

Teorema de Artin–Wedderburn

Pablo Brianese

20 de septiembre de 2021

Definición 1. Un módulo (izquierdo) A sobre un anillo R es simple (o irreducible) si $RA \neq 0$ y A no tiene submódulos propios. Un anillo R es simple si $R^2 \neq 0$ y R no tiene ideales (bilaterales) propios.

Definición 2. Un módulo (izquierdo) A es fiel si su aniquilador (izquierdo) $\mathcal{A}(A)$ es 0. Un anillo R es primitivo (izquierdo) si existe un R -módulo simple y fiel.

Los anillos primitivos derechos se definen análogamente. Sí existen anillos primitivos derechos que no son primitivos izquierdos. De aquí en más *primitivo* siempre significará *primitivo izquierdo*. Sin embargo, todos los resultados probados para anillos primitivos izquierdos son verdaderos, mutatis mutandis, para anillos primitivos derechos.

Definición 3. Sea V un espacio vectorial izquierdo sobre un anillo de división D . Un subanillo R del anillo de endomorfismos $\text{Hom}_D(V, V)$ es un anillo denso de endomorfismos de V (o un subanillo denso de $\text{Hom}_D(V, V)$) si para todo entero positivo n , cada subconjunto linealmente independiente $\{u_1, \dots, u_n\}$ de V y cada subconjunto arbitrario $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V , existe $\theta \in R$ tal que $\theta(u_i) = v_i$ ($\forall i \in \{1, \dots, n\}$).

Teorema 1 (de Densidad de Jacobson). Sea R un anillo primitivo y A un R -módulo simple y fiel. Considerar A como espacio vectorial sobre el anillo de división $\text{Hom}_R(A, A) = D$. Entonces R es isomorfo a un anillo denso de endomorfismos de D -espacio vectorial A .

Demostración. Para cada $r \in R$ la aplicación $\alpha_r : A \rightarrow A$ dada por $\alpha_r(a) = ra$ es fácilmente identificada como un D -endomorfismo de A : esto es, $\alpha_r \in \text{Hom}_D(A, A)$. Además para todo par $r, s \in R$ se verifican $\alpha_{(r+s)} = \alpha_r + \alpha_s$ y $\alpha_{rs} = \alpha_r \alpha_s$. Consecuentemente la aplicación $\alpha : R \rightarrow \text{Hom}_D(A, A)$ definida por $\alpha(r) = \alpha_r$ es un homomorfismo de anillos bien definido. Dado que A es un R -módulo fiel, $\alpha_r = 0$ si y solo si $r \in \mathcal{A}(A) = 0$. De aquí que α es un monomorfismo, y R es isomorfo al subanillo $\text{Im } \alpha$ de $\text{Hom}_D(A, A)$.

Para completar la prueba debemos mostrar que $\text{Im } \alpha$ es un subanillo denso de $\text{Hom}_D(A, A)$. Dado un subconjunto D -linealmente independiente $\{u_1, \dots, u_n\}$ de A , y un subconjunto arbitrario $\{v_1, \dots, v_n\}$ de A , debemos encontrar $\alpha_r \in \text{Im } \alpha$ tal que $\alpha_r(u_i) = v_i$ ($\forall i \in \{1, \dots, n\}$). Para cada i sea V_i el D -subespacio de A generado por $\{u_j : j \neq i\}$. Dado que $\{u_1, \dots, u_n\}$ es linealmente independiente, $u_i \notin V_i$. Consecuentemente, por el lema ?? existe $r_i \in R$ tal que $r_i u_i \neq 0$ y $r_i V_i = 0$. Después aplicamos el lema ?? al subespacio nulo y a elemento no nulo $r_i u_i$: existe $s_i \in R$ tal que $s_i r_i u_i \neq 0$ y $s_i 0 = 0$. Siendo $s_i r_i u_i \neq 0$, el R submódulo $R(r_i u_i)$ de A es no nulo, luego $R(r_i u_i) = A$ por simplicidad. Por esto existe $t_i \in R$ tal que $t_i r_i u_i = v_i$. Sea $r = t_1 r_1 + t_2 r_2 + \dots + t_n r_n$. Recordar que $u_i \in V_j$ para $i \neq j$, luego $t_j r_j u_i \in t_j (r_j V_i) = t_j 0 = 0$. Consecuentemente $\alpha_r(u_i) = (t_1 r_1 + \dots + t_n r_n) u_i = r_i r_i u_i = v_i$. Por lo tanto $\text{Im } \alpha$ es un anillo denso de endomorfismos de D -espacio vectorial A . \square

