

Geometría de la traza del movimiento de un electron expuesto a un campo electromagnético externo

Pablo Brianese

12 de julio de 2021

Ley 1. *La ecuación del movimiento para una partícula de masa m , carga q , expuesta a un campo electromagnético externo es*

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

En unidades SI.

Esta ecuación diferencial es lineal. Eso nos permite resolverla primero analizando el campo eléctrico, y después el campo magnético. Sabemos que cuando el campo eléctrico es constante y el campo magnético es nulo

Teorema 1. *La solución \vec{r} a la ecuación $m\vec{a} = q\vec{E}$, donde el campo eléctrico \vec{E} es constante, está dada por $\vec{r} = \frac{q}{m}\vec{E}\frac{t^2}{2} + \vec{v}_0t + \vec{r}_0$.*

Ahora busquemos la solución \vec{r} , en el caso que el campo eléctrico es nulo y el campo magnético es constante, a la ecuación

$$m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2)$$

Teorema 2. *El producto punto, $\vec{v} \cdot \vec{B}$, es constante.*

Demostración. Partimos de la ecuación $m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Multiplicamos por el campo magnético para obtener $m\vec{a} \cdot \vec{B} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{B}$. Porque el producto cruz $\vec{v} \times \vec{B}$ es ortogonal a \vec{B} , el lado derecho de la ecuación es nulo. Resulta $\vec{a} \cdot \vec{B} = 0$. Pero el producto punto es lineal, luego conmuta con la derivación. Por lo tanto $\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{B}) = 0$. \square

Teorema 3. *El módulo de la velocidad, v , es constante.*

Demostración. Partimos de la ecuación $m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Multiplicamos por la velocidad para obtener $m\vec{a} \cdot \vec{v} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}$. Porque el producto cruz $\vec{v} \times \vec{B}$ es ortogonal a \vec{v} , el lado derecho de la ecuación es nulo. Resulta $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$. Esto nos permite calcular $\frac{d}{dt}v^2 = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$. \square

Fijemos una base ortonormal $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ del plano ortogonal a \vec{B} . Esto nos permite definir dos escalares $\alpha = \vec{v} \cdot \bar{b}_1$, $\beta = \vec{v} \cdot \bar{b}_2$ que describen a la proyección ortogonal de \vec{v} sobre dicho plano. Sin mayor esfuerzo $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B} = \vec{B}/B\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Pediremos además que $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$ esté orientada positivamente. Con mayor claridad, lo que pedimos es que se verifiquen las ecuaciones $\bar{b}_1 \times \bar{b}_2 = \bar{B}$, $\bar{b}_2 \times \bar{B} = \bar{b}_1$, $\bar{B} \times \bar{b}_1 = \bar{b}_2$. Eso nos ayudará a calcular productos cruz. Las siguientes propiedades se derivan de esta construcción

Teorema 4. *Las variables α , β nos proveen las identidades*

$$\vec{v} = \alpha \bar{b}_1 + \beta \bar{b}_2 + (\vec{v}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B} \quad (3)$$

$$v_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (\vec{v}_0 \cdot \bar{B})^2 \quad (4)$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = B(-\alpha \bar{b}_2 + \beta \bar{b}_1) \quad (5)$$

$$\vec{a} = \frac{d\alpha}{dt} \bar{b}_1 + \frac{d\beta}{dt} \bar{b}_2 \quad (6)$$

Demostración. (3) es consecuencia de la ortonormalidad de la base $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$. La fórmula $\vec{v} \cdot \vec{B} = \vec{v}_0 \cdot \vec{B}$ se debe al teorema 2.

(4) se debe a la ortonormalidad de la base $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$ y a la ecuación (3). La igualdad $v^2 = v_0^2$ se debe al teorema 3.

(5) se debe a la orientación positiva de la base $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$. Esta hace que $\bar{b}_1 \times \bar{b}_2 = \bar{B}$, $\bar{b}_2 \times \bar{B} = \bar{b}_1$, $\bar{B} \times \bar{b}_1 = \bar{b}_2$. Y a la ecuación (3).

