Teorema de Artin–Wedderburn

Pablo Brianese

11 de octubre de 2021

Teorema 1 (Lema de Zorn)**.** *Si A es un conjunto parcialmente ordenado no-vacío tal que toda cadena en A tiene una cota superior en A, entonces A contiene un elemento maximal.*

Teorema 2. *Si R es un anillo y B es un submódulo de un R-módulo A, entonces existe una correspondencia uno-a-uno entre el conjunto de los submódulos de A que contienen a B y el conjunto de todos los submódulos de A/B, dada por $C \mapsto C/B$. Por tanto todo submódulo de A/B es de la forma C/B, donde C es un submódulo de A que contiene a B.*

Teorema 3. *Sea R un anillo con identidad. Las siguientes condiciones sobre un R-módulo unitario F son equivalentes:*

1. *F tiene una base novacía;*
2. *F es la suma directa (interna) de una famile de R-módulos cíclicos, cada uno de los cuales es isomorfo (como R-módulo izquierdo) a R;*
3. *F es isomorfo (como R-módulo) a una suma directa de copias del R-módulo izquierdo R;*
4. *existe un conjunto novacío X y una función $\imath : X \to F$ con la siguiente propiedad: dado un R-módulo unitario A y una función $f : X \to A$, existe un único homomorfismo de R-módulos $\bar{f} : F \to A$ tal que $\bar{f}\imath = f$. En otras palabras, F es un objeto libre en la categoría de R-módulos unitarios.*

Un módulo unitario F sobre un anillo R con identidad, que satisface las condiciones del teorema, recibe el nombre de *R-módulo libre* sobre el conjunto X. La cuarta propiedad hace de F un objeto libre en la categoría formada por los

Teorema 4. *Todo espacio vectorial V sobre un anillo de división D tiene una base y es por tanto un D-módulo libre. Con mayor generalidad, cada subconjunto linealmente independiente de V está contenido en una base de V.*

Teorema 5. *Sean A y B ambos R-módulos.*

1. *el conjunto $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ formado por los homomorfismos de R-módulos $A \to B$ es un grupo abeliano con $f + g : A \to B$ dada por $a \mapsto f(a) + g(a)$. El elemento identidad es la aplicación nula.*
2. $\mathrm{Hom}_R(A, A)$ *es un anillo con identidad, donde la multiplicación es la composición de funciones.* $\mathrm{Hom}_R(A, A)$ *es el* anillo de endomorfismos *de A.*
3. *A es un $\mathrm{Hom}_R(A, A)$-módulo izquierdo con $fa = f(a)$ $(\forall a \in A)$ $(\forall f \in \mathrm{Hom}_R(A, A))$.*

Teorema 6. *Sea R un anillo con identidad y E un R-módulo izquierdo libre con una base finita de n elementos. Entonces existe un isomorfismo de anillos*

$$\mathrm{Hom}_R(E, E) \simeq \mathrm{Mat}_n(R^{\mathrm{op}}) \tag{1}$$

En particular, este isomorfismo existe para todo espacio vectorial E sobre un anillo de división R con dimensión n, en cuyo caso R^{op} también es un anillo de división.

Observación 1. *Cuando R es conmutativo $R = R^{\mathrm{op}}$. La fórmula del teorema resulta* $\mathrm{Hom}_R(E, E) \simeq \mathrm{Mat}_n R$.

Proposición 1. *Sea R un anillo con identidad, y S el anillo formado por todas las matrices $n \times n$ sobre R. Dentro de S podemos encontrar las matrices E_{rs}, donde $r, s \in \{1, \dots, n\}$, y E_{rs} tiene 1_R como entrada (r, s) y 0 en as demás posiciones. Para toda matriz $A = (a_{ij})$ en S*

$$E_{pr} A E_{sq} = a_{rs} E_{pq} \tag{2}$$

Demostración. Es un cálculo directo. □

Proposición 2. *Si D es un anillo de división y $R = \mathrm{Mat}_n D$. Entonces, para toda matriz $A \in R$, RA es un ideal izquierdo de R y AR es un ideal derecho de R.*

Demostración. No requiere mucho razonamiento, es un cálculo directo. □

Teorema 7. *Si D es un anillo de división y $R = \mathrm{Mat}_n D$, entonces el ideal $RE_{j_0 j_0}$ está formado por todas las matrices $A \in R$ tales que $\mathrm{Col}_j A = 0$ $(\forall j \neq j_0)$.*

Demostración. Fijemos $j_0 \in \{1, \dots, n\}$, y escribamos $E = E_{j_0 j_0}$, $I = RE$.

Afirmamos que $I' = \{A \in R : \mathrm{Col}_j A = 0\,(\forall j \neq j_0)\}$ es igual a I. Lo demostraremos usando que para toda matriz $a = (a_{ij})_{ij}$ en R

$$aE_{j_0 j_0} = I_n a E_{j_0 j_0} = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} a E_{j_0 j_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i j_0} E_{i j_0} \tag{3}$$

Si $A \in I$, entonces existe $a \in R$ con $A = aE$. Luego $A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij_0} E_{ij_0}$ pertenece a I'. Recíprocamente, si $A \in I'$, entonces $A = (A_{ij})_{ij}$ puede escribirse como $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} E_{ij} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij_0} E_{ij_0} = AE_{j_0 j_0}$. □

Teorema 8. *Sean D un anillo de división y $R = \mathrm{Mat}_n D$. Entonces son simples los R-submódulos izquierdos de R*

$$RE_{jj} \qquad\qquad (j \in \{1, \dots, n\}) \tag{4}$$

Demostración. Fijemos $j_0 \in \{1, \dots, n\}$, y escribamos $E = E_{j_0 j_0}$, $I = RE$.

