



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias
Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de
Telecomunicación

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y
MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Propiedades métricas de grafos y caminos de mínima longitud

Presentado por:
Pablo Cantón Ruiz

Tutor:
Manuel María Ritore Cortés
Departamento de Geometría y Topología

María Dolores Ruiz Jiménez
Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Curso académico 2022-2023

Propiedades métricas de grafos y caminos de mínima longitud

Pablo Cantón Ruiz

Pablo Cantón Ruiz *Propiedades métricas de grafos y caminos de mínima longitud.*
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2022-2023.

**Responsable de
tutorización**

Manuel María Ritore Cortés
Departamento de Geometría y Topología

María Dolores Ruiz Jiménez
*Departamento de Ciencias de la Computación
e Inteligencia Artificial*

Doble Grado en Ingeniería
Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias
Escuela Técnica Superior
de Ingenierías Informática
y de Telecomunicación
Universidad de Granada

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Pablo Cantón Ruiz

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2022-2023, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 29 de abril de 2023

Fdo: Pablo Cantón Ruiz

Índice general

Summary	IX
Introducción	XI
1. Preliminares	1
1.1. Conceptos sobre espacios métricos	1
1.2. Conceptos sobre estructuras de datos	2
1.2.1. Cola	2
1.2.2. Cola con prioridad	2
2. Teoría de Grafos	3
2.1. Conceptos básicos y propiedades asociadas a grafos	3
2.2. Propiedades de los caminos de longitud mínima y la relajación de aristas	7
2.2.1. Propiedades	8
3. Algoritmos de búsqueda en grafos	11
3.1. Algoritmo de búsqueda en anchura	11
3.1.1. Implementación del algoritmo de búsqueda en anchura	13
3.2. Algoritmo de Dijkstra	14
3.2.1. Implementación del algoritmo de Dijkstra	15
3.3. Algoritmo de Bellman-Ford	17
3.3.1. Implementación del algoritmo de Bellman-Ford	19
3.4. Cálculo de caminos de longitud mínima entre todas las parejas	20
3.4.1. Los caminos de longitud mínima y la multiplicación de matrices	21
3.4.2. Algoritmo de Floyd-Warshall	24
A. Primer apéndice	25
A.1. Ejemplo extendido de cálculo de geodésicas con BFS	25
Glosario	27
Bibliografía	29

Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).

File: preliminares/summary.tex

Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/introduccion.tex

1. Preliminares

1.1. Conceptos sobre espacios métricos

Las definiciones y conceptos de este capítulo han sido extraídos de libros [LC14].

El primer concepto que vamos a repasar y que nos hace falta es el de distancia sobre un conjunto, cuya definición formal es la siguiente:

Definición 1.1. Una *distancia* sobre un conjunto de elementos V es una aplicación $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ que cumple las siguientes propiedades:

- Anulación:
 $a, b \in X, d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
- Simetría:
 $\forall a, b \in X : d(a, b) = d(b, a)$
- Desigualdad triangular:
 $\forall a, b, c \in X : d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$

En algunas definiciones se exige como propiedad lo siguiente:

$$\forall a, b \in X : d(a, b) \geq 0$$

Pero no es necesario, pues, supuestas ciertas las demás propiedades, se verifica:

$$0 = d(a, a) \leq d(a, b) + d(b, a) = 2d(a, b), \forall a, b \in V$$

Definición 1.2. Una *distancia asimétrica* sobre un conjunto de elementos V es una aplicación $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ que cumple las siguientes propiedades:

- No negatividad:
 $\forall a, b \in X : d(a, b) \geq 0$
 $a, b \in X, d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
- Desigualdad triangular:
 $\forall a, b, c \in X : d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$

Para la desigualdad triangular en ambas definiciones se sigue la regla aritmética:

$$\forall a \in \mathbb{R}, a + \infty = \infty + a = \infty$$

Definición 1.3. Un *espacio métrico* es un conjunto V con una distancia d asociada, denotaremos a estos espacios como (V, d) o simplemente V cuando la función distancia no sea importante.

1. Preliminares

Definición 1.4. Dado un espacio métrico, se define la *geodésica* entre dos puntos del espacio como la línea de mínima longitud que une los puntos.

Definición 1.5. Dado un espacio métrico (V, d) y $p \in V$, se define la *bola abierta* de centro p y radio r como el conjunto:

$$B_p(r) = \{x \in V : d(x, p) < r\}$$

Así mismo se define la *bola cerrada* de centro p y radio r como el conjunto:

$$\overline{B}_p(r) = \{x \in V : d(x, p) \leq r\}$$

1.2. Conceptos sobre estructuras de datos

En este apartado veremos algunas estructuras de datos que utilizaremos en la implementación de los algoritmos que trabajaremos además de las principales operaciones que realizaremos con dichas estructuras.

1.2.1. Cola

Una cola es una lista de tipo FIFO (First-in First-out), lo que significa que el primero objeto que entró a la cola de los objetos que contiene es el primero que saldrá cuando se necesite sacar un elemento de la cola.

- **push(a):** Inserta el elemento a en la cola.
- **pull():** Devuelve y elimina el primer elemento que entró en la cola.

1.2.2. Cola con prioridad

Sigue el mismo funcionamiento que las colas normales, con la salvedad de que a cada elemento se le asigna una *prioridad*, que dependerá de algún criterio en concreto como, por ejemplo, el valor de un atributo. Al extraer un elemento, se extraerá el de máxima prioridad, y, de coincidir varios elementos, se seguirá el orden de cola, es decir, se extraerá el primero que entró.

- **push(a):** Inserta el elemento a en la cola.
- **pull():** Devuelve y elimina el elemento de máxima prioridad.

2. Teoría de Grafos

Las definiciones y conceptos de este capítulo han sido extraídos de la referencia [Coro9].

2.1. Conceptos básicos y propiedades asociadas a grafos

Vamos a comenzar viendo algunas definiciones y conceptos básicos.

Definición 2.1. Un *grafo no dirigido* es un par (V, E) , donde V es un conjunto no vacío, a cuyos elementos denominaremos *vértices* o *nodos*, y E es un conjunto finito de pares de elementos de V , a los que llamaremos *aristas* o *lados*.

- A los nodos v_1 y v_2 que forman una arista $e = \{v_1, v_2\}$ se les llama *extremos* de e . Cuando esto ocurra, se dirá que los vértices v_1 y v_2 son *adyacentes* o *vecinos*.
- Se dirá que una arista e es *incidente* con un vértice v cuando v sea uno de sus extremos. En dicho caso se dirá que e *incide* en v .

Definición 2.2. Se denominará *grado de incidencia* de un vértice $v \in V$ (que denotaremos por $g(v)$), al número de aristas incidentes con v .

Por conveniencia, no consideraremos lados que conecten un vértice consigo mismo, es decir, lados del tipo $\{v, v\}$.

En este tipo de grafos no se tiene en cuenta el orden en el que aparecen los vértices en una arista, es decir, $e = \{v_1, v_2\} = \{v_2, v_1\}$. El siguiente tipo de grafo sí que diferencia entre ambas aristas, incluyendo una orientación sobre las mismas.

Definición 2.3. Un *grafo dirigido* es un grafo G cuyas aristas cuentan con una orientación, en este caso pasarán a ser llamadas *arcos*. En este caso denotaremos los arcos como $e = (v_1, v_2)$, siendo e un arco orientado de v_1 hacia v_2 .

Cuando planteamos un grafo asociado a un problema, las aristas suelen ser caminos entre nodos, con un coste asociado, para introducir estos costes definimos el siguiente tipo de grafo.

Definición 2.4. Un *grafo ponderado* (o grafo con pesos), es una terna (V, E, ω) donde el par (V, E) representa un grafo (dirigido o no dirigido), y $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación que asigna a cada arista o arco el peso asociado.

En la **Figura 2.1** podemos observar ejemplos de las definiciones anteriores, por ejemplo, los vértices 0 y 2 son adyacentes, y el grado de incidencia del vértice a es 4.

A continuación plantearemos algunas definiciones sobre distintos tipos de grafos.



Figura 2.1.: Ejemplo de grafo no dirigido ponderado, izquierda, y grafo dirigido no ponderado, derecha.

Definición 2.5. Un *grafo finito* es un grafo G (dirigido o no dirigido), con un número finito de vértices, es decir, el conjunto V es finito.

Definición 2.6. Un *grafo de incidencia finita* es un grafo G donde el grado de incidencia de cada vértice es finito, es decir, $g(v)$ es finito para cada $v \in V$.

Definición 2.7. Dado un grafo $G = (V, E)$:

- Se dirá que $G' = (V', E')$ es un *subgrafo* de G si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.
- Se dirá que $G' = (V, E')$ es un *subgrafo parcial* de G si $E' \subseteq E$.

Definición 2.8. Dado un grafo $G = (V, E)$ y $B \subseteq V$, se dirá *subgrafo de G inducido por B* a $G_B = (B, E_B)$ con

$$E_B = \{(i, j) \in E : i, j \in B\} \mid E_B = \{\{i, j\} \in E : i, j \in B\}$$

Un concepto natural que surge al hablar de grafos es el de camino entre dos nodos, definimos a continuación formalmente el concepto tanto del camino como tal como de la longitud del mismo.

