

Práctica 0

Preliminares de Análisis

Pablo Brianese

4 de mayo de 2021

Definición 1. Dadas $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ambas en $L(\mathbb{R}^n)$, definimos la convolución de la siguiente manera

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy \quad (1)$$

Ejercicio 1. Probar que si $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces valen:

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$ a la vez que $(g + h) * f = g * f + h * f$
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$
4. $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$
5. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Observación 1. Las propiedades anteriores se pueden resumir diciendo que $(L^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)$ es un álgebra de Banach conmutativa con la convolución como producto.

Lema propio 1. $\int_{\mathbb{R}^n} h(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} h(x - y)dy$ para toda $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea H la clase formada por las funciones $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ que verifican el enunciado. Por la linealidad de la integral, la combinación $\alpha h_1 + \beta h_2$ pertenece a H siempre que $h_1, h_2 \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por el teorema de convergencia monótona, si $\{h_m\}_m \subseteq H$ es una sucesión no decreciente de funciones no negativas que converge a una función integrable g , entonces $g \in H$. Para concluir, debemos probar que las funciones características integrables están en H . Supongamos que $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es la función característica $h = \mathbb{1}_A$ de un conjunto medible $A \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida finita. Observemos que $\mathbb{1}_A(x - y) = \mathbb{1}_{x-A}(y)$ para todo par $x, y \in \mathbb{R}^n$. A partir de esta relación podemos calcular como, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(y)dy = \lambda(A) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x - y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{x-A}(y)dy = \lambda(x - A) \quad (2)$$

Ahora la ecuación que necesitamos se sigue de la invarianza por traslaciones $(+x)$ y reflexiones $(-)$ de la medida de Lebesgue, una propiedad que es facil de ver en el caso de los rectángulos que generan su σ -álgebra. Concretamente, sucede $\lambda(A) = \lambda(x - A)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. \square

Demostración. 1 Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, como consecuencia del lema 1

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy \quad (3)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(x - (x - y))dy \quad (4)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x - y)dy \quad (5)$$

$$= g * f(x) \quad (6)$$

\square

Demostración. 2 Por la ley distributiva de los números reales y la linealidad de la integral, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$f * (g + h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(g + h)(x - y)dy \quad (7)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) + f(y)h(x - y)dy \quad (8)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} f(y)h(x - y)dy \quad (9)$$

$$= f * g(x) + f * h(x) \quad (10)$$

La demostración del enunciado $(g + h) * f = g * f + h * f$ es similar. \square

Demostración. 4 Sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Por la linealidad de la integral

$$(\lambda(f * g))(x) = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x - y))dy \quad (11)$$

Pero por asociatividad del producto entre números reales

$$(\lambda f) * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f(y))g(x - y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x - y))dy \quad (12)$$

$$f * (\lambda g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\lambda g(x - y))dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x - y))dy \quad (13)$$

Comparando los extremos derechos de las desigualdades se obtiene $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$. \square

Lema propio 2 (Convergencia monótona para convoluciones). Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y $\{g_m\}_m$ es una sucesión no decreciente de funciones no negativas que convergen puntualmente a una $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} f * g_m = f * g$ y de forma similar $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m * f = g * f$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Si f^+ y f^- son las partes nonegativa y negativa de f , y f^\pm es cualquiera de ellas entonces por el teorema de convergencia monótona

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f^\pm * g_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f^\pm(y) g_m(x-y) dy \quad (14)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m \rightarrow \infty} f^\pm(y) g_m(x-y) dy \quad (15)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f^\pm(y) g(x-y) dy \quad (16)$$

$$= f^\pm * g(x) \quad (17)$$

En consecuencia el límite de las convoluciones es la convolución con el límite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f * g_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f^+ * g_m(x) - \lim_{m \rightarrow \infty} f^- * g_m(x) \quad (18)$$

$$= f^+ * g(x) - f^- * g(x) \quad (19)$$

$$= f * g(x) \quad (20)$$

La demostración del enunciado $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m * f(x) = g * f(x)$ es idéntica a la que recién presentamos. \square

Demostración. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Una primera desigualdad es simple

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x-y)| dy dx \quad (21)$$

El teorema de Tonelli nos permite intercambiar el orden de integración para obtener

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x-y)| dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| dx dy \quad (22)$$

El lema propio 1 simplifica esta integral mediante $\|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| dx$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g\|_1 dy = \|f\|_1 \|g\|_1 \quad (23)$$

\square

Lema propio 3. Si $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * \psi$ es uniformemente continua.

