Práctica 0
Preliminares de Análisis

Pablo Brianese

23 de mayo de 2021

Definición 1. *Dadas $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ambas en $L(\mathbb{R}^n)$, definimos la convolución de la siguiente manera*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \tag{1}$$

Ejercicio 1. *Probar que si $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces valen:*

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$ *a la vez que* $(g + h) * f = g * f + h * f$
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$
4. $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$
5. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Observación 1. Las propiedades anteriores se pueden resumir diciendo que $(L^1(\mathbb{R}^n), \|-\|_1)$ es un álgebra de Banach conmutativa con la convolución como producto.

Lema propio 1. $\int_{\mathbb{R}^n} h(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)\mathrm{d}y$ *para toda* $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea H la clase formada por las funciones $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ que verifican el enunciado. Por la linealidad de la integral, la combinación $\alpha h_1 + \beta h_2$ pertenece a H siempre que $h_1, h_2 \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por el teorema de convergencia monótona, si $\{h_m\}_m \subseteq H$ es una sucesión nodecreciente de funciones nonegativas que converge a una función integrable g, entonces $g \in H$. Para concluir, debemos probar que las funciones características integrables están en H. Supongamos que $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es la función característica $h = \mathbb{1}_A$ de un conjunto medible $A \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida finita. Observemos que $\mathbb{1}_A(x-y) = \mathbb{1}_{x-A}(y)$ para todo par $x, y \in \mathbb{R}^n$. A partir de esta relación pordemos calcular como, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(y)\mathrm{d}y = \lambda(A) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{x-A}(y)\mathrm{d}y = \lambda(x-A) \tag{2}$$

Ahora la ecuación que necesitamos se sigue de la invarianza por traslaciones $(+x)$ y reflexiones $(-)$ de la medida de Lebesgue, una propiedad que es facil de ver en el caso de los rectángulos que generan su σ–álgebra. Concretamente, sucede $\lambda(A) = \lambda(x - A)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Demostración. 1 Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, como consecuencia del lema 1

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y && (3) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(x-(x-y))\mathrm{d}y && (4) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y)\mathrm{d}y && (5) \\ &= g * f(x) && (6) \end{aligned}$$

$\square$

Demostración. 2 Por la ley distributiva de los números reales y la linealidad de la integral, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f * (g+h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(g+h)(x-y)\mathrm{d}y && (7) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) + f(y)h(x-y)\mathrm{d}y && (8) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^n} f(y)h(x-y)\mathrm{d}y && (9) \\ &= f * g(x) + f * h(x) && (10) \end{aligned}$$

La demostración del enunciado $(g+h) * f = g * f + h * f$ es similar. $\square$

Demostración. 4 Sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Por la linealidad de la integral

$$(\lambda(f * g))(x) = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x-y))\mathrm{d}y \qquad (11)$$

Pero por asociatividad del producto entre números reales

$$\begin{aligned} (\lambda f) * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f(x))g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x-y))\mathrm{d}y && (12) \\ f * (\lambda g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\lambda g(x-y))\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x-y))\mathrm{d}y && (13) \end{aligned}$$

Comparando los extremos derechos de las desigualdades se obtiene $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$. $\square$

Lema propio 2 (Convergencia monótona para convoluciones)**.** *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, y* $\{g_m\}_m$ *es una sucesión nodecreciente de funciones nonegativas que convergen puntualmente a una* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, entonces* $\lim_{m\to\infty} f * g_m = f * g$ *y de forma similar* $\lim_{m\to\infty} g_m * f = g * f$*.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Si f^+ y f^- son las partes nonegativa y negativa de f, y $f^\pm$ es cualquiera de ellas entonces por el teorema de convergencia monótona

$$\lim_{m\to\infty} f^\pm * g_m(x) = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f^\pm(y) g_m(x-y)\mathrm{d}y \tag{14}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m\to\infty} f^\pm(y) g_m(x-y)\mathrm{d}y \tag{15}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} f^\pm(y) g(x-y)\mathrm{d}y \tag{16}$$
$$= f^\pm * g(x) \tag{17}$$