Definición 2.9. Dado un grafo G , un *camino* es una sucesión de vértices $v_1 v_2 \dots v_{n+1}$ y aristas $e_1 e_2 \dots e_n$ tal que $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ si es un grafo no dirigido, o bien $e_i = (v_i, v_{i+1})$ si es un grafo dirigido, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Para referirnos a un camino de ahora en adelante, utilizaremos la sucesión de vértices $v_1 \dots v_{n+1}$ si no es necesario conocer las aristas en concreto, o $e_1 \dots e_n$ si necesitamos conocerlas.

Definición 2.10. Un camino se dirá *simple* si ninguno de sus vértices está repetido en el propio camino, es decir, si pasa por sus vértices una única vez.

Definición 2.11. Dado un grafo G , se define un *ciclo*, sobre el mismo, como un camino en el que el nodo inicial y final son el mismo. Diremos también en un grafo ponderado, que un ciclo es *negativo*, si la longitud del mismo es negativa.

Definición 2.12. Se define la *longitud* de un camino $v_1v_2\dots v_{n+1}$ con aristas $e_1e_2\dots e_n$ como sigue:

$$\text{Long}(v_1v_2\dots v_{n+1}) = \sum_{i=1}^n \omega(e_i)$$

En caso de que no sea un grafo ponderado, supondremos coste 1 para todas las aristas, en cuyo caso, la longitud del camino será n .

Definimos a continuación una función que nos será útil más adelante.

Definición 2.13. Dado un grafo finito $G = (V, E)$ y $v_0, v_1 \in V$ no ponderado o ponderado con pesos estrictamente positivos, Definimos $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como sigue:

$$d(v_0, v_1) = \begin{cases} \min\{\text{Long}(v_0\dots v_1) : v_0\dots v_1 \text{ camino desde } v_0 \text{ a } v_1\} & \text{si existe camino entre } v_0 \text{ y } v_1 \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sabemos que existe el mínimo, pues si no hay ciclos, como los conjuntos de vértices y aristas son finitos, el conjunto de caminos entre dos vértices es también finito. Y, de existir algún ciclo, como no puede ser negativo, repetir el mismo ciclo dentro de un camino aumenta la longitud total, por lo que dichos caminos no pueden ser el mínimo, si nos restringimos a los caminos que no pasan por el ciclo, esta cantidad es finita, al igual que antes.

Probaremos a continuación que, tal y como sugiere la definición, d es una distancia.

Proposición 2.1. Sea G un grafo finito no dirigido, no ponderado o ponderado, se verifica que $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con la definición anterior es una distancia en G .

Demostración. Dado que los únicos caminos de longitud 0 son aquellos en los que no hay aristas, es claro que $d(v_0, v_1) = 0 \Leftrightarrow v_0 = v_1$. La simetría es clara, pues, en un grafo no dirigido, un camino desde v_0 a v_1 es también un camino desde v_1 a v_0 , dado que podemos recorrer las aristas en los dos sentidos. Para probar la desigualdad triangular, es decir, $\forall v_0, v_1, v_2 \in V, d(v_0, v_1) \leq d(v_0, v_2) + d(v_2, v_1)$, hay que distinguir dos casos, el primero, si no existe ningún camino que conecte v_0 con v_2 o ningún camino que conecte v_2 con v_1 , en cuyo caso se tendría $d(v_0, v_1) \leq \infty$, por lo que siempre se verifica la desigualdad. En caso contrario, si existieran caminos que conectan v_0 con v_2 y v_2 con v_1 , respectivamente, sean c_1 y c_2 caminos con longitud mínima entre v_0 y v_2 , y v_2 y v_1 , el camino c que resulta de unir c_1 con c_2 es un camino entre v_0 y v_1 luego, por definición de d , se tiene

$$d(v_0, v_1) \leq \text{Long}(c) = \text{Long}(c_1) + \text{Long}(c_2) = d(v_0, v_2) + d(v_2, v_1)$$

□

Proposición 2.2. Sea G un grafo dirigido, no ponderado o ponderado con pesos exclusivamente positivos, se verifica que $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con la definición anterior es una distancia asimétrica en G .

Esta proposición no necesita demostración, pues los argumentos utilizados para probar la no negatividad y la desigualdad triangular en la **Proposición 2.1** son válidos también para grafos dirigidos.

Definición 2.14. Dado un grafo $G = (V, E)$ y un camino $v_0 \dots v_1$ entre los vértices v_0 y v_1 , a dicho camino se le llama *camino de longitud mínima* desde v_0 a v_1 si y solo si es la geodésica entre v_0 y v_1 , es decir:

$$\text{Long}(v_0 \dots v_1) = d(v_0, v_1)$$

Definición 2.15. Se define el *grafo de caminos de longitud mínima* con raíz s como un grafo G en el que todo camino entre s y cualquier otro nodo v es de longitud mínima, además, existe al menos un camino entre s y cada nodo de G

Veremos a continuación un par de propiedades muy interesantes asociadas a los caminos de longitud mínima.

Proposición 2.3. Dado un camino de longitud mínima $v_0 \dots v_i \dots v_1$ desde v_0 a v_1 , se verifica:

- $v_0 \dots v_i$ es un camino de longitud mínima desde v_0 a v_i .
- $v_i \dots v_1$ es un camino de longitud mínima desde v_i a v_1 .

Demostración. Sea $e_1 \dots e_{i-1}$ el conjunto de aristas asociadas al camino entre v_0 y v_i , entonces, por contradicción, supongamos que $v_0 \dots v_i$ no es un camino de longitud mínima (el caso en que $v_i \dots v_1$ no es un camino de longitud mínima es análogo), al no ser camino de longitud mínima, debe existir otro camino entre v_0 y v_i de longitud menor, es decir, $\exists e'_1 \dots e'_m$ camino entre v_0 y v_i con $\text{Long}(e'_1 \dots e'_m) < \text{Long}(e_1 \dots e_{i-1})$. Llamemos $e_i \dots e_n$ al conjunto de aristas del camino entre v_i y v_1 , entonces, juntando el nuevo camino entre v_0 y v_i con éste último, obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Long}(e'_1 \dots e'_m e_i \dots e_n) &= \text{Long}(e'_1 \dots e'_m) + \text{Long}(e_i \dots e_n) \\ &< \text{Long}(e_1 \dots e_{i-1}) + \text{Long}(e_i \dots e_n) \\ &= \text{Long}(e_1 \dots e_n) \end{aligned}$$

Esto es una contradicción pues, por hipótesis, $\text{Long}(e_1 \dots e_n) = d(v_0, v_1)$, al ser $e_1 \dots e_n$ camino de longitud mínima, pero hemos encontrado entonces un camino entre v_0 y v_1 , el cual es $e'_1 \dots e'_m e_i \dots e_n$, de longitud menor, lo que no puede ser. \square

Proposición 2.4. Sea $G = (V, E, \omega)$ un grafo de incidencia finita ponderado con pesos positivos tal que:

- $\omega(e) \geq a > 0 \quad \forall e \in E$.

Entonces, si existe un camino entre dos nodos, existe un camino de longitud mínima entre ambos (geodésica).

Demostración. Sean $v_0, v_1 \in V$ tales que existe un camino de longitud $L > 0$ entre ambos, si c es otro camino entre v_0 y v_1 de K aristas, entonces

$$\text{Long}(c) \geq Ka$$

por hipótesis.

Si $Ka > L$, c no puede ser una geodésica, consideramos entonces el subgrafo inducido por los vértices que se pueden unir con v_0 mediante caminos de $K \leq \frac{L}{a}$ lados. El vértice v_1 pertenece a dicho grafo por el camino inicial. Ahora, por ser G un grafo de incidencia finita, se tiene que dicho subgrafo es finito y, por tanto, existe una geodésica que une v_0 con v_1 en el subgrafo y, dado que el resto de caminos c entre v_0 y v_1 tienen longitud $\text{Long}(c) > L$, la geodésica en el subgrafo es geodésica también en G . \square

Proposición 2.5. *Todo camino de longitud mínima sobre un grafo sin ciclos negativos es simple.*

Demostración. Supongamos que existe un camino de longitud mínima no simple, es decir, que pasa por uno de sus vértices al menos dos veces. El camino que va desde este vértice al mismo es un ciclo y, al no existir ciclos negativos, eliminando dicho ciclo del camino original, obtenemos otro camino de longitud menor, contradiciendo el hecho de que era un camino de longitud mínima. \square

Para trabajar con grafos, necesitamos representarlos de alguna manera, para ello se definen a continuación dos estructuras muy utilizadas a la hora de la representación de grafos:

Definición 2.16. Dado un grafo finito G , con $|V| = n$, llamaremos *matriz de adyacencia* de G a una matriz $A_{n \times n} = (a_{ij})$ de tal manera que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E \text{ (} \{v_i, v_j\} \text{ o } \{v_j, v_i\} \in E) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición 2.17. Dado un grafo finito G , con $|V| = n$, se define la *lista de adyacencia* de $v \in V$ como:

$$Adj(v) = \{u \in V : (v, u) \in E \text{ (} \{v, u\} \text{ o } \{u, v\} \in E) \}$$

De tal manera que para representar el grafo, basta calcular la lista de adyacencia de cada vértice.

