

# Ecuaciones diferenciales

## Clase 0

Pablo Brianese

20 de agosto de 2021

## 0.1. Teorema de la Divergencia de Gauss

Sea  $n = 2$  y consideremos una función  $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$ . Podemos escribir en coordenadas  $\vec{F}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ .

Sea  $R$  una región que puede expresarse como  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \phi_1(x) < y < \phi_2(x)\}$ , una región delimitada por las gráficas de dos funciones continuamente derivables  $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , que satisfacen  $\phi_1(a) = \phi_2(a)$ ,  $\phi_1(x) < \phi_2(x)$  para todo  $x \in ]a, b[$ ,  $\phi_1(b) = \phi_2(b)$ . Calculemos ahora una primera integral

$$\int_R \frac{\partial f_2}{\partial y} dy dx = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial f_2}{\partial y} dy dx = \int_a^b f_2(x, \phi_2(x)) - f_2(x, \phi_1(x)) dx \quad (1)$$

Sea  $\vec{n} = \tilde{n}/\|\tilde{n}\|$  la normal exterior de la frontera  $\partial R$ , donde

$$\tilde{n} = \begin{cases} (-\phi_2'(x), 1) & \text{en } \Gamma_2 = \{(x, \phi_2(x)) : x \in [a, b]\} \\ (\phi_1'(x), -1) & \text{en } \Gamma_1 = \{(x, \phi_1(x)) : x \in [a, b]\} \end{cases} \quad (2)$$

con

$$\|\tilde{n}\| = \begin{cases} \sqrt{1 + \phi_2'(x)^2} & \text{en } \Gamma_2 = \{(x, \phi_2(x)) : x \in [a, b]\} \\ \sqrt{1 + \phi_1'(x)^2} & \text{en } \Gamma_1 = \{(x, \phi_1(x)) : x \in [a, b]\} \end{cases} \quad (3)$$

Entonces, si  $\vec{n} = (n_1, n_2)$ , se tiene

$$n_2 = \begin{cases} (1 + \phi_2'(x)^2)^{-1/2} & \text{en } \Gamma_2 = \{(x, \phi_2(x)) : x \in [a, b]\} \\ -(1 + \phi_1'(x)^2)^{-1/2} & \text{en } \Gamma_1 = \{(x, \phi_1(x)) : x \in [a, b]\} \end{cases} \quad (4)$$

Esto nos permite calcular una segunda integral

$$\int_{\partial R} f_2 n_2 d\sigma(x) = \int_{\Gamma_1} f_2 n_2 d\sigma(x) + \int_{\Gamma_2} f_2 n_2 d\sigma(x) \quad (5)$$

$$= \int_a^b -\frac{f_2(x, \phi_1(x))}{\sqrt{1 + \phi_1'(x)^2}} \left( \sqrt{1 + \phi_1'(x)^2} dx \right) \quad (6)$$

$$+ \int_a^b \frac{f_2(x, \phi_2(x))}{\sqrt{1 + \phi_2'(x)^2}} \left( \sqrt{1 + \phi_2'(x)^2} dx \right) \quad (7)$$

$$= \int_a^b f_2(x, \phi_2(x)) - f_2(x, \phi_1(x)) dx \quad (8)$$

Comparando la primera y la segunda integral, resulta

$$\int_R \frac{\partial f_2}{\partial y} dy dx = \int_{\partial R} f_2 n_2 d\sigma \quad (9)$$

Supongamos que  $R$  también se puede expresar como  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in ]c, d[, \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$ , donde las funciones  $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  son continuamente derivables y satisfacen  $\psi_1(c) = \psi_2(c)$ ,  $\psi_1(y) < \psi_2(y)$  para todo  $y \in ]c, d[$ ,  $\psi_1(b) = \psi_2(b)$ . Cálculos análogos a los anteriores prueban que

$$\int_R \frac{\partial f_1}{\partial x} dx dy = \int_{\partial R} f_1 n_1 d\sigma \quad (10)$$

Por tanto, de (9) y de (10) se tiene

$$\int_R (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy = \int_{\partial R} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma \quad (11)$$

La idea intuitiva es que la *variación* de  $\vec{F}$  en  $R$  es igual a la *cantidad* de  $\vec{F}$  que entra o sale a través de  $\partial R$ . El segundo término de la ecuación, se llama *flujo del campo  $\vec{F}$  a través de  $\partial R$* .

