

Geometría de la traza del movimiento de un electron expuesto a un campo electromagnético externo

Pablo Brianese

3 de agosto de 2021

Ley 1. *La ecuación del movimiento para una partícula de masa m , carga q , expuesta a un campo electromagnético externo es*

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

En unidades SI.

Si derivamos esta ley con respecto al tiempo, asumiendo que los campos eléctrico y magnético son constantes, obtenemos una ecuación para la aceleración

$$m\vec{j} = q\vec{a} \times \vec{B} \quad (2)$$

donde $\vec{j} = d\vec{a}/dt$ es la llamada sobreaceleración de la partícula. Para resolver esta ecuación suponemos además que ambos \vec{E} , \vec{B} son nonulos.

Teorema 1. *El producto punto, $\vec{a} \cdot \vec{B}$, es constante.*

Demostración. Partimos de la ecuación $m\vec{j} = q\vec{a} \times \vec{B}$. Multiplicamos por el campo magnético para obtener $m\vec{j} \cdot \vec{B} = q\vec{a} \times \vec{B} \cdot \vec{B}$. Porque el producto cruz $\vec{v} \times \vec{B}$ es ortogonal a \vec{B} , el lado derecho de la ecuación es nulo. Resulta $\vec{j} \cdot \vec{B} = 0$. Pero el producto punto es lineal, luego conmuta con la derivación. Por lo tanto $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{B}) = 0$. \square

Teorema 2. *El módulo de la aceleración, a , es constante.*

Demostración. Partimos de la ecuación $m\vec{j} = q\vec{a} \times \vec{B}$. Multiplicamos por la aceleración para obtener $m\vec{j} \cdot \vec{a} = q(\vec{a} \times \vec{B}) \cdot \vec{a}$. Porque el producto cruz $\vec{a} \times \vec{B}$ es ortogonal a \vec{a} , el lado derecho de la ecuación es nulo. Resulta $\vec{j} \cdot \vec{a} = 0$. Esto nos permite calcular $\frac{d}{dt}a^2 = 2\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a} \cdot \vec{j} = 0$. \square

Fijemos una base ortonormal $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ del plano ortogonal a \vec{B} . Esto nos permite definir dos escalares $\alpha = \vec{a} \cdot \bar{b}_1$, $\beta = \vec{a} \cdot \bar{b}_2$ que describen a la proyección ortogonal de \vec{a} sobre dicho plano. Sin mayor esfuerzo $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B} = \vec{B}/B\}$ es

una base ortonormal de \mathbb{R}^3 . Pediremos además que $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$ esté orientada positivamente. Con mayor claridad, lo que pedimos es que se verifiquen las ecuaciones $\bar{b}_1 \times \bar{b}_2 = \bar{B}$, $\bar{b}_2 \times \bar{B} = \bar{b}_1$, $\bar{B} \times \bar{b}_1 = \bar{b}_2$. Eso nos ayudará a calcular productos cruz. Las siguientes propiedades se derivan de esta construcción

Teorema 3. *Las variables α, β nos proveen las identidades*

$$\vec{a} = \alpha \bar{b}_1 + \beta \bar{b}_2 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B} \quad (3)$$

$$a_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})^2 \quad (4)$$

$$\vec{a} \times \vec{B} = B(-\alpha \bar{b}_2 + \beta \bar{b}_1) \quad (5)$$

$$\vec{j} = \frac{d\alpha}{dt} \bar{b}_1 + \frac{d\beta}{dt} \bar{b}_2 \quad (6)$$

Demostración. (3) es consecuencia de la ortonormalidad de la base $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$. La fórmula $\vec{a} \cdot \bar{B} = \vec{a}_0 \cdot \bar{B}$ se debe al teorema 1.

Todas las demás son consecuencia de esta primera ecuación (3).

(4) se debe a la ortonormalidad de la base $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$, y a la igualdad $a^2 = a_0^2$ que se desprende del teorema 2.

(5) se debe a la orientación positiva de la base $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{B}\}$.