2.2. Propiedades de los caminos de longitud mínima y la relajación de aristas

Las propiedades que vamos a mencionar en esta sección junto a la operación de relajación de una arista han sido extraídas del capítulo 24 de la referencia [Cor09].

Estas propiedades junto con la operación de relajación de una arista serán útiles para probar la corrección de los algoritmos que trabajan con aristas de pesos negativos, para los cuáles la función d definida en Def. 2.13 no nos sirve, por ello, definimos la función $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ como sigue:

$$d(v_0, v_1) = \begin{cases} -\infty & \text{si existe un camino entre } v_0 \text{ y } v_1, \text{ y este se puede conectar con un ciclo negativo} \\ \min\{Long(v_0 \dots v_1) : v_0 \dots v_1 \text{ camino}\} & \text{si existen caminos entre } v_0 \text{ y } v_1, \text{ y ninguno se puede conectar con un ciclo negativo} \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La *Relajación de una arista* consiste en, dada una arista (u, v) , si el coste actual de v es mayor que el coste actual de u más el peso de la arista, se modifica el coste actual de v a la nueva cantidad y se establece a u como el padre de v , si el coste fuera igual, simplemente se añade u a los padres de v .

2. Teoría de Grafos

Desde un punto de vista algorítmico, el pseudocódigo asociado a dicha operación es el siguiente:

Algorithm 1 Relajar(u, v)

```
1: if  $v.d > u.d + d[u][v]$  then  
2:    $v.d = u.d + d[u][v]$   
3:    $v.p = \{u\}$   
4: else if  $v.d == u.d + d[u][v]$  then  
5:    $v.p.push(u)$ 
```

En el algoritmo anterior, u y v son los vértices que forma la arista (u, v) y el peso de las aristas viene dado por la matriz d , la distancia actual de un vértice viene dada por $v.d$ y la lista de padres viene dada por $v.p$.

Además de esta operación, necesitaremos inicializar el grafo con unos valor de distancia y una lista de padres inicial para cada vértice, para ello ponemos como distancia inicial ∞ y lista de padres nula, luego simplemente establecemos la distancia del nodo inicial a 0. El pseudocódigo que recoge este proceso es el siguiente:

Algorithm 2 Inicializacion(G, s)

```
1: for  $v \in G.V$  do  
2:    $v.d = \infty$   
3:    $v.p = \{\}$   
4:  $s.d = 0$ 
```

Donde G es el grafo, s el nodo inicial, la distancia actual de un vértice viene dada por $v.d$ y la lista de padres viene dada por $v.p$.

2.2.1. Propiedades

Lema 2.1. (Desigualdad Triangular) Sea $G = (V, E)$ un grafo con función de pesos $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $s \in V$ el vértice inicial. Entonces, para todas las aristas $(u, v) \in E$, se tiene

$$d(s, v) \leq d(s, u) + \omega(u, v).$$

Demostración. Sea p el camino de longitud mínima entre s y v , por definición de d , como el camino que resulta de unir el camino de longitud mínima entre s y u con la arista (u, v) es un camino entre s y v , debe tener mayor longitud que p , pues este es el camino de menor longitud. \square

Lema 2.2. (Propiedad del límite superior) Sea $G = (V, E)$ un grafo con función de pesos $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $s \in V$ el vértice inicial y supongamos que el grafo a sido inicializado por Inicializacion(G, s). Entonces, $v.d \geq d(s, v) \forall v \in V$ y esta propiedad se mantiene bajo cualquier secuencia de Relaxaciones de las aristas de G . De hecho, una vez $v.d$ alcanza su límite inferior $d(s, v)$, éste nunca cambia.

Demostración. Probamos la propiedad $v.d \geq d(s, v) \forall v \in V$ por inducción sobre el número de relajaciones.

Para el paso base, tras la inicialización, $v.d \geq d(s, v)$ es cierto pues $v.d = \infty \forall v \in V - \{s\}$ y

2.2. Propiedades de los caminos de longitud mínima y la relajación de aristas

$s.d = 0 \geq d(s, s)$ (nótese que $d(s, s) = -\infty$ si s es parte de un ciclo negativo, o 0 en otro caso). Ahora, en el paso de inducción, consideremos la relajación de la arista (u, v) . Por hipótesis de inducción, $x.d \geq d(s, x) \forall x \in V$ antes de la relajación. El único valor de d que puede variar en la relajación es $v.d$ y, si este cambia, se verifica

$$\begin{aligned} v.d &= u.d + \omega(u, v) \\ &\geq d(s, u) + \omega(u, v) && \text{(hipótesis de inducción)} \\ &\geq d(s, v) && \text{(desigualdad triangular (Lema 2.1))} \end{aligned}$$

Para ver que el valor de $v.d$ nunca cambia cuando $v.d = d(s, v)$, basta ver que $v.d$ no puede decrecer, pues acabamos de probar que $v.d \geq d(s, v)$ y tampoco puede aumentar pues la relajación no aumenta los valores de d . \square

Corolario 2.1. (Propiedad de no camino) Sea $G = (V, E)$ un grafo con función de pesos $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $s \in V$ el nodo inicial y $v \in V$ otro nodo tal que no existe ningún camino entre s y v , entonces, tras inicializar el grafo con $\text{Inicializacion}(G, s)$, se tiene $v.d = d(s, v) = \infty$ y esta igualdad se mantiene a través de cualquier relajación de aristas.

Demostración. Por la propiedad del límite superior (Lema 2.2), $\infty = d(s, v) \leq v.d$ y, por tanto, $v.d = \infty = d(s, v)$. \square

Lema 2.3. Sea $G = (V, E)$ un grafo con función de pesos $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$, y sea $(u, v) \in E$. Entonces, inmediatamente después de relajar la arista (u, v) , se tiene $v.d \leq u.d + \omega(u, v)$.

Demostración. Si, justo antes de relajar la arista (u, v) se tiene $v.d > u.d + \omega(u, v)$, entonces $v.d = u.d + \omega(u, v)$ tras relajar. Si, por el contrario, $v.d \leq u.d + \omega(u, v)$ justo antes de relajar, entonces no cambian ni $u.d$ ni $v.d$, por lo que se tiene $v.d \leq u.d + \omega(u, v)$ justo después. \square

Lema 2.4. (Propiedad de convergencia) Sea $G = (V, E)$ un grafo con función de pesos $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$, sea $s \in V$ el nodo inicial y supongamos que $s \rightsquigarrow u \rightarrow v$ es un camino de mínima longitud para algunos vértices $u, v \in V$. Supongamos que se inicializa el grafo con $\text{Inicializacion}(G, s)$, y que una serie de pasos de relajación incluye la relajación de la arista (u, v) . Entonces, si $u.d = d(s, u)$ en algún momento anterior a la relajación de la arista, $v.d = d(s, v)$ en todo momento tras la relajación.

Demostración. Por la propiedad del límite superior (Lema 2.2), si $u.d = d(s, u)$ en algún momento anterior a la relajación de la arista, la igualdad se mantiene en todo momento. En particular, tras relajar la arista, se tiene:

$$\begin{aligned} v.d &\leq u.d + \omega(u, v) && \text{(Lema 2.3)} \\ &= d(s, u) + \omega(u, v) \\ &= d(s, v) && \text{(Proposición 2.3)} \end{aligned}$$

Por la propiedad del límite superior (Lema 2.2), $v.d \geq d(s, v)$, de lo que concluimos $v.d = d(s, v)$, y esta igualdad se mantiene en adelante. \square

Lema 2.5. (Propiedad de relajación de caminos) Sea $G = (V, E)$ un grafo con función de pesos $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $s \in V$ el nodo inicial. Consideremos cualquier camino de longitud mínima $p = v_0 v_1 \dots v_k$ desde $s = v_0$ a v_k . Si G es inicializado con $\text{Inicializacion}(G, s)$ y ocurre una secuencia de relajación de aristas que incluye, en orden, la relajación de las aristas $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)$, entonces $v_k.d = d(s, v_k)$ tras esta secuencia y en todo momento posterior. Esta propiedad se mantiene

2. Teoría de Grafos

sin importar el resto de relajaciones que sucedan durante la secuencia, incluso si están mezcladas con la relajación de las aristas de p .

Demostración. Probamos por inducción que tras la relajación de la i -ésima arista del camino p , se tiene $v_i.d = d(s, v_i)$. Para el paso base, $i = 0$, y antes de que ninguna arista de p sea relajada, por la inicialización tenemos que $v_0.d = s.d = 0 = d(s, s)$. Por la propiedad del límite superior (**Lema 2.2**), el valor de $s.d$ nunca cambia tras su inicialización.

Para el paso de inducción, asumimos que $v_{i-1}.d = d(s, v_{i-1})$ y comprobamos el resultado de aplicar la relajación de la arista (v_{i-1}, v_i) . Por la propiedad de convergencia (**Lema 2.4**), tras relajar dicha arista, tenemos $v_i.d = d(s, v_i)$, y esta igualdad se mantiene en todo momento desde entonces. \square

Para la siguiente propiedad debemos introducir primero un concepto que nos vendrá muy bien a la hora de analizar algoritmo sobre grafos.

