Práctica 0
Preliminares de Análisis

Pablo Brianese

16 de junio de 2021

1. Convolución y Mollifiers

Definición 1. *Dadas $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ambas en $L(\mathbb{R}^n)$, definimos la convolución de la siguiente manera*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \tag{1}$$

Ejercicio 1. *Probar que si $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces valen:*

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$ *a la vez que* $(g + h) * f = g * f + h * f$
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$
4. $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$
5. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Observación 1. Las propiedades anteriores se pueden resumir diciendo que $(L^1(\mathbb{R}^n), \|-\|_1)$ es un álgebra de Banach conmutativa con la convolución como producto.

Lema propio 1. $\int_{\mathbb{R}^n} h(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)\mathrm{d}y$ *para toda $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea H la clase formada por las funciones $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ que verifican el enunciado. Por la linealidad de la integral, la combinación $\alpha h_1 + \beta h_2$ pertenece a H siempre que $h_1, h_2 \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por el teorema de convergencia monótona, si $\{h_m\}_m \subseteq H$ es una sucesión nodecreciente de funciones nonegativas que converge a una función integrable g, entonces $g \in H$. Para concluir, debemos probar que las funciones características integrables están en H. Supongamos que $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es la función característica $h = \mathbb{1}_A$ de un conjunto medible $A \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida finita. Observemos que $\mathbb{1}_A(x-y) = \mathbb{1}_{x-A}(y)$ para todo par $x, y \in \mathbb{R}^n$. A partir de esta relación pordemos calcular como, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(y)\mathrm{d}y = \lambda(A) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{x-A}(y)\mathrm{d}y = \lambda(x-A) \tag{2}$$

Ahora la ecuación que necesitamos se sigue de la invarianza por traslaciones $(+x)$ y reflexiones $(-)$ de la medida de Lebesgue, una propiedad que es facil de ver en el caso de los rectángulos que generan su σ–álgebra. Concretamente, sucede $\lambda(A) = \lambda(x - A)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. □

Demostración. 1 Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, como consecuencia del lema 1

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y && (3)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(x-(x-y))\mathrm{d}y && (4)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y)\mathrm{d}y && (5)\\ &= g * f(x) && (6) \end{aligned}$$

□

Demostración. 2 Por la ley distributiva de los números reales y la linealidad de la integral, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f * (g+h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(g+h)(x-y)\mathrm{d}y && (7)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) + f(y)h(x-y)\mathrm{d}y && (8)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^n} f(y)h(x-y)\mathrm{d}y && (9)\\ &= f * g(x) + f * h(x) && (10) \end{aligned}$$

La demostración del enunciado $(g + h) * f = g * f + h * f$ es similar. □

Demostración. 4 Sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Por la linealidad de la integral

$$(\lambda(f * g))(x) = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x-y))\mathrm{d}y \tag{11}$$

Pero por asociatividad del producto entre números reales

$$(\lambda f) * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f(x))g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x-y))\mathrm{d}y \tag{12}$$

$$f * (\lambda g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\lambda g(x-y))\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(f(y)g(x-y))\mathrm{d}y \tag{13}$$

Comparando los extremos derechos de las desigualdades se obtiene $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$. □

Lema propio 2 (Convergencia monótona para convoluciones)**.** *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, y* $\{g_m\}_m$ *es una sucesión nodecreciente de funciones nonegativas que convergen puntualmente a una* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, entonces* $\lim_{m\to\infty} f * g_m = f * g$ *y de forma similar* $\lim_{m\to\infty} g_m * f = g * f$*.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Si f^+ y f^- son las partes nonegativa y negativa de f, y $f^\pm$ es cualquiera de ellas entonces por el teorema de convergencia monótona

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} f^\pm * g_m(x) &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f^\pm(y) g_m(x-y)\mathrm{d}y && (14)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m\to\infty} f^\pm(y) g_m(x-y)\mathrm{d}y && (15)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f^\pm(y) g(x-y)\mathrm{d}y && (16)\\ &= f^\pm * g(x) && (17)\end{aligned}$$

