

Soluciones positivas a la ecuación del calor

Pablo Brianese

16 de junio de 2021

Esta sección está dedicada a un resultado muy interesante por razones matemáticas y por su significado físico.

Una de las consecuencias de *Segundo Principio de la Termodinámica* es que la *temperatura absoluta* es siempre positiva. Este hecho sugiere que la condición natural a verificar por las soluciones de la ecuación del calor es la condición *unilateral*, $u \geq 0$. Evidentemente es lo mismo suponer $u \geq H$, pues el cambio en la escala de temperaturas $v = u - H$, conduce al caso $v \geq 0$.

Sugerimos al lector recordar las leyes de la termodinámica, para lo cual una hermosa referencia puede ser el celeberrimo curso de R.P. Feynman.

Presentaremos un resultado obtenido en 1944 por D. Widder, profesor de Harvard. Widder prueba que con la condición físicamente natural de que la temperatura sea positiva, el problema de Cauchy para la ecuación del calor tiene una única solución. Desde el punto de vista matemático este resultado es muy interesante, dado que se establece la unicidad con una condición unilateral solamente, es decir, $u(x, t) \geq 0$.

En realidad, D. Widder probó más cosas, por ejemplo, que una solución de la ecuación sea positiva y continua, se puede expresar en tiempo t por la integral de la solución fundamental por el valor de dicha solución en un tiempo anterior. Es decir, la fórmula

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u(y, 0) dy \quad (1)$$

caracteriza las soluciones positivas.

Precisaremos estos enunciados en su momento. Antes de nada diremos que la referencia que seguiremos es el trabajo del propio Widder, que se recoge en el libro: *D. Widder, "The heat equation", Academic Press, 1975.*

Empezaremos estableciendo otro resultado de unicidad, que tiene interés por sí mismo al recoger una hipótesis natural de crecimiento del dato y la solución, y que se usará a continuación. Dicho resultado está en el espíritu del teorema ?? cambiando la acotación por la ley de crecimiento $|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2}$. Este crecimiento es el natural, teniendo en cuenta el decaimiento en el infinito de la solución fundamental.

Más precisamente se tiene el siguiente enunciado.

Introducimos la solución fundamental de la ecuación fundamental de la ecuación del calor como

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t} & \text{si } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Observemos que satisface las siguientes propiedades:

- no está definida en $t = 0$ porque $\lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(x, t) = 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$) y $\lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(0, t) = \infty$;
- satisface la ecuación $\Phi_t - \nabla^2 \Phi = 0$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus (0, 0)$;
- $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1$ ($\forall t > 0$);
- la función $(x, t) \mapsto (ax, a^2 t)$ preserva soluciones de la ecuación del calor. Observemos que también $\Phi(ax, a^2 t) = \Phi(x, t)$ (comparar con transformaciones ortogonales y soluciones radiales en la ecuación de Laplace).

Teorema 1. Sea $u \in C(\mathbb{R}^n \times]0, T[)$, verificando el problema

$$\begin{cases} u_t - \nabla^2 u = 0 & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, T[\\ |u(x, t)| < M e^{a|x|^2} & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, T[\\ u(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3)$$

para ciertas constantes positivas M, a . Entonces $u(x, t) = 0$ para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, T[$.

Demostración. La demostración se hace iterando el resultado sobre intervalos del tiempo de longitud convenientemente pequeña. Para empezar elegimos A tal que $A > a$ y $A > 1/(4T)$. Consideramos la función

$$v(x, t) = \frac{1}{(1 - 4At)^{n/2}} \exp\left(\frac{A|x|^2}{1 - 4At}\right) \quad (4)$$

que como se observa es precisamente

$$v(x, t) = (4\pi)^{n/2} \Phi(\lambda x, 1 + \lambda^2 t) \quad \text{donde } \lambda = i\sqrt{4A} \quad (5)$$

y Φ es la solución fundamental de la ecuación del calor que introdujimos en 2. Simplemente la regla de la cadena y la expresión 5 demuestran que $v(x, t)$ es solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n \times]0, 1/(4A)[$. Además, como para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $v(x, t)$ es una función creciente en t , se concluye que

$$v(x, t) \geq v(x, 0) = e^{A|x|^2} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, 1/(4A)[\quad (6)$$