Definición 2.18. Dado un grafo $G = (V, E)$ en el que, tras aplicar un algoritmo con nodo inicial s , se han almacenado los predecesores de cada nodo como $v.p$, se define el *subgrafo de predecesores* G_π como el subgrafo de G donde

$$V_\pi = \{v \in V : v.p \neq \text{NIL}\} \cup \{s\}$$

$$E_\pi = \{(v.p, v) \in E : v \in V_\pi - \{s\}\}$$

Proposición 2.6. (Propiedad del subgrafo de predecesores) Sea $G = (V, E)$ un grafo con función de pesos $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$, sea $s \in V$ el nodo inicial y supongamos que G no contiene ciclos negativos alcanzables desde s . Tras inicializar el grafo con $\text{Inicializacion}(G, s)$ y ejecutar cualquier secuencia de relajaciones que produzca $v.d = d(s, v) \forall v \in V$, el grafo de predecesores G_π es un grafo de caminos de longitud mínima con raíz s .

Demostración. Primero, es claro que todos los vértices del grafo G_π son alcanzables desde s , pues, por definición, V_π son los vértices que tienen al menos un predecesor, pues los vértices alcanzables en un grafo son aquellos con $d(s, v) = v.d$ finita, y un nodo tiene valor d finito si tiene predecesor.

Ahora debemos probar que todo camino desde s es un camino de longitud mínima. Sea $p = v_0 v_1 \dots v_k$ con $v_0 = s$ y $v_k = v$ un camino de longitud mínima desde s hasta $v \in V$, se tiene para $i = 1, \dots, k$, que $v_i.d = d(s, v_i)$ y que $v_i.d \geq v_{i-1}.d + \omega(v_{i-1}, v_i)$, de lo que concluimos $\omega(v_{i-1}, v_i) \leq d(s, v_i) - d(s, v_{i-1})$. Sumando todos los pesos a lo largo del camino p obtenemos

$$\begin{aligned} \omega(p) &= \sum_{i=1}^k \omega(v_{i-1}, v_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^k (d(s, v_i) - d(s, v_{i-1})) \\ &= d(s, v_k) - d(s, v_0) && \text{(Los sumandos se cancelan)} \\ &= d(s, v_k) && (d(s, v_0) = d(s, s) = 0) \end{aligned}$$

Por lo que, $\omega(p) \leq d(s, v_k)$. Puesto que $d(s, v_k)$ es un límite inferior del peso de cualquier camino de s a v_k , concluimos que $\omega(p) = d(s, v_k)$ y, por tanto, p es camino de longitud mínima. \square

3. Algoritmos de búsqueda en grafos

En este capítulo abordaremos algunos algoritmos de búsqueda en grafos, con el objetivo de encontrar caminos entre puntos, geodésicas y componentes conexas asociadas a los distintos grafos. En esta sección nos referiremos a los vértices del grafo por nodos.

3.1. Algoritmo de búsqueda en anchura

El algoritmo de búsqueda en anchura (BFS-Breadth First Search en inglés) es un algoritmo de búsqueda no informada, es decir, que cuando se da un paso en el algoritmo, no se sabe si este es el mejor posible. Es uno de los algoritmos más simples de búsqueda en grafos y funciona como base para el desarrollo de otros algoritmos más complejos. La idea intuitiva del algoritmo es partir del nodo inicial e ir explorando todos los nodos vecinos (conectados mediante un camino), cuando se han explorado todos los vecinos, se repite el proceso para cada uno de estos, hasta recorrer todo el grafo.

El nombre de búsqueda en anchura viene del hecho de que el algoritmo explora la frontera entre nodos explorados y no explorados, de manera uniforme a lo largo del ancho de la misma, es decir, explora todos los nodos a distancia k antes de explorar un nodo a distancia $k + 1$.

El algoritmo funciona tanto en grafos no dirigidos como grafos dirigidos, sin embargo, requiere que los pesos de las aristas sean 1, es decir, que sea un grafo no ponderado. El algoritmo se puede utilizar tanto para calcular las componentes conexas de un grafo como para encontrar los caminos de mínima longitud, geodésicas, entre dos nodos.

Desde un punto de vista matemático, sea p el nodo inicial, el algoritmo consiste en explorar la bola cerrada $\bar{B}_p(r)$ empezando en $r = 1$, marcando los elementos dentro de la bola, e ir aumentando en cada paso el radio en una unidad hasta que no se puedan alcanzar más elementos desde el nodo inicial, es decir, hasta que $\bar{B}_p(r) \cap \bar{B}_p(r + 1) = \emptyset$. Para el cálculo de componentes conexas, si, tras terminar el proceso anterior, quedan nodos sin explorar, se selecciona un nodo no explorado y se repite el proceso, hasta que todos los nodos sean explorados. Para el cálculo de las geodésicas la exploración continúa hasta encontrar el nodo destino, si no se encuentra, no existe camino entre los nodos.

Proposición 3.1. (Corrección del algoritmo de búsqueda en anchura) Sea $v \in V$ el nodo inicial y $p \in V$ el nodo final, el camino encontrado por el algoritmo de búsqueda en anchura entre estos nodos es una geodésica.

Demostración. Sea l la longitud del camino encontrado, por construcción del algoritmo, esto supone dos cosas, por un lado, $p \in \bar{B}_v(l)$, y, por otro lado, $p \notin \bar{B}_v(r) \forall r < l$ pues, de lo contrario, el algoritmo hubiera parado antes de explorar $\bar{B}_v(l)$ y la longitud sería menor. Pero entonces esto supone que no existe ningún camino entre v y p de longitud menor que l , es decir, que el camino encontrado de longitud l es una geodésica, como se quería. \square

3. Algoritmos de búsqueda en grafos

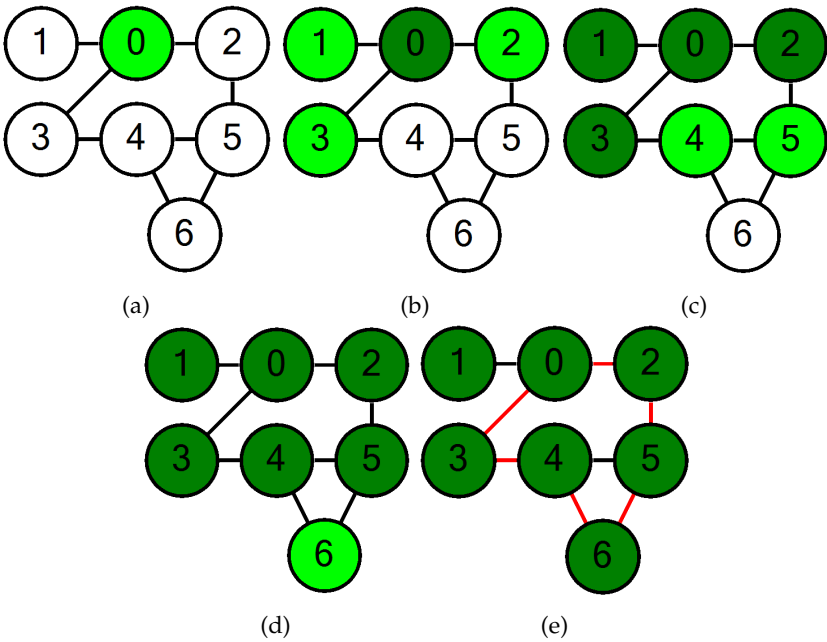


Figura 3.1.: Cálculo de las geodésicas entre el nodo 0 y el nodo 6.

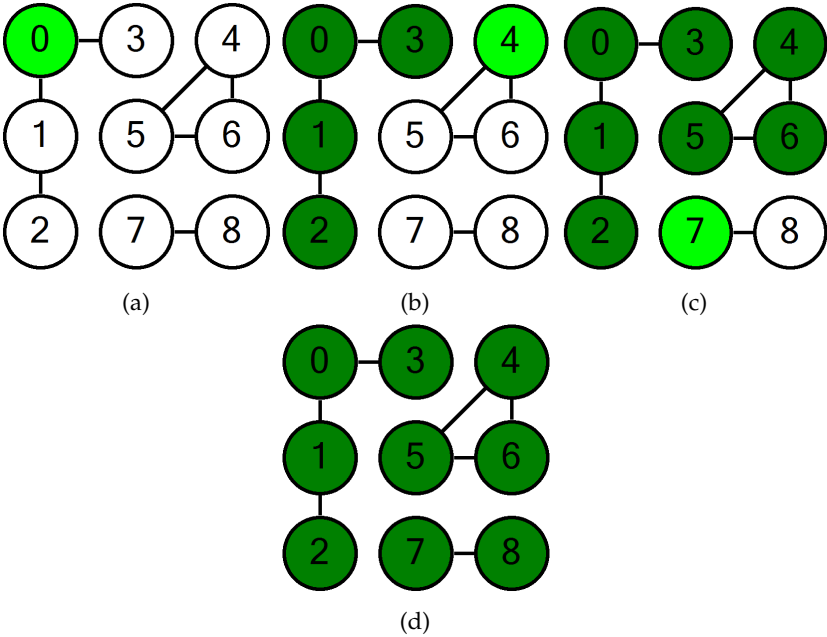


Figura 3.2.: Cálculo de las componentes conexas del grafo, en este caso, 3.