En consecuencia el límite de las convoluciones es la convolución con el límite

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} f * g_m(x) &= \lim_{m\to\infty} f^+ * g_m(x) - \lim_{m\to\infty} f^- * g_m(x) && (18)\\ &= f^+ * g(x) - f^- * g(x) && (19)\\ &= f * g(x) && (20)\end{aligned}$$

La demostración del enunciado $\lim_{m\to\infty} g_m * f(x) = g * f(x)$ es idéntica a la que recién presentamos. □

Demostración. 5 Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Una primera desigualdad es simple

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x-y)| \mathrm{d}y\mathrm{d}x \qquad (21)$$

El teorema de Tonelli nos permite intercambiar el orden de integración para obtener

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) g(x-y)| \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (22)$$

El lema propio 1 simplifica esta integral mediante $\|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|\mathrm{d}x$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \|g\|_1 \mathrm{d}y = \|f\|_1 \|g\|_1 \qquad (23)$$

□

Lema propio 3. *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *y* $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $f*\psi$ *es uniformemente continua.*

Demostración. Sean $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Una primera desigualdad es sencilla

$$|f * \psi(x) - f * \psi(x')| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi(x'-y)\mathrm{d}y \right| \tag{24}$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\psi(x-y) - \psi(x'-y))\mathrm{d}y \right| \tag{25}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||\psi(x-y) - \psi(x'-y)|\mathrm{d}y \tag{26}$$

Ahora bien, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|\psi(u) - \psi(u')| < \varepsilon$ si $\|u - u'\| < \delta$ porque ψ, al ser continua de soporte compacto, es uniformemente continua. Luego $\|x - x'\| < \delta$ implica

$$|f * \psi(x) - f * \psi(x')| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||\psi(x-y) - \psi(x'-y)|\mathrm{d}y \tag{27}$$

$$< \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\mathrm{d}y \tag{28}$$

$$= \varepsilon \|f\|_1 \tag{29}$$

Siendo que $\|f\|_1 < \infty$, podemos conluir que $f * \psi$ es uniformemente continua. $\square$

Ejercicio 2. *Probar que si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ entonces $f * \psi$ es continua.*

Demostración. Sean $B_m = \bar{B}_m(0)$ las bolas cerradas de radio m centradas en 0. Aproximamos f mediante $f_m = f \mathbb{1}_{B_m}$ $(m \in \mathbb{N})$. La integrabilidad local de f hace de cada f_m una función integrable. Por el lema 3, las funciones $f_m * \psi$ son uniformemente continuas. Además, se da la convergencia uniforme en compactos $f_m * \psi \to f * \psi$. Para verlo fijemos un conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Existe un $M \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande, dependiendo de K, tal que $K \subseteq B_M$. Luego, para todo $x \in K$ y para todo $m \geq M$

$$f_m * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_m(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y \tag{30}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathbb{1}_{B_m}(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y \tag{31}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi(x-y)\mathrm{d}y \tag{32}$$

$$= f * \psi(x) \tag{33}$$

Queda probada la convergencia uniforme en compactos. Pero el límite, en este caso $f * \psi$, uniforme en compactos de una sucesión de funciones uniformemente continuas, aquí las f_m, es continuo. Por lo tanto $f * \psi$ es una función continua. $\square$

Ejercicio 3. *Probar que si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $\partial_{x_i}(\psi * f) = f * \partial_{x_i}\psi$.*

Observación 2. Como consecuencia $f * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ un vector fijo. Calculamos

$$\partial_{x_i}(f * \psi)(x) = \lim_{h \to 0} h^{-1}((f * \psi)(x + he_i) - (f * \psi)(x)) \tag{34}$$

$$= \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{\psi(x + he_i - y) - \psi(x - y)}{h} \mathrm{d}y \tag{35}$$