Afirmamos que I es minimal. Supongamos que J es un submódulo nonulo de I. Entonces existe $a \in J \setminus 0$. Porque $a \in I$ se sigue $a = \sum_{i=1}^{n} a_{ij_0} E_{ij_0}$. $a \neq 0$ implica que $a_{i_0 j_0} \neq 0$ para un $i_0 \in \{1, \dots, n\}$. Porque D es un anillo de división, existe una matriz elemental de transformación M, que actúa sobre a multiplicando (por izquierda) su fila i_0 por el elemento $a_{i_0 j_0}^{-1} \in D$.

Entonces $Ma = 1_D E_{i_0 j_0} + \sum_{i \neq i_0} a_{ij_0} E_{ij_0}$. Luego, existen matrices elementales de transformación A_i ($i \in \{1, \ldots, n\} \setminus i_0$), que actúan sobre a sumando a la fila i-ésima el producto (por izquierda) de $-a_{ij_0}$ con la fila i_0-ésima. Entonces $A_1 \cdots A_n Ma = 1_D E_{i_0 j_0}$ (donde definimos $A_{i_0} = I_n$ para mejorar la notación). Finalmente, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe una matriz elemental de transformación P_i que actúa sobre a permutando las filas i e i_0. De ese modo $P_i A_1 \cdots A_n Ma = 1_D E_{ij_0}$. Por lo tanto $1_D E_{ij_0} \in J$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Eso implica que $I = \sum_{i=1}^n DE_{ij_0} \subseteq J$. En conclusión $J = I$. $\square$

Argumentos análogos demuestran que

Teorema 9. *Si D es un anillo de división y $R = \mathrm{Mat}_n D$, entonces el ideal $E_{i_0 i_0} R$ está formado por todas las matrices $A \in R$ tales que* $\mathrm{Fila}_i A = 0$ $(\forall i \neq i_0)$.

Demostración. Fijemos $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, y escribamos $E = E_{i_0 i_0}$, $I = ER$.

Afirmamos que $I' = \{A \in R : \mathrm{Fila}_i A = 0\, (\forall i \neq i_0)\}$ es igual a I. Lo demostraremos usando que para toda matriz $a = (a_{ij})_{ij}$ en R

$$E_{i_0 i_0} a = E_{i_0 i_0} a I_n = \sum_{j=1}^{n} E_{i_0 i_0} a E_{jj} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} E_{i_0 j} \tag{5}$$

Si $A \in I$ entonces existe $a \in R$ con $A = Ea$. Luego $A = \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} E_{i_0 j}$ pertenece a I'. Recíprocamente, si $A \in I'$ entonces $A = (A_{ij})_{ij}$ puede escribirse como $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} E_{ij} = \sum_{j=1}^n A_{i_0 j} E_{i_0 j} = E_{i_0 i_0} A$. $\square$

Teorema 10. *Sean D un anillo de división y $R = \mathrm{Mat}_n D$. Entonces son simples los R-submódulos derechos de R*

$$E_{ii} R \qquad\qquad (i \in \{1, \ldots, n\}) \tag{6}$$

Demostración. Fijemos $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, y escribamos $E = E_{i_0 i_0}$, $I = ER$.

Afirmamos que I es minimal. Supongamos que J es un submódulo nonulo de I. Entonces existe $a \in J \setminus 0$. Porque $a \in I$ se sigue $a = \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} E_{i_0 j}$. $a \neq 0$ implica que $a_{i_0 j_0} \neq 0$ para un $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Porque D es un anillo de división, existe una matriz elemental de transformación M, que actúa sobre a multiplicando (por derecha) su columna j_0 por el elemento $a_{i_0 j_0}^{-1} \in D$. Entonces $aM = E_{i_0 j_0} 1_D + \sum_{j \neq j_0} a_{i_0 j} E_{i_0 j}$. Luego, existen matrices elementales de transformación A_j ($j \in \{1, \ldots, n\} \setminus j_0$), que actúan sobre a sumando a la columna j-ésima el producto (por derecha) de $-a_{i_0 j}$ con la columna j_0-ésima. Entonces $aMA_1 \cdots A_n = E_{i_0 j_0} 1_D$ (donde definimos $A_{j_0} = I_n$ para mejorar la notación). Finalmente, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, existe una matriz elemental de transformación P_j que actúa sobre a permutando las columnas j y j_0. De ese modo $aMA_1 \cdots A_n P_j = E_{i_0 j} 1_D$. Por lo tanto $E_{i_0 j} 1_D \in J$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Eso implica que $I = \sum_{j=1}^n E_{i_0 j} D \subseteq J$. En conclusión $J = I$. $\square$

Teorema 11. *Sea $M_0 = 0$ y para $i \in \{1, \ldots, n\}$ sea $M_i = R(E_{11} + \cdots + E_{ii})$. Afirmamos que cada M_i es un ideal izquierdo de R y que $M_i / M_{i-1} \simeq RE_{ii}$. Por eso $R = M_n \supseteq M_{n-1} \supseteq \cdots \supseteq M_1 \supseteq M_0 = 0$ es una serie de composicón de R-módulos izquierdos.*

Demostración. Notar que $M_i \subseteq RE_{11} + \cdots + RE_{ii}$. Luego $\mathrm{Col}_j A = 0$ $(\forall j \in \{i+1, \ldots, n\})$ para toda $A \in M_i$.