En consecuencia el límite de las convoluciones es la convolución con el límite

$$\lim_{m\to\infty} f * g_m(x) = \lim_{m\to\infty} f^+ * g_m(x) - \lim_{m\to\infty} f^- * g_m(x) \tag{18}$$
$$= f^+ * g(x) - f^- * g(x) \tag{19}$$
$$= f * g(x) \tag{20}$$

La demostración del enunciado $\lim_{m\to\infty} g_m * f(x) = g * f(x)$ es idéntica a la que recién presentamos. □

Demostración. 5 Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Una primera desigualdad es simple

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x-y)| \mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{21}$$

El teorema de Tonelli nos permite intercambiar el orden de integración para obtener

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x-y)| \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{22}$$

El lema propio 1 simplifica esta integral mediante $\|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|\mathrm{d}x$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g\|_1 \mathrm{d}y = \|f\|_1 \|g\|_1 \tag{23}$$

□

Lema propio 3. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * \psi$ es uniformemente continua.*

Demostración. Sean $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Una primera desigualdad es sencilla

$$|f * \psi(x) - f * \psi(x')| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi(x'-y)\mathrm{d}y \right| \tag{24}$$
$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\psi(x-y) - \psi(x'-y))\mathrm{d}y \right| \tag{25}$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||\psi(x-y) - \psi(x'-y)|\mathrm{d}y \tag{26}$$

Ahora bien, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|\psi(u) - \psi(u')| < \varepsilon$ si $\|u - u'\| < \delta$ porque ψ, al ser continua de soporte compacto, es uniformemente continua. Luego $\|x - x'\| < \delta$ implica

$$|f * \psi(x) - f * \psi(x')| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||\psi(x-y) - \psi(x'-y)|\mathrm{d}y \tag{27}$$

$$< \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\mathrm{d}y \tag{28}$$

$$= \varepsilon \|f\|_1 \tag{29}$$

Siendo que $\|f\|_1 < \infty$, podemos conluir que $f * \psi$ es uniformemente continua. □

Ejercicio 2. *Probar que si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * \psi$ es continua.*

Demostración. Sean $B_m = \bar{B}_m(0)$ las bolas cerradas de radio m centradas en 0. Aproximamos f mediante $f_m = f\mathbb{1}_{B_m}$ ($m \in \mathbb{N}$). La integrabilidad local de f hace de cada f_m una función integrable. Por el lema 3, las funciones $f_m * \psi$ son uniformemente continuas. Además, se da la convergencia uniforme en compactos $f_m * \psi \to f * \psi$. Para verlo fijemos un conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Existe un $M \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande, dependiendo de K, tal que $K \subseteq B_M$. Luego, para todo $x \in K$ y para todo $m \geq M$

$$f_m * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_m(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y \tag{30}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathbb{1}_{B_m}(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y \tag{31}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y \tag{32}$$

$$= f * \psi(x) \tag{33}$$

Queda probada la convergencia uniforme en compactos. Pero el límite, en este caso $f * \psi$, uniforme en compactos de una sucesión de funciones uniformemente continuas, aquí las f_m, es continuo. Por lo tanto $f * \psi$ es una función continua. □

Ejercicio 3. *Probar que si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ entonces $\partial_{x_i}(\psi * f) = f * \partial_{x_i}\psi$.*

Observación 2. Como consecuencia $f * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ un vector fijo. Calculamos

$$\partial_{x_i}(f * \psi)(x) = \lim_{h \to 0} h^{-1}((f * \psi)(x + he_i) - (f * \psi)(x)) \tag{34}$$

$$= \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\psi(x + he_i - y) - \psi(x-y)}{h} \mathrm{d}y \tag{35}$$

