Geometría de la traza del movimiento de un electron expuesto a un campo electromagnético externo

Pablo Brianese

2 de agosto de 2021

Ley 1. *La ecuación del movimiento para una partícula de masa m, carga q, expuesta a un campo electromagnético externo es*

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{1}$$

En unidades SI.

Si derivamos esta ley con respecto al tiempo, asumiendo que los campos eléctrico y magnético son constantes, obtenemos una ecuación para la aceleración

$$m\vec{j} = q\vec{a} \times \vec{B} \tag{2}$$

donde $\vec{j} = d\vec{a}/dt$ es la llamada sobreaceleración de la partícula. Para resolver esta ecuación suponemos además que ambos $\vec{E}$, $\vec{B}$ son nonulos.

Teorema 1. *El producto punto, $\vec{a} \cdot \vec{B}$, es constante.*

Demostración. Partimos de la ecuación $m\vec{j} = q\vec{a} \times \vec{B}$. Multiplicamos por el campo magnético para obtener $m\vec{j} \cdot \vec{B} = q\vec{a} \times \vec{B} \cdot \vec{B}$. Porque el producto cruz $\vec{v} \times \vec{B}$ es ortogonal a $\vec{B}$, el lado derecho de la ecuación es nulo. Resulta $\vec{j} \cdot \vec{B} = 0$. Pero el producto punto es lineal, luego conmuta con la derivación. Por lo tanto $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{B}) = 0$. □

Teorema 2. *El módulo de la aceleración, a, es constante.*

Demostración. Partimos de la ecuación $m\vec{j} = q\vec{a} \times \vec{B}$. Multiplicamos por la aceleración para obtener $m\vec{j} \cdot \vec{a} = q(\vec{a} \times \vec{B}) \cdot \vec{a}$. Porque el producto cruz $\vec{a} \times \vec{B}$ es ortogonal a $\vec{a}$, el lado derecho de la ecuación es nulo. Resulta $\vec{j} \cdot \vec{a} = 0$. Esto nos permite calcular $\frac{d}{dt}a^2 = 2\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a} \cdot \vec{j} = 0$. □

Fijemos una base ortonormal $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ del plano ortogonal a $\vec{B}$. Esto nos permite definir dos escalares $\alpha = \vec{a} \cdot \bar{b}_1$, $\beta = \vec{a} \cdot \bar{b}_2$ que describen a la proyección ortogonal de $\vec{a}$ sobre dicho plano. Sin mayor esfuerzo $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B} = \vec{B}/B\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Pediremos además que $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$ esté orientada positivamente. Con mayor claridad, lo que pedimos es que se verifiquen las ecuaciones $\bar{b}_1 \times \bar{b}_2 = \bar{B}$, $\bar{b}_2 \times \bar{B} = \bar{b}_1$, $\bar{B} \times \bar{b}_1 = \bar{b}_2$. Eso nos ayudará a calcular productos cruz. La siguientes propiedades se derivan de esta construcción

Teorema 3. *Las variables α, β nos proveen las identidades*

$$\vec{a} = \alpha\bar{b}_1 + \beta\bar{b}_2 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})\bar{B} \tag{3}$$

$$a_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})^2 \tag{4}$$

$$\vec{a} \times \vec{B} = B(-\alpha\bar{b}_2 + \beta\bar{b}_1) \tag{5}$$

$$\vec{j} = \frac{d\alpha}{dt}\bar{b}_1 + \frac{d\beta}{dt}\bar{b}_2 \tag{6}$$

Demostración. (3) es consecuencia de la ortonormalidad de la base $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$. La fórmula $\vec{a} \cdot \bar{B} = \vec{a}_0 \cdot \bar{B}$ se debe al teorema 1.

Todas las demás son consecuencia de esta primera ecuación (3).

(4) se debe a la ortonormalidad de la base $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$, y a la igualdad $a^2 = a_0^2$ que se desprende del teorema teorema 2.

(5) se debe a la orientación positiva de la base $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$.