Tanto el flujo como la divergencia tienen perfecto sentido en dimensiones mayores; nos proponemos dar condiciones suficientes sobre los dominios  $R \subseteq \mathbb{R}^n$ , de forma que la expresión (11) sea válida. El caso más sencillo para el que se tiene la igualdad (11) es el siguiente.

Consideremos  $\vec{F} = (f_1, \dots, f_n)$  campo de vectores en  $\mathbb{R}^n$  y supongamos que 1.  $f_i$  tiene derivadas primeras continuas para  $i = 1, \dots, n$ ; 2. existe una bola  $B$  cerrada tal que  $f_i(x) = 0$  si  $x \notin B$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Bajo estas condiciones podemos probar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot \vec{F} dx = 0 \quad (12)$$

En efecto, por definición  $\nabla \cdot \vec{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ . Consideremos un  $i \in \{1, \dots, n\}$  arbitrario. Usando el teorema de Fubini para funciones integrables (de soporte compacto, en nuestro caso) deducimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (13)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) dx_i dx_{\tau(2)} \cdots dx_{\tau(n)} \quad (14)$$

donde  $\tau$  es una permutación del conjunto  $\{1, \dots, n\}$  con  $\tau(1) = i$ . Pero, dado que  $f_i$  se anula fuera de la bola  $B$ , el teorema fundamental del cálculo implica

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) dx_i = 0 \quad (15)$$

Luego  $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx = 0$ . Siendo  $i$  arbitrario, se sigue que es nula la integral sobre  $\mathbb{R}^n$  de la divergencia del campo  $\vec{F}$ .

La segunda observación elemental que vamos a hacer posteriormente para hacer una demostración con cierta generalidad, es la siguiente. Consideremos  $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  un abierto acotado y  $\phi \in C^1(U)$  una función positiva. Llamamos  $S$  a la gráfica de  $\phi$  pensada como subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ ; es decir,

$$S = \{(\bar{x}, \phi(\bar{x})) : \bar{x} \in U\} \quad (16)$$

$$= \{(x_1, \dots, x_{n-1}, \phi(x_1, \dots, x_{n-1})) : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U\} \quad (17)$$

Dada esta descripción paramétrica, podemos describir el espacio tangente a  $S$  en un punto  $p \in S$  como aquel generado por el conjunto de vectores tangentes

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{x}, \phi(\bar{x})) \right|_{\bar{x}=p} \right\}_{i=1}^{n-1} = \left\{ e_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\bar{x}) e_n \right\}_{i=1}^{n-1} \quad (18)$$

Encontramos que el vector  $(-\phi_{x_1}(\bar{x}), \dots, -\phi_{x_{n-1}}(\bar{x}), 1)$  es ortogonal a cada uno de ellos. Eso nos permite calcular  $\nu$ , normal a  $S$  con la componente  $\nu_n(\bar{x}) > 0$ , resultando

$$\nu(p) = \frac{1}{(1 + \|\nabla \phi(\bar{x})\|^2)^{1/2}} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, -\frac{\partial \phi}{\partial x_{n-1}}(\bar{x}), 1 \right) \quad (19)$$

Consideremos ahora el conjunto *cilíndrico*  $C$ , definido por

$$C = \{(\bar{x}, x_n) : \bar{x} \in U, x_n \in [0, \phi(\bar{x})]\} \quad (20)$$

Si se toma  $f$  con derivadas primeras continuas en  $C$ , tal que  $f(\bar{x}, 0) = 0$ , se tiene

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) dx = \int_S f \nu_n d\sigma \quad (21)$$

