.2.3. Complejidad temporal por Teorema Maestro . . . . .	3
1.2.4. Complejidad temporal desenrollando la recurrencia . . . . .	4
1.2.5. Complejidad espacial . . . . .	4
1.3. Ejemplo de funcionamiento . . . . .	4
<b>2. Parte 2: Ciclos negativos</b>	<b>7</b>
2.1. Solución con Bellman-Ford . . . . .	7
2.1.1. Algoritmo . . . . .	7
2.1.2. Sub-estructura optima . . . . .	8
2.1.3. Complejidad . . . . .	8
2.1.4. Relación de Recurrencia . . . . .	8
2.2. Detalles de implementación . . . . .	9
2.2.1. Ejecución del programa . . . . .	9
2.2.2. Estructuras de datos . . . . .	9
2.2.3. Implementación de Bellman-Ford en Python . . . . .	10
2.2.4. Calcular ciclo negativo . . . . .	10
2.2.5. Complejidad de la implementación . . . . .	10
<b>3. Parte 3: Un poco de teoría</b>	<b>11</b>
3.1. Algoritmos Greedy . . . . .	11
3.2. División y Conquista . . . . .	11
3.3. Programacion Dinamica . . . . .	11
3.4. Comparación de estrategias . . . . .	11
3.5. El problema . . . . .	11
3.5.1. ¿Porque eligiria el Algoritmo Greedy? . . . . .	12
3.5.2. ¿Porque eligiria el de Programación Dinámica? . . . . .	12
3.5.3. Conclusión . . . . .	12
<b>4. Correcciones Parte 1:</b>	<b>13</b>
<b>5. Correcciones Parte 2:</b>	<b>13</b>
5.1. Loop Infinito . . . . .	13
5.2. No explicamos que hacemos con verificación . . . . .	14
5.3. Relación de Recurrencia . . . . .	14

## 1. Parte 1: Un evento exclusivo

Para esta primera sección, se plantea un problema en el que, dado un ranking de jugadores que corresponde a este año, y la posición de cada jugador en el ranking del año anterior, hallar para cada jugador la cantidad de jugadores que superó en el ranking de un año a otro (i.e. con cuántos se invirtió el orden relativo)

### 1.1. Resolución por Fuerza Bruta

Para cada uno de los jugadores en el ranking actual se evalúan los siguientes hasta el final del ranking. En dicha iteración se aumenta un contador cada vez que se encuentre un jugador con un ranking menor al del año pasado que el jugador que se está recorriendo actualmente. Por último, se guarda dicho contador en una lista y al finalizar las iteraciones se devuelve dicha lista.

#### 1.1.1. Pseudocódigo

```
1 def rivales_superados(listado):
2     resultados = lista_de_igual_longitud_que(listado)
3     for jugador, indice in listado:
4         resultados[indice] = 0
5         for rival, _ in listado.slice(indice + 1):
6             if jugador.ranking_anterior > rival.ranking_anterior:
7                 resultados[indice] += 1
8     return resultados
```

#### 1.1.2. Complejidad temporal

Por cada jugador se recorren todos los siguientes, lo cual conlleva a una complejidad de  $O(n^2)$ .

#### 1.1.3. Complejidad espacial

Los resultados a devolver ocupan  $O(n)$  y el resto de las variables son constantes, consecuentemente la complejidad espacial es  $O(n)$ .

## 1.2. Resolución por División y Conquista

### 1.2.1. Idea General

La resolución planteada por división y conquista es similar al ejercicio “Contando inversiones”. En este caso la idea es partir del listado ordenado por el ranking actual, dividir el problema por la mitad de forma recursiva y luego desenrollar la recursividad ordenando por el ranking del año pasado. Al realizar este proceso veremos los rankings que “se cruzan” lo cual permitirá aumentar el contador de los rivales superados.

Como el objetivo es obtener esta cantidad en forma individual para cada jugador, haremos uso de un diccionario o lista para almacenar la información. Además, debe realizarse una ligera modificación del algoritmo para poder adaptarse a este requerimiento. La versión original se enfoca en contar la cantidad total de inversiones, lo que logra a través de acumular durante la etapa de merge los “elementos restantes por insertar” en el arreglo inferior al momento de insertar un elemento del arreglo superior (si estamos insertando uno del superior, quiere decir que todos los otros restantes del arreglo inferior deberían ir después que este, por lo que están invertidos); sin embargo, el algoritmo no discierne con cuántos otros un elemento está invertido.

Por ejemplo, siguiendo el ejemplo dado en la consigna, siguiendo la ejecución se llega al merge de los arreglos [(E, 6), (D, 8)] y [(F, 5)]. El algoritmo comienza a unificarlos, pero al notar que es el elemento del segundo arreglo el de menor valor, contará todos los elementos del primer arreglo por insertar (en este caso 2) como inversiones. Sin embargo, no distingue que hubo una inversión (E, F) y otra (D, F).