Notar que si $A \in M_i$ con $A = r(E_{11} + \cdots + E_{ii})$ para un $r \in R$, entonces $AE_{ii} = rE_{ii}$. En efecto

$$\begin{aligned}
AE_{ii} &= r(E_{11} + \cdots + E_{ii})E_{ii} && (7)\\
&= r(E_{11}E_{ii} + \cdots + E_{i-1,i-1}E_{ii} + E_{ii}^2) && (8)\\
&= r(0 + \cdots + 0 + E_{ii}) && (9)\\
&= rE_{ii} && (10)
\end{aligned}$$

Por este motivo $A + M_{i-1} = AE_{ii} + M_{i-1}$. Calculamos

$$\begin{aligned}
A + M_{i-1} &= r(E_{11} + \cdots + E_{ii}) + M_{i-1} && (11)\\
&= r(E_{11} + \cdots + E_{i-1,i-1}) + rE_{ii} + M_{i-1} && (12)\\
&= rE_{ii} + M_{i-1} && (13)\\
&= AE_{ii} + M_{i-1} && (14)
\end{aligned}$$

Supongamos que $A + M_{i-1} = B + M_{i-1}$. Entonces $AE_{ii} + M_{i-1} = BE_{ii} + M_{i-1}$. Escribamos $C = (A - B)E_{ii}$. Por un lado $C \in M_{i-1}$ y por el otro $C \in RE_{ii}$. El primer dato implica $\mathrm{Col}_j C = 0$ para $j \in \{i, \ldots, n\}$. El segundo dato implica $\mathrm{Col}_j C = 0$ para $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus i$. Luego $C = 0$. Es decir $AE_{ii} = BE_{ii}$.

Esto nos permite definir una función $\phi : M_i/M_{i-1} \to RE_{ii}$ dada por $A + M_{i-1} \mapsto AE_{ii}$. Así definida, es un homomorfismo de R-módulos.

Es además un monomorfismo. Si $\phi(A + M_{i-1}) = 0$ entonces $AE_{ii} = 0$ y $\mathrm{Col}_i A = 0$. Además, $A \in M_i$ implica $\mathrm{Col}_j A = 0$ $(\forall j > i)$. Luego $\mathrm{Col}_j A = 0$ $(\forall j \in \{i, \ldots, n\})$, y $A \in M_{i-1}$. Entonces $A + M_{i-1} = 0 + M_{i-1}$.

También es un epimorfismo. Dado $AE_{ii} \in RE_{ii}$, tenemos $AE_{ii} \in M_i$. Calculamos $\phi(AE_{ii} + M_{i-1}) = (AE_{ii})E_{ii} = AE_{ii}^2 = AE_{ii}$. Por lo tanto $AE_{ii} \in \mathrm{Im}\,\phi$.

Concluímos que $\phi : M_i/M_{i-1} \to RE_{ii}$ es un isomorfismo. $\square$

Teorema 12. *Sea $M_0 = 0$ y para $i \in \{1, \ldots, n\}$ sea $M_i = (E_{11} + \cdots + E_{ii})R$. Afirmamos que cada M_i es un ideal derecho de R y que $M_i/M_{i-1} \simeq E_{ii}R$. Por eso $R = M_n \supseteq M_{n-1} \supseteq \cdots \supseteq M_1 \supseteq M_0 = 0$ es una serie de composición de R-módulos derechos.*

Demostración. Notar que $M_{i_0} \subseteq E_{11}R + \cdots + E_{i_0i_0}R$. Luego $\mathrm{Fila}_i A = 0$ $(\forall i \in \{i_0+1, \ldots, n\})$ para toda $A \in M_{i_0}$.

Notar que se $A \in M_{i_0}$ con $A = (E_{11} + \cdots + E_{i_0i_0})r$ para un $r \in R$, entonces $E_{i_0i_0}A = E_{i_0i_0}r$. En efecto

$$\begin{aligned}
E_{i_0i_0}A &= E_{i_0i_0}(E_{11} + \cdots + E_{i_0i_0})r && (15)\\
&= (E_{i_0i_0}E_{11} + \cdots + E_{i_0i_0}E_{i_0-1,i_0-1} + E_{i_0i_0}^2)r && (16)\\
&= (0 + \cdots + 0 + E_{i_0i_0})r && (17)\\
&= E_{i_0i_0}r && (18)
\end{aligned}$$

Por este motivo $A + M_{i_0-1} = AE_{i_0i_0} + M_{i_0-1}$. Calculamos

$$A + M_{i_0-1} = (E_{11} + \cdots + E_{i_0i_0})r + M_{i_0-1} \tag{19}$$
$$= (E_{11} + \cdots + E_{i_0-1,i_0-1})r + E_{i_0i_0}r + M_{i_0-1} \tag{20}$$
$$= E_{i_0i_0}r + M_{i_0-1} \tag{21}$$
$$= E_{i_0i_0}A + M_{i_0-1} \tag{22}$$

Supongamos que $A + M_{i_0-1} = B + M_{i_0-1}$. Entonces $E_{i_0i_0}A + M_{i_0-1} = E_{i_0i_0}B + M_{i_0-1}$. Escribamos $C = E_{i_0i_0}(A - B)$. Por un lado $C \in M_{i_0-1}$ y por el otro $C \in E_{i_0i_0}R$. El primer dato implica $\text{Fila}_i C = 0$ para $i \in \{i_0, \ldots, n\}$. El segundo dato implica $\text{Fila}_i C = 0$ para $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus i_0$. Luego $C = 0$. Es decir $E_{i_0i_0}A = E_{i_0i_0}B$.

Esto nos permite definir una función $\phi : M_{i_0}/M_{i_0-1} \to E_{i_0i_0}R$ dada por $A + M_{i_0-1} \mapsto E_{i_0i_0}A$. Así definida, es un homomorfismo de R-módulos.