En la [Figura 3.1](#) y la [Figura 3.2](#) podemos observar un ejemplo del comportamiento del algoritmo, tanto para encontrar las geodésicas entre dos nodos como para calcular el número de componentes conexas. En el primer caso, se muestra en cada figura el estado de los nodos

tras la exploración completa de cada bola, marcando en verde oscuro los nodos explorados y en verde pistacho los nodos visitados que serán explorados en la siguiente bola, por ejemplo, en el apartado (c) acaba de finalizar la exploración de la bola $\bar{B}_0(1)$. En la segunda figura se muestra el estado del grafo tras finalizar el algoritmo base sobre cada componente, y haber seleccionado el siguiente nodo a explorar.

3.1.1. Implementación del algoritmo de búsqueda en anchura

A continuación veremos la implementación mediante pseudocódigo de las dos versiones del algoritmo que trabajaremos, la primera, cuya finalidad será la de encontrar todas las geodésicas entre dos nodos, y la segunda, que calculará el número de componentes conexas del grafo.

Para la construcción del algoritmo, utilizaremos la representación mediante listas de adyacencia.

Empezamos por el algoritmo de cálculo de geodésicas entre dos nodos.

Algorithm 3 BFS_geodesicas(G, v, p)

```

1: for  $u \in G.V$  do
2:    $u.explorado = False$ 
3:    $u.distancia = \infty$ 
4:    $u.predecesor = \{\}$ 
5:  $v.distancia = 0$ 
6: Cola  $Q = \emptyset$ 
7:  $Q.push(v)$ 
8: while  $Q \neq \emptyset$  do
9:    $u = Q.pull()$ 
10:  if  $u == p$  then return TRUE
11:  for  $n \in G.Adj[u]$  do
12:    if  $\neg n.explorado$  then
13:      if  $n.distancia \geq u.distancia + 1$  then
14:         $n.distancia = u.distancia + 1$ 
15:         $n.predecesor.push(u)$ 
16:         $Q.push(n)$ 
17:   $u.explorado = True$ 
return FALSE

```

En el algoritmo anterior, G es el grafo, v el nodo inicial, p el nodo final y Q es una cola.

Esta versión del algoritmo es muy similar a la versión normal del algoritmo, con la excepción de que, para poder encontrar todas las geodésicas, debemos considerar nodos ya visitados, pues pueden ser explorados por varios nodos a la misma distancia. Para evitar que antes de explorar un nodo sea visitado y, por tanto, alterado, por otro nodo a distancia mayor que la primera vez que fue visitado, se ha incluido el condicional de la línea 13, nótese que, al iniciar las distancias a infinito, la primera vez que se visita un nodo, este condicional es siempre cierto.

3. Algoritmos de búsqueda en grafos

Pasamos a continuación con la versión del algoritmo que calcula el número de componentes conexas del grafo.

Algorithm 4 BFS_conexas(G)

```
1:  $N = \emptyset$ 
2:  $conexas = 0$ 
3: for  $u \in G.V$  do
4:    $u.explorado = False$ 
5:    $N.push(u)$ 
6: while  $N \neq \emptyset$  do
7:    $conexas = conexas + 1$ 
8:    $u = N.pull()$ 
9:    $u.explorado = True$ 
10:  Cola  $Q = \emptyset$ 
11:   $Q.push(u)$ 
12:  while  $Q \neq \emptyset$  do
13:     $u = Q.pull()$ 
14:    for  $n \in G.Adj[u]$  do
15:      if  $!n.explorado$  then
16:         $Q.push(n)$ 
17:         $n.explorado = True$ 
18:         $N.remove(n)$ 
return  $conexas$ 
```

Para asegurarnos de que se exploran todos los nodos, los incluimos primero en un conjunto, del que los sacamos conforme los exploramos, y continuamos explorando hasta que dicho conjunto sea vacío. Puesto que, para el cálculo de las componentes conexas tan solo necesitamos conocer si podemos alcanzar un nodo desde el inicio, marcamos como explorado los nodos en la adyacencia del nodo que estamos explorando, de tal manera nos aseguramos que solo entra a la cola una vez.

3.2. Algoritmo de Dijkstra

El siguiente algoritmo que vamos a estudiar es el algoritmo de Dijkstra, al igual que la búsqueda en anchura, es un algoritmo de búsqueda del camino más corto entre nodos, con la salvedad de que funciona también para grafos ponderados. Su nombre proviene del científico Edsger Dijkstra, que lo ideó en 1956 y publicó por primera vez en 1959.

La idea del algoritmo es en esencia, la misma que la búsqueda en anchura, con la salvedad de que la exploración de los nodos se realiza de forma ordenada, es decir, en cada paso, se escoge el nodo que esté a distancia menor de todos los que han sido visitados, para explorar. Al igual que el algoritmo de búsqueda en anchura, este algoritmo no funciona si existen aristas con pesos negativos.

A nivel de espacios métricos, sea p el nodo inicial, el primer paso es calcular el mínimo de las distancias del resto de nodos a p , sea r dicha distancia, entonces procederemos a explorar la bola cerrada $\overline{B}_p(r)$, en dicha bola se encuentran el nodo inicial y, al menos, un

nodo más, que está a distancia r . El siguiente paso es calcular r' , que va a ser el mínimo entre las distancias de los nodos no explorados a p , y las distancias de los nodos no explorados a los nodos del conjunto $\bar{B}_p(r) \setminus \{p\}$ más la distancia de dichos nodos a p , es decir:

$$r' = \min\{d(p, v) : v \in V \setminus \bar{B}_p(r), d(p, v) + d(v, u) : v \in \bar{B}_p(r) \setminus \{p\}, u \in V \setminus \bar{B}_p(r)\}$$

A continuación se explora la bola cerrada $\bar{B}_p(r')$ y el proceso se repite hasta encontrar el nodo destino.

Proposición 3.2. (Corrección del algoritmo de Dijkstra) Sea $v \in V$ el nodo inicial y $p \in V$ el nodo final, el camino encontrado por el algoritmo de Dijkstra entre estos nodos es una geodésica.

Demostración. Puesto que $d(p, v) > r$, $v \in V \setminus \bar{B}_p(r)$, por elección de r , y $d(p, v) + d(v, u) > r$, $v \in \bar{B}_p(r) \setminus \{p\}$, $u \in V \setminus \bar{B}_p(r)$, pues, de lo contrario, $d(p, u) \leq d(p, v) + d(v, u) \leq r$, pero esto significa que $u \in \bar{B}_p(r)$, lo que es una contradicción. Por tanto, se verifica que, en cada paso del algoritmo, $r' > r$, es decir, que la distancia de los nodos explorados es siempre creciente, por lo que la demostración de la **Proposición 3.1** es cierta también para este algoritmo. \square

3.2.1. Implementación del algoritmo de Dijkstra

A nivel de implementación el algoritmo difiere un poco de la definición matemática, pues es muy ineficiente tener que actualizar el radio en cada paso, teniendo en cuenta además todos los nodos del grafo. Por esto, se introduce el concepto de nodos *visitados*, que son los nodos vecinos de un nodo explorado, es decir, nodos en la frontera del conjunto de nodos explorados. Se introduce este concepto pues, tras la exploración de un nodo, el siguiente nodo que escoge el algoritmo es el de menor distancia y éste es siempre un nodo en la frontera, es decir, un nodo marcado como visitado, pues el resto de nodos del grafo están a mayor distancia de los nodos en la frontera, ya que los pesos de las aristas son positivos.

El procedimiento del algoritmo entonces consiste en explorar el nodo visitado a menor distancia del nodo inicial. La exploración del nodo consiste en marcar todos los nodos vecinos no explorados como visitados y actualizar su distancia al nodo inicial a partir del peso de la arista que los une y la distancia del propio nodo.

Este procedimiento mantiene invariante la propiedad principal del algoritmo, la distancia de los nodos explorados es siempre creciente a medida que avanza el algoritmo, lo que permite mantener la corrección del algoritmo probada en la **Proposición 3.2**, es decir, los caminos encontrados de esta manera son geodésicas.

