

Descenso de Gradiente en Ciencias Biomédicas

Regresión lineal múltiple y regresión logística

PhD. Pablo Eduardo Caicedo Rodríguez

2025-11-08

Objetivos de la sesión

- Entender el **principio del descenso de gradiente (GD)** como método de optimización.
- Aplicar GD a **regresión lineal múltiple** (objetivo continuo) y **regresión logística** (clasificación 0/1).
- Analizar decisiones de ingeniería: **tasa de aprendizaje, escalado/normalización, batch vs. mini-batch vs. SGD.**
- Interpretar resultados en **contextos biomédicos** (diagnóstico, pronóstico y evaluación de riesgo).

Agenda

- 1 Fundamentos de GD y funciones de costo
- 2 Caso 1: **Regresión lineal múltiple** con GD
- 3 Caso 2: **Regresión logística** con GD
- 4 Buenas prácticas, diagnósticos y discusión aplicada

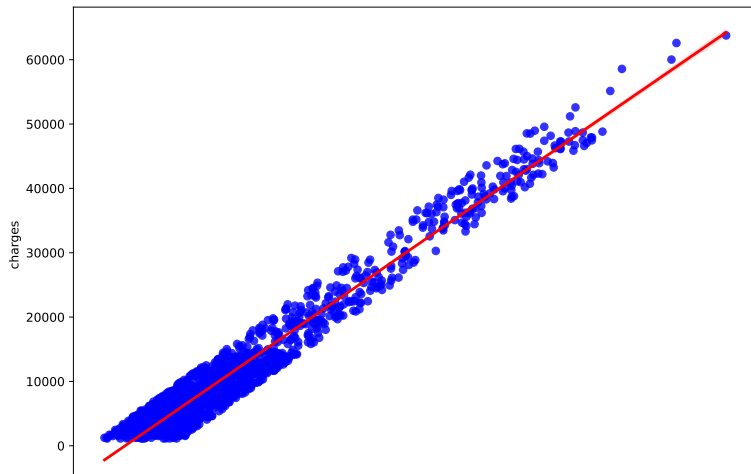
Sección 1

1. Fundamentos de descenso de gradiente

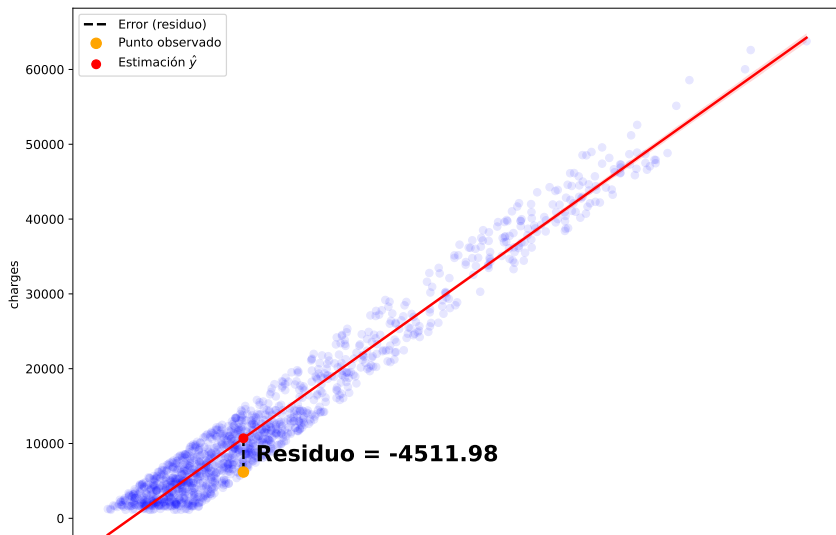
Motivación biomédica

- Ajustar parámetros de un **modelo fisiológico** o un **predictor clínico** con datos reales.
- Ejemplos típicos:
 - Estimar **gasto energético** a partir de IMC, edad y FC.
 - Estimar **edad vascular** con variables de laboratorio.
 - **Clasificar** presencia/ausencia de una condición (0/1) con biomarcadores.

Regresión Lineal



Regresión Lineal



Función de costo (error)

Regresión (continuo):

$$J(\mathbf{w}) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2$$

donde $\hat{y}_i = \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_i$.

