

# Práctica 0

## Preliminares de Análisis

Pablo Brianese

17 de mayo de 2021

**Definición 1.** Dadas  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ambas en  $L(\mathbb{R}^n)$ , definimos la convolución de la siguiente manera

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy \quad (1)$$

**Ejercicio 1.** Probar que si  $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces valen:

1.  $f * g = g * f$
2.  $f * (g + h) = f * g + f * h$  a la vez que  $(g + h) * f = g * f + h * f$
3.  $f * (g * h) = (f * g) * h$
4.  $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$
5.  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

*Observación 1.* Las propiedades anteriores se pueden resumir diciendo que  $(L^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)$  es un álgebra de Banach conmutativa con la convolución como producto.

**Lema propio 1.**  $\int_{\mathbb{R}^n} h(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} h(x - y)dy$  para toda  $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

*Demostración.* Sea  $H$  la clase formada por las funciones  $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$  que verifican el enunciado. Por la linealidad de la integral, la combinación  $\alpha h_1 + \beta h_2$  pertenece a  $H$  siempre que  $h_1, h_2 \in H$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Por el teorema de convergencia monótona, si  $\{h_m\}_m \subseteq H$  es una sucesión no decreciente de funciones no negativas que converge a una función integrable  $g$ , entonces  $g \in H$ . Para concluir, debemos probar que las funciones características integrables están en  $H$ . Supongamos que  $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$  es la función característica  $h = \mathbb{1}_A$  de un conjunto medible  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  de medida finita. Observemos que  $\mathbb{1}_A(x - y) = \mathbb{1}_{x-A}(y)$  para todo par  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . A partir de esta relación podemos calcular como, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(y)dy = \lambda(A) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x - y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{x-A}(y)dy = \lambda(x - A) \quad (2)$$

Ahora la ecuación que necesitamos se sigue de la invarianza por traslaciones  $(+x)$  y reflexiones  $(-)$  de la medida de Lebesgue, una propiedad que es facil de ver en el caso de los rectángulos que generan su  $\sigma$ -álgebra. Concretamente, sucede  $\lambda(A) = \lambda(x - A)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

*Demostración.* 1 Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , como consecuencia del lema 1

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy \quad (3)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(x - (x - y))dy \quad (4)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x - y)dy \quad (5)$$

$$= g * f(x) \quad (6)$$

$\square$

*Demostración.* 2 Por la ley distributiva de los números reales y la linealidad de la integral, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$

$$f * (g + h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(g + h)(x - y)dy \quad (7)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) + f(y)h(x - y)dy \quad (8)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} f(y)h(x - y)dy \quad (9)$$

$$= f * g(x) + f * h(x) \quad (10)$$

La demostración del enunciado  $(g + h) * f = g * f + h * f$  es similar.  $\square$

*Demostración.* 4 Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  arbitrario. Por la linealidad de la integral

$$(\lambda(f * g))(x) = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x - y))dy \quad (11)$$

Pero por asociatividad del producto entre números reales

$$(\lambda f) * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f(y))g(x - y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x - y))dy \quad (12)$$

$$f * (\lambda g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\lambda g(x - y))dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x - y))dy \quad (13)$$

Comparando los extremos derechos de las desigualdades se obtiene  $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$ .  $\square$

**Lema propio 2** (Convergencia monótona para convoluciones). Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , y  $\{g_m\}_m$  es una sucesión no decreciente de funciones no negativas que convergen puntualmente a una  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\lim_{m \rightarrow \infty} f * g_m = f * g$  y de forma similar  $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m * f = g * f$ .