Para solventarlo, la modificación es sencilla: realizar el merge en sentido inverso, en orden descendente en lugar de ascendente, comenzando a unir por el final de cada arreglo en lugar del comienzo. Para el mismo ejemplo: primero comparamos D con F, como D es mayor, lo insertamos en el arreglo mezcla y, como esperábamos que fuese menor, contamos una inversión para D; continuando, comparamos E y F, y volvemos a estar frente al mismo caso; luego, solo queda insertar F. De esta manera, se siguen contando 2 inversiones, pero ahora se distingue con quiénes se dió cada una. Dependiendo de la implementación, el arreglo puede construirse insertando siempre al principio, de manera que quede ascendente, o construirlo descendente y luego invertirlo.

### 1.2.2. Pseudocódigo

```

1  funcion rivales_superados(jugadores)
2      sea superados un diccionario
3      rivales_superados_rec(jugadores, superados)
4      devolver superados
5
6  funcion rivales_superados_rec(lista, superados)
7      si | lista | <= 1:
8          devolver lista
9
10     dividir la lista en dos mitades: lista_inf, y lista_sup
11
12     lista_inf_res = rivales_superados_rec(lista_inf, superados)
13     lista_sup_res = rivales_superados_rec(lista_sup, superados)
14
15     lista_final = unir_y_contar_superados(lista_inf, lista_sup, superados)
16
17     devolver lista_final
18
19 funcion unir_y_contar_superados(lista_inf, lista_sup, superados)
20     sean los índices i = |lista_inf|, j = |lista_sup|
21     sea resultado una lista vacía de largo i + j
22
23     mientras 0 <= i y 0 <= j:
24         sea a = lista_inf[i]
25         sea b = lista_sup[j]
26         si lista_sup[j].ranking < lista_inf[i].ranking:
27             resultado[i+j] = a
28             superados[a] += 1
29             i--
30         si no
31             resultado[i+j] = b
32             j--
33
34     mientras 0 <= i:
35         resultado[i+j] = lista_inf[i]
36
37     mientras 0 <= j:
38         resultado[i+j] = lista_sup[j]
39
40     devolver resultado

```

### 1.2.3. Complejidad temporal por Teorema Maestro

El teorema del maestro establece que, dados  $a$  y  $b$  constantes,  $f(n)$  una función,  $T(n) = a * T(n/b) + f(n)$  una recurrencia con  $T(0)=cte$ :

- Si  $f(n) = O(n^{\log_b a - e})$ ,  $e > 0 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
- Si  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} * \log n)$
- Si  $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + e})$ ,  $e > 0 \Rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

Para el caso, podemos establecer que  $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ , dado que el problema se divide en dos subproblemas de  $n/2$  elementos cada uno (contar inversiones en dos mitades de una lista) y, adicionalmente a los dos subproblemas, se realiza una iteración de los resultados para unir y ordenar las listas en una única, contando las inversiones en el proceso, lo que supone  $O(n)$  por iterarse  $n/2 + n/2$  elementos.

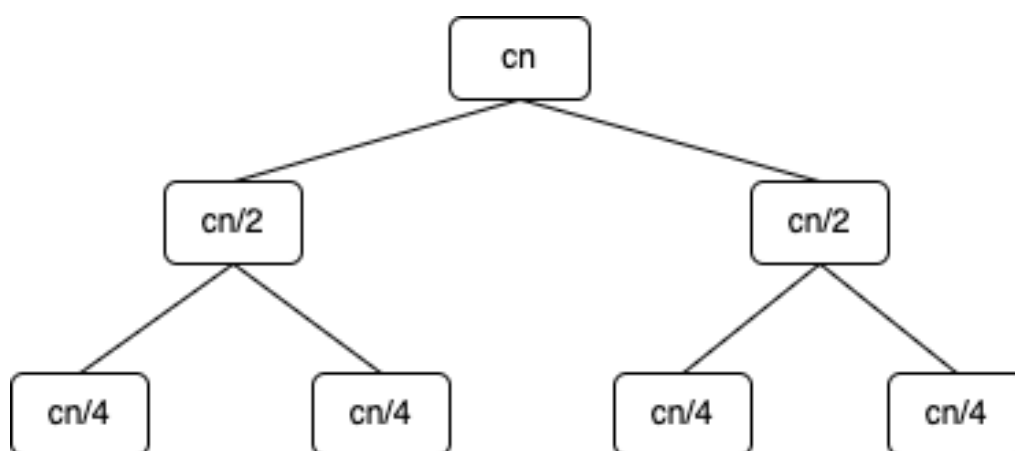
De la relación de recurrencia observamos que  $a = b = 2$ . Analizando caso a caso:

- $n^{\log_2 2 - e} = n^{1-e}$ . Como  $e > 0$ , no se puede satisfacer que  $f(n) = n = O(n^{1-e})$ , dado que  $n^{1-e} \leq n, \forall n > 0$ , por lo que el caso queda descartado
- $n^{\log_2 2} = n$ . Se satisface que  $f(n) = n = O(n)$
- $n^{\log_2 2 + e} = n^{1+e}$ . Como  $e > 0$ , no se puede satisfacer que  $f(n) = n = \Omega(n^{1+e})$ , dado que  $n^{1+e} \geq n, \forall n > 0$ , por lo que el caso queda descartado