(6) se debe a la linealidad de la derivada. \square

Teorema 4. *Las funciones α, β satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{qB}{m} \beta \\ \frac{d\beta}{dt} = -\frac{qB}{m} \alpha \end{cases} \quad (7)$$

Demostración. Partimos de la ecuación $m\vec{j} = q\vec{a} \times \vec{B}$. Reemplazamos \vec{j} , $\vec{a} \times \vec{B}$ por sus fórmulas (6), (5) en función de α, β . Obtenemos

$$\frac{d\alpha}{dt} \bar{b}_1 + \frac{d\beta}{dt} \bar{b}_2 = \frac{qB}{m} (\beta \bar{b}_1 - \alpha \bar{b}_2) \quad (8)$$

El sistema (7) se deduce usando que \bar{b}_1, \bar{b}_2 son linealmente independientes. \square

El siguiente caso particular resulta muy interesante. Su particularidad es que muestra una familia de trayectorias parabólicas en presencia de un campo magnético nonulo.

Teorema 5. *Si la aceleración inicial, \vec{a}_0 , es paralela al campo magnético, \vec{B} , entonces la aceleración \vec{a} es constante.*

Demostración. Partimos de la ecuación (4), que dice $a_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})^2$. Si \vec{a}_0 es paralelo a \vec{B} , entonces $\vec{a}_0 = (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B}$ y $a_0^2 = (\vec{a}_0 \cdot \bar{B})^2$. Junto a la primera ecuación, estas implican $\alpha = \beta = 0$. Por la ecuación (3), se sigue $\vec{a} = (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B} = \vec{a}_0$ \square

Teorema 6. Si la aceleración inicial, \vec{a}_0 , es paralela al campo magnético, \vec{B} , entonces la solución a la ecuación diferencial (1) está dada por

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a}_0 \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t \quad \text{donde} \quad \vec{a}_0 = \frac{q}{m} \vec{E} + \frac{q}{m} \vec{v}_0 \times \vec{B} \quad (9)$$

Demostración. Partimos del Teorema 5. La aceleración \vec{a} es constante. Luego $\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}_0 t$. Integrar nuevamente arroja $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a}_0 t^2/2 + \vec{v}_0 t$. La fórmula para \vec{a}_0 se deriva de la identidad $m\vec{a}_0 = q\vec{E} + q\vec{v}_0 \times \vec{B}$. \square

En lo que sigue vamos a ignorar este caso, en el cual la velocidad inicial y el campo magnético son paralelos, y supondremos $\vec{a}_0 \neq (\vec{a}_0 \cdot \vec{B})\vec{B}$. Esto nos permite proyectar el vector \vec{a}_0 sobre el plano ortogonal al campo magnético \vec{B} . El resultado es el vector proyección $\vec{\pi}_0 = \vec{a}_0 - (\vec{a}_0 \cdot \vec{B})\vec{B}$. Que tiene módulo positivo $\pi_0 = (a_0^2 - (\vec{a}_0 \cdot \vec{B})^2)^{1/2}$, y por eso puede ser regularizado $\vec{\pi}_0 = \vec{\pi}_0/\pi_0$. Este vector es importante, y en el siguiente teorema lo vemos por primera vez.

Teorema 7. Existe un ángulo $\theta = \theta(t)$ tal que $\alpha = \pi_0 \cos \theta$, $\beta = \pi_0 \sin \theta$.

Demostración. La ecuación (4) nos dice que $\pi_0^2 = a_0^2 - (\vec{a}_0 \cdot \vec{B})^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Se deduce la ecuación de una circunferencia $\alpha^2 + \beta^2 = \pi_0^2$ de radio π_0 . Luego, para cada tiempo t existe un ángulo $\theta = \theta(t)$ tal que $\alpha = \pi_0 \cos \theta$ y $\beta = \pi_0 \sin \theta$. \square

Teorema 8. La velocidad angular $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ es $\omega = \frac{qB}{m}$.

Demostración. Partimos del sistema de ecuaciones diferenciales (7). Reemplazando $\alpha = \pi_0 \cos \theta$, $\beta = \pi_0 \sin \theta$, y usando la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{cases} (\pi_0 \sin \theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{qB}{m} (\pi_0 \sin \theta) \\ (-\pi_0 \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{qB}{m} (-\pi_0 \cos \theta) \end{cases} \quad (10)$$

Conjuntamente, estas dos ecuaciones implican $\omega = \frac{qB}{m}$. \square

En lo que sigue es importante que $\vec{\pi}_0$ sea nonulo, porque nos permite usarlo para entender los vectores que viven en el plano ortogonal a \vec{B} .