Definición 4. Decimos que un módulo A satisface la condición de la cadena ascendente (ACC) sobre submódulos (o decimos que es noetheriano) si para

toda cadena $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ de submódulos de A , existe un entero m tal que $B_i = B_m$ para todo $i \geq m$.

Si un anillo R es pensado como módulo izquierdo (resp. derecho) sobre sí mismo, entonces es fácil ver que los submódulos de R son precisamente los ideales izquierdos (resp. derechos) de R . Consecuentemente, en este caso se acostumbra hablar de condiciones de cadena sobre ideales (izquierdos o derechos) en lugar de submódulos.

Definición 5. Un anillo R es noetheriano izquierdo (resp. derecho) si R satisface la condición de la cadena ascendente sobre sus ideales izquierdos (resp. derechos). Se dice que R es noetheriano si R es noetheriano izquierdo y derecho a la vez.

Un anillo R es artinian izquierdo (resp. derecho) si R satisface la condición de la cadena descendente sobre sus ideales izquierdos (resp. derechos). Se dice que R es artinian si R es artinian izquierdo y derecho a la vez.

Teorema 2 (de Artin–Wedderburn). Las siguientes condiciones sobre un anillo artinian izquierdo R son equivalentes.

1. R es simple;
2. R es primitivo;
3. R es isomorfo al anillo de endomorfismos de un espacio vectorial no nulo sobre un anillo de división D ;
4. para algún entero positivo n , R es isomorfo al anillo formado por las matrices $n \times n$ sobre un anillo de división.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Primero observamos que $I = \{r \in R \mid Rr = 0\}$ es un ideal de R , con la propiedad $IR = 0$. Pero R es simple: no tiene ideales propios, por lo cual $I = R$ o $I = 0$; y $RR \neq 0$, por lo cual $I = 0$.

Consideremos el conjunto \mathcal{S} formado por todos los ideales izquierdos no nulos de R . Dado que R es artinian izquierdo, satisface la condición de la cadena descendente sobre ideales izquierdos. En particular, para toda sucesión $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ en \mathcal{S} con $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $S_m = S_i$ para todo $i \geq m$. El Lema de Zorn permite deducir de esto la existencia de un elemento minimal $J \in \mathcal{S}$, tal que $J \supseteq J' \rightarrow J = J'$ para todo $J' \in \mathcal{S}$. Esta minimalidad hace que J no tenga R -submódulos propios (un R -submódulo de J es un ideal izquierdo de R contenido en J).

Afirmamos que el aniquilador izquierdo $\mathcal{A}(J)$ de J en R es cero. De otro modo $\mathcal{A}(J) = R$ por simplicidad y $Ru = 0$ para cada $u \in J$ no nulo. Consecuentemente, cada uno de estos u no nulos pertenece a $I = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{A}(J) = 0$ y $RJ \neq 0$. En conclusión, J es un R -módulo simple y fiel, y R es primitivo.

$2 \Rightarrow 3$ Por el Teorema de Densidad de Jacobson ??, R es isomorfo a un anillo denso T compuesto por endomorfismos de un espacio vectorial V sobre

un anillo de división D . Porque R es artiniiano izquierdo, $R \simeq T = \text{Hom}_D(V, V)$ por el teorema ??.

3 \Leftrightarrow 4 Teorema ??

4 \Leftrightarrow 1 Ejercicio ??

□