En conclusión, por teorema maestro, la complejidad temporal es  $T(n) = \Theta(n^{\log_2 2} * \log n) = \Theta(n \log(n))$

#### 1.2.4. Complejidad temporal desenrollando la recurrencia

En este caso la forma de desenrollar la recurrencia es análoga a la del merge sort:



En el nivel 1 se realizan  $cn$  operaciones, en el segundo  $cn/2 * 2 = cn$  operaciones, en el tercero  $cn/4 * 4 = cn$  operaciones y en un nivel genérico  $j$  se realizan  $cn/2^{j-1} * 2^{j-1} = cn$  operaciones.

Luego es necesario calcular la cantidad de niveles que tendrá nuestro algoritmo. Para ello utilizaremos el caso base en el cual hay problemas con solo 2 elementos, por lo tanto podemos plantear que en dicho nivel  $k$  hay  $2^k$  subproblemas que equivale a la mitad de los elementos de nuestro problema dado que utilizamos un caso base con 2 elementos. Consecuentemente,  $2^k = n/2 \Rightarrow k * \log_2 2 = \log_2(n/2) \Rightarrow k = \log_2 n - 1$ .

Finalmente, al multiplicar la cantidad de operaciones a realizar en cada nivel por la cantidad total de niveles obtenemos que la complejidad temporal es  $O(cn * (\log_2 n - 1)) = O(n * \log_2 n)$

#### 1.2.5. Complejidad espacial

La única estructura adicional al arreglo provisto como entrada del algoritmo es un diccionario/lista que contabilice la cantidad de inversiones de cada elemento. Como en el peor de los casos todos los elementos cuentan con inversiones, se considera que el arreglo puede tener hasta  $n$  elementos. La división de listas en mitades depende de la implementación del algoritmo.

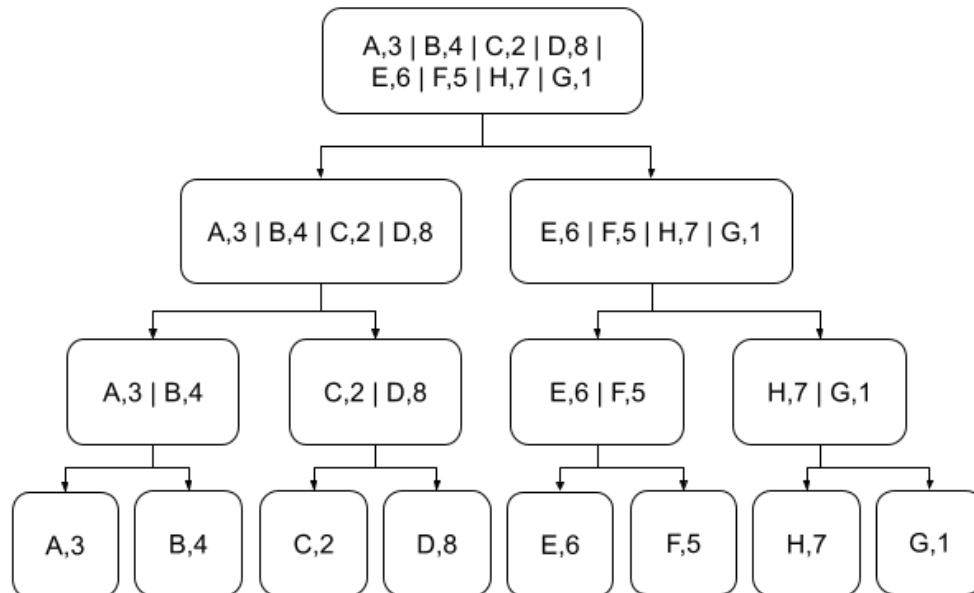
En conclusión, el algoritmo tiene una complejidad espacial de  $E(n) = O(n)$

### 1.3. Ejemplo de funcionamiento

Tomaremos como caso el ejemplo dado por la cátedra, pero realizaremos una modificación para que sean 8 jugadores en lugar de 6. De manera que la lista de entrada estará dada por las tuplas (id,ranking): A,3 | B,4 | C,2 | D,8 | E,6 | F,5 | H,7 | G,1