Fijando un punto (x_0, t_0) en la banda $\mathbb{R}^n \times]0, 1/(4A)[$, elegimos $R > |x_0|$ y tomamos un múltiplo de la función v . Exactamente tomamos

$$w(x, t) = M e^{(a-A)R^2} v(x, t) \quad (7)$$

Sea ahora el cilindro $D = \{(x, t) | |x| < R, 0 < t < 1/(4A)\}$ y comparemos las funciones $|u(x, t)|$ y $w(x, t)$ sobre la frontera parabólica de D , es decir, sobre los puntos $(x, 0)$, con $|x| < R$ y los puntos (x, t) , con $|x| = R$ y $0 \leq t \leq 1/(4A)$. Sobre los primeros, es decir, la base, se tiene

$$|u(x, 0)| = 0 < w(x, 0) = Me^{(a-A)R^2} e^{A|x|^2} \quad (8)$$

y sobre la superficie lateral, es decir si $|x| = R$

$$|u(x, t)| < Me^{aR^2} \leq Me^{(a-A)R^2} v(x, 0) \leq Me^{(a-A)R^2} v(x, t) = w(x, t) \quad (9)$$

Por tanto, aplicando el principio del máximo, teorema ?? , se concluye que

$$-w(x, t) \leq u(x, t) \leq w(x, t) \quad \text{para } (x, t) \in D \quad (10)$$

En particular,

$$|u(x_0, t_0)| < Me^{(a-A)R^2} v(x_0, t_0) \quad (11)$$

que se verifica para todo $R > |x|$. Tomando límites en 11 cuando $R \rightarrow \infty$, obtenemos

$$u(x_0, t_0) = 0 \quad (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times]0, 1/(4A)[\quad (12)$$

ya que hemos elegido $A > a$. Para acabar, repetimos el argumento anterior a la función $u(x, t + \tau)$, con $0 < \tau < 1/(4A)$; de esta forma concluimos que $u(x, y) \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \times]0, 2/(4A)[$. Repitiendo el argumento una cantidad finita de veces, concluimos la prueba. \square

Lema 1. Sea $u(x, t)$ solución de la ecuación del calor tal que $u(x, 0) = 0$, entonces $v(x, t) = \int_0^t u(x, s) ds$ es solución de la ecuación del calor. Además si u es positiva, v es creciente en t para x fijo y es subarmónica como función de x para t fijo.

Demostración. En efecto, en primer lugar, $v_t = u$ en virtud del teorema fundamental del cálculo. En segundo lugar

$$\nabla^2 v(x, t) = \int_0^t \nabla^2 u(x, s) ds = \int_0^t u_s(x, s) ds = u(x, t) \quad (13)$$

por tanto, $v_t = \nabla^2 v$, es decir, v satisface la ecuación del calor.

Si $u \geq 0$ se tiene $v_t = u = \nabla^2 v \geq 0$, por tanto tenemos las propiedades anunciadas para v . \square

Necesitaremos el siguiente lema, que viene a establecer que entre todas las posibles soluciones positivas de la ecuación del calor, la más pequeña es la que da la fórmula integral 1 . Este resultado será crucial para probar el resultado de unicidad, y como consecuencia, el teorema de representación de soluciones positivas de Widder.

Definición 1 (Núcleo de Gauss).