(6) se debe a la linealidad de la derivada. □

Teorema 4. *Las funciones α, β satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{qB}{m}\beta \\ \dfrac{d\beta}{dt} = -\dfrac{qB}{m}\alpha \end{cases} \tag{7}$$

Demostración. Partimos de la ecuación $m\vec{j} = q\vec{a} \times \vec{B}$. Reemplazamos $\vec{j}$, $\vec{a} \times \vec{B}$ por sus fórmulas (6), (5) en función de α, β. Obtenemos

$$\frac{d\alpha}{dt}\bar{b}_1 + \frac{d\beta}{dt}\bar{b}_2 = \frac{qB}{m}(\beta\bar{b}_1 - \alpha\bar{b}_2) \tag{8}$$

El sistema (7) se deduce usando que $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ son linealmente independientes. □

El siguiente caso particular resulta muy interesante. Su particularidad es que muestra una familia de trayectorias parabólicas en presencia de un campo magnético nonulo.

Teorema 5. *Si la aceleración inicial, $\vec{a}_0$, es paralela al campo magnético, $\vec{B}$, entonces la aceleración $\vec{a}$ es constante.*

Demostración. Partimos de la ecuación (4), que dice $a_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})^2$. Si $\vec{a}_0$ es paralelo a $\vec{B}$, entonces $\vec{a}_0 = (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})\bar{B}$ y $a_0^2 = (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})^2$. Junto a la primera ecuación, estas implican $\alpha = \beta = 0$. Por la ecuación (3), se sigue $\vec{a} = (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})\bar{B} = \vec{a}_0$ □

Teorema 6. *Si la aceleración inicial, $\vec{a}_0$, es paralela al campo magnético, $\vec{B}$, entonces la solución a la ecuación diferencial* (1) *está dada por*

$$\vec{r} - \vec{r_0} = \vec{a}_0 \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t \qquad \text{donde} \qquad \vec{a}_0 = \frac{q}{m}\vec{E} + \frac{q}{m}\vec{v}_0 \times \vec{B} \tag{9}$$

Demostración. Partimos del Teorema 5. La aceleración $\vec{a}$ es constante. Luego $\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}_0 t$. Integrar nuevamente arroja $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a}_0 t^2/2 + \vec{v}_0 t$. La fórmula para $\vec{a}_0$ se deriva de la identidad $m\vec{a}_0 = q\vec{E} + q\vec{v}_0 \times \vec{B}$. □

En lo que sigue vamos a ignorar este caso, en el cual la velocidad inicial y el campo magnético son paralelos, y supondremos $\vec{a}_0 \neq (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})\bar{B}$. Esto nos permite proyectar el vector $\vec{a}_0$ sobre el plano ortogonal al campo magnético $\vec{B}$. El resultado es el vector proyección $\vec{\pi}_0 = \vec{a}_0 - (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})\bar{B}$. Que tiene módulo positivo $\pi_0 = (a_0^2 - (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})^2)^{1/2}$, y por eso puede ser regularizado $\bar{\pi}_0 = \vec{\pi}_0/\pi_0$. Este vector es importante, y en el siguiente teorema lo vemos por primera vez.

Teorema 7. *Existe un ángulo $\theta = \theta(t)$ tal que $\alpha = \pi_0 \cos\theta$, $\beta = \pi_0 \sin\theta$.*

Demostración. La ecuación (4) nos dice que $\pi_0^2 = a_0^2 - (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Se deduce la ecuación de una circunferencia $\alpha^2 + \beta^2 = \pi_0^2$ de radio π_0. Luego, para cada tiempo t existe un ángulo $\theta = \theta(t)$ tal que $\alpha = \pi_0 \cos\theta$ y $\beta = \pi_0 \sin\theta$. □

Teorema 8. *La velocidad angular $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ es $\omega = \frac{qB}{m}$.*

Demostración. Partimos del sistema de ecuaciones diferenciales (7). Reemplazando $\alpha = \pi_0 \cos\theta$, $\beta = \pi_0 \sin\theta$, y usando la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{cases} (\pi_0 \sin\theta)\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{qB}{m}(\pi_0 \sin\theta) \\ (-\pi_0 \cos\theta)\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{qB}{m}(-\pi_0 \cos\theta) \end{cases} \tag{10}$$

Conjuntamente, estas dos ecuaciones implican $\omega = \frac{qB}{m}$. □

En lo que sigue es importante que $\vec{\pi}_0$ sea nonulo, porque nos permite usarlo para entender los vectores que viven en el plano ortogonal a $\vec{B}$.

