Sistemas Dinámicos Discretos en Dimensiones Bajas

Pablo Borrego Ramos

Facultad de Ciencias. PCEO Matemáticas y Estadística
Universidad de Extremadura

9 de febrero de 2026

Motivación y Objetivos

Motivación

Los sistemas dinámicos discretos unidimensionales son interesantes por su simplicidad estructural, pero además permiten modelar y analizar una gran variedad de fenómenos complejos, suelen estar asociados a ecuaciones en diferencias. Estos sistemas encuentran aplicaciones en diversas áreas como la biología, la física y la criptografía. Un ejemplo clásico es la secuencia de Fibonacci, que ha sido utilizada para describir la evolución de poblaciones de conejos.

Objetivos

- **Capítulo 1:** Estudio de la Estabilidad en Sistemas Dinámicos Discretos
- **Capítulo 2:** Bifurcaciones en Sistemas Discretos Unidimensionales .
- **Capítulo 3:** Introducción al Caos

Una ecuación en diferencias es una expresión de la forma:

$$G(n, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donde $G : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{k+1} \mapsto \mathbb{R}$

Solución de ecuación en diferencias

Denominaremos solución de la ecuación en diferencias a toda sucesión

$$x : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$$

Que satisface la ecuación anterior. Llamaremos órbita a la imagen de las soluciones, es decir, al conjunto $\{x(n) : \ n \in \mathbb{N}\}$.

Ecuaciones diferenciales explícitas en una dimensión

En este trabajo nos centraremos en las ecuaciones en diferencias donde G tiene como dominio $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^2$ y la ecuación en diferencias es de la forma:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \text{donde } f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

Las soluciones de esta ecuación son sucesiones de la forma $\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots\}$

Métodos de discretización

Dada una ecuación diferencial $\dot{x}(t) = f(x(t))$ existen varios métodos que nos permiten convertir dicha ecuación en una ecuación en diferencias tomando una cantidad numerable de valores.

Método de Euler

El método de Euler discretiza la derivada de la función reemplazando $\dot{x}(t)$ por el cociente de diferencias $(x_{n+1} - x_n)/h$. Así, la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ se transforma en una ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n).$$

Métodos de discretización

Método de Newton

Definimos x_{n+1} como el punto donde la tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_n, f(x_n))$ corta el eje x. La ecuación de la tangente es

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

Despejando el punto de corte con el eje x

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Definición (Punto Fijo)

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y un punto* $\hat{x}$ *diremos que* $\hat{x}$ *es un punto fijo cuando* $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

Definición

Un punto fijo $\hat{x}$ *de una función escalar* f *es estable si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *de tal forma que para todo* x_0 *tal que* $|x_0 - \hat{x}| < \delta$ *se cumple que* $|f^n(x_0) - \hat{x}| < \varepsilon$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Por el contrario, diremos que un punto fijo es inestable cuando no es estable.*

Definición

Un punto fijo $\hat{x}$ del f es un atractor global si para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, resulta

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$$

Siendo $x_n = f^n(x_0)$. En cambio, si solo ocurre para un entorno de $\hat{x}$, diremos que es un atractor local.

Definición

Un punto fijo $\hat{x}$ de f se dice globalmente (localmente) asintóticamente estable si satisface:

- *$\hat{x}$ es estable.*
- *$\hat{x}$ es atractor global (local).*

Estabilidad en el caso hiperbólico

Definición

Dado un punto fijo $\hat{x}$ de una función escalar f diremos que $\hat{x}$ es un punto hiperbólico cuando $|f'(\hat{x})| \neq 1$.

Teorema

Sea f una función escalar de clase 1 y $\hat{x}$ un punto fijo hiperbólico de f.

- *$\hat{x}$ es localmente asintoticamente estable* $\iff |f'(\hat{x})| < 1$
- *$\hat{x}$ es inestable* $\iff |f'(\hat{x})| > 1$

Demostración

A través de una traslación, consideramos el punto $(0,0)$, basta definir la nueva función,

$$g(u) = f(\hat{x} + u) - f(\hat{x})$$

A continuación, definimos la máxima y mínima pendiente de la función en un entorno del punto fijo,

$$m_\varepsilon = \min_{|s| \leq \varepsilon} |f'(\hat{x} + s)|, \quad M_\varepsilon = \max_{|s| \leq \varepsilon} |f'(\hat{x} + s)|$$

A través del Teorema del Valor Medio se puede probar que,

$$m_\varepsilon |u| \leq |g(u)| \leq M_\varepsilon |u|$$

Y aplicando inducción tenemos

$$|u| m_\varepsilon^n \leq |g^n(u)| \leq |u| M_\varepsilon^n \quad \forall n \in \{0, 1 \ldots k\}$$

Demostración

Cuando $|f'(\hat{x})| < 1$, la continuidad de $f'(x)$ garantiza la existencia de un entorno de $\hat{x}$ en el que $|f'(\hat{x}+s)| < 1$ y por tanto, en dicho entorno $M_\epsilon < 1$. Esto, junto con la desigualdad que demostramos previamente, nos permite ver que

$$|g(u)| < |u|M_\epsilon < |u|$$

Aplicando un argumento inductivo, concluimos que

$$|g^n(u)| < |u|M_\epsilon^n < |u|$$

De aquí es fácil deducir la estabilidad y la estabilidad asintótica.