A continuación se muestran los subproblemas a resolver. A fin de mostrar cómo se construye el diccionario de superados, se decidió seguir un orden cronológico de resolución. Dado que se

comienza procesando la primer mitad de la lista, comenzaremos resolviendo la rama izquierda del árbol; el orden nos lleva al subproblema con los primeros dos elementos, y comenzaremos resolviendo el árbol desde allí.



```

1 lista = A,3 | B,4
2
3 lista_inf = rivales_superados_rec(A,3; superados) = A,3 # caso base
4 lista_inf = rivales_superados_rec(B,4; superados) = B,4 # caso base
5
6 # no hay inversiones
7 lista_final = unir_y_contar(A,3 | B,4; superados) = A,3 | B,4
8
9 superados = { }
```

```

1 lista = C,2 | D,8
2
3 lista_inf = rivales_superados_rec(C,2; superados) = C,2 # caso base
4 lista_sup = rivales_superados_rec(D,8; superados) = D,8 # caso base
5
6 # no hay inversiones
7 lista_final = unir_y_contar(C,2; D,8; superados) = C,4 | D,8
8
9 superados = { }
```

```

1 lista = A,3 | B,4 | C,2 | D,8
2
3 lista_inf = rivales_superados_rec(A,3 | B,4; superados) = A,3 | B,4
4 lista_sup = rivales_superados_rec(C,2 | D,8; superados) = C,2 | D,8
5
6 # inversiones (A, C), (B, C)
7 lista_final = unir_y_contar(A,3 | B,4; C,2 | D,8; superados) = C,2 | A,3 | B,4 | D,8
8
9 superados = { A: 1, B: 1}
```

Comenzamos la resolución con la otra rama del árbol:

```
1 lista = E,6 | F,5
2
3 lista_inf = rivales_superados_rec(E,6; superados) = E,6 # caso base
4 lista_sup = rivales_superados_rec(F,5; superados) = F,5 # caso base
5
6 # inversion (E, F)
7 lista_final = unir_y_contar(E,6; F,5; superados) = F,5 | E,6
8
9 superados = { A: 1, B: 1, E: 1 }
```

---

```
1 lista = H,7 | G,1
2
3 lista_inf = rivales_superados_rec(H,7; superados) = H,7 # caso base
4 lista_sup = rivales_superados_rec(G,1; superados) = G,1 # caso base
5
6 # detectamos que el ranking de G es menor al de H, por lo que están invertidos
7 lista_final = unir_y_contar(H,7; G,1; superados) = G,1 | H,7
8
9 superados = { A: 1, B: 1, E: 1, H: 1 }
```

---

```
1 lista = E,6 | F,5 | H,7 | G,1
2
3 lista_inf = rivales_superados_rec(E,6 | F,5; superados) = F,5 | E,6
4 lista_sup = rivales_superados_rec(H,7 | G,1; superados) = G,1 | H,7
5
6 # inversiones (F, G) y (E, G)
7 lista_final = unir_y_contar(F,5 | E,6; G,1 | H,7; superados) = G,1 | F,5 | E,6 | H,7
8
9 superados = { A: 1, B: 1, E: 2, F: 1, H: 1 }
```

---

Finalmente unimos los subproblemas en el original:

```
1 lista = A,3 | B,4 | C,2 | D,8 | E,6 | F,5 | H,7 | G,1
2
3 lista_inf = rivales_superados_rec(A,3 | B,4 | C,2 | D,8; superados) = C,2 | A,3 | B,4 | D,8
4 lista_sup = rivales_superados_rec(E,6 | F,5 | H,7 | G,1; superados) = G,1 | F,5 | E,6 | H,7
5
6 # inversiones (A, G), (B, G), (C, G), (D, G)
7 lista_final = unir_y_contar(lista_inf; lista_sup; superados)
8
9 superados = { A: 2, B: 2, C: 1, D: 1, E: 2, F: 1, H: 1 } # resultado final
```

---

## 2. Parte 2: Ciclos negativos

En esta segunda parte del trabajo practico, se nos presenta el problema de analizar un grafo dirigido ponderado con valores enteros y verificar si tiene, por lo menos, un ciclo negativo. En el caso de tenerlo, debemos mostrar en pantalla los nodos que contienen a dicho ciclo. Además, se nos pide que la solución presentada utilice programación dinámica.

### 2.1. Solución con Bellman-Ford

Para resolver el problema enunciado podemos utilizar el algoritmo Bellman-Ford para calcular el camino mínimo en un grafo ponderado con aristas negativas a partir de un nodo de origen. Lógicamente, no podría encontrarse un camino mínimo distinto a (menos infinito) si es que hay ciclos negativos. Esto es porque caeríamos en un punto donde resulta conveniente recorrer dicho ciclo infinitamente ya que cada vez se reduce más la longitud del camino mínimo. Vamos a ver que esto puede ser utilizado para encontrar ciclos negativos.

Primero, veamos como calcular el camino mínimo:

#### 2.1.1. Algoritmo

Primero, se inicializa la distancia del nodo de origen  $n_s$  hasta todos los vértices como infinito y la distancia al nodo  $n_s$  como cero. Luego por cada arista se verifica si la distancia guardada para llegar al vértice de origen de la arista sumado al peso de la arista es menor a la guardada para llegar al vértice destino de la arista. Esto se repite  $N - 1$  veces con  $N$  el número de nodos del grafo. De esta manera, en cada iteración  $i$ , el algoritmo encuentra el camino mínimo de longitud máxima  $i$ . Es por esto que el ciclo se repite  $N - 1$  veces, porque el camino mínimo sin ciclos podría ser de esa longitud. Es en este punto donde el algoritmo nos es de utilidad. Podemos aplicar el mismo procedimiento una vez, es decir viendo si se puede encontrar un camino mínimo de longitud  $N$  que sea menor al encontrado de longitud  $N - 1$ . Si esto sucede, implica que estamos agregando una arista negativa formando un ciclo negativo. Es decir, identificamos el ciclo negativo que se nos pide en el enunciado.

