Teorema de Artin–Wedderburn

Pablo Brianese

18 de septiembre de 2021

Definición 1. *Un módulo (izquierdo) A sobre un anillo R es* simple *(o* irreducible*) si $RA \neq 0$ y A no tiene submódulos propios. Un anillo R es* simple *si $R^2 \neq 0$ y R no tiene ideales (bilaterales) propios.*

Definición 2. *Un módulo (izquierdo) A es* fiel *si su aniquilador (izquierdo) $\mathcal{A}(A)$ es 0. Un anillo R es* primitivo *(*izquierdo*) si existe un R-módulo simple y fiel.*

Los anillos primitivos derechos se definen análogamente. Sí existen anillos primitivos derechos que no son primitivos izquierdos. De aquí en más *primitivo* siempre significará *primitivo izquierdo*. Sin embargo, todos los resultados probados para anillos primitivos izquierdos son verdaderos, mutatis mutandis, para anillos primitivos derechos.

Definición 3. *Decimos que un módulo A satisface la* condición de la cadena ascendente (ACC) sobre submódulos *(o decimos que es* noetheriano*) si para toda cadena $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ de submódulos de A, existe un entero m tal que $B_i = B_m$ para todo $i \geq m$.*

Si un anillo R es pensado como módulo izquierdo (resp. derecho) sobre si mismo, entonces es facil ver que los submódulos de R son precisamente los ideales izquierdos (resp. derechos) de R. Consecuentemente, en este caso se acostumbra hablar de condiciones de cadena sobre ideales (izquierdos o derechos) en lugar de submódulos.

Definición 4. *Un anillo R es* noetheriano izquierdo *(resp.* derecho*) si R satisface la condición de la cadena ascendente sobre ss ideales izquierdos (resp. derechos). Se dice que R es* noetheriano *si R es noetheriano izquierdo y derecho a la vez.*

Un anillo R es artiniano izquierdo *(resp.* derecho*) si R satisface la condición de la cadena descendiente sobre sus ideales izquierdos (resp. derechos). Se dice que R es artiniano si R es artiniano izquierdo y derecho a la vez.*

Teorema 1 (de Artin–Wedderburn)**.** *Las siguientes condiciones sobre un anillo artiniano izquierdo R son equivalentes.*

1. *R es simple;*
2. *R es isomorfo al anillo de endomorfismos de un espacio vectorial nonulo sobre un anillo de división D;*
3. *para algún entero positivo n, R es isomorfo al anillo formado por las matrices $n \times n$ sobre un anillo de división.*