En efecto, simplificar el lado izquierdo de la ecuación es sencillo

$$\int_C \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) dx = \int_U \int_0^{\phi(\bar{x})} \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}, x_n) dx_n d\bar{x} = \int_U f(\bar{x}, \phi(\bar{x})) d\bar{x} \quad (22)$$

Mientras que la misma tarea es compleja para la integral de superficie del lado derecho. Por definición

$$\int_S f \nu_n d\sigma = \int_U f(\bar{x}, \phi(\bar{x})) \nu_n(\bar{x}, \phi(\bar{x})) g(\bar{x}) d\bar{x} \quad (23)$$

donde la misma definición dice

$$g(\bar{x}) = \text{abs det} \begin{pmatrix} \nu(\bar{x}, \phi(\bar{x})) \\ e_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\bar{x}) e_n \\ \vdots \\ e_{n-1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_{n-1}}(\bar{x}) e_n \end{pmatrix} \quad (24)$$

Por construcción  $\nu_n(\bar{x}, \phi(\bar{x})) = \left(1 + \|\nabla \phi(\bar{x})\|^2\right)^{-1/2}$ . Pero el cálculo de  $g$  es complejo e involucra un proceso inductivo. Comenzamos con

$$g(\bar{x}) \tag{25}$$

$$= \text{abs det} \begin{pmatrix} \nu(\bar{x}, \phi(\bar{x})) \\ e_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\bar{x})e_n \\ \vdots \\ e_{n-1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_{n-1}}(\bar{x})e_n \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$= \text{abs det} \begin{pmatrix} \left(1 + \|\nabla \phi\|^2\right)^{-1/2} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial \phi}{\partial x_{n-1}}, 1\right) \\ \left(1, 0, \dots, 0, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) \\ \vdots \\ \left(0, \dots, 0, 1, \frac{\partial \phi}{\partial x_{n-1}}\right) \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \|\nabla \phi\|^2\right)^{1/2}} \text{abs det} \begin{pmatrix} -\phi_{x_1} & -\phi_{x_2} & \dots & -\phi_{x_{n-2}} & -\phi_{x_{n-1}} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \phi_{x_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \phi_{x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \phi_{x_{n-2}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \phi_{x_{n-1}} \end{pmatrix} \tag{28}$$

Con el objetivo de facilitar la comprensión del cálculo, definimos  $a_i = -\phi_{x_i}(\bar{x})$  para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Calculamos el determinante a lo largo de su primera columna

$$\begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} \tag{29}$$

$$= (-a_1) \begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} \tag{30}$$

$$-(1) \begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} \quad (31)$$

$$= -a_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} \quad (32)$$

Sumando multiples apropiados de la primera fila a las demás, el primer término se simplifica notablemente sin alterar el resultado del determinante (por propiedades de las llamadas matrices elementales)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (33)$$

$$= (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (34)$$

$$= (-1)^{n-2} a_1 \quad (35)$$

Esa simplificación nos lleva a la identidad

$$\begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} \quad (36)$$

$$= (-1)^{n-1} a_1^2 - \begin{vmatrix} -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} \quad (37)$$

Que nos deja ver una cierta regularidad, un cierto patrón. Para describirlo, definimos  $D_1, \dots, D_m$  como

$$D_k = \begin{vmatrix} -a_k & -a_{k+1} & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_k \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix} \quad (38)$$

Repetir el cálculo del determinante a lo largo de la primera columna, arroja

$$D_k = (-1)^{n-k} a_k^2 - D_{k+1}, \quad (39)$$

para los primeros términos de la sucesión, con  $k \in \{1, \dots, n-2\}$ . Y el último puede calcularse de forma exacta

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} -a_{n-1}^2 & 1 \\ 1 & -a_{n-1} \end{vmatrix} = -a_{n-1}^2 - 1 = (-1)^{n-(n-1)} (a_{n-1}^2 + 1) \quad (40)$$

