Ecuaciones diferenciales
Clase 0

Pablo Brianese

17 de agosto de 2021

0.1. Teorema de la Divergencia de Gauss

Sea $n = 2$ y consideremos una función $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1. Podemos escribir en coordenadas $\vec{F}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$.

Sea R una región que puede expresarse como $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \phi_1(x) < y < \phi_2(x)\}$, una región delimitada por las gráficas de dos funciones continuamente derivables $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, que satisfacen $\phi_1(a) = \phi_2(a)$, $\phi_1(x) < \phi_2(x)$ para todo $x \in]a, b[$, $\phi_1(b) = \phi_2(b)$. Calculemos ahora una primera integral

$$\int_R \frac{\partial f_2}{\partial y} dydx = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial f_2}{\partial y} dydx = \int_a^b f_2(x, \phi_2(x)) - f_2(x, \phi_1(x))dx \quad (1)$$

Sea $\vec{n} = \tilde{n}/\|\tilde{n}\|$ la normal exterior de la frontera ∂R, donde

$$\tilde{n} = \begin{cases} (-\phi_2'(x), 1) & \text{en } \Gamma_2 = \{(x, \phi_2(x)) : x \in [a, b]\} \\ (\phi_1'(x), -1) & \text{en } \Gamma_1 = \{(x, \phi_1(x)) : x \in [a, b]\} \end{cases} \quad (2)$$

con

$$\|\tilde{n}\| = \begin{cases} \sqrt{1 + \phi_2'(x)^2} & \text{en } \Gamma_2 = \{(x, \phi_2(x)) : x \in [a, b]\} \\ \sqrt{1 + \phi_1'(x)^2} & \text{en } \Gamma_1 = \{(x, \phi_1(x)) : x \in [a, b]\} \end{cases} \quad (3)$$

Entonces, si $\vec{n} = (n_1, n_2)$, se tiene

$$n_2 = \begin{cases} (1 + \phi_2'(x)^2)^{-1/2} & \text{en } \Gamma_2 = \{(x, \phi_2(x)) : x \in [a, b]\} \\ -(1 + \phi_1'(x)^2)^{-1/2} & \text{en } \Gamma_1 = \{(x, \phi_1(x)) : x \in [a, b]\} \end{cases} \quad (4)$$

Esto nos permite calcular una segunda integral

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} f_2 n_2 d\sigma(x) &= \int_{\Gamma_1} f_2 n_2 d\sigma(x) + \int_{\Gamma_2} f_2 n_2 d\sigma(x) && (5) \\ &= \int_a^b -\frac{f_2(x, \phi_1(x))}{\sqrt{1 + \phi_1'(x)^2}} \left(\sqrt{1 + \phi_1'(x)^2} dx \right) && (6) \\ &\quad + \int_a^b \frac{f_2(x, \phi_2(x))}{\sqrt{1 + \phi_2'(x)^2}} \left(\sqrt{1 + \phi_2'(x)^2} dx \right) && (7) \\ &= \int_a^b f_2(x, \phi_2(x)) - f_2(x, \phi_1(x))dx && (8) \end{aligned}$$

Comparando la primera y la segunda integral, resulta

$$\int_R \frac{\partial f_2}{\partial y} dydx = \int_{\partial R} f_2 n_2 d\sigma \quad (9)$$

Supongamos que R también se puede expresar como $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]c,d[\,, \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$, donde las funciones $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ son continuamente derivables y satisfacen $\psi_1(c) = \psi_2(c)$, $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ para todo $y \in]c,d[$, $\psi_1(b) = \psi_2(b)$. Cálculos análogos a los anteriores prueban que

$$\int_R \frac{\partial f_1}{\partial x} dxdy = \int_{\partial R} f_1 n_1 d\sigma \tag{10}$$

Por tanto, de (9) y de (10) se tiene

$$\int_R (\nabla \cdot \vec{F}) dxdy = \int_{\partial R} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma \tag{11}$$