Es además un monomorfismo. Si $\phi(A + M_{i_0-1}) = 0$ entonces $E_{i_0i_0}A = 0$ y $\text{Fila}_{i_0}A = 0$. Además $A \in M_{i_0}$ implica $\text{Fila}_i A = 0$ ($\forall i \in \{i_0, \ldots, n\}$), y $A \in M_{i_0-1}$. Entonces $A + M_{i_0-1} = 0 + M_{i_0-1}$.

También es un epimorfismo. Dado $E_{i_0i_0}A \in E_{i_0i_0}R$, tenemos $E_{i_0i_0}A \in M_i$. Calculamos $\phi(E_{i_0i_0}A + M_{i_0-1}) = E_{i_0i_0}(E_{i_0i_0}A) = E_{i_0i_0}^2 A = E_{i_0i_0}A$. Por lo tanto $E_{i_0i_0}A \in \operatorname{Im}\phi$. Concluímos que $\phi : M_{i_0}/M_{i_0-1} \to E_{i_0i_0}R$ es un isomorfismo. □

Teorema 13. *Sea R un anillo con identidad y S el anillo formado por todas las matrices $n \times n$ sobre R. J es un ideal de S si y solo si J es el anillo formado por todas las matrices $n \times n$ sobre I para algún ideal I en R.*

Demostración. Sea J un ideal de S. Sea I el conjunto formado por todos los elementos de R que aparecen como entrada $(1,1)$ de alguna matriz en J. Si $aE \in J$ donde $a \in R$ y $E = E_{11} \in S$, entonces $a \in I$. La afirmación recíproca también es verdadera. Notar que si $a \in I$, entonces existe $A = (a_{ij})$ en J con $a_{11} = a$. Al ser J un ideal (bilátero), tenemos $EAE \in J$. Pero $EAE = aE$. Entonces $aE \in J$. Hemos probado que $a \in I$ si y solo si $aE \in J$.

Afirmamos que I es un ideal. En efecto, $0 \in J$ porque J es un ideal. Luego $0 \in I$ por definición de I. Por otra parte, si $a, b \in I$, entonces $aE, bE \in J$. Pero J es un ideal. Entonces $(a+b)E = aE + bE \in J$. Luego $a + b \in I$. Para finalizar consideramos $r \in R$ y $a \in I$. Entonces $rE \in S$ y $aE \in J$. Pero J es un ideal. Entonces

$$(ra)E = (ra)E^2 = (rE)(aE) \in J \tag{23}$$
$$(ar)E = (ar)E^2 = (aE)(rE) \in J \tag{24}$$

Luego $ra, ar \in I$.

Afirmamos que $M_n(I) = J$. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz en S. Comenzamos suponiendo $A \in J$. Consideremos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Porque J es un ideal, $a_{rs}E = E_{1r}AE_{s1} \in J$. Luego $a_{rs} \in I$. Porque i, j eran arbitrarios, se deduce $A \in M_n(I)$. Recíprocamente, suponemos que $A = (a_{ij}) \in M_n(I)$. Consideramos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Por hipótesis $a_{ij} \in I$. Luego $a_{ij}E \in J$. Porque J es un ideal, se deduce $E_{i1}(a_{ij}E)E_{1j} \in J$ mientras $E_{i1}(a_{ij}E)E_{1j} = a_{ij}E_{ij}$. Porque i, j eran arbitrarios, usando que J está cerrado bajo suma, se deduce $A = \sum_{ij} a_{ij}E_{ij} \in J$. $\square$

Teorema 14. *Sea S el anillo formado por todas las matrices sobre un anillo de división D.*

1. *S no tiene ideales propios (es decir, 0 es un ideal maximal).*
2. *S tiene divisores de cero. Consecuentemente,*
   a) *$S \simeq S/0$ no es un anillo de división y*
   b) *0 es un ideal primo a pesar de no satisfacer la condición $ab \in I \to a \in I$ o $b \in I$ $(\forall a, b \in S)$*

Demostración. 1. Si J es un ideal de S, entonces J es el anillo formado por todas las matrices $n \times n$ sobre I para algún ideal I en D. Pero D es un anillo de división, no tiene ideales propios. Luego $I = 0$ o $I = D$, concluyendo que $J = 0$ o $J = S$. $\square$

Demostración. 2 Para encontrar divisores de cero basta observar la fórmula $E_{r_1 s_1}E_{r_2 s_2} = \delta_{r_1 r_2}\delta_{s_1 s_2}E_{r_1 r_2}$. $\square$

Definición 1. *Un módulo (izquierdo) A sobre un anillo R es* simple *(o* irreducible*) si $RA \neq 0$ y A no tiene submódulos propios. Un anillo R es* simple *si $R^2 \neq 0$ y R no tiene ideales (bilaterales) propios.*

Proposición 3. *Todo módulo simple A es cíclico; de hecho, $A = Ra$ para todo $a \in A$ nonulo.*

Demostración. Ambos Ra (con $a \in A$ nonulo) y $B = \{c \in A : Rc = 0\}$ son submódulos de A, de aquí que por simplicidad cada uno de ellos sea igual a 0 o A. También por simplicidad $RA \neq 0$, esto implica $B \neq A$ y $B = 0$. Luego $a \notin B$ y $Ra \neq 0$. En conclusión $Ra = A$. $\square$

Teorema 15. *Sea B un subconjunto de un módulo izquierdo sobre un anillo R. Entonces $\mathcal{A}(B) = \{r \in R \mid rb = 0 (\forall b \in B)\}$ es un ideal izquierdo de R. Si B es un submódulo de A, entonces $\mathcal{A}(B)$ es un ideal.*

$\mathcal{A}(B)$ es el *aniquilador (izquierdo)* de B. El aniquilador derecho de un módulo derecho se define análogamente.