Teorema 9. *La base $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ del plano ortogonal a $\vec{B}$, puede elegirse como*

$$\bar{b}_1 = \bar{\pi}_0 \qquad\qquad \bar{b}_2 = \bar{B} \times \bar{\pi}_0 \tag{11}$$

Además, de este modo puede elegirse el valor inicial de θ como

$$\theta_0 = 0 \tag{12}$$

Demostración. En efecto. El vector $\bar{b}_1 = \bar{\pi}_0$ es unitario y ortogonal a $\vec{B}$. Un buen candidato. Por otro lado, el vector $\bar{b}_2$ queda inmediatamente determinado por la restricción que impusimos sobre la base $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$ de $\mathbb{R}^3$. Al especificar que esta tiene que estar orientada positivamente, se verifica $\bar{B} \times \bar{b}_1 = \bar{b}_2$. Y esta última ecuación define a $\bar{b}_2$.

Por otro lado, si volvemos a la ecuación (3), para el instante $t = 0$ dice $\vec{a}_0 = \alpha_0 \bar{b}_1 + \beta_0 \bar{b}_2 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})\bar{B}$. Reemplazando α, β por sus expresiones en función de θ, obtenemos

$$\vec{a}_0 = \pi_0 \cos\theta_0 \bar{b}_1 + \pi_0 \sin\theta_0 \bar{b}_2 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})\bar{B} \tag{13}$$

Pero $\vec{\pi}_0 = \vec{a}_0 - (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})\bar{B}$. Entonces $\bar{\pi}_0 = \cos\theta_0 \bar{b}_1 + \sin\theta_0 \bar{b}_2$. Aquí se aprecia que $\theta_0 = 0$ es una elección viable para el ángulo inicial. □

Teorema 10. *El ángulo es $\theta = \omega t$.*

Demostración. Es una consecuencia trivial de 8 y 9. □

Teorema 11. *La solución $\vec{r}$ a la ecuación $m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$, donde el campo magnético es constante, está dada por*

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = -\frac{\sin\omega t}{\omega}\vec{\pi}_0 + \frac{\cos\omega t}{\omega}\bar{B} \times \vec{\pi}_0 + t(\vec{v}_0 \cdot \bar{B})\bar{B} \tag{14}$$

Demostración. Partimos de la ecuación (3)

$$\vec{v} = \alpha \bar{b}_1 + \beta \bar{b}_2 + (\vec{v}_0 \cdot \bar{B})\bar{B} \tag{15}$$

Reemplazamos $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ por los vectores que propusimos en 9

$$\vec{v} = \alpha \bar{\pi} + \beta \bar{B} \times \bar{\pi} + (\vec{v}_0 \cdot \bar{B})\bar{B} \tag{16}$$

Reemplazamos α, β por las expresiones en función de θ que obtuvimos en 7

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (\pi_0 \cos\theta)\vec{\pi}_0 + (\pi_0 \sin\theta)\bar{B} \times \vec{\pi}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \bar{B})\bar{B} && (17) \\ &= (\cos\theta)\vec{\pi}_0 + (\sin\theta)\bar{B} \times \vec{\pi}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \bar{B})\bar{B} && (18) \end{aligned}$$

Reemplazamos θ por ωt, usando el teorema 10

$$\vec{v} = (\cos\omega t)\vec{\pi}_0 + (\sin\omega t)\bar{B} \times \vec{\pi}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \bar{B})\bar{B} \tag{19}$$

Integrando con respecto a t obtenemos el resultado que deseamos. □

Observar que esta última fórmula también funciona en el caso en que $\vec{v}_0$ sea paralelo a $\vec{B}$. Allí, sencillamente $\vec{\pi}_0 = 0$.

Teorema 12. *La solución $\vec{r}$ a la ecuación $m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$, donde el campo eléctrico $\vec{E}$ y el campo magnético $\vec{B}$ son constantes, es*

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \left(\frac{q}{m}\vec{E}\frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t\right) + \left(-\frac{\sin\omega t}{\omega}\vec{\pi}_0 + \frac{\cos\omega t}{\omega}\bar{B} \times \vec{\pi}_0 + t(\vec{v}_0 \cdot \bar{B})\bar{B}\right) \tag{20}$$