El análisis de este límite constará de tres partes. Primero acotamos la región de integración. Definimos $\phi_h(y) = h^{-1}(\psi(x + he_i - y) - \psi(x - y))$ para $y \in \mathbb{R}^n$ y $h \in \mathbb{R} \setminus 0$. Podemos probar que el soporte de las todas las funciones ϕ_h está contenido en una bola si nos restringimos a los desplazamientos $h \in [-1, 1]$. Sabemos que ψ tiene soporte compacto, por lo cual se anula en $\mathbb{R}^n \setminus B_r$, el complemento de la bola centrada en 0 de radio r. Escogiendo $r' = r + \|x\| + 1$ podemos asegurar que $\|y\| \geq r'$ implica

$$\begin{aligned} r = r' - \|x\| - 1 &\qquad& r = r' - \|x\| - 1 && (36)\\ \leq \|y\| - \|x\| - 1 &\qquad& \leq \|y\| - \|x\| - 1 && (37)\\ \leq \|y\| - \|x + he_i\| &\qquad& \leq \|y\| - \|x\| && (38)\\ \leq |\|x + he_i\| - \|y\|| &\qquad& \leq |\|x\| - \|y\|| && (39)\\ \leq \|x + he_i - y\| &\qquad& \leq \|x - y\| && (40) \end{aligned}$$

y estas desigualdades a su vez nos permiten deducir $\psi(x+he_i-y) = \psi(x-y) = 0$. En conclusión, las funciones ϕ_h con $h \in [-1, 1]$ se anulan sobre el conjunto $\mathbb{R}^n \setminus B_{r'}$.

En segundo lugar controlamos el integrando. Por el teorema del valor medio $|\psi(x + he_i - y) - \psi(x - y)| \leq \|\partial_{x_i}\psi\|_\infty |h|$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Pero $\partial_{x_i}\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ porque $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Luego $C = \|\partial_{x_i}\psi\|_\infty < \infty$. Esto asegura $|\phi_h| \leq C$ para todo $h \in \mathbb{R} \setminus 0$.

En tercer y último lugar, aplicamos el teorema de convergencia dominada. En el primer y segundo paso probamos que $|\phi_h| \leq C\mathbb{1}_{B_{r'}}$ para todo $h \in [-1, 1]$. Partiendo de esto, el integrando $f\phi_h$ está dominado por una función $g = C|f|\mathbb{1}_{B_{r'}}$. Esta g resulta integrable porque f es localmente integrable. Luego el teorema de la convergencia dominada implica

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_h(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \lim_{h\to 0} \phi_h(y)\mathrm{d}y \tag{41}$$

Pero $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \phi_h(y) = \partial_{x_i}\psi(x - y) \qquad (\forall y \in \mathbb{R}^n) \tag{42}$$

Es decir

$$\partial_{x_i}(f * \psi)(x) = f * (\partial_{x_i}\psi)(x) \tag{43}$$

Con la conmutatividad de la convolución podemos llegar al enunciado preciso del ejercicio. □

Definición 2. *Dada una función ϕ diremos que es un mollifier si satisface las siguientes propiedades*

a) $\phi(x) \geq 0$;

b) $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

c) $\operatorname{sop}(\phi) = \overline{B_1(0)}$.

d) $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x = 1$.

Denotamos $\phi_\delta(x) = \delta^{-n}\phi(x/\delta)$*, donde* $\delta > 0$*.*

Ejercicio 4. *¿Cuáles son las propiedades que satisface* ϕ_δ*?*

Respuesta. Las propiedades que podemos observar son

a) $\phi_\delta \geq 0$;

b) $\phi_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

c) $\operatorname{sop}(\phi_\delta) = \overline{B_\delta(0)}$;

d) $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(x)\mathrm{d}x = 1$.

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la transformación lineal dada por $Tx = \delta x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. La propiedad a) se debe a que el producto de números nonegativos es un número nonegativo. b) se debe a la regla de la cadena, y a la suavidad de las funciones ϕ y la aplicación T^{-1}. c) se debe a que T es un homeomorfismo, y en consecuencia se puede calcular

$$\begin{aligned}
\operatorname{sop}(\phi_\delta) &= \{y \in \mathbb{R} : \phi_\delta(y) = 0\}^- && (44)\\
&= \{y \in \mathbb{R} : \delta^{-n}\phi(y/\delta) = 0\}^- && (45)\\
&= \{y \in \mathbb{R} : \phi(y/\delta) = 0\}^- && (46)\\
&= \{\delta(y/\delta) :, y \in \mathbb{R}^n, \phi(y/\delta) = 0\}^- && (47)\\
&= \{\delta x : x \in \mathbb{R}^n, \phi(x) = 0\}^- && (48)\\
&= (\delta \cdot \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0\})^- && (49)\\
&= \delta \cdot \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0\}^- && (50)\\
&= \delta \cdot \operatorname{sop}(\phi) && (51)
\end{aligned}$$

además de la ecuación $\overline{B_\delta(0)} = \delta \cdot \overline{B_1(0)}$ particular a las bolas. d) se debe al teorema de cambio de variable aplicado a la transformación lineal T