Demostración. Sean $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Una primera desigualdad es sencilla

$$|f * \psi(x) - f * \psi(x')| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \psi(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \psi(x'-y) dy \right| \quad (24)$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) (\psi(x-y) - \psi(x'-y)) dy \right| \quad (25)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |\psi(x-y) - \psi(x'-y)| dy \quad (26)$$

Ahora bien, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|\psi(u) - \psi(u')| < \varepsilon$ si $\|u - u'\| < \delta$ porque ψ , al ser continua de soporte compacto, es uniformemente continua. Luego $\|x - x'\| < \delta$ implica

$$|f * \psi(x) - f * \psi(x')| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| |\psi(x - y) - \psi(x' - y)| dy \quad (27)$$

$$< \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy \quad (28)$$

$$= \varepsilon \|f\|_1 \quad (29)$$

Siendo que $\|f\|_1 < \infty$, podemos concluir que $f * \psi$ es uniformemente continua. \square

Ejercicio 2. Probar que si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * \psi$ es continua.

Demostración. Sean $B_m = \bar{B}_m(0)$ las bolas cerradas de radio m centradas en 0. Aproximamos f mediante $f_m = f \mathbb{1}_{B_m}$ ($m \in \mathbb{N}$). La integrabilidad local de f hace de cada f_m una función integrable. Por el lema 3, las funciones $f_m * \psi$ son uniformemente continuas. Además, se da la convergencia uniforme en compactos $f_m * \psi \rightarrow f * \psi$. Para verlo fijemos un conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Existe un $M \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande, dependiendo de K , tal que $K \subseteq B_M$. Luego, para todo $x \in K$ y para todo $m \geq M$

$$f_m * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_m(y) \psi(x - y) dy \quad (30)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \mathbb{1}_{B_m}(y) \psi(x - y) dy \quad (31)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \psi(x - y) dy \quad (32)$$

$$= f * \psi(x) \quad (33)$$

Queda probada la convergencia uniforme en compactos. Pero el límite, en este caso $f * \psi$, uniforme en compactos de una sucesión de funciones uniformemente continuas, aquí las f_m , es continuo. Por lo tanto $f * \psi$ es una función continua. \square

Ejercicio 3. Probar que si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $\partial_{x_i}(\psi * f) = f * \partial_{x_i} \psi$.

Observación 2. Como consecuencia $f * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ un vector fijo. Calculamos

$$\partial_{x_i}(f * \psi)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}((f * \psi)(x + he_i) - (f * \psi)(x)) \quad (34)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\psi(x + he_i - y) - \psi(x - y)}{h} dy \quad (35)$$

El análisis de este límite constará de tres partes. Primero acotamos la región de integración. Definimos $\phi_h(y) = h^{-1}(\psi(x + he_i - y) - \psi(x - y))$ para $y \in \mathbb{R}^n$ y $h \in \mathbb{R} \setminus 0$. Podemos probar que el soporte de las todas las funciones ϕ_h está contenido en una bola si nos restringimos a los desplazamientos $h \in [-1, 1]$. Sabemos que ψ tiene soporte compacto, por lo cual se anula en $\mathbb{R}^n \setminus B_r$, el complemento de la bola centrada en 0 de radio r . Escogiendo $r' = r + \|x\| + 1$ podemos asegurar que $\|y\| \geq r'$ implica