Demostración

Cuando $|f'(\hat{x})| > 1$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - \hat{x}| < \delta$ entonces $|f'(\hat{x} + x)| > 1$.

Para demostrar que $\hat{x}$ es inestable basta ver que existe un $\hat{n} \in \mathbb{N}$ tal que $g^{\hat{n}}(u) \notin (-\delta, \delta)$ para cualquier $u \in (-\delta, \delta)$.

Se demuestra por reducción al absurdo, suponemos que $g^n(u) \in (-\delta, \delta)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $u \in (-\delta, \delta)$. Como $|f'(\hat{x})| > 1$ tenemos que $\exists \delta > 0$ tal que $m_\delta > 1$, teniendo en cuenta

$$|u| m_\delta^n \leq |g^n(u)|$$

Tendríamos entonces que $|u| m_\delta^n$ estaría acotada, lo cual es falso, pues como $m_\delta > 1$ $m_\delta^n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Estabilidad en el caso no hiperbólico

Teorema

Dada una función $f \in \mathcal{C}^3$ y un punto fijo $\hat{x}$ de f:

1. *Si $f'(\hat{x}) = 1$, entonces tenemos tres casos a considerar:*
   - *(a) Si $f''(\hat{x}) > 0$, entonces $\hat{x}$ es semi-asintóticamente estable por la izquierda.*
   - *(b) Si $f''(\hat{x}) < 0$, entonces $\hat{x}$ es semi-asintóticamente estable por la derecha.*
   - *(c) Si $f''(\hat{x}) = 0$ pueden darse dos casos:*
     - *(c.1) $f'''(\hat{x}) > 0$, entonces $\hat{x}$ es asintóticamente estable.*
     - *(c.2) $f'''(\hat{x}) < 0$, entonces $\hat{x}$ es inestable.*
2. *Si $f'(\hat{x}) = -1$ y $3f''(\hat{x})^2 - 2f'''(\hat{x}) \neq 0$, entonces tenemos dos casos a considerar:*
   - *(a) Si $f'''(\hat{x}) + \frac{3}{2}f''(\hat{x})^2 < 0$, entonces $\hat{x}$ es asintóticamente estable.*
   - *(b) Si $f'''(\hat{x}) + \frac{3}{2}f''(\hat{x})^2 > 0$, entonces $\hat{x}$ es inestable.*

Dada una función F, diremos que una perturbación del sistema dinámico asociado a f es una función de la forma:

$$F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (\lambda, x) \to F(\lambda, x) \quad \text{t.q} \quad F(0, x) = f(x)$$

Definición

Dada una función f y una solución $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ de $x_{n+1} = f(x_n)$ diremos que la solución es monótona creciente cuando $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y decreciente cuando $x_n \geq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Diremos que el sistema dinámico asociado a una función es monótono cuando toda órbita sea monótona.

Proposición

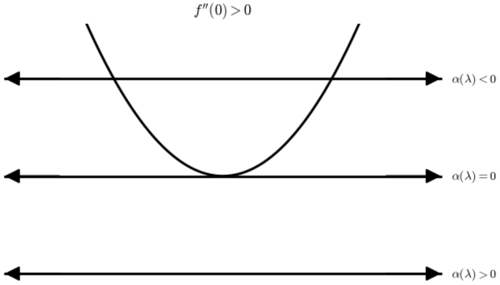
Supongamos que $f \in \mathcal{C}^1$ *tiene un sistema dinámico monótono,* $f(0) = 0$ *y* $f'(0) \neq 1$. *Consideramos la función* $\mathcal{C}^1$ $F(\lambda, x)$ *que cumple que* $F(0, x) = f(x)$. *Entonces existe un entorno de* $x = 0$ *en el que para valores pequeños de* λ $F(\lambda, x)$ *tiene un único punto fijo con la misma estabilidad que la del punto fijo* 0 *de* f.