La idea intuitiva es que la *variación* de $\vec{F}$ en R es igual a la *cantidad* de $\vec{F}$ que entra o sale a través de ∂R. El segundo término de la ecuación, se llama *flujo del campo $\vec{F}$ a través de ∂R.*

Tanto el flujo como la divergencia tienen perfecto sentido en dimensiones mayores; nos proponemos dar condiciones suficientes sobre los dominios $R \subseteq \mathbb{R}^n$, de forma que la expresión (11) sea válida. El caso más sencillo para el que se tiene la igualdad (11) es el siguiente.

Consideremos $\vec{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ campo de vectores en $\mathbb{R}^n$ y supongamos que 1. f_i tiene derivadas primeras continuas para $i = 1, \ldots, n$; 2. existe una bola B cerrada tal que $f_i(x) = 0$ si $x \notin B$, para $i = 1, \ldots, n$. Bajo estas condiciones podemos probar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot \vec{F} dx = 0 \tag{12}$$

En efecto, por definición $\nabla \cdot \vec{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$. Consideremos un $i \in \{1, \ldots, n\}$ arbitrario. Usando el teorema de Fubini para funciones integrables (de soporte compacto, en nuestro caso) deducimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \tag{13}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) dx_i dx_{\tau(2)} \cdots dx_{\tau(n)} \tag{14}$$

donde τ es una permutación del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ con $\tau(1) = i$. Pero, dado que f_i se anula fuera de la bola B, el teorema fundamental del cálculo implica

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) dx_i = 0 \tag{15}$$

Luego $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx = 0$. Siendo i arbitrario, se sigue que es nula la integral sobre $\mathbb{R}^n$ de la divergencia del campo $\vec{F}$.

La segunda observación elemental que vamos a hacer posteriormente para hacer una demostración con cierta generalidad, es la siguiente. Consideremos $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ un abierto acotado y $\phi \in C^1(U)$ una función positiva. Llamamos S a la gráfica de ϕ pensada como subconjunto de $\mathbb{R}^n$; es decir,

$$\begin{aligned} S &= \{(\overline{x}, \phi(\overline{x})) : \overline{x} \in U\} && (16) \\ &= \{(x_1, \dots, x_{n-1}, \phi(x_1, \dots, x_{n-1})) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U\} && (17) \end{aligned}$$

Dada esta descripción paramétrica, podemos describir el espacio tangente a S en un punto $p \in S$ como aquel generado por el conjunto de vectores tangentes

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{x}, \phi(\overline{x}))\bigg|_{\overline{x}=p} \right\}_{i=1}^{n-1} = \left\{ e_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\overline{x}) e_n \right\}_{i=1}^{n-1} \tag{18}$$

Encontramos que el vector $(-\phi_{x_1}(\overline{x}), \dots, -\phi_{x_{n-1}}(\overline{x}), 1)$ es ortogonal a cada uno de ellos. Eso nos permite calcular ν, normal a S con la componente $\nu_n(\overline{x}) > 0$, resultando

$$\nu(p) = \frac{1}{(1 + \|\nabla \phi(\overline{x})\|^2)^{1/2}} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\overline{x}), \dots, -\frac{\partial \phi}{\partial x_{n-1}}(\overline{x}), 1 \right) \tag{19}$$

Consideremos ahora el conjunto *cilíndrico* C, definido por

$$C = \{(\overline{x}, x_n) : \overline{x} \in U, x_n \in [0, \phi(\overline{x})]\} \tag{20}$$

Si se toma f con derivadas primeras continuas en C, tal que $f(\overline{x}, 0) = 0$, se tiene

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) dx = \int_S f \nu_n d\sigma \tag{21}$$

En efecto, simplificar el lado izquierdo de la ecuación es sencillo

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) dx = \int_U \int_0^{\phi(\overline{x})} \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}, x_n) dx_n d\overline{x} = \int_U f(\overline{x}, \phi(\overline{x})) d\overline{x} \tag{22}$$

