

# Teorema de Artin–Wedderburn

Pablo Brianese

19 de septiembre de 2021

**Definición 1.** Un módulo (izquierdo)  $A$  sobre un anillo  $R$  es simple (o irreducible) si  $RA \neq 0$  y  $A$  no tiene submódulos propios. Un anillo  $R$  es simple si  $R^2 \neq 0$  y  $R$  no tiene ideales (bilaterales) propios.

**Definición 2.** Un módulo (izquierdo)  $A$  es fiel si su aniquilador (izquierdo)  $\mathcal{A}(A)$  es  $0$ . Un anillo  $R$  es primitivo (izquierdo) si existe un  $R$ -módulo simple y fiel.

Los anillos primitivos derechos se definen análogamente. Sí existen anillos primitivos derechos que no son primitivos izquierdos. De aquí en más *primitivo* siempre significará *primitivo izquierdo*. Sin embargo, todos los resultados probados para anillos primitivos izquierdos son verdaderos, mutatis mutandis, para anillos primitivos derechos.

**Teorema 1** (de Densidad de Jacobson). Sea  $R$  un anillo primitivo y  $A$  un  $R$ -módulo simple y fiel. Considerar  $A$  como espacio vectorial sobre el anillo de división  $\text{Hom}_R(A, A) = D$ . Entonces  $R$  es isomorfo a un anillo denso de endomorfismos de  $D$ -espacio vectorial  $A$ .

**Definición 3.** Decimos que un módulo  $A$  satisface la condición de la cadena ascendente (ACC) sobre submódulos (o decimos que es noetheriano) si para toda cadena  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$  de submódulos de  $A$ , existe un entero  $m$  tal que  $B_i = B_m$  para todo  $i \geq m$ .

Si un anillo  $R$  es pensado como módulo izquierdo (resp. derecho) sobre sí mismo, entonces es fácil ver que los submódulos de  $R$  son precisamente los ideales izquierdos (resp. derechos) de  $R$ . Consecuentemente, en este caso se acostumbra hablar de condiciones de cadena sobre ideales (izquierdos o derechos) en lugar de submódulos.

**Definición 4.** Un anillo  $R$  es noetheriano izquierdo (resp. derecho) si  $R$  satisface la condición de la cadena ascendente sobre sus ideales izquierdos (resp. derechos). Se dice que  $R$  es noetheriano si  $R$  es noetheriano izquierdo y derecho a la vez.

Un anillo  $R$  es artinian izquierdo (resp. derecho) si  $R$  satisface la condición de la cadena descendente sobre sus ideales izquierdos (resp. derechos). Se dice que  $R$  es artinian si  $R$  es artinian izquierdo y derecho a la vez.

**Teorema 2** (de Artin–Wedderburn). Las siguientes condiciones sobre un anillo artinian izquierdo  $R$  son equivalentes.

1.  $R$  es simple;
2.  $R$  es primitivo;
3.  $R$  es isomorfo al anillo de endomorfismos de un espacio vectorial no nulo sobre un anillo de división  $D$ ;
4. para algún entero positivo  $n$ ,  $R$  es isomorfo al anillo formado por las matrices  $n \times n$  sobre un anillo de división.

*Demostración.*  $1 \Rightarrow 2$ . Primero observamos que  $I = \{r \in R \mid Rr = 0\}$  es un ideal de  $R$ , con la propiedad  $IR = 0$ . Pero  $R$  es simple: no tiene ideales propios, por lo cual  $I = R$  o  $I = 0$ ; y  $RR \neq 0$ , por lo cual  $I = 0$ .

Consideremos el conjunto  $\mathcal{S}$  formado por todos los ideales izquierdos no nulos de  $R$ . Dado que  $R$  es artiniiano izquierdo, satisface la condición de la cadena descendiente sobre ideales izquierdos. En particular, para toda sucesión  $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  en  $\mathcal{S}$  con  $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$ , existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $S_m = S_i$  para todo  $i \geq m$ . El Lema de Zorn permite deducir de esto la existencia de un elemento minimal  $J \in \mathcal{S}$ , tal que  $J \supseteq J' \rightarrow J = J'$  para todo  $J' \in \mathcal{S}$ . Esta minimalidad hace que  $J$  no tenga  $R$ -submódulos propios (un  $R$ -submódulo de  $J$  es un ideal izquierdo de  $R$  contenido en  $J$ ).

Afirmamos que el aniquilador izquierdo  $\mathcal{A}(J)$  de  $J$  en  $R$  es cero. De otro modo  $\mathcal{A}(J) = R$  por simplicidad y  $Ru = 0$  para cada  $u \in J$  no nulo. Consecuentemente, cada uno de estos  $u$  no nulos pertenece a  $I = 0$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $\mathcal{A}(J) = 0$  y  $RJ \neq 0$ . En conclusión,  $J$  es un  $R$ -módulo simple y fiel, y  $R$  es primitivo.

$2 \Rightarrow 3$  Por el Teorema de Densidad de Jacobson ??,  $R$  es isomorfo a un anillo denso  $T$  compuesto por endomorfismos de un espacio vectorial  $V$  sobre un anillo de división  $D$ . Porque  $R$  es artiniiano izquierdo,  $R \simeq T = \text{Hom}_D(V, V)$  por el teorema ??.

$3 \Leftrightarrow 4$  Teorema ??

$4 \Leftrightarrow 1$  Ejercicio ??

□