Luego

$$D_{n-1} = (-1)^{n-(n-1)} (a_{n-1}^2 + 1) \quad (41)$$

$$D_{n-2} = (-1)^{n-(n-2)} a_{n-2}^2 - (-1)^{n-(n-1)} (a_{n-1}^2 + 1) \quad (42)$$

$$= (-1)^{n-(n-2)} (a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 + 1) \quad (43)$$

$\vdots$

$$D_k = (-1)^{n-k} a_k^2 - (-1)^{n-(k+1)} (a_{k+1}^2 + \dots + a_{n-1}^2 + 1) \quad (44)$$

$$= (-1)^{n-k} (a_k^2 + \dots + a_{n-1}^2 + 1) \quad (45)$$

$\vdots$

$$D_1 = (-1)^{n-1} (a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 + 1) \quad (46)$$

Es decir

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} & -\frac{\partial \phi}{\partial x_2} & \cdots & -\frac{\partial \phi}{\partial x_{n-2}} & -\frac{\partial \phi}{\partial x_{n-1}} & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \frac{\partial \phi}{\partial x_{n-2}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{\partial \phi}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$= (-1)^{n-1} \left( \phi_{x_1}^2 + \cdots + \phi_{x_{n-1}}^2 + 1 \right) \quad (48)$$

$$= (-1)^{n-1} \left( \|\nabla \phi\|^2 + 1 \right) \quad (49)$$

Por lo tanto

$$g(\bar{x}) = \left( \|\nabla \phi\|^2 + 1 \right)^{1/2} \quad (50)$$

Aún más importante

$$\nu_n(\bar{x}, \phi(\bar{x}))g(\bar{x}) = 1 \quad (51)$$

Luego

$$\int_S f \nu_n d\sigma = \int_U f(\bar{x}, \phi(\bar{x})) d\bar{x} \quad (52)$$



Las dos observaciones anteriores van a permitir demostrar un *teorema de la divergencia de tipo local* en dominios con algunas condiciones que se precisarán rápidamente y que llamaremos ‘regulares’. Se probará: Dado un dominio regular, existen entornos de sus puntos, tales que la el teorema de la divergencia de Gauss se verifica para campos continuamente diferenciales soportados en dichos entornos.

*Soportado en un entorno* significa que se hacen cero fuera de tal entorno. Se define el *soporte* de una función  $f$  como el cierre de los puntos  $x$  tales que  $f(x) \neq 0$ , es decir,

$$\text{sop}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \quad (53)$$

Hay que explicar ahora lo que entenderemos por un dominio regular y lo que se entiende por entorno de los puntos del dominio.

Dado  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , diremos que es un *dominio* si es abierto y es conexo;  $\partial D$  denotará su frontera.

**Teorema 1.** *Todo dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  es una variedad  $C^\infty$  de dimensión  $n$ .*

*Demostración.* Consideremos un punto arbitrario  $x \in D$ . El conjunto  $D$  es abierto porque es un dominio. En particular, existe  $V = D \subseteq \mathbb{R}^n$  entorno abierto de  $x$ . Además, existen  $U = D \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y  $\varphi = \text{id} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  función de clase  $C^\infty$ . Donde  $V, U, \varphi$  satisfacen 1.  $\varphi(U) = V \cap D$ ; 2.  $\varphi : U \rightarrow V \cap D$  es un homeomorfismo; 3. y  $D\varphi(u) = \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(u) \right)_{ij}$  tiene rango  $n$ . Esto hace que  $D$  sea una variedad  $C^\infty$  de dimensión  $n$ .  $\square$

**Definición 1.** Un dominio acotado  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  se dice que es regular si para cada  $x_0 \in \partial D$  existe un entorno  $U$  de  $x_0$  en  $\mathbb{R}^n$  y una función  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  continuamente diferenciable, de forma que

1.  $\nabla \phi(x) \neq 0$  si  $x \in U$ ;
2.  $\partial D \cap U = \{x \in U : \phi(x) = 0\}$ ;
3.  $D \cap U = \{x \in U : \phi(x) < 0\}$

Para entender esta definición recurrimos al Teorema de la Función Implícita, que pasamos a recordar.

