Práctica 0
Preliminares de Análisis

Pablo Brianese

16 de abril de 2021

Definición 1. *Dadas $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ambas en $L(\mathbb{R}^n)$, definimos la convolución de la siguiente manera*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \tag{1}$$

Ejercicio 1. *Probar que si $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces valen:*

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$
4. $\lambda(f * g) = f * (\lambda g)$
5. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Observación 1. Las propiedades anteriores se pueden resumir diciendo que $(L^1(\mathbb{R}^n), \|-\|_1)$ es un álgebra de Banach conmutativa con la convolución como producto.

Demostración. 2 Por la ley distributiva de los números reales y la linealidad de la integral, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
f * (g + h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(g + h)(x - y)\mathrm{d}y && (2)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) + f(y)h(x - y)\mathrm{d}y && (3)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^n} f(y)h(x - y)\mathrm{d}y && (4)\\
&= f * g(x) + f * h(x) && (5)
\end{aligned}$$

□

Demostración. 4 Sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Por la linealidad de la integral

$$(\lambda(f * g))(x) = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x-y))\mathrm{d}y \tag{6}$$

Pero por asociatividad del producto entre números reales

$$(\lambda f) * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f(x))g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x-y))\mathrm{d}y \tag{7}$$

$$f * (\lambda g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\lambda g(x-y))\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x-y))\mathrm{d}y \tag{8}$$

Comparando los extremos derechos de las desigualdades se obtiene $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$. □

Demostración. 5 Haremos un argumento por clases crecientes doble. Principalmente, consideraremos la clase F formada por las funciones $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tales que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ para toda $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. De forma accesoria, para cada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, consideraremos el conjunto G_f formado por las funciones $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tales que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Propiedades de F. Propiedades de G.

Sea $f = \mathbb{1}_A$ la función característica de un conjunto de medida finita. □

Demostración. 1 Haremos un argumento por clases crecientes doble. Principalmente, consideraremos la clase F formada por las funciones $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tales que $f * g = g * f$ para toda $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos el conjunto G_f formado por las funciones $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tales que $f * g = g * f$. Este objeto satisface 1. $g_1 + g_2 \in G$ si $g_1, g_2 \in G$; 2. $\alpha g \in G$ si $g \in G$ y $\alpha \in \mathbb{R}$; 3. $\lim_{m\to\infty} g_m \in G$ para toda sucesión $\{g_m\}_m \subseteq G$ puntualmente convergente tal que existe $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $|g_m| \leq h$ $(\forall m \in \mathbb{N})$.

Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es la función característica $f = \mathbb{1}_A$ de un conjunto medible $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Accesoriamente, consideramos la clase G formada por las funciones $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tales que $\mathbb{1}_A * g = g * \mathbb{1}_A$. Supongamos que también g es la función característica de un conjunto medible $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Observemos que $\mathbb{1}_C(x-y) = \mathbb{1}_{x-C}(y)$ para todo par $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todo subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$. A partir de esta relación pordemos calcular como, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(y)\mathbb{1}_B(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(y)\mathbb{1}_{x-B}(y)\mathrm{d}y \tag{9}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A\cap(x-B)}(y)\mathrm{d}y = \lambda(A \cap (x-B)) \tag{10}$$

$$g * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x-y)\mathbb{1}_B(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x-y)\mathbb{1}_B(x-(x-y))\mathrm{d}y \tag{11}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x-y)\mathbb{1}_{x-B}(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A\cap(x-B)}(x-y)\mathrm{d}y \tag{12}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{x-A\cap(x-B)}(y)\mathrm{d}y = \lambda(x - A \cap (x-B)) \tag{13}$$

Ahora la ecuación que necesitamos se sigue de la invarianza por traslaciones $(+x)$ y reflexiones $(-)$ de la medida de Lebesgue, algo que es facil de ver en el caso de los rectángulos que generan su σ–álgebra. Concretamente, sucede $\lambda(A\cap(x-B)) = \lambda(x-A\cap(x-B))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Esta nos dice $f*g = g*f$. Dado que g era arbitraria, toda función característica $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ resulta ser un elemento de G.

Toda función característica de un conjunto de medida finita pertenece a la clase F.

Ahora bien, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son escalares y $g_1, g_2 : \mathbb{R}$

$\square$