Definición 2. *Un módulo (izquierdo) A es* fiel *si su aniquilador (izquierdo) $\mathcal{A}(A)$ es 0. Un anillo R es* primitivo *(*izquierdo*) si existe un R-módulo simple y fiel.*

Los anillos primitivos derechos se definen análogamente. Sí existen anillos primitivos derechos que no son primitivos izquierdos. De aquí en más *primitivo* siempre significará *primitivo izquierdo*. Sin embargo, todos los resultados probados para anillos primitivos izquierdos son verdaderos, mutatis mutandis, para anillos primitivos derechos.

Definición 3. *Sea V un espacio vectorial izquierdo sobre un anillo de división D. Un subanillo R del anillo de endomorfismos* $\mathrm{Hom}_D(V,V)$ *es un* anillo denso de endomorfismos *de V (o un* subanillo denso *de* $\mathrm{Hom}_D(V,V)$*) si para todo entero positivo n, cada subconjunto linealmente independiente $\{u_1,\ldots,u_n\}$ de V y cada subconjunto arbitrario $\{v_1,\ldots,v_n\}$ de V, existe $\theta \in R$ tal que $\theta(u_i) = v_i$ ($\forall i \in \{1,\ldots,n\}$).*

Lema 1. *Sea A un módulo simple sobre un anillo R. Consideramos A como un espacio vectorial sobre el anillo de división $D = \mathrm{Hom}_R(A,A)$. Si V es un subespacio finito-dimensional del D-espacio vectorial A y $a \in A \setminus V$, entonces existe $r \in R$ tal que $ra \neq 0$ y $rV = 0$.*

Demostración. La prueba es por inducción sobre $n = \dim_D V$. Comenzamos por el caso base. Si $n = 0$, entonces $V = 0$ y $a \neq 0$. Porque A es simple, $a \neq 0$ implica $Ra = A$. Consecuentemente existe $r \in R$ tal que $ra = a \neq 0$ y $rV = r0 = 0$.

En el paso inductivo, supongamos $\dim_D V = n > 0$ y que el teorema es verdadero para dimensiones menores a n. Sea $\{u_1,\ldots,u_{n-1},u\}$ una D-base de V y sea W el subespacio $(n-1)$-dimensional generado por $\{u_1,\ldots,u_{n-1}\}$ (siendo $W = 0$ cuando $n = 1$). Entonces $V = W \oplus Du$ (suma directa de espacios vectoriales). Nuestra hipótesis inductiva tiene dos consecuencias importantes:

1. para todo $v \in A \setminus W$ existe $r \in R$ tal que $ru \neq 0$ y $rW = 0$;

2. para todo $v \in A$, si $rv = 0$ para todo $r \in R$ entonces $v \in W$.

La primera consecuencia implica que existe $r \in R$ tal que $ru \neq 0$ y $rW = 0$. Pero $rW = 0$ si y solo si $r \in \mathcal{A}(W)$, siendo $I = \mathcal{A}(W)$ un ideal izquierdo de R. Además $ru \in Iu \setminus 0$, siendo Iu un submódulo de A. Por simplicidad, este submódulo nonulo debe ser $Iu = A$.

Para terminar el argumento inductivo, debemos encontrar $r \in R$ tal que $ra \neq 0$ y $rV = 0$. Si no existe tal r, entonces podemos definir una aplicación $\theta : A \to A$ como sigue. Para $ru \in Iu = A$ definimos $\theta(ru) = ra \in A$. Afirmamos que θ está bien definida. Sean $r_1, r_2 \in I$ tales que $r_1 u = r_2 u$. Por hipótesis $(r_1 - r_2)a = 0$ o $(r_1 - r_2)V \neq 0$. Ahora bien, porque $r_1 - r_2 \in I = \mathcal{A}(W)$ tenemos $(r_1 - r_2)W = 0$; y porque $D = \mathrm{Hom}_D(A,A)$, para cada $d \in D$ tenemos $(r_1 - r_2)(d \cdot u) = (r_1 - r_2)d(u) = d((r_1 - r_2)u) = d(0) = 0$. Juntos, estos dos datos implican $(r_1 - r_2)V = (r_1 - r_2)(W \oplus Du) = 0$. Consecuentemente, por hipótesis $(r_1 - r_2)a = 0$. Por lo tanto $\theta(r_1 u) = r_1 a = r_2 a = \theta(r_2 u)$. Podemos mostrar que $\theta \in \mathrm{Hom}_D(A,A) = D$. Luego para cada $r \in I$, $0 = \theta(ru) - ra = r\theta(u) - ra = r(\theta(u) - a)$. De aquí que $\theta(u) - a \in W$, por la segunda consecuencia de la hipótesis inductiva. Consecuentemente $a = \theta u - (\theta u - a) \in Du + W = V$, lo cual contradice el hecho $a \notin V$. Por lo tanto, existe $r \in R$ tal que $ra \neq 0$ y $rV = 0$. $\square$

Teorema 16 (de Densidad de Jacobson)**.** *Sea R un anillo primitivo y A un R–módulo simple y fiel. Considerar A como espacio vectorial sobre el anillo de división* $\mathrm{Hom}_R(A,A) = D$*. Entonces R es isomorfo a un anillo denso de endomorfismos de D–espacio vectorial A.*

Demostración. Para cada $r \in R$ la aplicación $\alpha_r : A \to A$ dada por $\alpha_r(a) = ra$ es facilmente identificada como un D–endomorfismo de A: esto es, $\alpha_r \in \mathrm{Hom}_D(A, A)$. Además para todo par $r, s \in R$ se verifican $\alpha_{(r+s)} = \alpha_r + \alpha_s$ y $\alpha_{rs} = \alpha_r \alpha_s$. Consecuentemente la aplicación $\alpha : R \to \mathrm{Hom}_D(A, A)$ definida por $\alpha(r) = \alpha_r$ es un homomorfismo de anillos bien definido. Dado que A es un R–módulo fiel, $\alpha_r = 0$ si y solo si $r \in \mathcal{A}(A) = 0$. De aquí que α es un monomorfismo, y R es isomorfo al subanillo $\mathrm{Im}\,\alpha$ de $\mathrm{Hom}_D(A, A)$.

