

# Geometría de la traza del movimiento de un electron expuesto a un campo electromagnético externo

Pablo Brianese

2 de agosto de 2021

**Ley 1.** *La ecuación del movimiento para una partícula de masa  $m$ , carga  $q$ , expuesta a un campo electromagnético externo es*

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

*En unidades SI.*

Si derivamos esta ley con respecto al tiempo, asumiendo que los campos eléctrico y magnético son constantes, obtenemos una ecuación para la aceleración

$$m\vec{j} = q\vec{a} \times \vec{B} \quad (2)$$

donde  $\vec{j} = d\vec{a}/dt$  es la llamada sobreaceleración de la partícula. Para resolver esta ecuación suponemos además que ambos  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  son nonulos.

**Teorema 1.** *El producto punto,  $\vec{a} \cdot \vec{B}$ , es constante.*

*Demostración.* Partimos de la ecuación  $m\vec{j} = q\vec{a} \times \vec{B}$ . Multiplicamos por el campo magnético para obtener  $m\vec{j} \cdot \vec{B} = q\vec{a} \times \vec{B} \cdot \vec{B}$ . Porque el producto cruz  $\vec{v} \times \vec{B}$  es ortogonal a  $\vec{B}$ , el lado derecho de la ecuación es nulo. Resulta  $\vec{j} \cdot \vec{B} = 0$ . Pero el producto punto es lineal, luego conmuta con la derivación. Por lo tanto  $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{B}) = 0$ .  $\square$

**Teorema 2.** *El módulo de la aceleración,  $a$ , es constante.*

*Demostración.* Partimos de la ecuación  $m\vec{j} = q\vec{a} \times \vec{B}$ . Multiplicamos por la aceleración para obtener  $m\vec{j} \cdot \vec{a} = q(\vec{a} \times \vec{B}) \cdot \vec{a}$ . Porque el producto cruz  $\vec{a} \times \vec{B}$  es ortogonal a  $\vec{a}$ , el lado derecho de la ecuación es nulo. Resulta  $\vec{j} \cdot \vec{a} = 0$ . Esto nos permite calcular  $\frac{d}{dt}a^2 = 2\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a} \cdot \vec{j} = 0$ .  $\square$

Fijemos una base ortonormal  $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$  del plano ortogonal a  $\vec{B}$ . Esto nos permite definir dos escalares  $\alpha = \vec{a} \cdot \bar{b}_1$ ,  $\beta = \vec{a} \cdot \bar{b}_2$  que describen a la proyección ortogonal de  $\vec{a}$  sobre dicho plano. Sin mayor esfuerzo  $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B} = \vec{B}/B\}$  es

una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Pediremos además que  $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$  esté orientada positivamente. Con mayor claridad, lo que pedimos es que se verifiquen las ecuaciones  $\bar{b}_1 \times \bar{b}_2 = \bar{B}$ ,  $\bar{b}_2 \times \bar{B} = \bar{b}_1$ ,  $\bar{B} \times \bar{b}_1 = \bar{b}_2$ . Eso nos ayudará a calcular productos cruz. Las siguientes propiedades se derivan de esta construcción

**Teorema 3.** *Las variables  $\alpha, \beta$  nos proveen las identidades*

$$\vec{a} = \alpha \bar{b}_1 + \beta \bar{b}_2 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B} \quad (3)$$

$$a_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})^2 \quad (4)$$

$$\vec{a} \times \vec{B} = B(-\alpha \bar{b}_2 + \beta \bar{b}_1) \quad (5)$$

$$\vec{j} = \frac{d\alpha}{dt} \bar{b}_1 + \frac{d\beta}{dt} \bar{b}_2 \quad (6)$$

*Demostración.* (3) es consecuencia de la ortonormalidad de la base  $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$ . La fórmula  $\vec{a} \cdot \bar{B} = \vec{a}_0 \cdot \bar{B}$  se debe al teorema 1.

Todas las demás son consecuencia de esta primera ecuación (3).

(4) se debe a la ortonormalidad de la base  $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$ , y a la igualdad  $a^2 = a_0^2$  que se desprende del teorema 2.

(5) se debe a la orientación positiva de la base  $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$ .