En la **Figura 3.3** se puede observar un ejemplo del algoritmo, se empieza marcando el nodo inicial, a , como visitado, con distancia 0, y el resto de nodos con distancia -1 , para señalar que no han sido visitados todavía. A continuación se escoge el nodo visitado (en verde pistacho) con menor distancia y se explora, es decir, se marcan todos sus vecinos no explorados y no visitados como visitados y se actualizan las distancias de dichos nodos como la distancia del propio nodo más el peso de la arista que los une. En caso de que un nodo vecino esté marcado como visitado, si la distancia desde el nodo actual es menor a la distancia guardada, se actualiza, como se puede observar en el apartado (g). El algoritmo

3. Algoritmos de búsqueda en grafos

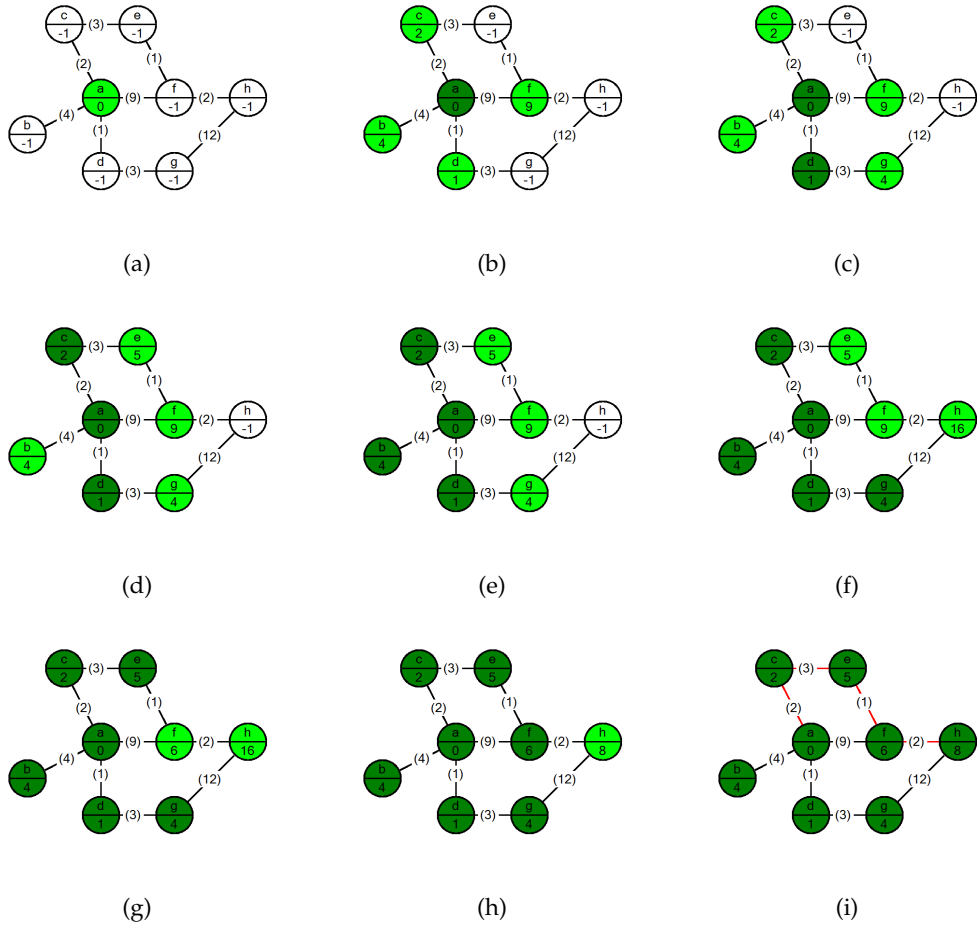


Figura 3.3.: Cálculo de las geodésicas entre el nodo a y el nodo h .

termina cuando se explora el nodo final o no quedan nodos visitados que explorar.

Este comportamiento se puede simular utilizando una cola con prioridad en el algoritmo BFS en vez de una cola normal, de tal manera que el nodo escogido en cada paso sea el de menor distancia.

Se muestra a continuación el pseudocódigo asociado a la implementación del algoritmo.

Algorithm 5 DJK_geodesicas(G, v, p)

```

1: for  $u \in G.V$  do
2:    $u.explorado = False$ 
3:    $u.distancia = \infty$ 
4:    $u.predecesor = \{\}$ 
5:  $v.distancia = 0$ 
6: Cola con prioridad  $Q = \emptyset$ 

```

```

7:  $Q.push(v)$ 
8: while  $Q \neq \emptyset$  do
9:    $u = Q.pull()$ 
10:  if  $u == p$  then return TRUE
11:  for  $n \in G.Adj[u]$  do
12:    if  $\neg n.explorado$  then
13:      if  $n.distancia > u.distancia + d[u][n]$  then
14:         $n.distancia = u.distancia + d[u][n]$ 
15:         $n.predecesor = \{u\}$ 
16:         $Q.push(n)$ 
17:      else if  $n.distancia == u.distancia + d[u][n]$  then
18:         $n.predecesor.push(u)$ 
19:   $u.explorado = True$ 
return FALSE

```

En el algoritmo anterior, G es el grafo, v el nodo inicial, p el nodo final, Q una cola con prioridad y los pesos de las aristas vienen dados en una matriz, donde el valor $d[a][b]$ corresponde al peso de la arista que une a con b .

3.3. Algoritmo de Bellman-Ford

A continuación estudiaremos el algoritmo de Bellman-Ford, que introduce una mejora a los algoritmos anteriores al ser capaz, no sólo de funcionar con grafos con pesos negativos, si no también de detectar la existencia de ciclos negativos en un grafo, situación en la cuál el camino de longitud mínima no está bien definida, pues, podríamos entrar en el ciclo negativo y reducir el coste de cualquier camino todo lo que quisiéramos.

Este algoritmo resuelve un problema similar al del cálculo de geodésicas entre dos nodos pero con una ligera diferencia, en este caso se calculan las geodésicas desde el nodo inicial a cualquier otro nodo del grafo.

Si queremos conocer las geodésicas entre dos nodos concretos, ejecutamos el algoritmo con el nodo inicial y, tras terminar, recuperamos las geodésicas a través de los padres del nodo final.

A partir de esta operación, el algoritmo consiste en realizar $|V| - 1$ Relajaciones de todas las aristas del grafo, es decir, se relajan todas las aristas del grafo y, a continuación, se repite el proceso $|V| - 1$ veces. Tras esto, se comprueba la condición de Relajación para cada arista, y, en caso de existir alguna arista que la cumpla, esto significa que existe un ciclo negativo y el algoritmo termina con valor *FALSE*. En caso contrario, el algoritmo termina con valor *TRUE*.

Lema 3.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo finito con nodo inicial $s \in V$ y función de pesos $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $s \in V$, suponemos además G no contiene ningún ciclo negativo alcanzable desde s . Entonces, tras las $|V| - 1$ Relajaciones de todas las aristas del grafo, se tiene que $v.d = d(s, v)$ para todos los vértices alcanzables desde s .

Demostración. Este lema se demuestra a partir de la propiedad de relajación de caminos (Lema 2.5). Consideremos cualquier vértice $v \in V$ alcanzable desde s , y sea $p = v_0 v_1 \dots v_k$ con

3. Algoritmos de búsqueda en grafos

$v_0 = s$ y $v_k = v$ cualquier camino de longitud mínima entre s y v . Sabemos que este camino existe pues, como v es alcanzable desde s , existe un camino entre ambos y, como estamos considerando un grafo finito, el número de caminos es también finito, existiendo uno con longitud mínima, que es el que buscamos.

Puesto que los caminos de longitud mínima son simples, p debe tener a lo sumo $|V| - 1$ aristas, por lo que $k \leq |V| - 1$. En cada una de las $|V| - 1$ iteraciones, se relajan todas las aristas de G . En particular, en la i -ésima iteración, para $i = 1, \dots, k$, se relaja (v_{i-1}, v_i) . Podemos entonces aplicar la propiedad de relajación de caminos (Lema 2.5), que nos da $v.d = v_k.d = d(s, v_k) = d(s, v)$. \square

Proposición 3.3. (Corrección del algoritmo de Bellman-Ford) *Tras aplicar el algoritmo de Bellman-Ford sobre un grafo $G = (V, E)$ finito con nodo inicial $s \in V$ y función de pesos $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$, si G no contiene ningún ciclo negativo alcanzables desde s , el algoritmo devuelve TRUE, con $v.d = d(s, v) \forall v \in V$ y el subgrafo de predecesores G_π es un grafo de caminos de longitud mínima con raíz s . Si G contiene un ciclo negativo alcanzable desde s , entonces el algoritmo devuelve FALSE.*

Demostración. Supongamos primero que G no contiene ningún ciclo negativo alcanzable desde s . Probemos primero que, tras finalizar el algoritmo, $v.d = d(s, v) \forall v \in V$. Si v es alcanzable desde s , el Lema 3.1 lo demuestra. Si v no es alcanzable, la demostración se sigue de la propiedad de no camino (Corolario 2.1). La propiedad del subgrafo de predecesores (Proposición 2.6) junto al hecho probado anteriormente, implican que G_π es un grafo de caminos de longitud mínima con raíz s . Utilizaremos a continuación el primer hecho probado para ver que el algoritmo devuelve TRUE, esto es, que todas las comprobaciones de la condición de relajación son falsas, es decir, $\forall (u, v) \in E, v.d \leq u.d + \omega(u, v)$. Para ello, basta observar que, tras terminar el algoritmo, se tiene

$$\begin{aligned} v.d &= d(s, v) \\ &\leq d(s, u) + \omega(u, v) && \text{(Desigualdad triangular (Lema 2.1))} \\ &= u.d + \omega(u, v) \end{aligned}$$

Por lo que el algoritmo devuelve TRUE.