Para completar la prueba debemos mostrar que $\mathrm{Im}\,\alpha$ es un subanillo denso de $\mathrm{Hom}_D(A, A)$. Dado un subconjunto D–linealmente independiente $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de A, y un subconjunto arbitrario $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de A, debemos encontrar $\alpha_r \in \mathrm{Im}\,\alpha$ tal que $\alpha_r(u_i) = v_i$ $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})$. Para cada i sea V_i el D–subespacio de A generado por $\{u_j : j \neq i\}$. Dado que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es linealmente independiente, $u_i \notin V_i$. Consecuentemente, por el lema 1 existe $r_i \in R$ tal que $r_i u_i \neq 0$ y $r_i V_i = 0$. Después aplicamos el lema 1 al subespacio nulo y a elemento nonulo $r_i u_i$: existe $s_i \in R$ tal que $s_i r_i u_i \neq 0$ y $s_i 0 = 0$. Siendo $s_i r_i u_i \neq 0$, el R submódulo $R(r_i u_i)$ de A es nonulo, luego $R(r_i u_i) = A$ por simplicidad. Por esto existe $t_i \in R$ tal que $t_i r_i u_i = v_i$. Sea $r = t_1 r_1 + t_2 r_2 + \cdots + t_n r_n$. Recordar que $u_i \in V_j$ para $i \neq j$, luego $t_j r_j u_i \in t_j(r_j V_i) = t_j 0 = 0$. Consecuentemente $\alpha_r(u_i) = (t_1 r_1 + \cdots + t_n r_n) u_i = r_i r_i u_i = v_i$. Por lo tanto $\mathrm{Im}\,\alpha$ es un anillo denso de endomorfismos de D–espacio vectorial A. $\square$

Definición 4. *Decimos que un módulo A satisface la* condición de la cadena ascendente (ACC) sobre submódulos *(o decimos que es* noetheriano*) si para toda cadena $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ de submódulos de A, existe un entero m tal que $B_i = B_m$ para todo $i \geq m$.*

Si un anillo R es pensado como módulo izquierdo (resp. derecho) sobre si mismo, entonces es facil ver que los submódulos de R son precisamente los ideales izquierdos (resp. derechos) de R. Consecuentemente, en este caso se acostumbra hablar de condiciones de cadena sobre ideales (izquierdos o derechos) en lugar de submódulos.

Definición 5. *Un anillo R es* noetheriano izquierdo *(resp.* derecho*) si R satisface la condición de la cadena ascendente sobre ss ideales izquierdos (resp. derechos). Se dice que R es* noetheriano *si R es noetheriano izquierdo y derecho a la vez.*

Un anillo R es artiniano izquierdo *(resp.* derecho*) si R satisface la condición de la cadena descendiente sobre sus ideales izquierdos (resp. derechos). Se dice que R es artiniano si R es artiniano izquierdo y derecho a la vez.*

Definición 6. *Un módulo A satisface la* condición maximal *[resp.* minimal*]* sobre submódulos *si todo conjunto novacío de submódulos de A contiene un elemento maximal [resp. minimal] (con respecto al orden dado por la inclusión de conjuntos).*

Teorema 17. *Un módulo satisface la condición de la cadena ascendente [resp. descencendente] sobre submódulos si y solo si satisface la condición maximal [resp. minimal] sobre submódulos.*

Demostración. Supongamos que el módulo A satisface la condición minimal sobre submódulos y que $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ es una cadena de submódulos. Entonces el conjunto $\{A_i \mid i \geq 1\}$ tiene un elemento minimal, digamos A_n. Consecuentemente, para $i \geq n$ tenemos $A_n \supseteq A_i$ por hipótesis y $A_n \subseteq A_i$ por minimalidad, luego $A_i = A_n$ para todo $i \geq n$. Por lo tanto, A satisface la condición descendiente de la cadena.

Recíprocamente supongamos que A satisface la condición de la cadena descendente, y S es un conjunto novacío de submódulos de A. Entonces existe $B_0 \in S$. Si S no tiene elemento minimal, entonces para todo submódulo B en S existe al menos un submódulo B' en S tal que $B \supset B'$. Para cada B en S, elegimos uno de estos B' (Axioma de Elección). Esta elección define una función $f : S \to S$ mediante $B \mapsto B'$. Por el Teorema de la Recursión, existe una función $\phi : \mathbb{N} \to S$ tal que $\phi(0) = B_0$ y $\phi(n+1) = f(\phi(n))$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Por tanto si $B_n = \phi(n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, entonces $B_0 \supset B_1 \supset \cdots$ es una cadena descendiente que viola la condición descendiente de la cadena. Por lo tanto, S debe tener un elemento minimal. Concluímos que A satisface la condición minimal.