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(x)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta^{-n}\phi(x/\delta)\mathrm{d}x && (52)\\
&= \delta^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(T^{-1}x)\mathrm{d}x && (53)\\
&= \delta^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)|\det T|\mathrm{d}y && (54)\\
&= \delta^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\delta^n\mathrm{d}y && (55)\\
&= \delta^{-n}\delta^n\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\mathrm{d}y && (56)\\
&= 1 \cdot 1 && (57)
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 5. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua luego $f_\delta = f * \phi_\delta \to f$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ un vector. Calculamos usando la conmutatividad de la convolución

$$f(x) - f * \phi_\delta(x) = f(x) - \phi_\delta * f(x) = f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) f(x-y)\mathrm{d}y \tag{58}$$

Usando la propiedad $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y)\mathrm{d}y = 1$, que mostramos en el ejercicio 4, vemos

$$\begin{aligned} f(x) - f * \phi_\delta(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y)\mathrm{d}y \cdot f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) f(x-y)\mathrm{d}y &(59)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) f(x)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) f(x-y)\mathrm{d}y &(60)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y)(f(x) - f(x-y))\mathrm{d}y &(61)\end{aligned}$$

También en el ejercicio 4, probamos que $\mathrm{sop}(\phi_\delta) = \overline{B_\delta}$. Luego

$$f(x) - f * \phi_\delta(x) = \int_{\overline{B_\delta}} \phi_\delta(y)(f(x) - f(x-y))\mathrm{d}y \tag{62}$$

Esto dice que la diferencia $f(x) - f * \phi_\delta(x)$ en la izquierda depende del control que tengamos sobre el cambio de f sobre el conjunto $x + \overline{B_\delta}$.

Sabiendo esto, consideremos un compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ y restrinjamos $x \in K$. Este conjunto K está contenido en una bola $B_r \subseteq \mathbb{R}^n$ centrada en 0. Luego $x + \overline{B_\delta} \subseteq \overline{B_{r+\delta}}$ para todo $\delta > 0$. Si imponemos $\delta \leq 1$, entonces $x + \overline{B_\delta} \subseteq \overline{B_{r+1}}$. Pero f, al ser continua, es uniformemente continua en la bola compacta $\overline{B_{r'}}$ donde $r' = r + 1$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$, podemos elegir $\delta \in]0, 1]$ de modo tal que para todo $\delta' \in]0, \delta]$ y todo $y \in \overline{B_{\delta'}}$ se verifica la cota $|f(x) - f(x-y)| < \varepsilon$ independientemente de $x \in K$. Con esta información estimamos

$$\begin{aligned} |f(x) - f * \phi_\delta(x)| &= \left| \int_{\overline{B_\delta}} \phi_\delta(y)(f(x) - f(x-y))\mathrm{d}y \right| &(63)\\ &\leq \int_{\overline{B_\delta}} |\phi_\delta(y)||f(x) - f(x-y)|\mathrm{d}y &(64)\\ &\leq \varepsilon \int_{\overline{B_\delta}} |\phi_\delta(y)|\mathrm{d}y &(65)\end{aligned}$$

Rematamos el cálculo usando las propiedades de nonegatividad $\phi_\delta \geq 0$, del soporte $\mathrm{sop}(\phi_\delta) = \overline{B_\delta}$, y la integral $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y)\mathrm{d}y = 1$, todas vistas en el ejercicio 4. A partir de estas $\int_{\overline{B_\delta}} |\phi_\delta(y)|\mathrm{d}y = 1$. En conclusión, dado un conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ y un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $\delta' \in]0, \delta]$ y todo $x \in K$, se verifica la cota $|f(x) - f * \phi_\delta(x)| \leq \varepsilon$. Es decir, $f * \phi_\delta \to f$ uniformemente en compactos. □