El algoritmo de Bellman-Ford termina ahí, en el caso de encontrar un ciclo negativo devuelve error y en caso contrario devuelve el camino mínimo o una estructura para reconstruirlo. En nuestro caso, necesitamos adaptar el algoritmo para que devuelva un ciclo negativo si es que hay o nada en caso de no haber. Entonces, lo que podemos hacer es una vez que sabemos que hay un ciclo negativo, iterar una vez mas y reconstruir el ciclo negativo.



## 1. Pseudo-codigo

```

1 funcion Bellman_Ford(Grafo grafo, Nodo origen)
2     siendo distancias un diccionario
3     siendo predecesores un diccionario
4
5     por cada vertice v del grafo:
6         distancias[v] = infinito
7
8     distancias[origen] = 0
9     padres[origen] = None
10
11    por cada vertice:
12        por cada arista de origen v y destino w y peso:
13            si distancias[v] + peso < distancias[w]:
14                predecesores[w] = v
15                distancias[w] = distancias[v] + peso
16
17    siendo ciclo una lista
18    siendo peso_ciclo un numero inicializado en cero
19
20    por cada arista de origen v y destino w y peso:
21        si distancias[v] + peso < distancias[w]:
22            sea arista_actual
23            sea predecesor
24
25            agregar v al ciclo
26            arista_actual = v
27            predecesor = predecesores[v]
28            peso_ciclo = peso
29
30            mientras predecesor sea desigual a v
31                agregar predecesor a ciclo
32                arista_actual = predecesor
33                predecesor = predecesores[predecesor]
34                peso_ciclo += peso de la arista predecesor y arista_actual
35
36    devolver ciclo y peso_ciclo

```

## 2.1.2. Sub-estructura optima

Para calcular las distancias mínimas de un nodo hacia otro se utiliza la distancia mínima calculado anteriormente para su predecesor mas el peso de llegar a el. Entonces la subestructura seria los caminos mínimos de todos los nodos predecesores al nodo final.

## 2.1.3. Complejidad

Podemos analizar la complejidad temporal a partir del pseudo-codigo. Primero, tenemos un ciclo donde inicializamos las distancias de cada vértice al origen como infinito. Es decir  $O(V)$ , donde  $V$  es la cantidad de vértices. Luego, por cada vértice sin contar el origen recorremos todas las aristas que resulta  $O(E)$ . Es decir que el ciclo entero tiene una complejidad de  $O(V * E)$ . Finalmente, encontrar el ciclo negativo y devolverlo tiene una complejidad de  $O(E)$  porque se recorren todas las aristas una vez más. Entonces, la complejidad final del algoritmo es de  $O(V * E)$ .

Y la complejidad espacial es  $O(V)$ , porque almacenamos dos diccionarios para las distancias y los predecesores que son de maximo  $V$ .

## 2.1.4. Relación de Recurrencia

Sea  $n_s$  en nodo de inicio,  $T$  el nodo final,  $N_i$  un nodo y  $predecesores[N_i]$  es el conjunto de los nodos adyacentes a  $N_i$ , sabemos que para llegar desde el nodo  $n_s$  al nodo  $N_i$  en una cantidad de pasos  $j$  debemos haber llegado a alguno de sus predecesores en  $j - 1$  pasos. Entonces, siendo la longitud la cantidad de nodos que se recorren hasta llegar al nodo  $N_i$ , se deduce de lo planteado que el camino mínimo hasta el nodo  $N_i$  dada una longitud máxima  $L$  es el mínimo de los caminos hacia sus predecesores mas la longitud de llegar del predecesor a  $N_i$ . Por lo tanto, nuestra ecuación de recurrencia resulta:

Definiendo:

- $n_s$ : nodo origen o *source node*
- $n_i$ : otro nodo distinto al origen
- $j$ : longitud máxima para llegar de  $n_s$  a  $n_i$
- $\text{minPath}(n_i, j)$ : función recursiva para llegar al camino mínimo de  $n_s$  a  $n_i$
- $n_x$ : predecesores a  $n_i$
- $k$ : cantidad de predecesores a  $n_i$
- $w(n_x, n_i)$ : peso de la arista  $n_x$  y  $n_i$

$$\begin{aligned} \text{minPath}(n_s, j) &= 0 \\ \text{minPath}(n_i, 0) &= +\infty \text{ con } n_i \neq n_s \\ \text{minPath}(n_i, j) &= \min \left\{ \begin{array}{l} \text{minPath}(n_i, j-1) \\ \min \left\{ \begin{array}{l} \text{minPath}(n_{x1}, j-1) + w(n_{x1}, n_i) \\ \text{minPath}(n_{x2}, j-1) + w(n_{x2}, n_i) \\ \dots \\ \text{minPath}(n_{xk}, j-1) + w(n_{xk}, n_i) \end{array} \right\} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

## 2.2. Detalles de implementación

El algoritmo fue implementado en Python y no tiene dependencias aparte de tener instalado cualquier versión de `python3`.