La prueba para las condiciones de la cadena ascendente y maximal es análoga. □

Teorema 18. *Sea R un anillo denso de endomorfismos de un espacio vectorial V sobre un anillo de división D. Entonces R es artiniano izquierdo [resp. derecho] si y solo si $\dim_D V$ es finita, en cuyo caso $R = \mathrm{Hom}_D(V, V)$.*

Demostración. Si R es artiniano izquierdo, y $\dim_D V$ es infinita, entonces existe un subconjunto de V linealmente independiente e infinito (numerable) $\{u_1, u_2, \ldots\}$. Por el Ejercicio 5 V es un $\mathrm{Hom}_D(V, V)$-módulo izquierdo y por tanto un R-módulo izquierdo (recordar que $R \subseteq \mathrm{Hom}_D(V, V)$). Para cada n sea I_n el aniquilador izquierdo en R del conjunto $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Por el Teorema 15 $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$ es una cadena descendente de ideales izquierdos de R. Sea w un elemento nonulo de V, no importa cual de ellos sea (podría ser u_1, por ejemplo). Dado que $\{u_1, \ldots, u_{n+1}\}$ es linealmente independiente (para cada n) y R es denso, existe $\theta \in R$ tal que $\theta u_i = 0$ $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})$ y $\theta u_{n+1} = w \neq 0$. Consecuentemente $\theta \in I_n$ pero $\theta \notin I_{n+1}$. Por lo tanto $I \supset I_2 \supset \cdots$ es una cadena estrictamente descencendente, su existencia lleva a una contradicción. Luego $\dim_D V$ es finita.

Recíprocamente, si $\dim_D V$ es finita, entonces V tiene una base finita $\{v_1, \ldots, v_m\}$. Si f es un elemento de $\mathrm{Hom}_D(V, V)$, entonces f está completamente determinado por su acción sobre $v_1, \ldots, v_m$ por los teoremas 3 y 4. Dado que R es denso, existe $\theta \in R$ tal que $\theta v_i = f v_i$ $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$. Luego $f = \theta \in R$. Por lo tanto $\mathrm{Hom}_D(V, V) = R$. Pero $\mathrm{Hom}_D(V, V)$ es artiniano por el Teorema 6 y el corolario VIII.1.12. □

Teorema 19 (de Densidad de Jacobson)**.** *Sea R un anillo primitivo y A un R-módulo simple y fiel. Considerar A como espacio vectorial sobre el anillo de división $\mathrm{Hom}_R(A, A) = D$. Entonces R es isomorfo a un anillo denso de endomorfismos del D-espacio vectorial A.*

Demostración. Para cada $r \in R$ la aplicación $\alpha_r : A \to A$ dada por $\alpha_r(a) = ra$ es facilmente identificada como un D-endomorfismo de A: esto es, $\alpha_r \in$

$\mathrm{Hom}_D(A,A)$. Además $\alpha_{(r+s)} = \alpha_r + \alpha_s$ y $\alpha_{rs} = \alpha_r\alpha_s$ para todo par $r, s \in R$. Consecuentemente la aplicación $\alpha : R \to \mathrm{Hom}_D(A,A)$ definida por $\alpha(r) = \alpha r$ es un homomorfismo de anillos bien definido. Dado que A es un R-módulo fiel, $\alpha_r = 0$ si y solo si $r \in \mathcal{A}(A) = 0$. De aquí que α es un monomorfismo, y R es isomorfo al subanillo $\mathrm{Im}\,\alpha$ de $\mathrm{Hom}_D(A,A)$.

Para completar la prueba debemos mostrar que $\mathrm{Im}\,\alpha$ es un subanillo denso de $\mathrm{Hom}_D(A,A)$. Sea $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ un subconjunto D-linealmente independiente de A; y sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ un subconjunto arbitrario de A. Debemos encontrar $\alpha_r \in \mathrm{Im}\,\alpha$ tal que $\alpha_r(u_i) = v_i$ ($\forall i \in \{1, \dots, n\}$). Para cada i sea V_i el D-subespacio de A generado por $\{u_j : j \neq i\}$. Dado que U es linealmente independiente, $u_i \notin V_i$. Consecuentemente, por el lema 1 existe $r_i \in R$ tal que $r_iu_i \neq 0$ y $r_iV_i = 0$. Después aplicamos el lema 1.11 al subespacio nulo y al elemento nonulo r_iu_i: existe $s_i \in R$ tal que $s_ir_iu_i \neq 0$ y $s_i0 = 0$. Siendo $s_ir_iu_i \neq 0$, el R-submódulo $R(r_iu_i)$ de A en nonulo, luego $R(r_iu_i) = A$ por simplicidad. Por esto existe $t_i \in R$ tal que $t_ir_iu_i = v_i$. Sea $r = t_1r_1 + t_2r_2 + \cdots + t_nr_n \in R$. Recordar que $u_i \in V_j$ para $i \neq j$, luego $t_jr_ju_i \in t_j(r_jV_i) = t_j0 = 0$. Consecuentemente $\alpha_r(u_i) = (t_1r_1 + \cdots + t_nr_n)u_i = t_ir_iu_i = v_i$. Por lo tanto $\mathrm{Im}\,\alpha$ es un anillo denso de endomorfismos del D-espacio vectorial A. $\square$

Definición 7. *Una* serie subnormal *de un grupo G es una cadena de subgrupos $G = G_0 \geq G_1 \geq \cdots \geq G_n = \langle e \rangle$ tal que G_{i+1} es normal en G_i para $1 \leq i \leq n$. Los* factores *de la serie son los grupos cociente G_i/G_{i+1}. La* longitud *de la serie es el número de inclusiones estrictas (alternativamente, el número de factores con orden mayor a 1). Una serie subnormal es una* serie de composición *si cada factor G_i/G_{i+1} es simple.*

Una *serie normal* para un módulo A es una cadena de submódulos: $A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n$. Los *factores* de la serie son los módulos cociente A_i/A_{i+1} $(0 \leq i < n)$. La *longitud* de la serie es el número de inclusiones propias (igual al número de factores notriviales). Uni *refinamiento propio* es un refinamiento con longitud mayor a la serie original. Dos series normales son *equivalentes* si existe una correspondencia uno-a-uno entre los factores notriviales tal que factores correspondientes sean isomorfos. De tal modo, series equivalentes tienen igual longitud. Una *serie de composición* para A es una serie normal $A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n = 0$ tal que cada factor A_k/A_{k+1} $(0 \leq k < n)$ es un módulo nonulo sin submódulos propios. Si R es unitario, decimos que un módulo unitario sin submódulos propios es *simple*.