**Notación 1.** Si  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ , escribiremos  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  para denotar al vector  $(x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{l+m}$ . En lo que sigue, la primer entrada en  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  o en un símbolo similar siempre será un vector en  $\mathbb{R}^l$ , la segunda será un vector en  $\mathbb{R}^m$ .

Cada  $A \in L(\mathbb{R}^{l+m}, \mathbb{R}^l)$  puede ser separada en dos transformaciones lineales  $A_x$  y  $A_y$ , definidas por  $A_x \mathbf{h} = A(\mathbf{h}, 0)$  y  $A_y \mathbf{k} = A(0, \mathbf{k})$  para  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^l$  y  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$ . Entonces  $A_x \in L(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^l)$ ,  $A_y \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ , y  $A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = A_x \mathbf{h} + A_y \mathbf{k}$

**Teorema 2** (de la Función Implícita). Sea  $\phi$  una aplicación  $C^1$  de un abierto  $E \subseteq \mathbb{R}^{l+m}$  en  $\mathbb{R}^l$ , tal que  $\phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$  para algún punto  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E$ .

Denotamos  $A = \phi'(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in L(\mathbb{R}^{l+m}, \mathbb{R}^l)$  y asumimos que  $A_x \in L(\mathbb{R}^l)$  es invertible.

Entonces existen conjuntos abiertos  $U \subseteq \mathbb{R}^{l+m}$  y  $W \subseteq \mathbb{R}^m$ , con  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U$  y  $\mathbf{b} \in W$ , con la siguiente propiedad:

A cada  $\mathbf{y} \in W$  le corresponde un único  $\mathbf{x}$  tal que  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U$  y  $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ . Si este  $\mathbf{x}$  se define como  $\mathbf{X}(\mathbf{y})$ , entonces  $\mathbf{X}$  es una aplicación  $C^1$  de  $W$  en  $\mathbb{R}^n$ , que verifica las propiedades 1.  $\mathbf{X}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$ ; 2.  $\phi(\mathbf{X}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0$  para todo  $\mathbf{y} \in W$ ; 3. y  $X'(\mathbf{b}) = -A_x^{-1}A_y$ .

Lo que establece la definición anterior es que un dominio regular tiene su frontera definida localmente por ceros de funciones continuamente diferenciales, es decir, por trozos de superficies diferenciables en  $\mathbb{R}^n$  definidas implícitamente.

Sea  $D$  un dominio regular y sea  $x \in \partial D$ . Un vector normal a  $\partial D$  en  $x$  viene dado por  $n = \nabla \phi(x)$ , donde  $\phi$  es una función que define  $\partial D$  en el entorno de  $x$  como en la definición de regularidad. Diremos que  $n$  es *normal exterior* a  $\partial D$  en  $x$  si para  $\delta > 0$  suficientemente pequeño y  $0 < t < \delta$  se verifican

$$x - tn \in D \quad x + tn \in \mathbb{R}^n \setminus D \quad (54)$$

Para terminar, denotaremos por  $\nu(x)$  a la normal exterior unitaria en  $x$  a  $\partial D$ . Si  $D$  es regular, entonces  $\nu(x)$  es un campo continuo en  $\partial D$ . Compruebe el lector este extremo.