### 2.2.1. Ejecución del programa

El programa contiene un `shebang` para ser ejecutado en una terminal de la siguiente forma:

```
1 ./src/parte_2.py <filename>
```

El comprimido entregado incluye un archivo ejemplo en `assets/grafos.txt` con grafos ejemplos, por ejemplo:

```
1 B
2 D, A, -2
3 B, A, 3
4 D, C, 2
5 C, D, -1
6 B, E, 2
7 E, D, -2
8 A, E, 3
```

```
1 ./src/parte_2.py ./assets/grafos.txt
```

```
1 Existen al menos un ciclo negativo en el grafo. A,E,D → costo: -1
```

### 2.2.2. Estructuras de datos

Para la representación del grafo decidimos mantener un simple:

- Una lista de aristas para almacenar las aristas tal cual como están en el archivo.
- Un set de vértices para mantener un registro de los vértices ingresados en cada arista.

### 2.2.3. Implementación de Bellman-Ford en Python

Al igual que el pseudo-código, podemos describir la implementación de la siguiente manera:

1. Iniciamos:

- un diccionario de distancias con clave **vertice** y valor infinito.
- un diccionario de predecesores donde la clave **origen** se inicializa en **None**
- la distancia de clave **origen** se cambia a 0.

2. Iterar por la cantidad de vértices del grafo:

- por cada arista, si la distancia guardada para llegar al origen de la arista mas el peso de moverse al nodo destino de la arista es menor a la distancia guardada para llegar al nodo destino de la arista, reemplazar la distancia guardada del nodo destino.
- además, verificamos si no hubo un cambio en la iteración de aristas, si este es el caso, podemos confirmar que no existe ningún ciclo negativo por lo que devolvemos.

3. Verificar que no haya ciclos negativos

- por cada arista, si se sigue cumpliendo la condición del punto anterior, entonces hay un ciclo negativo
- si hay un ciclo negativo:
  - reconstruir los nodos predecesores hasta llegar al nodo que se detecto y sumar los pesos de sus aristas.
  - devolver el ciclo negativo y su peso

### 2.2.4. Calcular ciclo negativo

A partir del algoritmo de Bellman-Ford agregamos código cuando se detecta el ciclo negativo que agrega el nodo que se detecto termina el ciclo negativo y se reconstruye los nodos predecesores iterando hasta volver al nodo original mientras que se suman todos sus pesos en la variable **peso\_ciclo**.

Luego devolvemos al ciclo reconstruido invertido y el **peso\_ciclo** calculado.

### 2.2.5. Complejidad de la implementación

Con la simple estructura que decidimos usar, el código y el pseudo-código tiene pocas diferencias, y la complejidad temporal termina siendo la misma  $O(V * E)$ .

En el código de Python tenemos las siguientes operaciones:

- Inicializar las distancias en infinito que lo hacemos con un simple **for** sobre **grafo.vertices** por lo que la complejidad computacional es  $O(V)$ .
- Luego hacemos un **for** anidado entre **grafo.vertices** (un *set* de python) y **grafo.aristas** (un *lista* de python), y como decidimos tener estructura simple (cuando creamos el grafo almacenamos los vértices y las aristas como vienen), la complejidad termina siendo la multiplicación de los dos ciclos es decir  $O(V * E)$  ya que en Python tanto iterar sobre listas o sobre sets es  $O(n)$ .
- Además, en la búsqueda de ciclos negativos hacemos uso de **grafo.peso()**, que por la estructura que tenemos es  $O(E)$  por lo que como además iteramos sobre todas las aristas esa parte queda  $O(V * E)$ .

Y la complejidad espacial es  $O(V)$  porque solo guardamos dos diccionarios de largo  $V$ , uno con las distancias y otro con los predecesores y en caso de encontrar un ciclo negativo es como mucho de largo  $V$ , lo que en el peor de los casos es  $O(3 * V)$  que es  $O(V)$ .

### 3. Parte 3: Un poco de teoría

#### 3.1. Algoritmos Greedy

La estrategia Greedy consiste en dividir un problema en subproblemas que tengan una jerarquía entre si y cada subproblema se resuelve usando una heurística llamada *eleccion greedy*.

Le elección greedy consiste en una selección optima local en un subproblema. Además de poder elegir una elección greedy, también debe poder tener una *subestructura optima*, es decir, que la resolución optima de esos subproblemas me lleven a una solución optima en el caso general.

Lo difícil de los algoritmos greedy es poder demostrar que las elecciones optimas en los subproblemas nos acerca realmente a una solución optima global, como tal esta estrategia no nos garantiza poder encontrar soluciones optimas. Aunque la ventaja principal es que son fáciles de armar.