Mientras que la misma tarea es compleja para la integral de superficie del lado derecho. Por definición

$$\int_S f \nu_n d\sigma = \int_U f(\overline{x}, \phi(\overline{x})) \nu_n(\overline{x}, \phi(\overline{x})) g(\overline{x}) d\overline{x} \tag{23}$$

donde la misma definición dice

$$g(\overline{x}) = \text{abs det} \begin{pmatrix} \nu(\overline{x}, \phi(\overline{x})) \\ e_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\overline{x}) e_n \\ \vdots \\ e_{n-1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_{n-1}}(\overline{x}) e_n \end{pmatrix} \tag{24}$$

Por construcción $\nu_n(\overline{x}, \phi(\overline{x})) = \left(1 + \|\nabla\phi(\overline{x})\|^2\right)^{-1/2}$. Pero el cálculo de g es complejo e involucra un proceso inductivo. Comenzamos con

$$\begin{aligned}
&g(\overline{x}) && (25)\\
&= \operatorname{abs}\det \begin{pmatrix} \nu(\overline{x}, \phi(\overline{x})) \\ e_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(\overline{x}) e_n \\ \vdots \\ e_{n-1} + \frac{\partial\phi}{\partial x_{n-1}}(\overline{x}) e_n \end{pmatrix} && (26)\\
&= \operatorname{abs}\det \begin{pmatrix} \left(1 + \|\nabla\phi\|^2\right)^{-1/2} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial\phi}{\partial x_{n-1}}, 1\right) \\ \left(1, 0, \dots, 0, \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right) \\ \vdots \\ \left(0, \dots, 0, 1, \frac{\partial\phi}{\partial x_{n-1}}\right) \end{pmatrix} && (27)\\
&= \frac{1}{\left(1 + \|\nabla\phi\|^2\right)^{1/2}} \operatorname{abs}\det \begin{pmatrix} -\phi_{x_1} & -\phi_{x_2} & \dots & -\phi_{x_{n-2}} & -\phi_{x_{n-1}} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \phi_{x_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \phi_{x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \phi_{x_{n-2}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \phi_{x_{n-1}} \end{pmatrix} && (28)
\end{aligned}$$

Con el objetivo de facilitar la comprensión del cálculo, definimos $a_i = -\phi_{x_i}(\overline{x})$ para $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Calculamos el determinante a lo largo de su primera columna

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} && (29)\\
&= (-a_1) \begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} && (30)
\end{aligned}$$

$$
-(1)\begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} \tag{31}
$$

$$
= -a_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} \tag{32}
$$

Sumando multiplos apropiados de la primera fila a las demás, el primer término se simplifica notablemente sin alterar el resultado del determinante (por propiedades de las llamadas matrices elementales)

$$
\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{33}
$$

$$
= (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{34}
$$

$$
= (-1)^{n-2} a_1 \tag{35}
$$

Esa simplificación nos lleva a la identidad

$$\begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} \tag{36}$$

$$= (-1)^{n-1} a_1^2 - \begin{vmatrix} -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} \tag{37}$$

Que nos deja ver una cierta regularidad, un cierto patrón. Para describirlo, definimos $D_1, \dots, D_m$ como

$$D_k = \begin{vmatrix} -a_k & -a_{k+1} & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_k \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} \tag{38}$$

Repetir el cálculo del determinante a lo largo de la primera columna, arroja

$$D_k = (-1)^{n-k} a_k^2 - D_{k+1}, \tag{39}$$

para los primeros términos de la sucesión, con $k \in \{1, \dots, n-2\}$. Y el último puede calcularse de forma exacta

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} -a_{n-1}^2 & 1 \\ 1 & -a_{n-1} \end{vmatrix} = -a_{n-1}^2 - 1 = (-1)^{n-(n-1)}(a_{n-1}^2 + 1) \tag{40}$$