Teorema 1. *Sea X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto, entonces $C_c(X)$ es denso en $L^p(\mu)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Sea s una función medible simple definida en X tal que $\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe una función $g \in C_c(X)$ tal que $g(x) = s(x)$ excepto en un conjunto de medida menor a ε, y $|g| \leq \|s\|_\infty$ (Teorema de Lusin). Por lo tanto $\|g - s\|_p \leq 2\varepsilon^{1/p}\|s\|_\infty$. Dado que la familia de las funciones s es densa en $L^p(\mu)$, esto completa la prueba. □

Definición propia 1. *Si f es una función sobre $\mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, defninimos la función $T_x f$ mediante $T_x f(y) = f(x + y)$.*

Lema propio 4. *Si $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, entonces $T_x g \to g$ en norma L^p cuando $x \to 0$.*

Demostración. Porque $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, también es uniformemente continua. Entonces $T_x g \to g$ uniformemente cuando $x \to 0$. Dado que g y g_x donde $|x| \leq 1$ estan soportadas en un conjunto compacto que les es común, también se sigue que $\|g - T_x g\|_p \to 0$. □

Lema propio 5. *Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $\lim_{x \to 0} \|f - T_x f\|_p = 0$.*

Demostración. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$, usando el resultado de densidad 1 elegimos una g continua de soporte compacto tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$. Entonces también $\|T_x f - T_x g\|_p < \varepsilon/3$, de modo que para la norma L^p

$$\|f - T_x f\| \leq \|f - g\| + \|g - T_x g\| + \|T_x f - T_x g\| < \|g - T_x g\| + \frac{2}{3}\varepsilon \tag{66}$$

Pero por el lema 4, $\|g - T_x g\|_p < \varepsilon/3$ para x lo suficientemente pequeño. Luego $\|f - T_x f\|_p < \varepsilon$. □

Lema propio 6. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, entonces*

$$\|f - f_\delta\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f - T_{-\delta w} f\|_p^p \phi(w)^p \mathrm{d}w \tag{67}$$

Demostración. Primero observamos que la integral $\int \phi_\delta = 1$ implica

$$(f - f_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x - y))\phi_\delta(y)\mathrm{d}y \tag{68}$$

Luego el cambio de variable $y \mapsto \delta w$ nos lleva a

$$(f - f_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x - \delta w))\phi(w)\mathrm{d}w = \int_{\mathbb{R}^n} (f - T_{-\delta w} f)(x)\phi(w)\mathrm{d}w \tag{69}$$

Por la convexidad de la aplicación $t \mapsto |t|^p$ cuando $p \geq 1$, la desigualdad de Jensen nos dice que

$$|f - f_\delta|^p(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f - T_{-\delta w} f|^p(x)\phi(w)^p \mathrm{d}w \tag{70}$$

Integramos sobre x y aplicamos el Teorema de Tonelli del lado derecho para intercambiar el orden de la integración. Obtenemos

$$\|f - f_\delta\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f - T_{-\delta w} f|^p(x)\phi(w)^p \mathrm{d}w\mathrm{d}x \tag{71}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f - T_{-\delta w} f|^p(x)\mathrm{d}x\phi(w)^p \mathrm{d}w \tag{72}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \|f - T_{-\delta w} f\|_p^p \phi(w)^p \mathrm{d}w \tag{73}$$

□

Ejercicio 6. *Si $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, entonces $f * \phi_\delta \to f$ en norma L^p cuando $\delta \to 0$.*

Demostración. Por el lema 6

$$\|f - f_\delta\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f - T_{-\delta w} f\|_p^p \phi(w)^p \mathrm{d}w \tag{74}$$

Pero $\|f_{-\delta y} - f\|_p$ está acotada por $2\|f\|_p$ y tiende a cero cuando $\delta \to 0$ para cada y, por el lema 5. Además $\|\phi\|_p^p < \infty$ porque $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, la convergencia $\|f - f_\delta\|_p \to 0$ cuando $\delta \to 0$ se sigue del Teorema de Convergencia Dominada. □