#### 3.2. División y Conquista

La división y conquista es una técnica algorítmica que consiste en 3 elementos claves. El primero es, dividir el problema en  $N$  subproblemas menores pero que se puedan resolver igual. Luego, resolver estos problemas de manera recursiva planteando un caso base, es decir un caso donde el problema se resuelva de forma trivial y no haga falta dividirlo. Finalmente, se combina la solución hallada de todos los subproblemas para formar la solución general.

Entonces, es evidente que para que un problema se pueda resolver por división y conquista debe tener subestructura optima. La complejidad temporal utilizando esta estrategia se calcula una vez obtenida la relación de recurrencia del problema. Para ello, se puede, o bien desarrollar la relación de recurrencia matemáticamente utilizando el costo del caso base o, utilizar el Teorema Maestro. Este último teorema, no necesariamente resuelve todos los problemas de división y conquista pero por lo general es una herramienta muy útil.

#### 3.3. Programación Dinámica

La programación dinámica resuelve problemas de índole de optimización. Para ello, el problema tiene que tener dos características: Subestructura óptima y Subproblemas superpuestos. La primera, implica que la resolución de un problema global contiene resoluciones óptimas de sus subproblemas. La segunda, refiere a la aparición de subproblemas previamente calculados. Esta última propiedad es la que se aprovecha junto a técnicas de programación como la memorización para reducir la complejidad del algoritmo. Al guardarse los resultados óptimos de los subproblemas, se evita tener que volver a calcularlos. La complejidad de este tipo de algoritmo se calcula con una relación de recurrencia la cual tiene en cuenta un caso base y la resolución de un problema  $N$  en relación a un problema  $N-1$ . En forma iterativa, entonces, se procede a calcular los subproblemas más chicos cuyos resultados serán utilizados para los siguientes.

#### 3.4. Comparación de estrategias

No existe una mejor estrategia, algunos problemas directamente no se pueden plantear usando una de las tres estrategias vistas, por lo que categorizar una como la mejor no tiene sentido.

En el caso de poder resolverse con más de una, se elige la estrategia que resuelva el problema, o con mejor complejidad temporal, o menor complejidad espacial, como se ejemplifica en el para el siguiente problema:

#### 3.5. El problema

Se trabaja sobre una matriz. El ejercicio no da mucha información acerca de la complejidad espacial, por lo que tenemos que dar supuestos:

El Algoritmo Greedy realiza  $N^3$  operaciones sobre la matriz. En primer lugar, podríamos suponer que la complejidad espacial es  $O(K)$ , con  $K$  una constante. En el caso de Programación

Dinámica que divide el problema en  $n^2$  sub-problemas, podríamos decir que la complejidad espacial de este último es  $O(K * n^2)$  por lo que siempre se cumpliría que la complejidad espacial de Programación Dinámica es mayor a la del Algoritmo Greedy.

El de Programación Dinámica realiza  $N^2$  operaciones sobre la matriz, por lo que la *complejidad temporal* del Algoritmo Greedy es menor Programación Dinámica.

Frente a dos algoritmos que resuelven el mismo problema, siempre se debería elegir aquel que tenga menor complejidad temporal y espacial. En caso de tener igual complejidad espacial, se elige el de menor complejidad temporal y viceversa.

El problema surge cuando uno tiene una complejidad mayor que la otra, en ese caso debe tenerse en cuenta las características y condiciones del sistema donde se va a ejecutar.

### 3.5.1. ¿Porque eligiria el Algoritmo Greedy?

Si yo tengo poca memoria (como el caso de sistema embebidos), yo tal vez ni siquiera tendria la posibilidad de poder ejecutar el algoritmo con Programación Dinamica porque no tengo suficiente memoria para procesarlo.

### 3.5.2. ¿Porque eligiria el de Programación Dinámica?

En computadoras modernas, la mayoría de los sistemas vienen con bastante memoria (>8GB) entonces podría despreciar el hecho de que necesito mas memoria para procesar el algoritmo en orden de ganar en tiempo de ejecución.

### 3.5.3. Conclusión

No hay un algoritmo perfecto para todos los casos, solo hay algoritmos optimos para un problema. Elegir entre un algoritmo que tiene complejidad espacial  $O(n^2)$  y complejidad temporal  $O(n^2)$ , y otro algoritmo de complejidad espacial  $O(1)$  y complejidad temporal  $O(n^3)$ , dependiendo de las condiciones donde se ejecuta, el algoritmo eligiria uno sobre otro, pero la realidad es que, a menos que este trabajando en sistemas embebidos (o algun sistema especifico con muy poca memoria), es mas probable que priorice la complejidad temporal que la espacial.