Luego

$$\begin{aligned} D_{n-1} &= (-1)^{n-(n-1)}(a_{n-1}^2 + 1) && (41) \\ D_{n-2} &= (-1)^{n-(n-2)} a_{n-2}^2 - (-1)^{n-(n-1)}(a_{n-1}^2 + 1) && (42) \\ &= (-1)^{n-(n-2)}(a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 + 1) && (43) \\ &\vdots \\ D_k &= (-1)^{n-k} a_k^2 - (-1)^{n-(k+1)}(a_{k+1}^2 + \dots + a_{n-1}^2 + 1) && (44) \\ &= (-1)^{n-k}(a_k^2 + \dots + a_{n-1}^2 + 1) && (45) \\ &\vdots \\ D_1 &= (-1)^{n-1}(a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 + 1) && (46) \end{aligned}$$

Es decir

$$\det\begin{pmatrix} -\frac{\partial\phi}{\partial x_1} & -\frac{\partial\phi}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial\phi}{\partial x_{n-2}} & -\frac{\partial\phi}{\partial x_{n-1}} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \frac{\partial\phi}{\partial x_{n-2}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \frac{\partial\phi}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix} \tag{47}$$

$$= (-1)^{n-1}\left(\phi_{x_1}^2 + \cdots + \phi_{x_{n-1}}^2 + 1\right) \tag{48}$$

$$= (-1)^{n-1}\left(\|\nabla\phi\|^2 + 1\right) \tag{49}$$

Por lo tanto

$$g(\overline{x}) = \left(\|\nabla\phi\|^2 + 1\right)^{1/2} \tag{50}$$

Aún más importante

$$\nu_n(\overline{x}, \phi(\overline{x}))g(\overline{x}) = 1 \tag{51}$$

Luego

$$\int_S f\nu_n d\sigma = \int_U f(\overline{x}, \phi(\overline{x}))d\overline{x} \tag{52}$$

Las dos observaciones anteriores van a permitir demostrar un *teorema de la divergencia de tipo local* en dominios con algunas condiciones que se precisarán rápidamente y que llamaremos 'regulares'. Se probará: Dado un dominio regular, existen entornos de sus puntos, tales que la el teorema de la divergencia de Gauss se verifica para campos continuamente diferenciales soportados en dichos entornos.

Soportado en un entorno significa que se hacen cero fuera de tal entorno. Se define el *soporte* de una función f como el cierre de los puntos x tales que $f(x) \neq 0$, es decir,

$$\mathrm{sop}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \tag{53}$$

Hay que explicar ahora lo que entenderemos por un dominio regular y lo que se entiende por entorno de los puntos del dominio.

Dado $D \subseteq \mathbb{R}^n$, diremos que es un *dominio* si es abierto y es conexo; ∂D denotará su frontera.

Definición 1. *Un dominio acotado $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que es regular si para cada $x_0 \in \partial D$ existe un entorno U de x_0 en $\mathbb{R}^n$ y una función $\phi : U \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable, de forma que*

1. $\nabla\phi(x) \neq 0$ *si* $x \in U$*;*
2. $\partial D \cap U = \{x \in U : \phi(x) = 0\}$*;*
3. $D \cap U = \{x \in U : \phi(x) < 0\}$

Lo que establece la definición anterior es que un dominio regular tiene su frontera definida localmente por ceros de funciones continuamente diferenciales, es decir, por trozos de superficies diferenciables en $\mathbb{R}^n$ definidas implicitamente.

Sea D un dominio regular y sea $x \in \partial D$. Un vector normal a ∂D en x viene dado por $n = \nabla\phi(x)$, donde ϕ es una función que define ∂D en el entorno de x como en la definición de regularidad. Diremos que n es *normal exterior* a ∂D en x si para $\delta > 0$ suficientemente pequeño y $0 < t < \delta$ se verifican

$$x - tn \in D \qquad\qquad x + tn \in \mathbb{R}^n \setminus D \tag{54}$$

Para terminar, denotaremos por $\nu(x)$ a la normal exterior unitaria en x a ∂D. Si D es regular, entonces $\nu(x)$ es un campo continuo en ∂D. Compruebe el lector este extremo.

