Práctica 0
Preliminares de Análisis

Pablo Brianese

12 de abril de 2021

Definición 1. *Dadas $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ambas en $L(\mathbb{R}^n)$, definimos la convolución de la siguiente manera*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \tag{1}$$

Ejercicio 1. *Probar que si $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces valen:*

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$
4. $\lambda(f * g) = f * (\lambda g)$
5. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Observación 1. Las propiedades anteriores se pueden resumir diciendo que $(L^1(\mathbb{R}^n), \|-\|_1)$ es un álgebra de Banach conmutativa con la convolución como producto.

Solución. 1 Supongamos $f \geq 0$. Y pensemos en el caso en que g es la función característica, $g = \mathbb{1}_A$, de un conjunto boreliano $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Observemos que $\mathbb{1}_A(x-y) = \mathbb{1}_{x-A}(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Esto nos permite calcular, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, fórmulas muy similares para ambas convoluciones

$$\begin{aligned}
f * \mathbb{1}_A(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathbb{1}_A(x-y)\mathrm{d}y && (2)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathbb{1}_{x-A}(y)\mathrm{d}y && (3)\\
\mathbb{1}_A * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\mathbb{1}_A(y)\mathrm{d}y && (4)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\mathbb{1}_A(x-(x-y))\mathrm{d}y && (5)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\mathbb{1}_{x-A}(x-y)\mathrm{d}y && (6)
\end{aligned}$$

Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones simples nonegativas que convergen puntualmente a f. Por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \tag{7}$$

$\square$