## 4. Correcciones Parte 1:

La parte 1 de la primera entrega contenía un loop infinito en la función `unir_y_contar_superados` del pseudocódigo el cual se corrige a continuación:

```

1  funcion unir_y_contar_superados(lista_inf, lista_sup, superados)
2      sean los índices i = |lista_inf|, j = |lista_sup|
3      sea resultado una lista vacía de largo i + j
4
5      mientras 0 <= i y 0 <= j:
6          sea a = lista_inf[i]
7          sea b = lista_sup[j]
8          si lista_sup[j].ranking < lista_inf[i].ranking:
9              resultado[i+j] = a
10             superados[a] += 1
11             i--
12          si no
13              resultado[i+j] = b
14              j--
15
16      mientras 0 <= i:
17          resultado[i+j] = lista_inf[i]
18          i--
19
20      mientras 0 <= j:
21          resultado[i+j] = lista_sup[j]
22          j--
23
24      devolver resultado

```

## 5. Correcciones Parte 2:

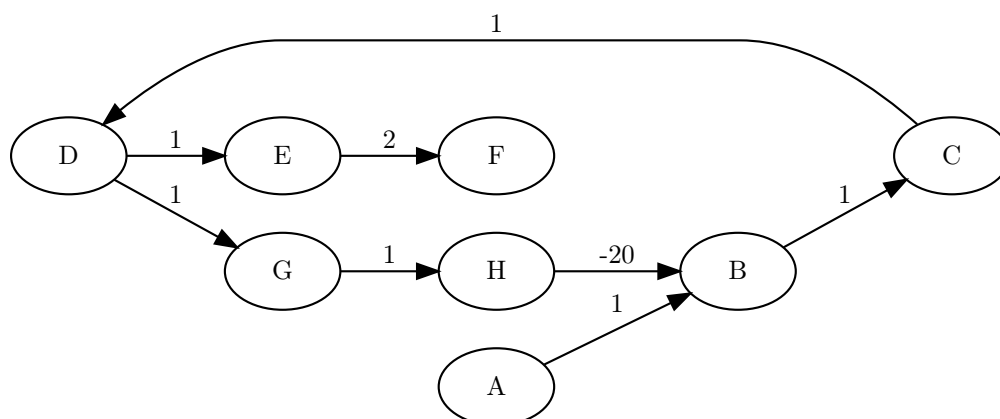
### 5.1. Loop Infinito

La parte 2 de la primera entrega tenía un loop infinito con el siguiente grafo que se puede encontrar en `assets/grrafo-correccion.txt`

```

1  A
2  E,F,2
3  A,B,1
4  B,C,1
5  C,D,1
6  D,E,1
7  D,G,1
8  G,H,1
9  H,B,-20

```



El algoritmo anterior encontraba el nodo E con un camino mejor y desde ahí buscaba los predecesores hasta encontrar de nuevo al nodo E, resultando en un loop infinito ya que E no se encuentra en el ciclo negativo como se puede apreciar en la imagen.

Para esto se realizo un pequeño cambio en el algoritmo de reconstrucción del ciclo negativo donde en vez de seguir el loop si el predecesor no es el vertice que se encontró, se itera los predecesores hasta encontrar uno que se repita y luego se vuelve a iterar una vez mas por los predecesores para reconstruir el ciclo (que puede o no incluir al nodo que provoco la reconstrucción).

Ejecutando el algoritmo con el grafo mencionado da este resultado:

```
1 ./src/parte_2.py ./assets/grafico-correccion.txt
```

```
1 Existen al menos un ciclo negativo en el grafo. G,H,B,C,D → costo: -16
```

## 5.2. No explicamos que hacemos con verificación

En el informe, cuando explicamos el algoritmo, decimos:

Primero, se inicializa la distancia del nodo de origen  $n_s$  hasta todos los vértices como infinito y la distancia al nodo  $n_s$  como cero. Luego por cada arista se verifica si la distancia guardada para llegar al vértice de origen de la arista sumado al peso de la arista es menor a la guardada para llegar al vértice destino de la arista.

En caso de ser menor, cambia el predecesor al actual y descarta el anterior. De esta manera, estamos indicando que conviene llegar al nodo por el nodo actual y no por el que llegábamos antes. En caso de ser mayor, no se hace nada.

## 5.3. Relación de Recurrencia

Sea  $n_s$  un nodo de inicio,  $v$  un vertice y  $predecesores[v]$  es el conjunto de los nodos que tengan aristas con destino a  $v$ , sabemos que para llegar desde el nodo  $n_s$  al nodo  $v$  en una cantidad de pasos  $j$  debemos haber llegado a alguno de sus predecesores en  $j - 1$  pasos.

Entonces, siendo la longitud la cantidad de nodos que se recorren hasta llegar al nodo  $v$ , se deduce de lo planteado que el camino mínimo hasta el nodo  $v$  dada una longitud máxima  $L$  es el mínimo de los caminos hacia sus predecesores mas la longitud de llegar del predecesor a  $N_i$ . Por lo tanto, nuestra ecuación de recurrencia resulta:

$$\begin{aligned} \minPath(v, j) &= 0 \text{ con } j = 0 \wedge v = n_s \\ \minPath(v, j) &= +\infty \text{ con } j = 0 \wedge v \neq n_s \\ \minPath(v, j) &= \min \left\{ \begin{array}{l} \minPath(v, j - 1) \\ \min \{ \minPath(u, j - 1) + w(u, v) \} \quad (u, v) \in E \end{array} \right\} \end{aligned}$$