$$r = r' - \|x\| - 1 \qquad r = r' - \|x\| - 1 \qquad (36)$$

$$\leq \|y\| - \|x\| - 1 \qquad \leq \|y\| - \|x\| - 1 \qquad (37)$$

$$\leq \|y\| - \|x + he_i\| \qquad \leq \|y\| - \|x\| \qquad (38)$$

$$\leq \|x + he_i\| - \|y\| \qquad \leq \|x\| - \|y\| \qquad (39)$$

$$\leq \|x + he_i - y\| \qquad \leq \|x - y\| \qquad (40)$$

y estas desigualdades a su vez nos permiten deducir $\psi(x + he_i - y) = \psi(x - y) = 0$. En conclusión, las funciones ϕ_h con $h \in [-1, 1]$ se anulan sobre el conjunto $\mathbb{R}^n \setminus B_{r'}$.

En segundo lugar controlamos el integrando. Por el teorema del valor medio $|\psi(x + he_i - y) - \psi(x - y)| \leq \|\partial_{x_i} \psi\|_\infty |h|$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Pero $\partial_{x_i} \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ porque $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Luego $C = \|\partial_{x_i} \psi\|_\infty < \infty$. Esto asegura $|\phi_h| \leq C$ para todo $h \in \mathbb{R} \setminus 0$.

En tercer y último lugar, aplicamos el teorema de convergencia dominada. En el primer y segundo paso probamos que $|\phi_h| \leq C \mathbb{1}_{B_{r'}}$ para todo $h \in [-1, 1]$. Partiendo de esto, el integrando $f\phi_h$ está dominado por una función $g = C|f| \mathbb{1}_{B_{r'}}$. Esta g resulta integrable porque f es localmente integrable. Luego el teorema de la convergencia dominada implica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \phi_h(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \lim_{h \rightarrow 0} \phi_h(y) dy \qquad (41)$$

Pero $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \phi_h(y) = \partial_{x_i} \psi(x - y) \qquad (\forall y \in \mathbb{R}^n) \qquad (42)$$

Es decir

$$\partial_{x_i} (f * \psi)(x) = f * (\partial_{x_i} \psi)(x) \qquad (43)$$

Con la conmutatividad de la convolución podemos llegar al enunciado preciso del ejercicio. \square

Definición 2. Dada una función ϕ diremos que es un mollifier si satisface las siguientes propiedades

- a) $\phi(x) \geq 0$;
- b) $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

$$c) \operatorname{sop}(\phi) = \overline{B_1(0)}.$$

$$d) \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1.$$

Denotamos $\phi_\delta(x) = \delta^{-n} \phi(x/\delta)$, donde $\delta > 0$.

Ejercicio 4. ¿Cuáles son las propiedades que satisface ϕ_δ ?

Respuesta. Las propiedades que podemos observar son

$$a) \phi_\delta \geq 0;$$

$$b) \phi_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n);$$

$$c) \operatorname{sop}(\phi_\delta) = \overline{B_\delta(0)};$$

$$d) \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(x) dx = 1.$$

Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la transformación lineal dada por $Tx = \delta x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. La propiedad a) se debe a que el producto de números nonegativos es un número nonegativo. b) se debe a la regla de la cadena, y a la suavidad de las funciones ϕ y la aplicación T^{-1} . c) se debe a que T es un homeomorfismo, y en consecuencia se puede calcular

$$\operatorname{sop}(\phi_\delta) = \{y \in \mathbb{R} : \phi_\delta(y) = 0\}^- \quad (44)$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : \delta^{-n} \phi(y/\delta) = 0\}^- \quad (45)$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : \phi(y/\delta) = 0\}^- \quad (46)$$

$$= \{\delta(y/\delta) : y \in \mathbb{R}^n, \phi(y/\delta) = 0\}^- \quad (47)$$

$$= \{\delta x : x \in \mathbb{R}^n, \phi(x) = 0\}^- \quad (48)$$

$$= (\delta \cdot \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0\})^- \quad (49)$$

$$= \delta \cdot \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0\}^- \quad (50)$$

$$= \delta \cdot \operatorname{sop}(\phi) \quad (51)$$

además de la ecuación $\overline{B_\delta(0)} = \delta \cdot \overline{B_1(0)}$ particular a las bolas. d) se debe al teorema de cambio de variable aplicado a la transformación lineal T