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4}\right) \quad (14)$$

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}^n} K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \quad (15)$$

Lema 2. Sea $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ tal que $u_t, u_{x_i x_j} \in C(\mathbb{R}^n \times]0, T[)$. Supongamos que $u_t = \nabla^2 u$ y $u \geq 0$. Entonces se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)u(y,0)dy \leq u(x,t) \quad (16)$$

Demostración. Lo primero que no está claro es que la integral en 16 sea finita. Por simplicidad llamaremos $f(x) = u(x,0)$ y consideramos una función de corte regular, precisamente, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ verificando

$$\phi_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq R-1 \\ R-|x| & \text{si } R-1 \leq |x| \leq R \\ 0 & \text{si } R \leq |x| \end{cases} \quad (17)$$

Si se define ahora

$$v_R(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)f(y)\phi_R(y)dy \quad (18)$$

es finita pues $f\phi$ es continua y con soporte en una bola. El teorema ?? establece que la función v_R definida por ?? verifica el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial v_R}{\partial t} - \nabla^2 v_R = 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0, T[\\ v_R(x,t) \geq 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times]0, T[\\ v_R(x,0) = f(x)\phi_R(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (19)$$

Sea $M_R = \max_{|y| < R} f(y)$ y sea $|x| > R$, entonces

$$0 \leq v_R(x,t) \quad (20)$$

$$\leq M \int_{|y| < R} K(x-y,t)dy \quad (21)$$

$$\leq \frac{M}{\sqrt{\pi}^n} \int_{|y| < R} \frac{1}{|x-y|^n} dy \quad (22)$$

$$\leq \frac{M}{\sqrt{\pi}^n} \int_{|y| < R} \frac{1}{||x|-R|^n} dy \quad (23)$$

$$\leq \frac{MR^n c_n}{||x|-R|^n} \quad (24)$$

pues se tiene que $|s|^n e^{-|s|^2} < 1$ y $|x - y| \geq ||x| - R|$ cuando x está en el exterior de la bola de radio R . Por consiguiente, dado $\varepsilon > 0$

$$0 \leq v_R(x, t) \leq \varepsilon \quad \text{si } |x| \geq \rho(M, R, n) \quad (25)$$

En particular, tenemos

1. $0 \leq v_R(x, t) \leq \varepsilon + u(x, t)$ si $|x| = \rho$, $0 < t < T$, ya que por hipótesis u es positiva en toda la banda.
2. $v_R(x, 0) \leq f(x) = u(x, 0) \leq u(x, 0) + \varepsilon$ si $|x| \leq \rho$.

Entonces, ?? y ?? junto con el principio del máximo, implican que

$$v_R(x, t) \leq u(x, t) + \varepsilon \quad \text{si } |x| < \rho, 0 \leq t < T \quad (26)$$

Además de ?? y ser $u \geq 0$ se concluye que para todo $\varepsilon > 0$

$$v_R(x, t) \leq u(x, t) + \varepsilon \quad \text{para todo } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, T[\quad (27)$$

Si observamos que $v_R(x, t) \leq v_{R'}(x, t)$ y $\phi_R(x) \leq \phi_{R'}(x)$ si $R < R'$ en todo punto y para $0 \leq t < T$, podemos pasar al límite aplicando el teorema de convergencia monótona, es decir, se tiene

$$0 \leq v(x, t) = \lim_{R \rightarrow \infty} v_R(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x - y) f(y) dy \leq u(x, t) \quad (28)$$

que prueba que la integral es finita y, de paso, el lema. \square

La siguiente consecuencia consiste en hacer una traslación en el tiempo, pero es útil tenerla escrita con precisión.

Corolario 1. Sea u en las hipótesis del lema ??. Si $t_1 \in]0, T[$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x - y) u(y, t_1) dy \leq u(x, t + t_1) \quad \text{si } 0 < t < T - t_1 \quad (29)$$

La etapa decisiva de los resultados de Widder viene a continuación.

Teorema 2. Sea $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, tal que $u_t, u_{x_i x_j} \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$. Supongamos que

1. $u_t - \nabla^2 u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times [0, T]$;
2. $u(x, t) \geq 0$ en $\mathbb{R}^n \times [0, T]$;
3. $u(x, 0) = 0$ en \mathbb{R}^n .

Entonces $u(x, t) \equiv 0$ si $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, T[$.