*Demostración.* Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  arbitrario. Si  $f^+$  y  $f^-$  son las partes nonegativa y negativa de  $f$ , y  $f^\pm$  es cualquiera de ellas entonces por el teorema de convergencia monótona

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f^\pm * g_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f^\pm(y) g_m(x-y) dy \quad (14)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m \rightarrow \infty} f^\pm(y) g_m(x-y) dy \quad (15)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f^\pm(y) g(x-y) dy \quad (16)$$

$$= f^\pm * g(x) \quad (17)$$

En consecuencia el límite de las convoluciones es la convolución con el límite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f * g_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f^+ * g_m(x) - \lim_{m \rightarrow \infty} f^- * g_m(x) \quad (18)$$

$$= f^+ * g(x) - f^- * g(x) \quad (19)$$

$$= f * g(x) \quad (20)$$

La demostración del enunciado  $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m * f(x) = g * f(x)$  es idéntica a la que recién presentamos.  $\square$

*Demostración.* Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Una primera desigualdad es simple

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x-y)| dy dx \quad (21)$$

El teorema de Tonelli nos permite intercambiar el orden de integración para obtener

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x-y)| dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| dx dy \quad (22)$$

El lema propio 1 simplifica esta integral mediante  $\|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| dx$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g\|_1 dy = \|f\|_1 \|g\|_1 \quad (23)$$

$\square$

**Lema propio 3.** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y  $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$  entonces  $f * \psi$  es uniformemente continua.

*Demostración.* Sean  $x, x' \in \mathbb{R}^n$ . Una primera desigualdad es sencilla

$$|f * \psi(x) - f * \psi(x')| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \psi(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \psi(x'-y) dy \right| \quad (24)$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) (\psi(x-y) - \psi(x'-y)) dy \right| \quad (25)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |\psi(x-y) - \psi(x'-y)| dy \quad (26)$$

Ahora bien, dado  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $|\psi(u) - \psi(u')| < \varepsilon$  si  $\|u - u'\| < \delta$  porque  $\psi$ , al ser continua de soporte compacto, es uniformemente continua. Luego  $\|x - x'\| < \delta$  implica

$$|f * \psi(x) - f * \psi(x')| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |\psi(x - y) - \psi(x' - y)| dy \quad (27)$$

$$< \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \quad (28)$$

$$= \varepsilon \|f\|_1 \quad (29)$$

Siendo que  $\|f\|_1 < \infty$ , podemos concluir que  $f * \psi$  es uniformemente continua.  $\square$

**Ejercicio 2.** Probar que si  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  y  $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$  entonces  $f * \psi$  es continua.

*Demostración.* Sean  $B_m = \bar{B}_m(0)$  las bolas cerradas de radio  $m$  centradas en 0. Aproximamos  $f$  mediante  $f_m = f \mathbb{1}_{B_m}$  ( $m \in \mathbb{N}$ ). La integrabilidad local de  $f$  hace de cada  $f_m$  una función integrable. Por el lema 3, las funciones  $f_m * \psi$  son uniformemente continuas. Además, se da la convergencia uniforme en compactos  $f_m * \psi \rightarrow f * \psi$ . Para verlo fijemos un conjunto compacto  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ . Existe un  $M \in \mathbb{N}$  lo suficientemente grande, dependiendo de  $K$ , tal que  $K \subseteq B_M$ . Luego, para todo  $x \in K$  y para todo  $m \geq M$

$$f_m * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_m(y) \psi(x - y) dy \quad (30)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \mathbb{1}_{B_m}(y) \psi(x - y) dy \quad (31)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \psi(x - y) dy \quad (32)$$

$$= f * \psi(x) \quad (33)$$

Queda probada la convergencia uniforme en compactos. Pero el límite, en este caso  $f * \psi$ , uniforme en compactos de una sucesión de funciones uniformemente continuas, aquí las  $f_m$ , es continuo. Por lo tanto  $f * \psi$  es una función continua.  $\square$

**Ejercicio 3.** Probar que si  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  y  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  entonces  $\partial_{x_i}(\psi * f) = f * \partial_{x_i} \psi$ .

*Observación 2.* Como consecuencia  $f * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

*Demostración.* Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  un vector fijo. Calculamos

$$\partial_{x_i}(f * \psi)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}((f * \psi)(x + he_i) - (f * \psi)(x)) \quad (34)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\psi(x + he_i - y) - \psi(x - y)}{h} dy \quad (35)$$