El análisis de este límite constará de tres partes. Primero acotamos la región de integración. Definimos $\phi_h(y) = h^{-1}(\psi(x + he_i - y) - \psi(x - y))$ para $y \in \mathbb{R}^n$ y $h \in \mathbb{R} \setminus 0$. Podemos probar que el soporte de las todas las funciones ϕ_h está contenido en una bola si nos restringimos a los desplazamientos $h \in [-1, 1]$. Sabemos que ψ tiene soporte compacto, por lo cual se anula en $\mathbb{R}^n \setminus B_r$, el complemento de la bola centrada en 0 de radio r. Escogiendo $r' = r + \|x\| + 1$ podemos asegurar que $\|y\| \geq r'$ implica

$$r = r' - \|x\| - 1 \qquad\qquad r = r' - \|x\| - 1 \tag{36}$$

$$\leq \|y\| - \|x\| - 1 \qquad\qquad \leq \|y\| - \|x\| - 1 \tag{37}$$

$$\leq \|y\| - \|x + he_i\| \qquad\qquad \leq \|y\| - \|x\| \tag{38}$$

$$\leq |\|x + he_i\| - \|y\|| \qquad\qquad \leq |\|x\| - \|y\|| \tag{39}$$

$$\leq \|x + he_i - y\| \qquad\qquad \leq \|x - y\| \tag{40}$$

y estas desigualdades a su vez nos permiten deducir $\psi(x+he_i-y) = \psi(x-y) = 0$. En conclusión, las funciones ϕ_h con $h \in [-1, 1]$ se anulan sobre el conjunto $\mathbb{R}^n \setminus B_{r'}$.

En segundo lugar controlamos el integrando. Por el teorema del valor medio $|\psi(x + he_i - y) - \psi(x - y)| \leq \|\partial_{x_i}\psi\|_\infty |h|$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Pero $\partial_{x_i}\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ porque $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Luego $C = \|\partial_{x_i}\psi\|_\infty < \infty$. Esto asegura $|\phi_h| \leq C$ para todo $h \in \mathbb{R} \setminus 0$.

En tercer y último lugar, aplicamos el teorema de convergencia dominada. En el primer y segundo paso probamos que $|\phi_h| \leq C\mathbb{1}_{B_{r'}}$ para todo $h \in [-1, 1]$. Partiendo de esto, el integrando $f\phi_h$ está dominado por una función $g = C|f|\mathbb{1}_{B_{r'}}$. Esta g resulta integrable porque f es localmente integrable. Luego el teorema de la convergencia dominada implica

$$\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_h(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \lim_{h \to 0} \phi_h(y)\mathrm{d}y \tag{41}$$

Pero $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\lim_{h \to 0} \phi_h(y) = \partial_{x_i}\psi(x - y) \qquad (\forall y \in \mathbb{R}^n) \tag{42}$$

Es decir

$$\partial_{x_i}(f * \psi)(x) = f * (\partial_{x_i}\psi)(x) \tag{43}$$

Con la conmutatividad de la convolución podemos llegar al enunciado preciso del ejercicio. □

Definición 2. *Dada una función ϕ diremos que es un mollifier si satisface las siguientes propiedades*

a) $\phi(x) \geq 0$*;*

b) $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$*;*

c) $\operatorname{sop}(\phi) = \overline{B_1(0)}$*.*

d) $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\mathrm{d}x = 1$*.*

Denotamos $\phi_\delta(x) = \delta^{-n}\phi(x/\delta)$*, donde* $\delta > 0$*.*

Ejercicio 4. *¿Cuáles son las propiedades que satisface* ϕ_δ*?*

Respuesta. Las propiedades que podemos observar son

a) $\phi_\delta \geq 0$;

b) $\phi_\delta \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$;

c) $\operatorname{sop}(\phi_\delta) = \overline{B_\delta(0)}$;

d) $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(x)\mathrm{d}x = 1$.