Lema 1. *Sea D un dominio regular en $\mathbb{R}^n$ y $\vec{F}$ un campo continuamente diferenciable. Si T es una traslación ($T(x) = x + t$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ donde $t \in \mathbb{R}^n$), entonces*

$$\int_D \nabla \cdot \vec{F} dx = \int_{TD} \nabla \cdot (F_i \circ T^{-1}) dx \tag{55}$$

Demostración. Por el teorema de cambio de variables, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\int_D \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)dx = \int_{TD} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(T^{-1}u) \det\left(D_u T^{-1}\right) du \tag{56}$$

$$= \int_{TD} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(u-t) \det(I) du \tag{57}$$

$$= \int_{TD} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(u-t) du \tag{58}$$

□

Lema 2. *Sea D un dominio regular en $\mathbb{R}^n$ con clausura $\overline{D} = D \cup \partial D$ compacta, y sea $x_0 \in \overline{D}$. Existe un entorno U de x_0 tal que: para todo campo $\vec{F}$ continuamente diferenciable soportado en U, si T es una traslación ($T(x) = x + t$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ donde $t \in \mathbb{R}^n$), entonces*

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma = \int_{\partial(TD)} (\vec{F} \circ T^{-1}) \cdot \nu d\sigma \tag{59}$$

Demostración. Primero realizaremos la demostración para $x_0 \in D$, y luego nos encargaremos del caso $x_0 \in \partial D$. Si $x_0 \in D$, entonces existe una bola $B(x_0, r)$ de radio $r > 0$ lo suficientemente pequeño como para garantizar $B(x_0, r) \subseteq D$. Sea $\vec{F}$ un campo continuamente diferenciable soportado en $B(x_0, r)$. Entonces $\vec{F} = 0$ sobre ∂D, y

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma = 0 \tag{60}$$

Por otra parte, dado que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo, tenemos que TD es un dominio regular con clausura compacta; y, por el mismo motivo, $\vec{F} \circ T^{-1}$ es continuamente diferenciable. Por eso está bien definida la integral de la derecha en (59). Más aún, $\vec{F} \circ T^{-1} = 0$ sobre $T(\partial D)$. Pero $T(\partial D) = \partial(TD)$, porque T es un difeomorfismo. Entonces $\vec{F} \circ T^{-1} = 0$ sobre $\partial(TD)$, y

$$\int_{\partial(TD)} (\vec{F} \circ T^{-1}) \cdot \nu d\sigma = 0 \tag{61}$$

Ahora supongamos que $x_0 \in \partial D$. Porque D es un dominio regular, su frontera ∂D es una variedad de clase C^1 con dimensión $n-1$. Luego existen un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, una función $\varphi : U_0 \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y un entorno abierto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 tales que 1. $\varphi(U) = \partial D \cap V$; 2. $\varphi : U \to \partial D \cap V$ es un homeomorfismo; 3. y $D\varphi(u)$ tiene rango $n-1$ para todo $u \in U$.

Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo continuamente diferenciable con soporte en V. Por definición

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \nu d\sigma = \int_U \vec{F}(\varphi(u)) \cdot \nu(\varphi(u)) g(u) du \tag{62}$$

