Práctica 0
Preliminares de Análisis

Pablo Brianese

24 de abril de 2021

Definición 1. *Dadas $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ambas en $L(\mathbb{R}^n)$, definimos la convolución de la siguiente manera*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \tag{1}$$

Ejercicio 1. *Probar que si $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces valen:*

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$ *a la vez que* $(g + h) * f = g * f + h * f$
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$
4. $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$
5. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Observación 1. Las propiedades anteriores se pueden resumir diciendo que $(L^1(\mathbb{R}^n), \|-\|_1)$ es un álgebra de Banach conmutativa con la convolución como producto.

Lema propio 1. $\int_{\mathbb{R}^n} h(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)\mathrm{d}y$ *para toda $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea H la clase formada por las funciones $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ que verifican el enunciado. Por la linealidad de la integral, la combinación $\alpha h_1 + \beta h_2$ pertenece a H siempre que $h_1, h_2 \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por el teorema de convergencia monótona, si $\{h_m\}_m \subseteq H$ es una sucesión nodecreciente de funciones nonegativas que converge a una función integrable g, entonces $g \in H$. Para concluir, debemos probar que las funciones características integrables están en H. Supongamos que $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es la función característica $h = \mathbb{1}_A$ de un conjunto medible $A \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida finita. Observemos que $\mathbb{1}_A(x-y) = \mathbb{1}_{x-A}(y)$ para todo par $x, y \in \mathbb{R}^n$. A partir de esta relación pordemos calcular como, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(y)\mathrm{d}y = \lambda(A) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{x-A}(y)\mathrm{d}y = \lambda(x-A) \tag{2}$$

Ahora la ecuación que necesitamos se sigue de la invarianza por traslaciones $(+x)$ y reflexiones $(-)$ de la medida de Lebesgue, una propiedad que es facil de ver en el caso de los rectángulos que generan su σ–álgebra. Concretamente, sucede $\lambda(A) = \lambda(x - A)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Demostración. 1 Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, como consecuencia del lema 1

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y && (3)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(x-(x-y))\mathrm{d}y && (4)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y)\mathrm{d}y && (5)\\ &= g * f(x) && (6) \end{aligned}$$

$\square$

Demostración. 2 Por la ley distributiva de los números reales y la linealidad de la integral, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f * (g+h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(g+h)(x-y)\mathrm{d}y && (7)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) + f(y)h(x-y)\mathrm{d}y && (8)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^n} f(y)h(x-y)\mathrm{d}y && (9)\\ &= f * g(x) + f * h(x) && (10) \end{aligned}$$

La demostración del enunciado $(g+h) * f = g * f + h * f$ es similar. $\square$

Demostración. 4 Sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Por la linealidad de la integral

$$(\lambda(f * g))(x) = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x-y))\mathrm{d}y \qquad (11)$$

Pero por asociatividad del producto entre números reales

$$\begin{aligned} (\lambda f) * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f(x))g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x-y))\mathrm{d}y && (12)\\ f * (\lambda g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\lambda g(x-y))\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x-y))\mathrm{d}y && (13) \end{aligned}$$

Comparando los extremos derechos de las desigualdades se obtiene $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$. $\square$

Lema propio 2 (Convergencia monótona para convoluciones)**.** *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y $\{g_m\}_m$ es una sucesión nodecreciente de funciones nonegativas que convergen puntualmente a una $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\lim_{m\to\infty} f * g_m = f * g$ y de forma similar $\lim_{m\to\infty} g_m * f = g * f$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Si f^+ y f^- son las partes nonegativa y negativa de f, y $f^\pm$ es cualquiera de ellas entonces por el teorema de convergencia dominada

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} f^\pm * g_m(x) &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f^\pm(y) g_m(x-y) \mathrm{d}y &(14)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m\to\infty} f^\pm(y) g_m(x-y) \mathrm{d}y &(15)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f^\pm(y) g(x-y) \mathrm{d}y &(16)\\ &= f^\pm * g(x) &(17)\end{aligned}$$

En consecuencia el límite de las convoluciones es la convolución con el límite

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} f * g_m(x) &= \lim_{m\to\infty} f^+ * g_m(x) - \lim_{m\to\infty} f^- * g_m(x) &(18)\\ &= f^+ * g(x) - f^- * g(x) &(19)\\ &= f * g(x) &(20)\end{aligned}$$

La demostración del enunciado $\lim_{m\to\infty} g_m * f(x) = g * f(x)$ es idéntica a la que recién presentamos. □

Demostración. 5 Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Una primera desigualdad es simple

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x-y)| \mathrm{d}y \mathrm{d}x \quad (21)$$

El teorema de Tonelli nos permite intercambiar el orden de integración para obtener

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x-y)| \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| \mathrm{d}x \mathrm{d}y \quad (22)$$

El lema propio 1 simplifica esta integral mediante $\|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| \mathrm{d}x$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g\|_1 \mathrm{d}y = \|f\|_1 \|g\|_1 \quad (23)$$

□