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la transformación lineal dada por $Tx = \delta x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. La propiedad a) se debe a que el producto de números nonegativos es un número nonegativo. b) se debe a la regla de la cadena, y a la suavidad de las funciones ϕ y la aplicación T^{-1}. c) se debe a que T es un homeomorfismo, y en consecuencia se puede calcular

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sop}(\phi_\delta) &= \{y \in \mathbb{R} : \phi_\delta(y) = 0\}^- && (44)\\
&= \{y \in \mathbb{R} : \delta^{-n}\phi(y/\delta) = 0\}^- && (45)\\
&= \{y \in \mathbb{R} : \phi(y/\delta) = 0\}^- && (46)\\
&= \{\delta(y/\delta) :, y \in \mathbb{R}^n, \phi(y/\delta) = 0\}^- && (47)\\
&= \{\delta x : x \in \mathbb{R}^n, \phi(x) = 0\}^- && (48)\\
&= (\delta \cdot \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0\})^- && (49)\\
&= \delta \cdot \{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) = 0\}^- && (50)\\
&= \delta \cdot \operatorname{sop}(\phi) && (51)
\end{aligned}
$$

además de la ecuación $\overline{B_\delta(0)} = \delta \cdot \overline{B_1(0)}$ particular a las bolas. d) se debe al teorema de cambio de variable aplicado a la transformación lineal T

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \delta^{-n}\phi(x/\delta)\mathrm{d}x \tag{52}$$
$$= \delta^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(T^{-1}x)\mathrm{d}x \tag{53}$$
$$= \delta^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)|\det T|\mathrm{d}y \tag{54}$$
$$= \delta^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\delta^n\mathrm{d}y \tag{55}$$
$$= \delta^{-n}\delta^n\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\mathrm{d}y \tag{56}$$
$$= 1\cdot 1 \tag{57}$$

□

Ejercicio 5. *Si $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua luego $f_\delta = f * \phi_\delta \to f$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ un vector. Calculamos usando la conmutatividad de la convolución

$$f(x) - f*\phi_\delta(x) = f(x) - \phi_\delta * f(x) = f(x) - \int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta(y)f(x-y)\mathrm{d}y \tag{58}$$

Usando la propiedad $\int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta(y)\mathrm{d}y = 1$, que mostramos en el ejercicio 4, vemos

$$f(x) - f*\phi_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta(y)\mathrm{d}y\cdot f(x) - \int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta(y)f(x-y)\mathrm{d}y \tag{59}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta(y)f(x)\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta(y)f(x-y)\mathrm{d}y \tag{60}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\phi_\delta(y)(f(x)-f(x-y))\mathrm{d}y \tag{61}$$

También en el ejercicio 4, probamos que $\mathrm{sop}(\phi_\delta) = \overline{B_\delta}$. Luego

$$f(x) - f*\phi_\delta(x) = \int_{\overline{B_\delta}}\phi_\delta(y)(f(x)-f(x-y))\mathrm{d}y \tag{62}$$

Esto dice que la diferencia $f(x) - f*\phi_\delta(x)$ en la izquierda depende del control que tengamos sobre el cambio de f sobre el conjunto $x + \overline{B_\delta}$.

Sabiendo esto, consideremos un compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ y restrinjamos $x \in K$. Este conjunto K está contenido en una bola $B_r \subseteq \mathbb{R}^n$ centrada en 0. Luego $x + \overline{B_\delta} \subseteq \overline{B_{r+\delta}}$ para todo $\delta > 0$. Si imponemos $\delta \leq 1$, entonces $x + \overline{B_\delta} \subseteq \overline{B_{r+1}}$. Pero f, al ser continua, es uniformemente continua en la bola compacta $\overline{B_{r'}}$ donde $r' = r+1$. Luego, para todo $\varepsilon > 0$, podemos elegir $\delta \in]0,1]$ de modo tal que para todo $\delta' \in]0, \delta]$ y todo $y \in \overline{B_{\delta'}}$ se verifica la cota $|f(x) - f(x-y)| < \varepsilon$ independientemente de $x \in K$. Con esta información estimamos