Podemos escribir al vector normal exterior ν y al factor g como funciones de $D\varphi(u)$. Es decir que $g = g(D\varphi(u))$, $\nu = \nu(D\varphi(u))$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \nu d\sigma &= \int_U \vec{F}(\varphi(u)) \cdot \nu(D\varphi(u)) g(D\varphi(u)) du && (63)\\
&= \int_U \vec{F}(\varphi(u) + t - t) \cdot \nu(D\varphi(u)) g(D\varphi(u)) du && (64)\\
&= \int_U \vec{F}((\varphi + t)(u) - t) \cdot \nu(D(\varphi + t)(u)) g(D(\varphi + t)(u)) du && (65)\\
&= \int_U \vec{F} \circ T^{-1}((\varphi + t)(u)) \cdot \nu(D(\varphi + t)(u)) g(D(\varphi + t)(u)) du && (66)\\
&= \int_U \vec{F} \circ T^{-1}((T\varphi)(u)) \cdot \nu(D(T\varphi)(u)) g(D(T\varphi)(u)) du && (67)
\end{aligned}$$

□

Lema 3. *Sea D un dominio regular en $\mathbb{R}^n$ con clausura $\overline{D} = D \cup \partial D$ compacta. Entonces dado $x_0 \in \overline{D}$ existe un entorno U de x_0 tal que para todo campo $\vec{F}$ continuamente diferenciable y soportado en U, se verifica*

$$\int_D \nabla \cdot \vec{F} dx = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \nu d\sigma \tag{68}$$

Demostración. En un primer momento supondremos que $x_0 \in D$, y probaremos el lema solo en este caso. Si $x_0 \in D$, entonces podemos encontrar un $r > 0$ tal que

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\} \subseteq D \tag{69}$$

Sea $\vec{F}$ un campo continuamente diferenciable en D. Si su soporte se encuentra contenido en $B(x_0, r)$, entonces $\operatorname{sop} \vec{F}$ se encuentra a una distacia positiva del complemento de dicha bola. Luego, extender $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^n$ por cero fuera de la bola, lo convierte en un campo $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable y con soporte compacto. Por (12) para tal campo se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot \tilde{F} dx = \int_D \nabla \cdot \vec{F} dx = 0 = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \nu d\sigma \tag{70}$$

Es decir, si $x_0 \in D$ se tiene demostrado el lema.

Supongamos ahora que $x_0 \in \partial D$. La estrategia es probar que fijada una dirección coordenada, $i = 1, \ldots, n$ se puede construir un entorno U_i en la topología relativa a la de $\mathbb{R}^n$ en $\overline{D}$, tal que si un campo $\vec{F}$ continuamente diferenciable en D, está soportado en U_i, entonces

$$\int_{\partial D} F_i \nu_i d\sigma = \int_D \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx \tag{71}$$

siendo F_i la coordenada i–ésima de $\vec{F}$ y ν_i la correspondiente componente de la normal exterior a ∂D. De esta forma considerando $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, se tendrá probado el lema.

Probaremos para $i = n$, tratándose de igual manera el resto de las coordenadas. Una observación adicional es necesaria. Si sometemos a giros y traslaciones al dominio D los dos miembros $\int_{\partial D} F_i \nu_i d\sigma$, $\int_D \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx$ permanecen invariantes. Por tanto, podemos suponer que la coordenada n–ésima de x_0 es positiva y que $\nu_n(x_0) > 0$.

Como, por hipótesis, D es regular existe W entorno de x_0 y $\phi : W \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable tal que

$$\nabla\phi(x_0) \neq 0, \quad \partial D \cap W = \{x \in W : \phi(x) = 0\}, \quad D \cap W = \{x \in W : \phi(x) < 0\} \tag{72}$$

Por el teorema de la función implícita existen, un abierto $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ entorno de $\overline{x_0} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, y una $\psi : V \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable, tales que $\phi(\overline{x}, \psi(\overline{x})) = 0$ para $\overline{x} \in V$. Haciendo V pequeño si es preciso se tiene por continuidad que $\psi(\overline{x}) > 0$ $(\forall \overline{x} \in V)$ dado que, por hipótesis $(x_0)_n = \psi(\overline{x}) > 0$. Para V elegido verificando lo anterior consideramos la parte de ∂D dada por el grafo de ψ, es decir, $S = \{(\overline{x}, \psi(\overline{x})) : \overline{x} \in V)\}$.