(6) se debe a la ecuación (3) y a la linealidad de la derivada. \square

Teorema 5. *Las funciones α , β satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{qB}{m} \beta \\ \frac{d\beta}{dt} = -\frac{qB}{m} \alpha \end{cases} \quad (7)$$

Demostración. Partimos de la ecuación $m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Reemplazamos \vec{a} , $\vec{v} \times \vec{B}$ por sus fórmulas (6), (5) en función de α , β . Obtenemos

$$\frac{d\alpha}{dt} \bar{b}_1 + \frac{d\beta}{dt} \bar{b}_2 = \frac{qB}{m} (\beta \bar{b}_1 - \alpha \bar{b}_2) \quad (8)$$

El sistema (7) se deduce usando que \bar{b}_1 , \bar{b}_2 son vectores linealmente independientes. \square

Teorema 6. *Si la velocidad inicial, \vec{v}_0 , es paralela al campo magnético, \vec{B} , entonces la velocidad \vec{v} es constante.*

Demostración. Partimos de la ecuación (4), que dice $v_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (\vec{v}_0 \cdot \bar{B})^2$. Si \vec{v}_0 es paralelo a \vec{B} , entonces $\vec{v}_0 = (\vec{v}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B}$ y $v_0^2 = (\vec{v}_0 \cdot \bar{B})^2$. Junto a la primera ecuación, estas implican $\alpha = \beta = 0$. Por la ecuación (3), se sigue $\vec{v} = (\vec{v}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B} = \vec{v}_0$ \square

En lo que sigue vamos a ignorar este caso degenerado, en el cual la velocidad inicial y el campo magnético son paralelos, y supondremos $\vec{v}_0 \neq (\vec{v}_0 \cdot \vec{B})\vec{B}$. Esto nos permite proyectar el vector \vec{v}_0 sobre el plano ortogonal al campo magnético \vec{B} . El resultado es el vector proyección $\vec{\pi}_0 = \vec{v}_0 - (\vec{v}_0 \cdot \vec{B})\vec{B}$. Que tiene módulo positivo $\pi_0 = (v_0^2 - (\vec{v}_0 \cdot \vec{B})^2)^{1/2}$, y por eso puede ser regularizado $\bar{\pi}_0 = \vec{\pi}_0/\pi_0$. Este vector es importante, y en el siguiente teorema lo vemos por primera vez.

Teorema 7. *Existe un ángulo $\theta = \theta(t)$ tal que $\alpha = \pi_0 \cos \theta$, $\beta = \pi_0 \sin \theta$.*

Demostración. La ecuación 4 nos dice que $\pi_0^2 = v_0^2 - (\vec{v}_0 \cdot \vec{B})^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Se deduce la ecuación de una circunferencia $\alpha^2 + \beta^2 = \pi_0^2$ de radio π_0 . Luego, para cada tiempo t existe un ángulo $\theta = \theta(t)$ tal que $\alpha = \pi_0 \cos \theta$ y $\beta = \pi_0 \sin \theta$. \square

Teorema 8. *La velocidad angular $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ es $\omega = \frac{qB}{m}$.*

Demostración. Partimos del sistema de ecuaciones diferenciales (7). Reemplazando $\alpha = \pi_0 \cos \theta$, $\beta = \pi_0 \sin \theta$, y usando la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{cases} (\pi_0 \sin \theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{qB}{m} (\pi_0 \sin \theta) \\ (-\pi_0 \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{qB}{m} (-\pi_0 \cos \theta) \end{cases} \quad (9)$$

Conjuntamente, estas dos ecuaciones implican $\omega = \frac{qB}{m}$. \square

Esta es la segunda vez que aparece el vector proyección $\vec{\pi}$. Aquí es importante que sea nonulo, porque nos permite usarlo para entender los vectores que viven en el plano ortogonal a \vec{B} .