$$|f(x) - f * \phi_\delta(x)| = \left| \int_{\overline{B_\delta}} \phi_\delta(y)(f(x) - f(x-y))\mathrm{d}y \right| \tag{63}$$

$$\leq \int_{\overline{B_\delta}} |\phi_\delta(y)||f(x) - f(x-y)|\mathrm{d}y \tag{64}$$

$$\leq \varepsilon \int_{\overline{B_\delta}} |\phi_\delta(y)|\mathrm{d}y \tag{65}$$

Rematamos el cálculo usando las propiedades de nonegatividad $\phi_\delta \geq 0$, del soporte $\mathrm{sop}(\phi_\delta) = \overline{B_\delta}$, y la integral $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(y)\mathrm{d}y = 1$, todas vistas en el ejercicio 4. A partir de estas $\int_{\overline{B_\delta}} |\phi_\delta(y)|\mathrm{d}y = 1$. En conclusión, dado un conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ y un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $\delta' \in]0, \delta]$ y todo $x \in K$, se verifica la cota $|f(x) - f * \phi_\delta(x)| \leq \varepsilon$. Es decir, $f * \phi_\delta \to f$ uniformemente en compactos. □

Teorema 1. *Sea X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto, entonces $C_c(X)$ es denso en $L^p(\mu)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Sea s una función medible simple definida en X tal que $\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe una función $g \in C_c(X)$ tal que $g(x) = s(x)$ excepto en un conjunto de medida menor a ε, y $|g| \leq \|s\|_\infty$ (Teorema de Lusin). Por lo tanto $\|g - s\|_p \leq 2\varepsilon^{1/p}\|s\|_\infty$. Dado que la familia de las funciones s es densa en $L^p(\mu)$, esto completa la prueba. □

Definición propia 1. *Si f es una función sobre $\mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, defninimos la función $T_x f$ mediante $T_x f(y) = f(x+y)$.*

Lema propio 4. *Si $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, entonces $T_x g \to g$ en norma L^p cuando $x \to 0$.*

Demostración. Porque $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, también es uniformemente continua. Entonces $T_x g \to g$ uniformemente cuando $x \to 0$. Dado que g y g_x donde $|x| \leq 1$ estan soportadas en un conjunto compacto que les es común, también se sigue que $\|g - T_x g\|_p \to 0$. □

Lema propio 5. *Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $\lim_{x\to 0} \|f - T_x f\|_p = 0$.*

Demostración. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$, usando el resultado de densidad 1 elegimos una g continua de soporte compacto tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$. Entonces también $\|T_x f - T_x g\|_p < \varepsilon/3$, de modo que para la norma L^p

$$\|f - T_x f\| \leq \|f - g\| + \|g - T_x g\| + \|T_x f - T_x g\| < \|g - T_x g\| + \frac{2}{3}\varepsilon \tag{66}$$

Pero por el lema 4, $\|g - T_x g\|_p < \varepsilon/3$ para x lo suficientemente pequeño. Luego $\|f - T_x f\|_p < \varepsilon$. □

Lema propio 6. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, entonces*

$$\|f - f_\delta\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f - T_{-\delta w} f\|_p^p \phi(w)^p \mathrm{d}w \tag{67}$$

Demostración. Primero observamos que la integral $\int \phi_\delta = 1$ implica

$$(f - f_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x-y))\phi_\delta(y)\mathrm{d}y \tag{68}$$

Luego el cambio de variable $y \mapsto \delta w$ nos lleva a

$$(f - f_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(x - \delta w))\phi(w)\mathrm{d}w = \int_{\mathbb{R}^n} (f - T_{-\delta w} f)(x)\phi(w)\mathrm{d}w \tag{69}$$