Además, como $\nu_n(x_0) > 0$, se tiene, en particular $\frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x_0) > 0$. Y por tanto existe $\delta > 0$ tal que, si $|\overline{x} - \overline{x}_0| < \delta$ y $|x_n - (x_0)_n| < \delta$, entonces $\frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\overline{x}, x_n) > 0$. Se toma δ suficientemente pequeño para que $B = \{\overline{x} : |\overline{x} - \overline{x}_0| < \delta\} \subseteq V$. Llamemos $R = \{(\overline{x}, x_n) : |\overline{x} - \overline{x}_0| < \delta, |x_n - (x_0)_n| < \delta\}$ y definamos el intervalo $I_{\overline{x}} = \{x_n : (\overline{x}, x_n) \in R\}$, entonces, en particular, la función $g_{\overline{x}}(x_n) = \phi(\overline{x}, x_n)$ es creciente en $I_{\overline{x}}$. Además, para cada $\overline{x}$ el intervalo $I_{\overline{x}}$ contiene el valor $\psi(\overline{x})$, que es donde $\phi(\overline{x}, \psi(\overline{x})) = 0$. Como $\phi(\overline{x}, \cdot)$ es creciente como función de x_n en $I_{\overline{x}}$, resulta que

$$D \cap R = \{(\overline{x}, x_n) \in R : x_n < \psi(\overline{x})\} \tag{73}$$

Dicho de otra manera, $D \cap R$ está contenido en un conjunto cilíndrico como el utilizado en la ecuación (21) y así se prueba (71) para los campos continuamente diferenciables en D soportados en $D \cap R$. $\square$

Queda ahora por globalizar el resultado y así obtener el teorema de Gauss.

Teorema 1. *Sea D dominio regular y $\vec{F} \in C^1\left(\overline{D}\right)$ un campo de vectores. Entonces*

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \nu d\sigma = \int_D \nabla \cdot \vec{F} dx \tag{74}$$

Demostración. Para cada $x \in \overline{D} = \partial D \cup D$ consideremos U_x el entorno de x que da el Lema 3. Así $\{U_x : x \in \overline{D}\}$ es un cubrimiento por abiertos (en la topología relativa) del compacto $\overline{D}$; por tanto, se puede obtener un subcubrimiento finito $\{U_1, \ldots, U_r\}$ de $\overline{D}$.

Supongamos que podemos construir una familia finita de funciones $\phi_1, \ldots, \phi_r$ de clase $C_0^\infty(\overline{D})$, tales que

1. $\phi_i \geq 0$;
2. $\operatorname{sop} \phi_i \subseteq U_i$ (en particular $\phi_i = 0$ fuera de U_i);
3. $\sum_{i=1}^r \phi_i(x) = 1$ si $x \in \overline{D}$

Las familias $\{\phi_1, \ldots, \phi_r\}$ de funciones regulares que verifican estas tres propiedades reciben el nombre de *particiones de la unidad subordinadas al cubrimiento* $\{U_1, \ldots, U_r\}$.

Sea $\vec{F} \in C^1(\overline{D})$ un campo; si consideramos la partición de la unidad $\{\phi_1, \ldots, \phi_r\}$, tenemos $\vec{F} = \sum_{i=1}^r \phi_i \vec{F} = \sum_{i=1}^r \vec{F}_i$. Ahora $\vec{F}_i = \phi_i \vec{F}$ está soportado en U_{x_i} y por construcción se tiene: $\int_D \nabla \cdot \vec{F}_i dx = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \nu d\sigma$. Por tanto

$$\int_D \nabla \cdot \vec{F} dx = \sum_{i=1}^r \int_D \nabla \cdot \vec{F}_i dx = \sum_{i=1}^r \int_{\partial D} \vec{F}_i \cdot \nu d\sigma = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \nu d\sigma \tag{75}$$

Módulo la construcción de particiones de la unidad hemos probado el teorema

$\square$