**Lema 1.** Sea  $D$  un dominio regular en  $\mathbb{R}^n$  y  $\vec{F}$  un campo continuamente diferenciable. Si  $T$  es una traslación ( $T(x) = x + t$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  donde  $t \in \mathbb{R}^n$ ), entonces

$$\int_D \nabla \cdot \vec{F} dx = \int_{TD} \nabla \cdot (F_i \circ T^{-1}) dx \quad (55)$$

*Demostración.* Por el teorema de cambio de variables, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\int_D \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) dx = \int_{TD} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(T^{-1}u) \det(D_u T^{-1}) du \quad (56)$$

$$= \int_{TD} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(u - t) \det(I) du \quad (57)$$

$$= \int_{TD} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(u - t) du \quad (58)$$

□

**Lema 2.** Sea  $D$  un dominio regular en  $\mathbb{R}^n$  con clausura  $\overline{D} = D \cup \partial D$  compacta, y sea  $x_0 \in \overline{D}$ . Existe un entorno  $U$  de  $x_0$  tal que: para todo campo  $\vec{F}$  continuamente diferenciable soportado en  $U$ , si  $T$  es una traslación ( $T(x) = x + t$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  donde  $t \in \mathbb{R}^n$ ), entonces

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma = \int_{\partial(TD)} (\vec{F} \circ T^{-1}) \cdot \vec{\nu} d\sigma \quad (59)$$

*Demostración.* Primero realizaremos la demostración para  $x_0 \in D$ , y luego nos encargaremos del caso  $x_0 \in \partial D$ . Si  $x_0 \in D$ , entonces existe una bola  $B(x_0, r)$  de radio  $r > 0$  lo suficientemente pequeño como para garantizar  $B(x_0, r) \subseteq D$ . Sea  $\vec{F}$  un campo continuamente diferenciable soportado en  $B(x_0, r)$ . Entonces  $\vec{F} = 0$  sobre  $\partial D$ , y

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma = 0 \quad (60)$$

Por otra parte, dado que  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo, tenemos que  $TD$  es un dominio regular con clausura compacta; y, por el mismo motivo,  $\vec{F} \circ T^{-1}$  es continuamente diferenciable. Por eso está bien definida la integral de la derecha en (59). Más aún,  $\vec{F} \circ T^{-1} = 0$  sobre  $T(\partial D)$ . Pero  $T(\partial D) = \partial(TD)$ , porque  $T$  es un difeomorfismo. Entonces  $\vec{F} \circ T^{-1} = 0$  sobre  $\partial(TD)$ , y

$$\int_{\partial(TD)} (\vec{F} \circ T^{-1}) \cdot \nu d\sigma = 0 \quad (61)$$

Ahora supongamos que  $x_0 \in \partial D$ . Porque  $D$  es un dominio regular, su frontera  $\partial D$  es una variedad de clase  $C^1$  con dimensión  $n-1$ . Luego existen un abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ , una función  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$  y un entorno abierto  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  de  $x_0$  tales que 1.  $\varphi(U) = \partial D \cap V$ ; 2.  $\varphi : U \rightarrow \partial D \cap V$  es un homeomorfismo; 3. y  $D\varphi(u)$  tiene rango  $n-1$  para todo  $u \in U$ .

Sea  $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo continuamente diferenciable con soporte en  $V$ . Por definición

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \nu d\sigma = \int_U \vec{F}(\varphi(u)) \cdot \nu(\varphi(u)) g(u) du \quad (62)$$

Podemos escribir al vector normal exterior  $\nu$  y al factor  $g$  como funciones de  $D\varphi(u)$ . Es decir que  $g = g(D\varphi(u))$ ,  $\nu = \nu(D\varphi(u))$ . Luego

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \nu d\sigma = \int_U \vec{F}(\varphi(u)) \cdot \nu(D\varphi(u)) g(D\varphi(u)) du \quad (63)$$

$$= \int_U \vec{F}(\varphi(u) + t - t) \cdot \nu(D\varphi(u)) g(D\varphi(u)) du \quad (64)$$

$$= \int_U \vec{F}((\varphi + t)(u) - t) \cdot \nu(D(\varphi + t)(u)) g(D(\varphi + t)(u)) du \quad (65)$$

$$= \int_U \vec{F} \circ T^{-1}((\varphi + t)(u)) \cdot \nu(D(\varphi + t)(u)) g(D(\varphi + t)(u)) du \quad (66)$$

$$= \int_U \vec{F} \circ T^{-1}(T\varphi(u)) \cdot \nu(D(T\varphi)(u)) g(D(T\varphi)(u)) du \quad (67)$$