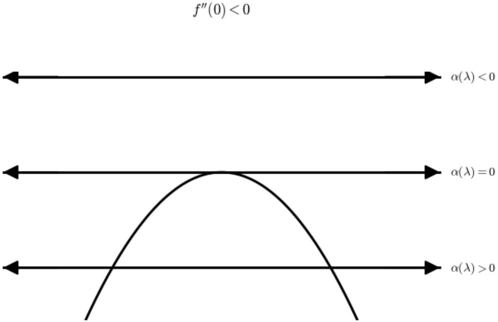
Puntos fijos degenerados de una función cuadrática

Proposición

Considerando una función f *que cumple* $f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) \neq 0$ *y una perturbación* $F \in \mathcal{C}^2$. *Sea* $\psi(\lambda)$ *tal que* $H(\lambda, \psi(\lambda)) = 0$ *donde* $H(\lambda, x) := \frac{\partial(F(\lambda,x)-x)}{\partial x}$ *y denotando* $\alpha(\lambda) = F(\lambda, \psi(\lambda)) - \psi(\lambda)$, *tenemos:*

1. *Si* $\alpha(\lambda) \cdot f''(0) < 0 \Rightarrow F$ *tiene dos puntos fijos para valores pequeños de* $\|\lambda\|$.
2. *Si* $\alpha(\lambda) \cdot f''(0) = 0 \Rightarrow F$ *tiene un punto fijo para valores pequeños de* $\|\lambda\|$.
3. *Si* $\alpha(\lambda) \cdot f''(0) > 0 \Rightarrow F$ *no tiene puntos fijos para valores pequeños de* $\|\lambda\|$.


$f''(0) > 0$
$\alpha(\lambda) < 0$
$\alpha(\lambda) = 0$
$\alpha(\lambda) > 0$


$f''(0) < 0$
$\alpha(\lambda) < 0$
$\alpha(\lambda) = 0$
$\alpha(\lambda) > 0$

Bifurcaciones de doble periodo

Diremos que una función $f(x)$ cumple las hipótesis H_1 cuando:

1. $f(0) = 0$ y $f'(0) = -1$.
2. $(f \circ f)'''(0) \neq 0$.

Y dada una perturbación de un parámetro $F_\lambda(x)$ de $f(x)$, diremos que cumple las hipótesis H_2 cuando para todo $\lambda \in \mathbb{R}$:

3. $F_\lambda(0) = 0$.
4. $\frac{dF_\lambda(0)}{dx} = -(1 + \lambda)$.

Bifurcaciones de doble periodo

Teorema

Sea $f(x) \in \mathcal{C}^3$ una función con un punto fijo en 0 que cumple las hipótesis H_1 y dada una perturbación $F_\lambda(x)$ de $f(x)$ que cumple las hipótesis H_2, denotando $g = f \circ f$. Existe un entorno de $(\lambda, x) = (0, 0)$ en el cual la existencia de órbitas 2-periódicas viene determinada por $g'''(0)$ y λ de la siguiente forma:

1. *Para los valores de λ tales que $\lambda g'''(0) < 0$ existe una única órbita $\{\hat{x}_\lambda, F(\lambda, \hat{x}_\lambda)\}$ tal que $F(F(\lambda, \hat{x}_\lambda)) = \hat{x}_\lambda$. Además, las órbitas son asintóticamente estables (inestables) si 0 es un punto fijo inestable (asintóticamente estable) para ese valor de λ.*
2. *Cuando $\lambda g'''(0) > 0$, no existen órbitas periódicas tal que $F(F(\lambda, \hat{x}_\lambda)) = \hat{x}_\lambda$.*

Sistema Caótico

Definición

Decimos que el sistema dinámico discreto asociado a una función $f : [\alpha, \beta] \mapsto [\alpha, \beta]$ *es caótico si:*

1. *Los puntos periódicos de* f *son densos en* $[\alpha, \beta]$.
2. f *es transitiva en* $[\alpha, \beta]$*; es decir, dado cualquier par de subintervalos* U_1 *y* U_2 *en* $[\alpha, \beta]$*, existe un punto* $x_0 \in U_1$ *y un* $n > 0$ *tal que* $f^n(x_0) \in U_2$.
3. f *tiene dependencia sensible en* $[\alpha, \beta]$*; es decir, existe una constante de sensibilidad* τ *tal que, para cualquier* $x_0 \in [\alpha, \beta]$ *y cualquier entorno de* x_0*,* U*, existe algún* $y_0 \in U$ *y* $n > 0$ *tal que:*
$$|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \tau$$

La ecuación logística

La ecuación logística es una familia de funciones de la forma:

$$f(\lambda, x) = \lambda x(1 - x) \quad \lambda > 1$$

Tiene dos puntos fijos, uno en 0 y otro en $\hat{x}_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}$.

Gracias a los teoremas anteriores, podemos deducir:

1. Para $1 < \lambda < 3$ el 0 es inestable y el $\hat{x}_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}$ es asintoticamente estable.
2. Para $\lambda = 3$ el 0 es inestable y el $\hat{x}_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}$ es estable.
3. Para $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$ ambos puntos fijos son inestables

Y computacionalmente, podemos calcular:

1. Para $3{,}449 < \lambda < 3{,}570$ los valores de λ dan comienzo a la aparición de unas dinámicas muy complejas.
2. Para $\lambda = 3{,}839$ hay una única órbita periódica asintoticamente estable de periodo 3.