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \delta^{-n} \phi(x/\delta) dx \quad (52)$$

$$= \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(T^{-1}x) dx \quad (53)$$

$$= \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) |\det T| dy \quad (54)$$

$$= \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \delta^n dy \quad (55)$$

$$= \delta^{-n} \delta^n \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) dy \quad (56)$$

$$= 1 \cdot 1 \quad (57)$$

□

Ejercicio 5. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua luego $f_\delta = f * \phi_\delta \rightarrow f$ uniformemente en compactos de \mathbb{R}^n .

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ un vector. Calculamos usando la conmutatividad de la convolución

$$f(x) - f * \phi_\delta(x) = f(x) - \phi_\delta * f(x) = f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) f(x-y) dy \quad (58)$$

Usando la propiedad $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) dy = 1$, que mostramos en el ejercicio 4, vemos

$$f(x) - f * \phi_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) dy \cdot f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) f(x-y) dy \quad (59)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) f(x) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) f(x-y) dy \quad (60)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) (f(x) - f(x-y)) dy \quad (61)$$

También en el ejercicio 4, probamos que $\text{sop}(\phi_\delta) = \overline{B_\delta}$. Luego

$$f(x) - f * \phi_\delta(x) = \int_{\overline{B_\delta}} \phi_\delta(y) (f(x) - f(x-y)) dy \quad (62)$$

Esto dice que la diferencia $f(x) - f * \phi_\delta(x)$ en la izquierda depende del control que tengamos sobre el cambio de f sobre el conjunto $x + \overline{B_\delta}$.

Sabiendo esto, consideremos un compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ y restrinjamos $x \in K$. Este conjunto K está contenido en una bola $B_r \subseteq \mathbb{R}^n$ centrada en 0. Luego $x + \overline{B_\delta} \subseteq \overline{B_{r+\delta}}$ para todo $\delta > 0$. Si imponemos $\delta \leq 1$, entonces $x + \overline{B_\delta} \subseteq \overline{B_{r+1}}$. Pero f , al ser continua, es uniformemente continua en la bola compacta $\overline{B_{r'}}$ donde $r' = r + 1$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$, podemos elegir $\delta \in]0, 1]$ de modo tal que para todo $\delta' \in]0, \delta]$ y todo $y \in \overline{B_{\delta'}}$ se verifica la cota $|f(x) - f(x-y)| < \varepsilon$ independientemente de $x \in K$. Con esta información estimamos

$$|f(x) - f * \phi_\delta(x)| = \left| \int_{\overline{B_\delta}} \phi_\delta(y) (f(x) - f(x-y)) dy \right| \quad (63)$$

$$\leq \int_{\overline{B_\delta}} |\phi_\delta(y)| |f(x) - f(x-y)| dy \quad (64)$$

$$\leq \varepsilon \int_{\overline{B_\delta}} |\phi_\delta(y)| dy \quad (65)$$

Rematamos el cálculo usando las propiedades de nonegatividad $\phi_\delta \geq 0$, del soporte $\text{sop}(\phi_\delta) = \overline{B_\delta}$, y la integral $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y) dy = 1$, todas vistas en el ejercicio 4. A partir de estas $\int_{\overline{B_\delta}} |\phi_\delta(y)| dy = 1$. En conclusión, dado un conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ y un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $\delta' \in]0, \delta]$ y todo $x \in K$, se verifica la cota $|f(x) - f * \phi_\delta(x)| \leq \varepsilon$. Es decir, $f * \phi_\delta \rightarrow f$ uniformemente en compactos. \square

Ejercicio 6. Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ luego $f_\delta = f * \phi_\delta \rightarrow f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$.