Demostración. Por el lema ?? se tiene que

$$v(x, t) = \int_0^t u(x, s) ds \quad (30)$$

es solución de la ecuación del calor y al ser $u \geq 0$, $v_t \geq 0$ y $\nabla^2 v \geq 0$. Observamos que, si se prueba que $v(x, t) \equiv 0$, se tiene $u(x, t) \equiv 0$. Por tanto suponemos, sin que ello suponga restricción, que u además verifica

1. $u_t \geq 0$;
2. $\nabla^2 u \geq 0$, es decir, u es subarmónica como función de x para t fijo.

Fijamos $t_1 \in]0, T[$ y $t_0 \in]0, T - t_1[$. Por el corolario ?? se tiene que

$$M = \sqrt{4\pi t_0}^n \int_{\mathbb{R}^n} K_{t_0}(y) u(y, t_1) dy \leq \sqrt{4\pi t_0}^n u(0, t_0 + t_1) < \infty \quad (31)$$

Es claro que si $|y| \leq 2|x|$ se tiene

$$\sqrt{4\pi t_0}^n K_{t_0}(y) = \exp\left(-\frac{|y|^2}{4t_0}\right) \geq \exp\left(-\frac{|x|^2}{t_0}\right) \quad (32)$$

De otra parte, como u es subarmónica se tiene la desigualdad de la media para bolas ?? , es decir,

$$u(x, t_1) \leq \frac{1}{|B_1||x|^n} \int_{|x-y| \leq |x|} u(y, t_1) dy \leq \frac{1}{|B_1||x|^n} \int_{|y| \leq 2|x|} u(y, t_1) dy \quad (33)$$

pues se tiene que la bola de centro x y radio $|x|$ está contenida en la bola de centro el origen y radio $2|x|$. Como consecuencia de ?? , y usando también ??, concluimos que

$$|x|^n u(x, t_1) \exp\left(-\frac{|x|^2}{t_0}\right) \leq \frac{1}{|B_1|} \int_{|y| \leq 2|x|} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4t_0}\right) u(y, t_1) dy \quad (34)$$

$$\leq \frac{\sqrt{4\pi t_0}^n}{|B_1|} \int_{\mathbb{R}^n} K_{t_0}(y) u(y, t_1) dy \quad (35)$$

$$= \frac{M}{|B_1|} \quad (36)$$

Es decir, hemos demostrado que con $M_1 := M/|B_1|$

$$0 \leq u(x, t_1) \leq M_1 \frac{\exp\left(-\frac{|x|^2}{t_0}\right)}{|x|^n} \leq M_1 \exp\left(-\frac{|x|^2}{t_0}\right) \quad (37)$$

si $|x| > 1$. Como $u(x, t_1)$ es continua para $|x| \leq 1$, está acotada en la bola unidad. Por consiguiente, para una constante conveniente M_2 , se tiene

$$0 \leq u(x, t_1) \leq M_2 \exp\left(-\frac{|x|^2}{t_0}\right) \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, t_1[\quad (38)$$

Aplicando el teorema ?? resulta $u(x, t) \equiv 0$ en la banda $\mathbb{R}^n \times]0, t_1[$. Como tanto t_0 y t_1 son arbitrarios se prueba el teorema. \square

Para finalizar este apartado obtendremos una consecuencia importante del teorema ?? que mejora el lema ??, estableciéndose la representación de las soluciones positivas de la ecuación del calor como la integral de Gauss del valor inicial.

Teorema 3. *Sea $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ tal que $u_t, u_{x_i x_j} \in C(\mathbb{R}^n \times]0, T])$. Supongamos que*

1. $u_t - \nabla^2 u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times [0, T]$;
2. $u(x, t) \geq 0$ en $\mathbb{R}^n \times [0, T]$;

Entonces se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x - y)u(y, 0)dy = u(x, t) \quad (39)$$

Demostración. En el lema ?? se estableció la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x - y)u(y, 0)dy \leq u(x, t) \quad (40)$$

Por otra parte, ambos miembros de la desigualdad son solución de la ecuación del calor, por tanto

$$w(x, t) = u(x, t) - \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x - y)u(y, 0)dy \geq 0 \quad (41)$$

verifica las hipótesis del toerema ??. Consecuentemente $w(x, t) \equiv 0$ que es lo que queríamos. \square