El análisis de este límite constará de tres partes. Primero acotamos la región de integración. Definimos  $\phi_h(y) = h^{-1}(\psi(x + he_i - y) - \psi(x - y))$  para  $y \in \mathbb{R}^n$  y  $h \in \mathbb{R} \setminus 0$ . Podemos probar que el soporte de las todas las funciones  $\phi_h$  está contenido en una bola si nos restringimos a los desplazamientos  $h \in [-1, 1]$ . Sabemos que  $\psi$  tiene soporte compacto, por lo cual se anula en  $\mathbb{R}^n \setminus B_r$ , el complemento de la bola centrada en 0 de radio  $r$ . Escogiendo  $r' = r + \|x\| + 1$  podemos asegurar que  $\|y\| \geq r'$  implica

$$r = r' - \|x\| - 1 \qquad r = r' - \|x\| - 1 \qquad (36)$$

$$\leq \|y\| - \|x\| - 1 \qquad \leq \|y\| - \|x\| - 1 \qquad (37)$$

$$\leq \|y\| - \|x + he_i\| \qquad \leq \|y\| - \|x\| \qquad (38)$$

$$\leq \|x + he_i\| - \|y\| \qquad \leq \|x\| - \|y\| \qquad (39)$$

$$\leq \|x + he_i - y\| \qquad \leq \|x - y\| \qquad (40)$$

y estas desigualdades a su vez nos permiten deducir  $\psi(x + he_i - y) = \psi(x - y) = 0$ . En conclusión, las funciones  $\phi_h$  con  $h \in [-1, 1]$  se anulan sobre el conjunto  $\mathbb{R}^n \setminus B_{r'}$ .

En segundo lugar controlamos el integrando. Por el teorema del valor medio  $|\psi(x + he_i - y) - \psi(x - y)| \leq \|\partial_{x_i} \psi\|_\infty |h|$  para todo  $y \in \mathbb{R}^n$ . Pero  $\partial_{x_i} \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  porque  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Luego  $C = \|\partial_{x_i} \psi\|_\infty < \infty$ . Esto asegura  $|\phi_h| \leq C$  para todo  $h \in \mathbb{R} \setminus 0$ .

En tercer y último lugar, aplicamos el teorema de convergencia dominada. En el primer y segundo paso probamos que  $|\phi_h| \leq C \mathbb{1}_{B_{r'}}$  para todo  $h \in [-1, 1]$ . Partiendo de esto, el integrando  $f\phi_h$  está dominado por una función  $g = C|f| \mathbb{1}_{B_{r'}}$ . Esta  $g$  resulta integrable porque  $f$  es localmente integrable. Luego el teorema de la convergencia dominada implica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \phi_h(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \lim_{h \rightarrow 0} \phi_h(y) dy \qquad (41)$$

Pero  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \phi_h(y) = \partial_{x_i} \psi(x - y) \qquad (\forall y \in \mathbb{R}^n) \qquad (42)$$

Es decir

$$\partial_{x_i}(f * \psi)(x) = f * (\partial_{x_i} \psi)(x) \qquad (43)$$

Con la conmutatividad de la convolución podemos llegar al enunciado preciso del ejercicio.  $\square$

**Definición 2.** Dada una función  $\phi$  diremos que es un mollifier si satisface las siguientes propiedades

- a)  $\phi(x) \geq 0$ ;
- b)  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ;

$$c) \operatorname{sop}(\phi) = \overline{B_1(0)}.$$

$$d) \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1.$$

Denotamos  $\phi_\delta(x) = \delta^{-n} \phi(x/\delta)$ , donde  $\delta > 0$ .

**Ejercicio 4.** ¿Cuáles son las propiedades que satisface  $\phi_\delta$ ?

*Respuesta.* Las propiedades que podemos observar son

$$a) \phi_\delta \geq 0;$$

$$b) \phi_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n);$$

$$c) \operatorname{sop}(\phi_\delta) = \overline{B_\delta(0)};$$

$$d) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(x) dx = 1.$$

Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la transformación lineal dada por  $Tx = \delta x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . La propiedad a) se debe a que el producto de números nonegativos es un número nonegativo. b) se debe a la regla de la cadena, y a la suavidad de las funciones  $\phi$  y la aplicación  $T^{-1}$ . c) se debe a que  $T$  es un homeomorfismo, y en consecuencia se puede calcular