(6) se debe a la linealidad de la derivada.  $\square$

**Teorema 4.** *Las funciones  $\alpha, \beta$  satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{qB}{m} \beta \\ \frac{d\beta}{dt} = -\frac{qB}{m} \alpha \end{cases} \quad (7)$$

*Demostración.* Partimos de la ecuación  $m\vec{j} = q\vec{a} \times \vec{B}$ . Reemplazamos  $\vec{j}$ ,  $\vec{a} \times \vec{B}$  por sus fórmulas (6), (5) en función de  $\alpha, \beta$ . Obtenemos

$$\frac{d\alpha}{dt} \bar{b}_1 + \frac{d\beta}{dt} \bar{b}_2 = \frac{qB}{m} (\beta \bar{b}_1 - \alpha \bar{b}_2) \quad (8)$$

El sistema (7) se deduce usando que  $\bar{b}_1, \bar{b}_2$  son linealmente independientes.  $\square$

El siguiente caso particular resulta muy interesante. Su particularidad es que muestra una familia de trayectorias parabólicas en presencia de un campo magnético nonulo.

**Teorema 5.** *Si la aceleración inicial,  $\vec{a}_0$ , es paralela al campo magnético,  $\vec{B}$ , entonces la aceleración  $\vec{a}$  es constante.*

*Demostración.* Partimos de la ecuación (4), que dice  $a_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})^2$ . Si  $\vec{a}_0$  es paralelo a  $\vec{B}$ , entonces  $\vec{a}_0 = (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B}$  y  $a_0^2 = (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})^2$ . Junto a la primera ecuación, estas implican  $\alpha = \beta = 0$ . Por la ecuación (3), se sigue  $\vec{a} = (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B} = \vec{a}_0$   $\square$

**Teorema 6.** Si la aceleración inicial,  $\vec{a}_0$ , es paralela al campo magnético,  $\vec{B}$ , entonces la solución a la ecuación diferencial (1) está dada por

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a}_0 \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t \quad \text{donde} \quad \vec{a}_0 = \frac{q}{m} \vec{E} + \frac{q}{m} \vec{v}_0 \times \vec{B} \quad (9)$$

*Demostración.* Partimos del Teorema 5. La aceleración  $\vec{a}$  es constante. Luego  $\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}_0 t$ . Integrar nuevamente arroja  $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a}_0 t^2/2 + \vec{v}_0 t$ . La fórmula para  $\vec{a}_0$  se deriva de la identidad  $m\vec{a}_0 = q\vec{E} + q\vec{v}_0 \times \vec{B}$ .  $\square$

En lo que sigue vamos a ignorar este caso, en el cual la velocidad inicial y el campo magnético son paralelos, y supondremos  $\vec{a}_0 \neq (\vec{a}_0 \cdot \vec{B})\vec{B}$ . Esto nos permite proyectar el vector  $\vec{a}_0$  sobre el plano ortogonal al campo magnético  $\vec{B}$ . El resultado es el vector proyección  $\vec{\pi}_0 = \vec{a}_0 - (\vec{a}_0 \cdot \vec{B})\vec{B}$ . Que tiene módulo positivo  $\pi_0 = (a_0^2 - (\vec{a}_0 \cdot \vec{B})^2)^{1/2}$ , y por eso puede ser regularizado  $\vec{\pi}_0 = \vec{\pi}_0/\pi_0$ . Este vector es importante, y en el siguiente teorema lo vemos por primera vez.

**Teorema 7.** Existe un ángulo  $\theta = \theta(t)$  tal que  $\alpha = \pi_0 \cos \theta$ ,  $\beta = \pi_0 \sin \theta$ .

*Demostración.* La ecuación (4) nos dice que  $\pi_0^2 = a_0^2 - (\vec{a}_0 \cdot \vec{B})^2 = \alpha^2 + \beta^2$ . Se deduce la ecuación de una circunferencia  $\alpha^2 + \beta^2 = \pi_0^2$  de radio  $\pi_0$ . Luego, para cada tiempo  $t$  existe un ángulo  $\theta = \theta(t)$  tal que  $\alpha = \pi_0 \cos \theta$  y  $\beta = \pi_0 \sin \theta$ .  $\square$

**Teorema 8.** La velocidad angular  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  es  $\omega = \frac{qB}{m}$ .

*Demostración.* Partimos del sistema de ecuaciones diferenciales (7). Reemplazando  $\alpha = \pi_0 \cos \theta$ ,  $\beta = \pi_0 \sin \theta$ , y usando la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{cases} (\pi_0 \sin \theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{qB}{m} (\pi_0 \sin \theta) \\ (-\pi_0 \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{qB}{m} (-\pi_0 \cos \theta) \end{cases} \quad (10)$$

Conjuntamente, estas dos ecuaciones implican  $\omega = \frac{qB}{m}$ .  $\square$

En lo que sigue es importante que  $\vec{\pi}_0$  sea no nulo, porque nos permite usarlo para entender los vectores que viven en el plano ortogonal a  $\vec{B}$ .

