

Aplicaciones conformes en la dinámica de fluidos bidimensional

Pablo Brianese

30 de julio de 2021

Definición 1. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que f es conforme en $z_0 \in U$ si $f'(z_0) \neq 0$.

La propiedad de las aplicaciones conformes que resulta asombrosa es que preservan ángulos. En particular, sean $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow U$ curvas que se encuentran en $z_0 \in U$ (es decir, $z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$, para algunos $t_1, t_2 \in [a, b]$). Sea θ el ángulo entre las tangentes de γ_1 y γ_2 en z_0 (es decir, el ángulo entre $\gamma_1'(t_1)$ y $\gamma_2'(t_2)$). Entonces, las imágenes por f de las curvas $f(\gamma_1)$ y $f(\gamma_2)$, que obviamente pasan por $f(z_0)$ ($f(z_0) = f(\gamma_1(t_1)) = f(\gamma_2(t_2))$), también tienen tangentes en $f(z_0)$ tales que θ es el ángulo entre ellas (tal como en la preimagen de f).

En otras palabras, cuando f es conforme y $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$, entonces $\text{ángulo}(\gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2)) = \text{ángulo}((f(\gamma_1))'(t_1), (f(\gamma_2))'(t_2))$.

Proposición 1. Si $f : U \rightarrow V$ es una biyección conforme, entonces también $f^{-1} : V \rightarrow U$ es conforme.

Prueba. $f^{-1}(f(z)) = z \Rightarrow (f^{-1})'(f(z))f'(z) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(f(z)) = 1/f'(z) \neq 0$ \square

Por estas razones, las aplicaciones conformes pueden ser muy útiles a la hora de resolver ecuaciones en derivadas parciales sobre dominios bidimensionales. Como ejemplo, consideraremos el siguiente problema de carácter general en la mecánica de fluidos:

Problema 1. Supongamos que tenemos un problema de mecánica de fluidos en un dominio abierto bidimensional $U \subseteq \mathbb{C}$, tal que el fluido en cualquier $x \in U$ tiene velocidad $\vec{v}(x)$. Supongamos que el flujo es: incompresible (es decir $\nabla \cdot \vec{v} = 0$), irrotacional (es decir $\nabla \times \vec{v} = 0$), y estacionario (es decir, \vec{v} no depende del tiempo). Suponemos además la condición de borde $\vec{v}(x) \cdot \vec{n}(x) = 0$ ($\forall x \in \partial U$), es decir, que $\vec{v}(x)$ es tangente a ∂U para todo $x \in \partial U$. Tenemos que derivar el valor de \vec{v} .

Si U no tiene agujeros, el hecho que el flujo sea irrotacional implica que existe un potencial $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ para la velocidad tal que $\vec{v} = \nabla \phi$ sobre U . Es decir, la velocidad que deseamos es el gradiente de una función. Vamos a las

condiciones sobre el flujo \vec{v} y reemplazamos este campo por $\nabla\phi$ (en todas las condiciones salvo por $\nabla \times \vec{v} = 0$, dado que ya la hemos usado). Tenemos que encontrar $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

1. $\nabla \cdot \nabla\phi = \Delta\phi = 0$, es decir, ϕ satisface la ecuación de Laplace!
2. $\nabla\phi \cdot \vec{n} = 0$ sobre ∂U . Es decir, ϕ no cambia en la dirección de la frontera. Esta es en realidad una condición sobre un ángulo: los vectores $\nabla\phi$ y \vec{n} tienen que ser perpendiculares en ∂U .

Por lo tanto, sólo necesitamos resolver la ecuación de Laplace en U , y luego tomar el gradiente de la solución ¡este será \vec{v} !

¿Y si U fuera el semiplano superior \mathcal{H} ? Se sabe resolver nuestro problema en este dominio. Aquí el fluido se mueve a velocidad constante a lo largo de las líneas horizontales (líneas de corriente). Con mayor precisión: ϕ es constante a lo largo de cualquier línea vertical, y cambia linealmente en la dirección horizontal. Aquí $\phi(x, y) = Cx$ para alguna constante C . Por lo tanto $\vec{v} = \nabla\phi$, que es perpendicular a $\{\phi = \text{const}\}$, es horizontal, y constante. Observar como de hecho se satisfacen las condiciones $\Delta\phi = 0$ en U , $\nabla\phi \cdot \vec{n} = 0$ en ∂U , para este $\phi(x, y) = Cx$.

Aquí, $\nabla\phi$ es ortogonal a $\{\phi = \text{const}\}$ de forma obvia (porque $\{\phi = \text{const}\}$ es una línea vertical, y sobre ella $\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$, de modo tal que $\nabla\phi$ es horizontal). Pero esto sería cierto incluso si $\{\phi = \text{const}\}$ fuera una curva (por el teorema de la función implícita). Por lo tanto $\vec{v} = \nabla\phi$ siempre es perpendicular a la curva de nivel $\{\phi = \text{const}\}$. Visto desde otro punto de vista: dado que ϕ satisface la ecuación de Laplace, tiene una conjugada armónica ψ , y, como sucede con las conjugadas armónicas (por las ecuaciones de Cauchy–Riemann $\partial_x\phi = \partial_y\psi$, $\partial_y\phi = -\partial_x\psi$), tenemos que las curvas $\{\phi = \text{const}\}$ y $\{\psi = \text{const}\}$ son perpendiculares cuando se cruzan. Y $\{\psi = \text{const}\}$ ¡son exactamente las líneas de corriente (puede probarse)!