Ahora, supongamos que G contiene un ciclo negativo alcanzable desde s , sea este ciclo $c = v_0 v_1 \dots v_k$ con $v_0 = v_k$, entonces

$$\sum_{i=1}^k \omega(v_{i-1}, v_i) < 0.$$

Asumamos a continuación, por contradicción, que el algoritmo devuelve TRUE, es decir, que $v_i.d \leq v_{i-1}.d + \omega(v_{i-1}, v_i)$ para $i = 1, 2, \dots, k$. Sumando dichas desigualdades, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k v_i.d &\leq \sum_{i=1}^k (v_{i-1}.d + \omega(v_{i-1}, v_i)) \\ &= \sum_{i=1}^k v_{i-1}.d + \sum_{i=1}^k \omega(v_{i-1}, v_i) \end{aligned}$$

Puesto que $v_0 = v_k$ cada vértice en c aparece una única vez en los sumatorios $\sum_{i=1}^k v_i.d$ y

$\sum_{i=i}^k v_{i-1}.d$ por lo que

$$\sum_{i=i}^k v_i.d = \sum_{i=i}^k v_{i-1}.d.$$

Por último, como todos los nodos del ciclo son alcanzables por s , se tiene que $v_i.d$ es finito para $i = 1, 2, \dots, k$, por lo que podemos cancelar los sumatorios, obteniendo

$$\sum_{i=1}^k \omega(v_{i-1}, v_i) \geq 0$$

lo cuál es una contradicción, pues c es un ciclo negativo. Concluimos por tanto que, en este caso, el algoritmo devuelve *FALSE*, como se quería. \square

3.3.1. Implementación del algoritmo de Bellman-Ford

Primero se muestra una ejecución del algoritmo de Bellman-Ford sobre un grafo sencillo para ayudar al entendimiento del mismo.

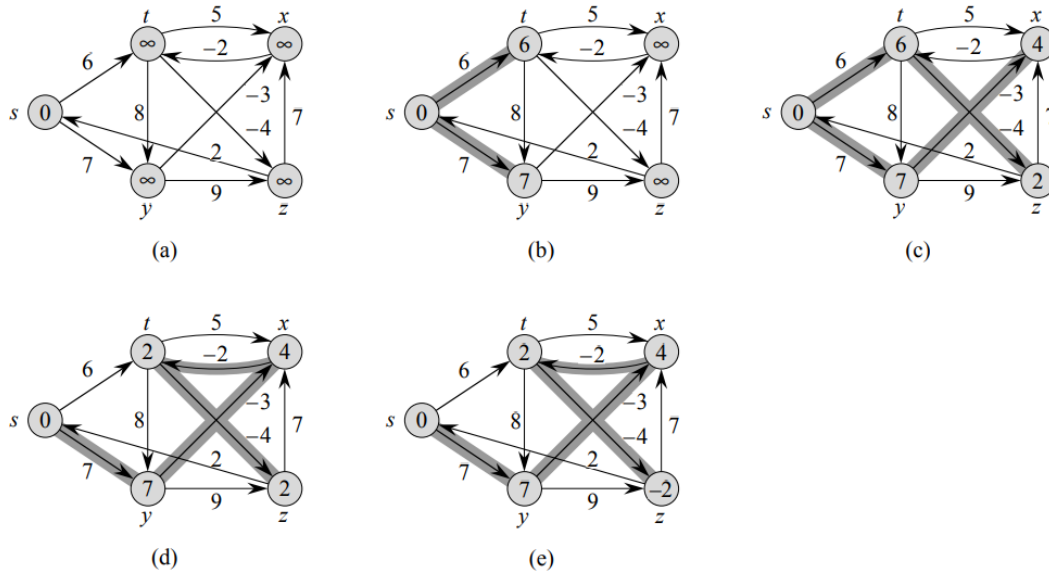


Figura 3.4.: Ejecución del algoritmo de Bellman-Ford. Nodo inicial s . Los valores de d aparecen dentro de cada nodo y las aristas resaltadas indica precedencia, es decir, si una arista (u, v) está resaltada, significa que $u \in v.p$. Para este caso particular, el orden de relajación de aristas seguido ha sido $(t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t), (s, y)$. **(a)** indica la situación inicial tras inicializar el grafo. **(b)-(e)** indican la situación tras finalizar cada iteración de la relajación de aristas. Los valores de d en (e) son los valores finales. En este caso el algoritmo devuelve *TRUE*. Esta imagen ha sido extraída de la referencia [Cor09], capítulo 24, figura 24.4.

El pseudocódigo asociado al algoritmo de Bellman-Ford se muestra a continuación.

Algorithm 6 Bellman_Ford(G, s)

```

1: Inicializacion( $G, s$ )
2: for  $i = 1$  to  $|G.V| - 1$  do
3:   for  $(u, v) \in G.E$  do
4:     Relajar( $u, v$ )
5: for  $(u, v) \in G.E$  do
6:   if  $v.d > u.d + d[u][v]$  then return FALSE
   return TRUE

```

En el algoritmo anterior, G es el grafo, s el nodo inicial y los pesos de las aristas vienen dados en una matriz, donde el valor $d[a][b]$ corresponde al peso de la arista que une a con b .

Las funciones $Inicializacion(G, s)$ y $Relajar(u, v)$ vienen definidas en la sección 2.2.

3.4. Cálculo de caminos de longitud mínima entre todas las parejas

En esta sección se estudiarán algoritmos que resuelven el siguiente problema.

Dado un grafo, calcular los caminos de longitud mínima entre todas las parejas de nodos del grafo. Este problema suele aparecer en problemas como el cálculo de la distancia entre todas las ciudades dentro de un mapa, por ejemplo.

Podemos resolver este problema con los algoritmos descritos anteriormente, por ejemplo, ejecutando el algoritmo de Dijkstra para todo par de nodos del grafo, o ejecutando el algoritmo de Bellman-Ford desde cada nodo del grafo, en caso de tener pesos negativos, aunque esto es altamente ineficiente, por lo que en esta sección se estudiarán algoritmos específicos para este problema, más eficientes que los mencionados anteriormente.

En esta sección, al igual que en los algoritmos anteriores, dado el grafo $G = (V; E)$ se supondrá que los pesos de las aristas se almacenan en una matriz $d = (d_{ij})$ de orden $n \times n$ donde $|V| = n$ y

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \text{peso de la arista } (i, j) & \text{si } i \neq j \text{ y } (i, j) \in E \\ \infty & \text{si } i \neq j \text{ y } (i, j) \notin E \end{cases}$$

Permitimos pesos negativos, pero suponemos que los grafos no contienen ciclos negativos. La salida de los algoritmos vendrá dada por una matriz D de tamaño $n \times n$ donde $d_{ij} = d(i, j)$.

Si, además, queremos conocer los caminos de longitud mínima entre los nodos, el algoritmo deberá calcular la matriz de predecesores $\Pi = \pi_{ij}$ donde π_{ij} es *NULO* si $i = j$ o no existe camino entre i y j . En otro caso, π_{ij} es el predecesor de j en el camino de longitud mínima de i a j .

A partir de esta matriz, podemos mostrar el camino de longitud mínima entre i y j con el siguiente algoritmo

Algorithm 7 Mostrar_Camino_Minima_Longitud(Π, i, j)

```

1: if  $i == j$  then
2:   print i
3: else if  $\pi_{ij} == \text{NULO}$  then
4:   print "no existe camino entre " i " y " j
5: else
6:   Mostrar_Camino_Minima_Longitud( $\Pi, i, \pi_{ij}$ )
7: print j

```

3.4.1. Los caminos de longitud mínima y la multiplicación de matrices

El primer algoritmo que veremos es recursivo y tiene cierta relación con la multiplicación de matrices, como veremos más adelante. La idea básica es construir poco a poco los caminos de longitud mínima, empezando por los que tienen una sola arista, y, a partir de estas caminos, construir los de longitud mínima con dos aristas como máximo, repitiendo este proceso hasta obtener todos los caminos de longitud mínima entre nodos.

Sea $l_{ij}^{(m)}$ la mínima longitud de cualquier camino entre i y j que contiene a lo sumo m aristas. Para $m = 0$ tenemos

$$l_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Para $m > 0$ calculamos $l_{ij}^{(m)}$ como el mínimo entre $l_{ij}^{(m-1)}$ y el mínimo de los caminos con m aristas, a partir de todos los posibles predecesores k de j . Podemos, de esta forma, definir la siguiente recursión

$$\begin{aligned} l_{ij}^{(m)} &= \min(l_{ij}^{(m-1)}, \min_{1 \leq k \leq n} \{l_{ik}^{(m-1)} + d_{kj}\}) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n} \{l_{ik}^{(m-1)} + d_{kj}\} \end{aligned}$$

La última igualdad se mantiene pues $d_{jj} = 0 \forall j$.

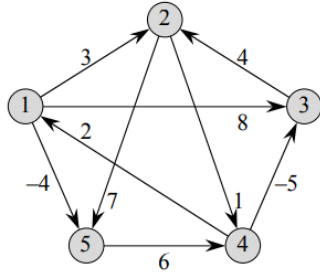
Dado que todo camino de longitud mínima entre i y j en un grafo sin ciclos negativos es simple, contiene, a lo sumo, $n - 1$ aristas, por tanto, se verifica

$$d(i, j) = l_{ij}^{(n-1)} = l_{ij}^{(n)} = l_{ij}^{(n+1)} = \dots$$

La resolución del problema consiste, dada la recursividad anterior, en el cálculo de las matrices $L^{(1)}, L^{(2)}, L^{(3)}, \dots, L^{(n-1)}$, donde, para $m = 1, \dots, n - 1$ tenemos $L^{(m)} = (l_{ij}^{(m)})$. Nótese que $L^{(1)} = d$ pues $l_{ij}^{(1)} = d_{ij} \forall i, j \in V$. En la [Figura 3.5](#) podemos ver un ejemplo de esta

3. Algoritmos de búsqueda en grafos

recursión sobre un grafo sencillo.



