Práctica 0
Preliminares de Análisis

Pablo Brianese

15 de abril de 2021

Definición 1. *Dadas $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ambas en $L(\mathbb{R}^n)$, definimos la convolución de la siguiente manera*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \tag{1}$$

Ejercicio 1. *Probar que si $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces valen:*

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$
4. $\lambda(f * g) = f * (\lambda g)$
5. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Observación 1. Las propiedades anteriores se pueden resumir diciendo que $(L^1(\mathbb{R}^n), \|-\|_1)$ es un álgebra de Banach conmutativa con la convolución como producto.

Solución. 1 Haremos un argumento por clases crecientes.

Supongamos que f, g son las funciones características de subconjuntos medibles $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Observemos que $\mathbb{1}_C(x-y) = \mathbb{1}_{x-C}(y)$ para todo par $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todo subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Luego para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(y)\mathbb{1}_B(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(y)\mathbb{1}_{x-B}(y)\mathrm{d}y \tag{2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A\cap(x-B)}(y)\mathrm{d}y = \lambda(A \cap (x-B)) \tag{3}$$

$$g * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x-y)\mathbb{1}_B(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x-y)\mathbb{1}_B(x-(x-y))\mathrm{d}y \tag{4}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x-y)\mathbb{1}_{x-B}(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A\cap(x-B)}(x-y)\mathrm{d}y \tag{5}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{x-A\cap(x-B)}(y)\mathrm{d}y = \lambda(x - A \cap (x-B)) \tag{6}$$

Ahora la ecuación que necesitamos se sigue de la invarianza por traslaciones $(+x)$ y reflexiones $(-)$ de la medida de Lebesgue, algo que es facil de ver en el caso de los rectángulos que generan su σ–álgebra. Concretamente, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda(A \cap (x - B)) = \lambda(x - A \cap (x - B)) \tag{7}$$

En conclusión $f * g = g * f$, al menos en el caso de las funciones características.

Supongamos $f \geq 0$. Y pensemos en el caso en que g es la función característica, $g = \mathbb{1}_A$, de un conjunto boreliano $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Esto nos permite calcular, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, fórmulas muy similares para ambas convoluciones

$$\begin{aligned} f * \mathbb{1}_A(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathbb{1}_A(x-y)\mathrm{d}y && (8)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathbb{1}_{x-A}(y)\mathrm{d}y && (9)\\ \mathbb{1}_A * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\mathbb{1}_A(y)\mathrm{d}y && (10)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\mathbb{1}_A(x-(x-y))\mathrm{d}y && (11)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\mathbb{1}_{x-A}(x-y)\mathrm{d}y && (12) \end{aligned}$$

Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones simples nonegativas que convergen puntualmente a f. Por el teorema de convergencia dominada

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n * \mathbb{1}_A(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(y)\mathbb{1}_{x-A}(y)\mathrm{d}y && (13)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathbb{1}_{x-A}(y)\mathrm{d}y && (14)\\ &= f * \mathbb{1}_A(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n) && (15)\\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_A * f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x-y)\mathbb{1}_{x-A}(x-y)\mathrm{d}y && (16)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\mathbb{1}_{x-A}(x-y)\mathrm{d}y && (17)\\ &= \mathbb{1}_A * f(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n) && (18) \end{aligned}$$

□