□

**Lema 3.** Sea  $D$  un dominio regular en  $\mathbb{R}^n$  con clausura  $\overline{D} = D \cup \partial D$  compacta. Entonces dado  $x_0 \in \overline{D}$  existe un entorno  $U$  de  $x_0$  tal que para todo campo  $\vec{F}$

continuamente diferenciable y soportado en  $U$ , se verifica

$$\int_D \nabla \cdot \vec{F} dx = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \nu d\sigma \quad (68)$$

*Demostración.* En un primer momento supondremos que  $x_0 \in D$ , y probaremos el lema solo en este caso. Si  $x_0 \in D$ , entonces podemos encontrar un  $r > 0$  tal que

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\} \subseteq D \quad (69)$$

Sea  $\vec{F}$  un campo continuamente diferenciable en  $D$ . Si su soporte se encuentra contenido en  $B(x_0, r)$ , entonces  $\text{sop } \vec{F}$  se encuentra a una distancia positiva del complemento de dicha bola. Luego, extender  $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  por cero fuera de la bola, lo convierte en un campo  $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuamente diferenciable y con soporte compacto. Por (12) para tal campo se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot \tilde{F} dx = \int_D \nabla \cdot \vec{F} dx = 0 = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \nu d\sigma \quad (70)$$

Es decir, si  $x_0 \in D$  se tiene demostrado el lema.

Supongamos ahora que  $x_0 \in \partial D$ . La estrategia es probar que fijada una dirección coordenada,  $i = 1, \dots, n$  se puede construir un entorno  $U_i$  en la topología relativa a la de  $\mathbb{R}^n$  en  $\bar{D}$ , tal que si un campo  $\vec{F}$  continuamente diferenciable en  $D$ , está soportado en  $U_i$ , entonces

$$\int_{\partial D} F_i \nu_i d\sigma = \int_D \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx \quad (71)$$

siendo  $F_i$  la coordenada  $i$ -ésima de  $\vec{F}$  y  $\nu_i$  la correspondiente componente de la normal exterior a  $\partial D$ . De esta forma considerando  $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ , se tendrá probado el lema.

Probaremos para  $i = n$ , tratándose de igual manera el resto de las coordenadas. Una observación adicional es necesaria. Si sometemos a giros y traslaciones al dominio  $D$  los dos miembros  $\int_{\partial D} F_i \nu_i d\sigma$ ,  $\int_D \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx$  permanecen invariantes. Por tanto, podemos suponer que la coordenada  $n$ -ésima de  $x_0$  es positiva y que  $\nu_n(x_0) > 0$ .

Como, por hipótesis,  $D$  es regular existe  $W$  entorno de  $x_0$  y  $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}$  continuamente diferenciable tal que

$$\nabla \phi(x_0) \neq 0, \quad \partial D \cap W = \{x \in W : \phi(x) = 0\}, \quad D \cap W = \{x \in W : \phi(x) < 0\} \quad (72)$$

Por el teorema de la función implícita existen, un abierto  $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  entorno de  $\bar{x}_0 = (x_1, \dots, x_{n-1})$ , y una  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$  continuamente diferenciable, tales que  $\phi(\bar{x}, \psi(\bar{x})) = 0$  para  $\bar{x} \in V$ . Haciendo  $V$  pequeño si es preciso se tiene por continuidad que  $\psi(\bar{x}) > 0$  ( $\forall \bar{x} \in V$ ) dado que, por hipótesis  $(x_0)_n = \psi(\bar{x}) > 0$ . Para  $V$  elegido verificando lo anterior consideramos la parte de  $\partial D$  dada por el grafo de  $\psi$ , es decir,  $S = \{(\bar{x}, \psi(\bar{x})) : \bar{x} \in V\}$ .