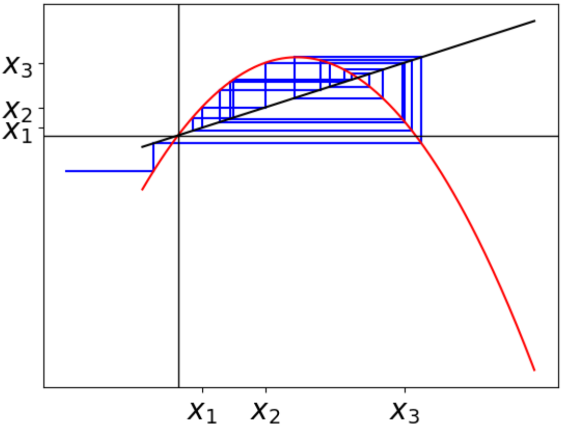


Figura: Podemos observar la presencia de caos en la órbita de la ecuación logística cuando $\lambda > 4$

Proposición

Sea Λ el conjunto de puntos en $[0,1]$ con órbitas que nunca salen de $[0,1]$, entonces, Λ es de la forma:

$$\Lambda = [0,1] - \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Donde $A_0 = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } f_\lambda(x) > 1\}$ y los A_n se definen de forma recursiva:

$$A_n = f_\lambda^{-1}(A_{n-1}) \cap [0,1] \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

Conjugaciones

Definición

Supongamos que I y J son intervalos y $f : I \to I$ y $g : J \to J$. Decimos que f y g son conjugadas si existe un homeomorfismo $h : I \to J$ tal que h satisface la ecuación de conjugación $h \circ f = g \circ h$.

Proposición

Supongamos que $f : I \to I$ y $g : J \to J$ son conjugadas vía h, donde tanto I como J son intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ de longitud finita. Si el sistema dinámico discreto de f es caótico en I, entonces el de g también es caótico en J.

Dinámica Simbólica

Consideremos una función $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
Dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, su órbita $x_{n+1} = f(x_n)$ y un recubrimiento de su imagen$\{I_0, I_1\}$.
Sea $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ la función que asigna a cada $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ una secuencia binaria, donde la coordenada n-ésima de $\psi(x)$ viene dada por:

$$\psi(x)_n = \begin{cases} 0, & \text{si } x_n \in I_0, \\ 1, & \text{si } x_n \in I_1. \end{cases}$$

Sea Σ el conjunto de todas las secuencias posibles de 0s y 1s. Definimos la distancia $d(s,t) : \Sigma \mapsto \Sigma$ simétrica, positiva y que satisface la desigualdad triangular.

$$d(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

La función de desplazamiento

1. σ tiene asociado un sistema dinámico discreto caótico.
2. σ es una conjugación discreta de f en Λ.
3. σ es completamente comprensible desde el punto de vista de los sistemas dinámicos.

Definición

Definimos la función de desplazamiento $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ *como:*

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 ...) = (s_1 s_2 s_3 ...)$$

Esta función es continua, el conjunto de puntos periódicos de σ *es denso en* Σ

Definimos la función itinerario como la que asociará una secuencia infinita $S(x_0) = (s_0 s_1 s_2 \ldots)$ de 0s y 1s al punto x_0 a través de la regla

$$s_j = k \text{ si y solo si } f_\lambda^j(x_0) \in I_k.$$

Teorema

Cuando $\lambda > 4$ la función itinerario de f_λ, $S : \Lambda \mapsto \Sigma$ es un homeomorfismo.

La ecuación logística

Teorema

La función $S : \Lambda \to \Sigma$ proporciona una conjugación entre f_λ y la función de desplazamiento σ.

Probamos que la función de desplazamiento σ es caótica:

1. densidad (sobre Σ): $S = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{(\overline{s_0, s_1, ..., s_n})$ tal que $s_i = 0, 1\}$ y la continuidad de σ
2. transitividad: $s^* = (0100011011000001...)$ y órbita densa $\Rightarrow$ transitiva
3. dependencia sensible: $s' = (s_0 s_1 ... s_n \hat{s}_{n+1} \hat{s}_{n+2} ...)$ donde $\hat{s}_j$ denota "no s_j"(es decir, si $s_j = 0$, entonces $\hat{s}_j = 1$, o si $s_j = 1$, entonces $\hat{s}_j = 0$) cumple $d(s, s') = 1/2^n$ y $(d(\sigma^{n+1}(s), \sigma^{n+1}(s')) = 2$

Teorema

El sistema dinámico discreto asociado a la función f_λ es caótico en Λ cuando $\lambda > 4$.