Por la convexidad de la aplicación $t \mapsto |t|^p$ cuando $p \geq 1$, la desigualdad de Jensen nos dice que

$$|f - f_\delta|^p(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f - T_{-\delta w} f|^p(x)\phi(w)^p \mathrm{d}w \tag{70}$$

Integramos sobre x y aplicamos el Teorema de Tonelli del lado derecho para intercambiar el orden de la integración. Obtenemos

$$\begin{aligned} \|f - f_\delta\|_p^p &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f - T_{-\delta w} f|^p(x)\phi(w)^p \mathrm{d}w\mathrm{d}x & (71)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f - T_{-\delta w} f|^p(x)\mathrm{d}x\phi(w)^p \mathrm{d}w & (72)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|f - T_{-\delta w} f\|_p^p \phi(w)^p \mathrm{d}w & (73) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 6. *Si $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, entonces $f * \phi_\delta \to f$ en norma L^p cuando $\delta \to 0$.*

Demostración. Por el lema 6

$$\|f - f_\delta\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f - T_{-\delta w} f\|_p^p \phi(w)^p \mathrm{d}w \tag{74}$$

Pero $\|f_{-\delta y} - f\|_p$ está acotada por $2\|f\|_p$ y tiende a cero cuando $\delta \to 0$ para cada y, por el lema 5. Además $\|\phi\|_p^p < \infty$ porque $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, la convergencia $\|f - f_\delta\|_p \to 0$ cuando $\delta \to 0$ se sigue del Teorema de Convergencia Dominada. □

2. Series de Fourier

Dada una función $f \in L^1([-\pi, \pi])$ le asociamos una serie de Fourier

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \tag{75}$$

donde $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x$, llamados coeficientes de Fourier, también notados $\hat{f}(n)$. Se ha estudiado qué condiciones debe satisfacer una función para que la serie converja a la función en cuestión y los distintos tipos de convergencia.

Este tipo de problema surge de forma natural cuando se utiliza el método de separación de variables para resolver una ecuación en derivadas parciales.

Ejercicio 7. *Calcular la serie de Fourier en $[-\pi, \pi]$ de $f(x) = x$.*

Cálculo. Para calcular los coeficientes de Fourier c_n de la función $f(x) = x$, usamos la ecuación $e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$ $(y \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x && (76) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} \mathrm{d}x && (77) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\cos(-inx) + i \sin(-inx)) \mathrm{d}x && (78) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) \mathrm{d}x - i \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) \mathrm{d}x \right) && (79) \end{aligned}$$

Tenemos $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) \mathrm{d}x = 0$ porque $x \cos(nx)$ es una función impar. Luego

$$c_n = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) \mathrm{d}x \tag{80}$$

Si $n = 0$, entonces $c_0 = 0$. Caso contrario

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \left(x \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} \mathrm{d}x \right) && (81) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(2\pi \frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) && (82) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(2\pi \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n\pi) - \sin(n\pi)}{n^2} \right) && (83) \\ &= \frac{(-1)^n}{in} && (84) \end{aligned}$$

En fin $c_0 = 0$ y $c_n = (-1)^n / (in)$. □

Ejercicio 8. *Probar que si f es periódica y derivable, entonces la serie de Fourier asociada a f' es*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)(in)e^{inx} \tag{85}$$

donde $\hat{f}(n)$ es el coeficiente de orden n de f.

Demostración. Como f es derivable, es continua y por ello medible. Esto permite escribir f' como límite puntual de una sucesión de funciones medibles $f_n(x) = n(f(x + n^-1) - f(x))$ con $n \geq 1$. Por lo tanto f' es medible.

$$\widehat{(f')}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\mathrm{d}x \tag{86}$$

□

3. Espacio de Schwartz