$$\operatorname{sop}(\phi_\delta) = \{y \in \mathbb{R} : \phi_\delta(y) = 0\}^- \quad (44)$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : \delta^{-n} \phi(y/\delta) = 0\}^- \quad (45)$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : \phi(y/\delta) = 0\}^- \quad (46)$$

$$= \{\delta(y/\delta) : y \in \mathbb{R}^n, \phi(y/\delta) = 0\}^- \quad (47)$$

$$= \{\delta x : x \in \mathbb{R}^n, \phi(x) = 0\}^- \quad (48)$$

$$= (\delta \cdot \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0\})^- \quad (49)$$

$$= \delta \cdot \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0\}^- \quad (50)$$

$$= \delta \cdot \operatorname{sop}(\phi) \quad (51)$$

además de la ecuación  $\overline{B_\delta(0)} = \delta \cdot \overline{B_1(0)}$  particular a las bolas. d) se debe al teorema de cambio de variable aplicado a la transformación lineal  $T$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \delta^{-n} \phi(x/\delta) dx \quad (52)$$

$$= \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(T^{-1}x) dx \quad (53)$$

$$= \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) |\det T| dy \quad (54)$$

$$= \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \delta^n dy \quad (55)$$

$$= \delta^{-n} \delta^n \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) dy \quad (56)$$

$$= 1 \cdot 1 \quad (57)$$

□

**Ejercicio 5.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua luego  $f_\delta = f * \phi_\delta \rightarrow f$  uniformemente en compactos de  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  un vector. Calculamos usando la conmutatividad de la convolución

$$f(x) - f * \phi_\delta(x) = f(x) - \phi_\delta * f(x) = f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) f(x-y) dy \quad (58)$$

Usando la propiedad  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) dy = 1$ , que mostramos en el ejercicio 4, vemos

$$f(x) - f * \phi_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) dy \cdot f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) f(x-y) dy \quad (59)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) f(x) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) f(x-y) dy \quad (60)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) (f(x) - f(x-y)) dy \quad (61)$$

También en el ejercicio 4, probamos que  $\text{sop}(\phi_\delta) = \overline{B_\delta}$ . Luego

$$f(x) - f * \phi_\delta(x) = \int_{\overline{B_\delta}} \phi_\delta(y) (f(x) - f(x-y)) dy \quad (62)$$

Esto dice que la diferencia  $f(x) - f * \phi_\delta(x)$  en la izquierda depende del control que tengamos sobre el cambio de  $f$  sobre el conjunto  $x + \overline{B_\delta}$ .

Sabiendo esto, consideremos un compacto  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  y restrinjamos  $x \in K$ . Este conjunto  $K$  está contenido en una bola  $B_r \subseteq \mathbb{R}^n$  centrada en 0. Luego  $x + \overline{B_\delta} \subseteq \overline{B_{r+\delta}}$  para todo  $\delta > 0$ . Si imponemos  $\delta \leq 1$ , entonces  $x + \overline{B_\delta} \subseteq \overline{B_{r+1}}$ . Pero  $f$ , al ser continua, es uniformemente continua en la bola compacta  $\overline{B_{r'}}$  donde  $r' = r + 1$ . Luego, para todo  $\varepsilon > 0$ , podemos elegir  $\delta \in ]0, 1]$  de modo tal que para todo  $\delta' \in ]0, \delta]$  y todo  $y \in \overline{B_{\delta'}}$  se verifica la cota  $|f(x) - f(x-y)| < \varepsilon$  independientemente de  $x \in K$ . Con esta información estimamos

$$|f(x) - f * \phi_\delta(x)| = \left| \int_{\overline{B_\delta}} \phi_\delta(y) (f(x) - f(x-y)) dy \right| \quad (63)$$

$$\leq \int_{\overline{B_\delta}} |\phi_\delta(y)| |f(x) - f(x-y)| dy \quad (64)$$

$$\leq \varepsilon \int_{\overline{B_\delta}} |\phi_\delta(y)| dy \quad (65)$$

Rematamos el cálculo usando las propiedades de nonegatividad  $\phi_\delta \geq 0$ , del soporte  $\text{sop}(\phi_\delta) = \overline{B_\delta}$ , y la integral  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) dy = 1$ , todas vistas en el ejercicio 4. A partir de estas  $\int_{\overline{B_\delta}} |\phi_\delta(y)| dy = 1$ . En conclusión, dado un conjunto compacto  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  y un  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $\delta' \in ]0, \delta]$  y todo  $x \in K$ , se verifica la cota  $|f(x) - f * \phi_\delta(x)| \leq \varepsilon$ . Es decir,  $f * \phi_\delta \rightarrow f$  uniformemente en compactos.  $\square$

