Flujo ideal alrededor de un cilindro: potencial complejo

Pablo Brianese

30 de julio de 2021

Para el caso particular de un flujo irrotacional y no viscoso, la velocidad del fluído puede describirse (asumimos un sistema efectivamente bidimensional)

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi \tag{1}$$

donde ϕ es el potencial de velocidades. Si además el flujo es incompresible ($\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$), resulta

$$\vec{\nabla}^2\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

En mecánica de fluídos se demuestra que, para que la condición de irrotacionalidad $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ se mantenga en el tiempo, es necesario que el fluido sea noviscoso.

Dado el portencial de velocidades, podemos formar con su armónica conjugada ψ la función analítica $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$. Las líneas $\{\psi = \text{const}\}$ son trayectorias ortogonales a las líneas equipotenciales y son llamadas *líneas de corriente*. Es fácil ver que

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{\nabla}\phi && (3)\\
&= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) && (4)\\
&= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \qquad \text{por Cauchy–Riemann} && (5)\\
&= \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} && (6)\\
&= \overline{f'(z)} && (7)
\end{aligned}
$$

Es usual definir la *velocidad compleja* $q = \overline{f'}$. Con lo cual $\|\vec{v}\| = \left\|\overline{f'}\right\| = \|f'\|$.

Para el flujo irrotacional alrededor de un cilindro, el potencial complejo es $f(z) = U_0(z + R^2/z)$, donde R es el radio del cilindro y U_0 es la velocidad en el inlet. En coordenadas reales el potencial complejo es

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= U_0 \left((x+iy) + R^2/(x+iy)\right) &(8)\\
&= U_0 \left((x+iy) + R^2 \frac{x-iy}{x^2+y^2}\right) &(9)\\
&= U_0 \left((x+iy) + \frac{R^2}{x^2+y^2}(x-iy)\right) &(10)\\
&= U_0 \left(\left(1+\frac{R^2}{x^2+y^2}\right)x + i\left(1-\frac{R^2}{x^2+y^2}\right)y\right) &(11)\\
&= \left(U_0\left(1+\frac{R^2}{x^2+y^2}\right)x, U_0\left(1-\frac{R^2}{x^2+y^2}\right)y\right) &(12)
\end{aligned}
$$

y su derivada es

$$
\begin{aligned}
f'(x,y) &= \left.\frac{d}{dz}U_0\left(z+\frac{R^2}{z}\right)\right|_{z=x+iy} &(13)\\
&= U_0\left(1-\frac{R^2}{(x+iy)^2}\right) &(14)\\
&= U_0\left(1-\frac{R^2}{x^2-y^2+i2xy}\right) &(15)\\
&= U_0\left(1-\frac{R^2}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}(x^2-y^2-i2xy)\right) &(16)\\
&= U_0\left(1-\frac{R^2}{x^4+2x^2y^2+y^4}(x^2-y^2-i2xy)\right) &(17)\\
&= U_0\left(1-\frac{R^2}{(x^2+y^2)^2}(x^2-y^2-i2xy)\right) &(18)\\
&= U_0\left(1-\frac{R^2}{(x^2+y^2)^2}(x^2-y^2)+i\frac{R^2}{(x^2+y^2)^2}(2xy)\right) &(19)\\
&= \left(U_0\left(1-\frac{R^2}{(x^2+y^2)^2}(x^2-y^2)\right), U_0\frac{R^2}{(x^2+y^2)^2}(2xy)\right) &(20)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el potencial de velocidades ϕ, la función de corriete ψ, y el campo de velocidades $\vec{v}$ son

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y) &= U_0\left(1+\frac{R^2}{x^2+y^2}\right)x &(21)\\
\psi(x,y) &= U_0\left(1-\frac{R^2}{x^2+y^2}\right)y &(22)\\
\vec{v}(x,y) &= \left(U_0\left(1-\frac{R^2}{(x^2+y^2)^2}(x^2-y^2)\right), U_0\frac{R^2}{(x^2+y^2)^2}(-2xy)\right) &(23)
\end{aligned}
$$