La Teoría de Series Normales y Subnormales para grupos puede trasladarse al caso de los módulos. Como consecuencia de esta tenemos el siguiente teorema.

Teorema 20. *Cualesquiera dos series normales de un módulo A tienen refinamientos que son equivalentes. Caulesquiera dos series de composición de A son equivalentes.*

Teorema 21. *Un módulo nonulo A tiene una serie de composición is y solo si A satisface tanto la condición de la cadena descencendente como la ascendente.*

Demostración. Supongamos que A tiene una serie de composición S de longitud n. Si alguna de las condiciones de la cadena falla, podemos encontrar submódulos $A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1}$ que forman una serie normal T de longitud $n+1$. Por el teorema 20, S y T tienen refinamientos equivalentes. Esto es una contradicción porque series equivalentes tienen igual longitud. Todo refinamiento de la series de composición S tiene longitud n al igual que S, pero todo refinamiento de T tiene longitud al menos $n+1$. Por lo tanto A satisface ambas condiciones de la cadena.

Recíprocamente, suponemos que B es un submódulo nonulo de A, definimos $S(B)$ como el conjunto formado por todos los submódulos C de B con $C \neq B$. De tal modo que si B no tiene submódulos propios, entonces $S(B) = \{0\}$. También definimos $S(0) = \{0\}$. Para cada B, el conjunto $S(B)$ tiene un elemento maximal B' (por el Teorema 17). Sea S el conjunto de todos los submódulos de A. Definimos una aplicación $f : S \to S$ mediante $f(B) = B'$ (usando el Axioma de Elección). Por el Teorema de la Recursión, existe una función $\phi : \mathbb{N} \to S$ tal que $\phi(0) = a$ y $\phi(n+1) = f(\phi(n))$. Si $A_i = \phi(i)$, entonces $A \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ es una cadena descendiente por construcción. Luego para un n, $A_i = A_n$ $(\forall i \geq n)$. Dado que $A_{n+1} = f(A_n)$, la definición de f muestra que $A_{n+1} = A_n$ solo si $A_n = 0 = A_{n+1}$. Sea m el menor entero tal que $A_m = 0$. Entonces $m \leq n$ y $A_k \neq 0$ $(\forall k < m)$. Más aún, para cada $k < m$, A_{k+1} es un submódulo maximal de A_k tal que $A_k \supseteq A_{k+1}$. Consecuentemente, cada A_k/A_{k+1} es nonulo y no tiene submódulos propios por el 2. Por lo tanto $A \supseteq A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_m = 0$ es una serie de composición para A. □

Corolario 1. *Si D es un anillo de división, entonces el anillo $\mathrm{Mat}_n D$ formado por todas las matrices $n \times n$ sobre D es a la vez artiniano y noetheriano.*

Demostración. Es una consecuencia del teorema 21. En efecto, usando tal resultado, el teorema 11 implica que $\mathrm{Mat}_n D$ es artiniano y noetheriano izquierdo; y el teorema 12 implica que $\mathrm{Mat}_n D$ es artiniano y noetheriano derecho. □

Teorema 22 (de Artin–Wedderburn)**.** *Las siguientes condiciones sobre un anillo artiniano izquierdo R son equivalentes.*

1. *R es simple;*
2. *R es primitivo;*
3. *R es isomorfo al anillo de endomorfismos de un espacio vectorial nonulo sobre un anillo de división D;*
4. *para algún entero positivo n, R es isomorfo al anillo formado por las matrices $n \times n$ sobre un anillo de división.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Primero observamos que $I = \{r \in R \mid Rr = 0\}$ es un ideal de R, con la propiedad $IR = 0$. Pero R es simple: no tiene ideales propios, por lo cual $I = R$ o $I = 0$; y $RR \neq 0$, por lo cual $I = 0$.

Consideremos el conjunto $\mathcal{S}$ formado por todos los ideales izquierdos nonulos de R. Dado que R es artiniano izquierdo, satisface la condición de la cadena descendiente sobre ideales izquierdos. En particular, para toda sucesión $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}$ con $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $S_m = S_i$ para todo $i \geq m$. El Lema de Zorn permite deducir de esto la existencia de un elemento minimal $J \in \mathcal{S}$, tal que $J \supseteq J' \to J = J'$ para todo $J' \in \mathcal{S}$. Esta minimalidad hace que J no tenga R–submódulos propios (un R–submódulo de J es un ideal izquierdo de R contenido en J).

Afirmamos que el aniquilador izquierdo $\mathcal{A}(J)$ de J en R es cero. De otro modo $\mathcal{A}(J) = R$ por simplicidad y $Ru = 0$ para cada $u \in J$ nonulo. Consecuentemente, cada uno de estos u nonulos pertenece a $I = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{A}(J) = 0$ y $RJ \neq 0$. En conclusión, J es un R–módulo simple y fiel, y R es primitivo.

$2 \Rightarrow 3$ Por el Teorema de Densidad de Jacobson 19, R es isomorfo a un anillo denso T compuesto por endomorfismos de un espacio vectorial V sobre un anillo de división D. Porque R es artiniano izquierdo, $R \simeq T = \mathrm{Hom}_D(V, V)$ por el Teorema 18.

$3 \Leftrightarrow 4$ Teorema 6

$4 \Leftrightarrow 1$ Teorema 14 $\square$