$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad L^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 3.5.: Un grafo dirigido y la sucesión de matrices $L^{(m)}$ obtenidas por el proceso recursivo definido en la sección 3.4.1. La imagen del grafo ha sido extraída de la referencia [Cor09], capítulo 24, figura 25.1.

El corazón del algoritmo es el siguiente procedimiento, que, a partir de las matrices $L^{(m-1)}$ y d , calcula $L^{(m)}$.

Algorithm 8 Extender_Caminos_Minimos(L, d)

```

1:  $L' = \text{nueva matriz } n \times n$ 
2: for  $i = 1$  hasta  $n$  do
3:   for  $j = 1$  hasta  $n$  do
4:      $l'_{ij} = \infty$ 
5:     for  $k = 1$  hasta  $n$  do
6:        $l'_{ij} = \min(l'_{ij}, l_{ik} + d_{kj})$ 
return  $L'$ 

```

El algoritmo anterior utiliza la matriz L para $L^{(m-1)}$ y devuelve L' , que es $L^{(m)}$.

A partir de este procedimiento se puede ver la relación entre este algoritmo y la multiplicación de matrices. Supongamos que queremos calcular el producto matricial $C = A \cdot B$ de dos matrices de tamaño $n \times n$. Entonces, para $i, j = 1, \dots, n$ calcularíamos

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

3.4. Cálculo de caminos de longitud mínima entre todas las parejas

Realizando las sustituciones

$$\begin{aligned} l^{(m-1)} &\rightarrow a, \\ d &\rightarrow b, \\ l^{(m)} &\rightarrow c, \\ \min &\rightarrow +, \\ + &\rightarrow . \end{aligned}$$

Podemos transformar la operación de recursión en el producto matricial anterior. Gracias a este hecho, volviendo al problema del cálculo de caminos de longitud mínima, podemos calcular la matriz $L^{(n-1)}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= d, \\ L^{(2)} &= L^{(1)} \cdot d = d^2, \\ L^{(3)} &= L^{(2)} \cdot d = d^3, \\ &\vdots \\ L^{(m-1)} &= L^{(n-2)} \cdot d = d^{n-1}. \end{aligned}$$

Podemos calcular este proceso con el siguiente algoritmo

Algorithm 9 Caminos_Minimos_Todas_Parejas_Lento(d)

```

1:  $L^{(1)} = d$ 
2: for  $m = 2$  hasta  $n - 1$  do
3:    $L^{(m)} = \text{nueva matriz } n \times n$ 
4:    $L^{(m)} = \text{Extender\_Caminos\_Minimos}(L^{(m-1)}, d)$ 
return  $L^{(n-1)}$ 

```

Hemos denotado a este algoritmo como "Lento", pues podemos realizar una mejora muy sencilla que transforma el tiempo de ejecución de este último algoritmo de lineal a logarítmico. Dado que nuestro objetivo es el cálculo de la matriz $L^{(n-1)}$, no nos interesa el cálculo del resto de matrices, por ello, utilizando el hecho de que el algoritmo funciona como el producto de matrices, y que $L^{(m)} = L^{(n-1)} \forall m \geq n - 1$, podemos calcular $L^{(n-1)}$ de la siguiente manera

3. Algoritmos de búsqueda en grafos

$$\begin{aligned}
L^{(1)} &= d, \\
L^{(2)} &= d^2 = d \cdot d, \\
L^{(4)} &= d^4 = d^2 \cdot d^2, \\
L^{(8)} &= d^8 = d^4 \cdot d^4, \\
&\vdots \\
L^{(2^{\lceil \lg(n-1) \rceil})} &= d^{2^{\lceil \lg(n-1) \rceil}} = d^{2^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1}} \cdot d^{2^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1}}.
\end{aligned}$$

Puesto que $2^{\lceil \lg(n-1) \rceil} \geq n - 1$ el resultado final es igual a $L^{(n-1)}$. El siguiente algoritmo implementa dicho proceso

Algorithm 10 Caminos_Minimos_Todas_Parejas_Rapido(d)

```

1:  $L^{(1)} = d$ 
2:  $m = 1$ 
3: while  $m < n - 1$  do
4:    $L^{(2m)} = \text{nueva matriz } n \times n$ 
5:    $L^{(2m)} = \text{Extender\_Caminos\_Minimos}(L^{(m)}, L^{(m)})$ 
6:    $m = 2m$ 
return  $L^{(m)}$ 

```

3.4.2. Algoritmo de Floyd-Warshall

A. Primer apéndice

A.1. Ejemplo extendido de cálculo de geodésicas con BFS

Con afán de mostrar el procedimiento del algoritmo BFS sobre un grafo de mayor extensión, se presenta a continuación en la **Figura A.1** el proceso de búsqueda de geodésicas, donde cada imagen representa el estado del grafo al finalizar una capa, es decir, tras explorar por completo cada bola, el nodo inicial es el nodo 0, y el nodo final está marcado en rojo para mejor visibilidad. Los nodos ya explorados se han marcado en verde oscuro, y los nodos visitados pero no explorados, es decir, los nodos en la cola, en verde pistacho. Los caminos marcados en rojo representan las geodésicas encontradas, que se pueden calcular a través de los predecesores de cada nodo.

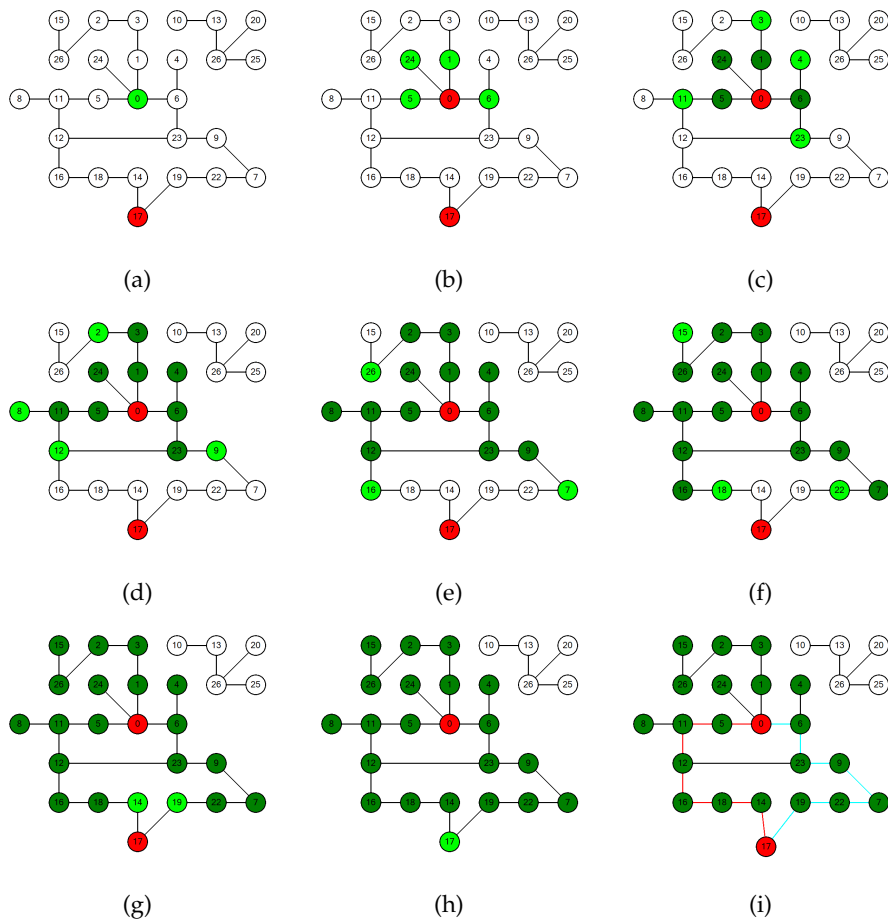


Figura A.1.: Cálculo de las geodésicas entre el nodo 0 y el nodo 17, marcado en rojo.

Glosario

La inclusión de un glosario es opcional.

Archivo: `glosario.tex`

\mathbb{R} Conjunto de números reales.

\mathbb{C} Conjunto de números complejos.

\mathbb{Z} Conjunto de números enteros.

Bibliografía

Las referencias se listan por orden alfabético. Aquellas referencias con más de un autor están ordenadas de acuerdo con el primer autor.

- [Cor09] T. H. Cormen. *Introduction to algorithms / Thomas H. Cormen... [et al]*. MIT Press, Cambridge, Mass, 3rd ed. edition, 2009.
- [LC14] Rafael López Camino. *Topología / Rafael López Camino*. Manuales major ; 67. Ciencias experimentales y exactas. Universidad de Granada, Granada, 2014.