Práctica 0
Preliminares de Análisis

Pablo Brianese

26 de abril de 2021

Definición 1. *Dadas $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ambas en $L(\mathbb{R}^n)$, definimos la convolución de la siguiente manera*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \tag{1}$$

Ejercicio 1. *Probar que si $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces valen:*

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$ *a la vez que* $(g + h) * f = g * f + h * f$
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$
4. $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$
5. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Observación 1. Las propiedades anteriores se pueden resumir diciendo que $(L^1(\mathbb{R}^n), \|-\|_1)$ es un álgebra de Banach conmutativa con la convolución como producto.

Lema propio 1. $\int_{\mathbb{R}^n} h(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)\mathrm{d}y$ *para toda* $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea H la clase formada por las funciones $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ que verifican el enunciado. Por la linealidad de la integral, la combinación $\alpha h_1 + \beta h_2$ pertenece a H siempre que $h_1, h_2 \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por el teorema de convergencia monótona, si $\{h_m\}_m \subseteq H$ es una sucesión nodecreciente de funciones nonegativas que converge a una función integrable g, entonces $g \in H$. Para concluir, debemos probar que las funciones características integrables están en H. Supongamos que $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es la función característica $h = \mathbb{1}_A$ de un conjunto medible $A \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida finita. Observemos que $\mathbb{1}_A(x-y) = \mathbb{1}_{x-A}(y)$ para todo par $x, y \in \mathbb{R}^n$. A partir de esta relación pordemos calcular como, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(y)\mathrm{d}y = \lambda(A) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{x-A}(y)\mathrm{d}y = \lambda(x-A) \tag{2}$$

Ahora la ecuación que necesitamos se sigue de la invarianza por traslaciones $(+x)$ y reflexiones $(-)$ de la medida de Lebesgue, una propiedad que es facil de ver en el caso de los rectángulos que generan su σ–álgebra. Concretamente, sucede $\lambda(A) = \lambda(x - A)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. □

Demostración. 1 Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, como consecuencia del lema 1

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \tag{3}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(x-(x-y))\mathrm{d}y \tag{4}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y)\mathrm{d}y \tag{5}$$

$$= g * f(x) \tag{6}$$

□

Demostración. 2 Por la ley distributiva de los números reales y la linealidad de la integral, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$f * (g+h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(g+h)(x-y)\mathrm{d}y \tag{7}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) + f(y)h(x-y)\mathrm{d}y \tag{8}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^n} f(y)h(x-y)\mathrm{d}y \tag{9}$$

$$= f * g(x) + f * h(x) \tag{10}$$

La demostración del enunciado $(g+h) * f = g * f + h * f$ es similar. □

Demostración. 4 Sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Por la linealidad de la integral

$$(\lambda(f * g))(x) = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x-y))\mathrm{d}y \tag{11}$$

Pero por asociatividad del producto entre números reales

$$(\lambda f) * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f(x))g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x-y))\mathrm{d}y \tag{12}$$

$$f * (\lambda g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\lambda g(x-y))\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x-y))\mathrm{d}y \tag{13}$$

Comparando los extremos derechos de las desigualdades se obtiene $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$. □

Lema propio 2 (Convergencia monótona para convoluciones)**.** *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y $\{g_m\}_m$ es una sucesión nodecreciente de funciones nonegativas que convergen puntualmente a una $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\lim_{m\to\infty} f * g_m = f * g$ y de forma similar $\lim_{m\to\infty} g_m * f = g * f$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Si f^+ y f^- son las partes nonegativa y negativa de f, y $f^\pm$ es cualquiera de ellas entonces por el teorema de convergencia dominada

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} f^\pm * g_m(x) &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f^\pm(y) g_m(x-y)\mathrm{d}y && (14)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m\to\infty} f^\pm(y) g_m(x-y)\mathrm{d}y && (15)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f^\pm(y) g(x-y)\mathrm{d}y && (16)\\
&= f^\pm * g(x) && (17)
\end{aligned}$$

En consecuencia el límite de las convoluciones es la convolución con el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} f * g_m(x) &= \lim_{m\to\infty} f^+ * g_m(x) - \lim_{m\to\infty} f^- * g_m(x) && (18)\\
&= f^+ * g(x) - f^- * g(x) && (19)\\
&= f * g(x) && (20)
\end{aligned}$$

La demostración del enunciado $\lim_{m\to\infty} g_m * f(x) = g * f(x)$ es idéntica a la que recién presentamos. □

Demostración. 5 Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Una primera desigualdad es simple

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x-y)| \mathrm{d}y\mathrm{d}x \quad (21)$$

El teorema de Tonelli nos permite intercambiar el orden de integración para obtener

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x-y)| \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (22)$$

El lema propio 1 simplifica esta integral mediante $\|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|\mathrm{d}x$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g\|_1 \mathrm{d}y = \|f\|_1 \|g\|_1 \quad (23)$$

□

Lema propio 3. *Si $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * \psi$ es uniformemente continua.*

Demostración. Sean $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Una primera desigualdad es sencilla

$$\begin{aligned}
|f * \psi(x) - f * \psi(x')| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi(x'-y)\mathrm{d}y \right| && (24)\\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\psi(x-y) - \psi(x'-y))\mathrm{d}y \right| && (25)\\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||\psi(x-y) - \psi(x'-y)|\mathrm{d}y && (26)
\end{aligned}$$

Ahora bien, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|\psi(u) - \psi(u')| < \varepsilon$ si $\|u - u'\| < \delta$ porque ψ, al ser continua de soporte compacto, es uniformemente continua. Luego $\|x - x'\| < \delta$ implica

$$
\begin{aligned}
|f * \psi(x) - f * \psi(x')| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||\psi(x-y) - \psi(x'-y)|\mathrm{d}y && (27)\\
&< \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\mathrm{d}y && (28)\\
&= \varepsilon \|f\|_1 && (29)
\end{aligned}
$$

Siendo que $\|f\|_1 < \infty$, podemos conluir que $f * \psi$ es uniformemente continua. □

Ejercicio 2. *Probar que si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * \psi$ es continua.*

Demostración. Sean $B_m = \bar{B}_m(0)$ las bolas cerradas de radio m centradas en 0. Aproximamos f mediante $f_m = f\mathbb{1}_{B_m}$ $(m \in \mathbb{N})$. La integrabilidad local de f hace de cada f_m una función integrable. Por el lema 3, las funciones $f_m * \psi$ son uniformemente continuas. Además, se da la convergencia uniforme en compactos $f_m * \psi \to f * \psi$. Para verlo fijemos un conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Existe un $M \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande, dependiendo de K, tal que $K \subseteq B_M$. Luego, para todo $x \in K$ y para todo $m \geq M$

$$
\begin{aligned}
f_m * \psi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_m(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y && (30)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathbb{1}_{B_m}(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y && (31)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y && (32)\\
&= f * \psi(x) && (33)
\end{aligned}
$$

Queda probada la convergencia uniforme en compactos. Pero el límite, en este caso $f * \psi$, uniforme en compactos de una sucesión de funciones uniformemente continuas, aquí las f_m, es continuo. Por lo tanto $f * \psi$ es una función continua. □