**Ejercicio 6.** Si  $1 \leq p < \infty$  y  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  luego  $f_\delta = f * \phi_\delta \rightarrow f$  en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

**Definición propia 1.** Si  $f$  es una función sobre  $\mathbb{R}^n$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ , definimos la función  $T_x f$  mediante  $T_x f(y) = f(x + y)$ .

**Lema propio 4.** Si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , entonces

$$\|f - f_\delta\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f - T_{-\delta w} f\|_p^p \phi(w)^p dw \quad (66)$$

*Demostración.* Primero observamos que la integral  $\int \phi_\delta = 1$  implica

$$(f - f_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x - y)) \phi_\delta(y) dy \quad (67)$$

Luego el cambio de variable  $y \mapsto \delta w$  nos lleva a

$$(f - f_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x - \delta w)) \phi(w) dw = \int_{\mathbb{R}^n} (f - T_{-\delta w} f)(x) \phi(w) dw \quad (68)$$

Por la convexidad de la aplicación  $t \mapsto |t|^p$  cuando  $p \geq 1$ , la desigualdad de Jensen nos dice que

$$|f - f_\delta|^p(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f - T_{-\delta w} f|^p(x) \phi(w)^p dw \quad (69)$$

Integramos sobre  $x$  y aplicamos el Teorema de Tonelli del lado derecho para intercambiar el orden de la integración. Obtenemos

$$\|f - f_\delta\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f - T_{-\delta w} f|^p(x) \phi(w)^p dw dx \quad (70)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f - T_{-\delta w} f|^p(x) dx \phi(w)^p dw \quad (71)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \|f - T_{-\delta w} f\|_p^p \phi(w)^p dw \quad (72)$$

□

**Teorema 1.** Si  $f \in L^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , entonces  $f * \phi_\delta \rightarrow f$  en norma  $L^p$  cuando  $\delta \rightarrow 0$ . Si  $f \in L^\infty$  y  $f$  es uniformemente continua en un conjunto  $V$ , entonces  $f * \phi_\delta \rightarrow f$  uniformemente en  $V$  cuando  $\delta \rightarrow 0$ .

*Demostración.* Primero observamos que la integral  $\int \phi_\delta = 1$  implica

$$f * \phi_\delta(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x - y) - f(x)) \phi_\delta(y) dy \quad (73)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x - \varepsilon w) - f(x)) \phi(w) dw \quad (74)$$



Si  $f \in L^p$  y  $p < \infty$ , aplicamos la desigualdad triangular para integrales (llamada desigualdad de Minkowski) para obtener

$$\|f * \phi_\delta - f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f_{-\delta w} - f\|_p |\phi(w)| dw \quad (75)$$

Pero  $\|f_{-\varepsilon y} - f\|_p$  está acotada por  $2\|f\|_p$  y tiende a cero cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  para cada  $y$ , por el lema ???. Por lo tanto, el resultado deseado se sigue del teorema de convergencia dominada.

Por otra parte, supongamos que  $f \in L^\infty$  y  $f$  es uniformemente continua en un conjunto  $V$ . Dado  $\delta > 0$ , elegimos un conjunto compacto  $W$  tal que  $\int_{\mathbb{R}^n \setminus W} |\phi| < \delta$ . Entonces

$$\sup_{x \in V} |f * \phi_\varepsilon - af(x)| \leq \sup_{x \in V, y \in W} |f(x - \varepsilon y) - f(x)| \int_W |\phi| + 2\|f\|_\infty \delta \quad (76)$$

El primer término desde la derecha tiende a cero cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , y  $\delta$  es arbitrario, de modo que  $f * \phi_\varepsilon$  tiende uniformemente a  $af$  en  $V$ .  $\square$