Además, como  $\nu_n(x_0) > 0$ , se tiene, en particular  $\frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x_0) > 0$ . Y por tanto existe  $\delta > 0$  tal que, si  $|\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta$  y  $|x_n - (x_0)_n| < \delta$ , entonces  $\frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\bar{x}, x_n) > 0$ . Se toma  $\delta$  suficientemente pequeño para que  $B = \{\bar{x} : |\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta\} \subseteq V$ . Llamemos  $R = \{(\bar{x}, x_n) : |\bar{x} - \bar{x}_0| < \delta, |x_n - (x_0)_n| < \delta\}$  y definamos el intervalo  $I_{\bar{x}} = \{x_n : (\bar{x}, x_n) \in R\}$ , entonces, en particular, la función  $g_{\bar{x}}(x_n) = \phi(\bar{x}, x_n)$  es creciente en  $I_{\bar{x}}$ . Además, para cada  $\bar{x}$  el intervalo  $I_{\bar{x}}$  contiene el valor  $\psi(\bar{x})$ , que es donde  $\phi(\bar{x}, \psi(\bar{x})) = 0$ . Como  $\phi(\bar{x}, \cdot)$  es creciente como función de  $x_n$  en  $I_{\bar{x}}$ , resulta que

$$D \cap R = \{(\bar{x}, x_n) \in R : x_n < \psi(\bar{x})\} \quad (73)$$

Dicho de otra manera,  $D \cap R$  está contenido en un conjunto cilíndrico como el utilizado en la ecuación (21) y así se prueba (71) para los campos continuamente diferenciables en  $D$  soportados en  $D \cap R$ .  $\square$

Queda ahora por globalizar el resultado y así obtener el teorema de Gauss.

**Teorema 3.** *Sea  $D$  dominio regular y  $\vec{F} \in C^1(\overline{D})$  un campo de vectores. Entonces*

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot \nu d\sigma = \int_D \nabla \cdot \vec{F} dx \quad (74)$$

*Demostración.* Para cada  $x \in \overline{D} = \partial D \cup D$  consideremos  $U_x$  el entorno de  $x$  que da el Lema 3. Así  $\{U_x : x \in \overline{D}\}$  es un cubrimiento por abiertos (en la topología relativa) del compacto  $\overline{D}$ ; por tanto, se puede obtener un subcubrimiento finito  $\{U_1, \dots, U_r\}$  de  $\overline{D}$ .

Supongamos que podemos construir una familia finita de funciones  $\phi_1, \dots, \phi_r$  de clase  $C_0^\infty(\overline{D})$ , tales que

1.  $\phi_i \geq 0$ ;
2.  $\text{sop } \phi_i \subseteq U_i$  (en particular  $\phi_i = 0$  fuera de  $U_i$ );
3.  $\sum_{i=1}^r \phi_i(x) = 1$  si  $x \in \overline{D}$

Las familias  $\{\phi_1, \dots, \phi_r\}$  de funciones regulares que verifican estas tres propiedades reciben el nombre de *particiones de la unidad subordinadas al cubrimiento*  $\{U_1, \dots, U_r\}$ .

Sea  $\vec{F} \in C^1(\overline{D})$  un campo; si consideramos la partición de la unidad  $\{\phi_1, \dots, \phi_r\}$ , tenemos  $\vec{F} = \sum_{i=1}^r \phi_i \vec{F} = \sum_{i=1}^r \vec{F}_i$ . Ahora  $\vec{F}_i = \phi_i \vec{F}$  está soportado en  $U_{x_i}$  y por construcción se tiene:  $\int_D \nabla \cdot \vec{F}_i dx = \int_{\partial D} \vec{F}_i \cdot \nu d\sigma$ . Por tanto

$$\int_D \nabla \cdot \vec{F} dx = \sum_{i=1}^r \int_D \nabla \cdot \vec{F}_i dx = \sum_{i=1}^r \int_{\partial D} \vec{F}_i \cdot \nu d\sigma = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \nu d\sigma \quad (75)$$

Módulo la construcción de particiones de la unidad hemos probado el teorema □