Mucho de lo anterior se sostiene para $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Delta\phi = 0$, ¡sin importar que tan complejo sea el dominio U ! En particular, si ψ es el conjugado armónico de ϕ , entonces:

- las curvas $\{\phi = \text{const}\}$ y $\{\psi = \text{const}\}$ son ortogonales donde se encuentran (es decir, $\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0$)
- Claramente, por esto último tenemos que $\vec{v} = \nabla\phi$ es tangente a $\{\psi = \text{const}\}$.
- Pero, aún mejor, $\{\psi = \psi(z_0)\}$ es el camino que una partícula en la posición z_0 seguirá en este flujo! Por eso es que las curvas $\{\psi = \text{const}\}$ reciben el nombre de líneas de corriente: son los caminos que siguen las partículas que forman el fluido durante el flujo.

De este modo, ya el análisis complejo (la existencia de conjugados armónicos y las ecuaciones de Cauchy–Riemann) ha revelado mucho. Ahora, las aplicaciones conformes nos ayudaran a tomar cualquier dominio U (sin agujeros),

transformarlo de forma conforme en el semiplano superior, donde sabemos qué sucede con flujos incompresibles e irrotacionales, y luego transferir la solución de vuelta a U .

Esto se basa en una observación simple y un teorema importante:

Problema 2. Sea $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Delta\phi = 0$ en U , y $\nabla\phi \cdot \vec{n} = 0$ en ∂U . Hallar ϕ .

Observación 1. Supongamos que podemos encontrar una aplicación holomorfa conforme f que transforme U en \mathcal{H} , y ∂U en $\partial\mathcal{H} = \mathbb{R}$. Si $\tilde{\phi} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface $\nabla\tilde{\phi} = 0$ en \mathcal{H} y $\nabla\tilde{\phi} \cdot \vec{n} = 0$ en $\partial\mathcal{H}$, entonces $\phi := \tilde{\phi}(f)$ satisface $\Delta\phi = 0$ en U y $\nabla\phi \cdot \vec{n} = 0$ en ∂U .

Por lo tanto, nuestra tarea se reduce a encontrar una f con estas propiedades; luego $\phi := \tilde{\phi} \circ f$, y luego $\vec{v} = \nabla\phi$.

Observar que, dado que las aplicaciones conformes preservan ángulos, tenemos que $\nabla\phi$ es perpendicular a ∂U porque $\nabla\tilde{\phi}$ es perpendicular a \mathbb{R} .

También, las curvas $\{\tilde{\phi} = \text{const}\}$ se transforman en $\{\phi = \text{const}\}$ via f^{-1} ; lo mismo vale para ψ . Por tanto, ¡las líneas de corriente $\{\psi = \text{const}\}$ son solo las imágenes inversas de las líneas de corriente $\{\tilde{\psi} = \text{const}\}$ (las líneas horizontales marcadas por la conjugada armónica de $\tilde{\psi}$) via f ! Es decir, para encontrar las líneas de corriente de nuestro flujo, solamente calculamos f^{-1} (línea horizontal). Ni siquiera necesitamos calcular ψ . ¡Esto no debería sorprendernos! $\nabla\phi$ debe ser tangente a estas curvas de nivel, dado que f^{-1} preserva ángulos, y que $\nabla\tilde{\phi}$ era tangente a las líneas horizontales. El flujo $\vec{v} = \nabla\phi$ queda determinado por las condiciones

1. $\phi := \tilde{\phi}(f)$
2. $\vec{v} = \nabla\phi$
3. \vec{v} es tangente a las líneas de corriente f^{-1} (línea horizontal)

Finalmente, notar que las curvas $\{\psi = \text{const}\}$ and $\{\phi = \text{const}\}$ son perpendiculares, porque ϕ and ψ son conjugados armónicos. Esto también se deduce usando que f^{-1} es conforme, y $\{\tilde{\phi} = \text{const}\}$ es ortogonal a $\{\tilde{\psi} = \text{const}\}$, de modo que también $\{\phi = \text{const}\} = f^{-1}(\{\tilde{\phi} = \text{const}\})$ es ortogonal a $\{\psi = \text{const}\} = f^{-1}(\{\tilde{\psi} = \text{const}\})$.

Teorema 1 (Teorema de representación conforme de Riemann). Si $U \subseteq \mathbb{C}$ es un dominio abierto simplemente conexo (sin agujeros), entonces existe una aplicación conforme $f : U \rightarrow \mathcal{H}$.

Es este el teorema que nos dice que la construcción que describimos antes tiene sentido; sabemos que, sin importar que tan loco sea U , mientras no tenga agujeros, ¡podemos transformarlo conformemente en el semiplano superior! Por eso, el método que describimos para encontrar el flujo en un dominio U general siempre funcionará, mientras podamos encontrar una aplicación conforme f apropiada que transforme U en \mathcal{H} (si no podemos encontrarla, esto se debe a nuestra incapacidad ¡siempre existe!)

En el caso del flujo exterior a un cilindro, podemos usar la función $f(z) = z + r^2/z$ para transformar la región U exterior al cilindro en el semiplano superior \mathcal{H} .