**Teorema 9.** La base  $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$  del plano ortogonal a  $\vec{B}$ , puede elegirse como

$$\bar{b}_1 = \vec{\pi}_0 \quad \bar{b}_2 = \vec{B} \times \vec{\pi}_0 \quad (11)$$

Además, de este modo puede elegirse el valor inicial de  $\theta$  como

$$\theta_0 = 0 \quad (12)$$

*Demostración.* En efecto. El vector  $\bar{b}_1 = \vec{\pi}_0$  es unitario y ortogonal a  $\vec{B}$ . Un buen candidato. Por otro lado, el vector  $\bar{b}_2$  queda inmediatamente determinado por la restricción que impusimos sobre la base  $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \vec{B}\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Al especificar

que esta tiene que estar orientada positivamente, se verifica  $\vec{B} \times \vec{b}_1 = \vec{b}_2$ . Y esta última ecuación define a  $\vec{b}_2$ .

Por otro lado, si volvemos a la ecuación (3), para el instante  $t = 0$  dice  $\vec{v}_0 = \alpha_0 \vec{b}_1 + \beta_0 \vec{b}_2 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B}$ . Reemplazando  $\alpha, \beta$  por sus expresiones en función de  $\theta$ , obtenemos

$$\vec{v}_0 = \pi_0 \cos \theta_0 \vec{b}_1 + \pi_0 \sin \theta_0 \vec{b}_2 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B} \quad (13)$$

Pero  $\vec{\pi}_0 = \vec{v}_0 - (\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B}$ . Entonces  $\vec{\pi}_0 = \cos \theta_0 \vec{b}_1 + \sin \theta_0 \vec{b}_2$ . Aquí se aprecia que  $\theta_0 = 0$  es una elección viable para el ángulo inicial.  $\square$

**Teorema 10.** *El ángulo es  $\theta = \omega t$ .*

*Demostración.* Es una consecuencia trivial de 8 y 9.  $\square$

**Teorema 11.** *La solución  $\vec{r}$  a la ecuación  $m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$ , donde el campo magnético es constante, está dada por*

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = -\frac{\sin \omega t}{\omega} \vec{\pi}_0 + \frac{\cos \omega t}{\omega} \vec{B} \times \vec{\pi}_0 + t(\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B} \quad (14)$$

*Demostración.* Partimos de la ecuación (3)

$$\vec{v} = \alpha \vec{b}_1 + \beta \vec{b}_2 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B} \quad (15)$$

Reemplazamos  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  por los vectores que propusimos en 9

$$\vec{v} = \alpha \vec{\pi} + \beta \vec{B} \times \vec{\pi} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B} \quad (16)$$

Reemplazamos  $\alpha, \beta$  por las expresiones en función de  $\theta$  que obtuvimos en 7

$$\vec{v} = (\pi_0 \cos \theta) \vec{\pi}_0 + (\pi_0 \sin \theta) \vec{B} \times \vec{\pi}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B} \quad (17)$$

$$= (\cos \theta) \vec{\pi}_0 + (\sin \theta) \vec{B} \times \vec{\pi}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B} \quad (18)$$

Reemplazamos  $\theta$  por  $\omega t$ , usando el teorema 10

$$\vec{v} = (\cos \omega t) \vec{\pi}_0 + (\sin \omega t) \vec{B} \times \vec{\pi}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B} \quad (19)$$

Integrando con respecto a  $t$  obtenemos el resultado que deseamos.  $\square$

Observar que esta última fórmula también funciona en el caso en que  $\vec{v}_0$  sea paralelo a  $\vec{B}$ . Allí, sencillamente  $\vec{\pi}_0 = 0$ .

**Teorema 12.** *La solución  $\vec{r}$  a la ecuación  $m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ , donde el campo eléctrico  $\vec{E}$  y el campo magnético  $\vec{B}$  son constantes, es*

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \left( \frac{q}{m} \vec{E} \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t \right) + \left( -\frac{\sin \omega t}{\omega} \vec{\pi}_0 + \frac{\cos \omega t}{\omega} \vec{B} \times \vec{\pi}_0 + t(\vec{v}_0 \cdot \vec{B}) \vec{B} \right) \quad (20)$$