Teorema 9. La base $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ del plano ortogonal a \vec{B} , puede elegirse como

$$\bar{b}_1 = \vec{\pi}_0 \quad \bar{b}_2 = \vec{B} \times \vec{\pi}_0 \quad (11)$$

Además, de este modo puede elegirse el valor inicial de θ como

$$\theta_0 = 0 \quad (12)$$

Demostración. En efecto. El vector $\bar{b}_1 = \vec{\pi}_0$ es unitario y ortogonal a \vec{B} . Un buen candidato. Por otro lado, el vector \bar{b}_2 queda inmediatamente determinado por la restricción que impusimos sobre la base $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \vec{B}\}$ de \mathbb{R}^3 . Al especificar

que esta tiene que estar orientada positivamente, se verifica $\bar{B} \times \bar{b}_1 = \bar{b}_2$. Y esta última ecuación define a \bar{b}_2 .

Por otro lado, si volvemos a la ecuación (3), para el instante $t = 0$ dice $\vec{a}_0 = \alpha_0 \bar{b}_1 + \beta_0 \bar{b}_2 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B}$. Reemplazando α, β por sus expresiones en función de θ , obtenemos

$$\vec{a}_0 = \pi_0 \cos \theta_0 \bar{b}_1 + \pi_0 \sin \theta_0 \bar{b}_2 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B} \quad (13)$$

Pero $\vec{\pi}_0 = \vec{a}_0 - (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B}$. Entonces $\vec{\pi}_0 = \cos \theta_0 \bar{b}_1 + \sin \theta_0 \bar{b}_2$. Aquí se aprecia que $\theta_0 = 0$ es una elección viable para el ángulo inicial. \square

Teorema 10. *El ángulo es $\theta = \omega t$.*

Demostración. Es una consecuencia trivial de 8 y 9. \square

Teorema 11. *La solución \vec{v} a la ecuación $m \dot{\vec{v}} = q \vec{a} \times \vec{B}$, donde el campo magnético es constante, está dada por*

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \frac{\sin \omega t}{\omega} \vec{\pi}_0 - \frac{\cos \omega t}{\omega} \bar{B} \times \vec{\pi}_0 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B} t \quad (14)$$

Demostración. Partimos de la ecuación (3)

$$\vec{a} = \alpha \bar{b}_1 + \beta \bar{b}_2 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B} \quad (15)$$

Reemplazamos \bar{b}_1, \bar{b}_2 por los vectores que propusimos en 9

$$\vec{a} = \alpha \vec{\pi} + \beta \bar{B} \times \vec{\pi} + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B} \quad (16)$$

Reemplazamos α, β por las expresiones en función de θ que obtuvimos en 7

$$\vec{a} = (\pi_0 \cos \theta) \vec{\pi}_0 + (\pi_0 \sin \theta) \bar{B} \times \vec{\pi}_0 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B} \quad (17)$$

$$= (\cos \theta) \vec{\pi}_0 + (\sin \theta) \bar{B} \times \vec{\pi}_0 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B} \quad (18)$$

Reemplazamos θ por ωt , usando el teorema 10

$$\vec{a} = (\cos \omega t) \vec{\pi}_0 + (\sin \omega t) \bar{B} \times \vec{\pi}_0 + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B} \quad (19)$$

Integrando con respecto a t obtenemos el resultado que deseamos. \square

Teorema 12. *La solución \vec{r} a la ecuación $m \ddot{\vec{r}} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}$, donde el campo eléctrico \vec{E} y el campo magnético \vec{B} son constantes, es*

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = -\frac{(\cos \omega t) \vec{\pi}_0 + (\sin \omega t) \bar{B} \times \vec{\pi}_0}{\omega^2} + (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B} \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t \quad (20)$$

Donde

$$\vec{\pi}_0 = \vec{a}_0 - (\vec{a}_0 \cdot \bar{B}) \bar{B} \quad (21)$$

$$\vec{a}_0 = \frac{q}{m} \vec{E} + \frac{q}{m} \vec{v}_0 \times \vec{B} \quad (22)$$

$$\bar{B} = \vec{B}/B \quad (23)$$

Observar que esta última fórmula también funciona en el caso en que \vec{a}_0 sea paralelo a \vec{B} . Allí, sencillamente $\vec{\pi}_0 = 0$.