Teorema 9. *La base $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ del plano ortogonal a \vec{B} , puede elegirse como*

$$\bar{b}_1 = \bar{\pi}_0 \quad \bar{b}_2 = \vec{B} \times \bar{\pi}_0 \quad (10)$$

Además, de este modo puede elegirse el valor inicial de θ como

$$\theta_0 = 0 \quad (11)$$

Demostración. En efecto. El vector $\bar{b}_1 = \bar{\pi}_0$ es unitario y ortogonal a \vec{B} . Un buen candidato. Por otro lado, el vector \bar{b}_2 queda inmediatamente determinado por la restricción que impusimos sobre la base $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \vec{B}\}$ de \mathbb{R}^3 . Al especificar que esta tiene que estar orientada positivamente, se verifica $\vec{B} \times \bar{b}_1 = \bar{b}_2$. Y esta última ecuación define a \bar{b}_2 .

Por otro lado, si volvemos a la ecuación (3), para el instante $t = 0$ dice $\vec{v}_0 = \alpha_0 \bar{b}_1 + \beta_0 \bar{b}_2 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{B})\vec{B}$. Reemplazando α, β por sus expresiones en función de θ , obtenemos

$$\vec{v}_0 = \pi_0 \cos \theta_0 \bar{b}_1 + \pi_0 \sin \theta_0 \bar{b}_2 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{B})\vec{B} \quad (12)$$

Pero $\vec{\pi}_0 = \vec{v}_0 - (\vec{v}_0 \cdot \vec{B})\vec{B}$. Entonces $\vec{\pi}_0 = \cos \theta_0 \bar{b}_1 + \sin \theta_0 \bar{b}_2$. Aquí se aprecia que $\theta_0 = 0$ es una elección viable para el ángulo inicial. \square

Teorema 10. *El ángulo es $\theta = \omega t$.*

Demostración. Es una consecuencia trivial de 8 y 9. \square

Teorema 11. *La solución \vec{r} a la ecuación $m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$, donde el campo magnético es constante, está dada por*

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = -\frac{\sin \omega t}{\omega} \vec{\pi}_0 + \frac{\cos \omega t}{\omega} \vec{B} \times \vec{\pi}_0 + t(\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B} \quad (13)$$

Demostración. Partimos de la ecuación (3)

$$\vec{v} = \alpha \bar{b}_1 + \beta \bar{b}_2 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B} \quad (14)$$

Reemplazamos \bar{b}_1, \bar{b}_2 por los vectores que propusimos en 9

$$\vec{v} = \alpha \vec{\pi} + \beta \vec{B} \times \vec{\pi} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B} \quad (15)$$

Reemplazamos α, β por las expresiones en función de θ que obtuvimos en 7

$$\vec{v} = (\pi_0 \cos \theta) \vec{\pi}_0 + (\pi_0 \sin \theta) \vec{B} \times \vec{\pi}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B} \quad (16)$$

$$= (\cos \theta) \vec{\pi}_0 + (\sin \theta) \vec{B} \times \vec{\pi}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B} \quad (17)$$

Reemplazamos θ por ωt , usando el teorema 10

$$\vec{v} = (\cos \omega t) \vec{\pi}_0 + (\sin \omega t) \vec{B} \times \vec{\pi}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B} \quad (18)$$

Integrando con respecto a t obtenemos el resultado que deseamos. \square

Observar que esta última fórmula también funciona en el caso en que \vec{v}_0 sea paralelo a \vec{B} . Allí, sencillamente $\vec{\pi}_0 = 0$.

Teorema 12. *La solución \vec{r} a la ecuación $m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$, donde el campo eléctrico \vec{E} y el campo magnético \vec{B} son constantes, es*

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \left(\frac{q}{m} \vec{E} \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t \right) + \left(-\frac{\sin \omega t}{\omega} \vec{\pi}_0 + \frac{\cos \omega t}{\omega} \vec{B} \times \vec{\pi}_0 + t(\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B} \right) \quad (19)$$