Clasificación binaria: Entropía cruzada (log-loss):

$$J(\mathbf{w}) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [y_i \log \hat{p}_i + (1 - y_i) \log (1 - \hat{p}_i)]$$

donde $\hat{p}_i = \sigma(\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_i) = \frac{1}{1 + e^{-\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_i}}$.

Función de costo (error)

! ... Para el caso de ejemplo (un modelo tipo lineal)

$$\mathbf{w}_j^\top = [w_{j,1}, w_{j,0}]$$

$$salary_i = x_i$$

$$\hat{y}_j = w_{j,1} * x_j + w_{j,0}$$

$$J(\mathbf{w}) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (y_j - w_{j,1} * x_i - w_{j,0})^2$$

Idea central del GD

- Partimos de $\mathbf{w}_{(0)}$ (p. ej., aleatorio).
- Iteramos:

$$\mathbf{w}_{(t+1)} = \mathbf{w}_{(t)} - \alpha \nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w}_{(t)})$$

- $\alpha =$ **tasa de aprendizaje**: grande \rightarrow rápido pero inestable; pequeña \rightarrow estable pero lento.
- Convergencia: buscamos $\nabla J \approx \mathbf{0}$.

Visualización conceptual: “valle” del error y trayectoria en zig-zag hacia el mínimo.

Algoritmo de Descenso de Gradiente

i Para la estimación de $w_{j,0}$

$$w_{j+1,0} = w_{j,0} - \alpha \frac{\partial J}{\partial w_{j,0}}$$

$$\frac{\partial J}{\partial w_{j,0}} = \frac{\partial}{\partial w_{j,0}} \left(\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (y_i - w_{j,1}x_i - w_{j,0})^2 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_{j,0}} \left(\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (y_i - w_{j,1}x_i - w_{j,0})^2 \right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (w_{j,1}x_i + w_{j,0} - y_i)$$

i Para la estimación de $w_{j,1}$

Variantes: batch, mini-batch, SGD

- **Batch GD:** usa todo el conjunto en cada actualización (costo alto por iteración).
- **Mini-batch GD:** usa lotes pequeños (compromiso eficiencia/ruido).
- **SGD (estocástico):** actualiza con una sola muestra por paso (barato, ruidoso, puede escapar de óptimos pobres).

Práctica recomendada: mini-batch (p. ej., 32–256).

Preprocesamiento y escalado

- **Estandarizar o normalizar** las x_j acelera y estabiliza GD.
- Centrar: $x_j \leftarrow (x_j - \mu_j)/\sigma_j$.
- Manejo de outliers y transformaciones (log, Box-Cox) cuando aplique.

1.5 EDA

Empezar a usar jupyter.

Sección 2

2. Caso 1 · Regresión lineal múltiple con GD

Planteamiento

Objetivo biomédico (ejemplo): predecir **gasto energético** (kcal) a partir de **edad**, **IMC** y **FC**.

Modelo lineal:

$$\hat{y} = \mathbf{w}^\top \mathbf{x} = w_0 + w_1 x_1 + \cdots + w_p x_p$$

Costo (MSE):

$$J(\mathbf{w}) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Gradiente:

$$\frac{\partial J}{\partial w_j} = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i) x_{ij}$$

Actualización:

$$w_j \leftarrow w_j - \alpha \frac{\partial J}{\partial w_j}$$

Pseudocódigo (mini-batch)

```

in: X (m×p), y (m), , batch_size, epochs
preprocess: X ← standardize(X)

initialize w ← zeros(p+1) # incluye sesgo w0 si se usa X con col

for epoch in 1..epochs:
    for B in iterate_minibatches(X, y, batch_size, shuffle=True):
        Xb, yb ← B
        yhat ← Xb · w
        grad ← (1/|B|) · (Xb · (yhat - yb))
        w ← w -      · grad

return w

```

Diagnóstico y validación

- Curva J vs. iteraciones (entrenamiento y validación).
- Errores residuales: homocedasticidad, estructura vs. predicción.
- Interpretación clínica de coeficientes w_j y unidades.
- Comparar con **ecuaciones normales** (solución cerrada) y discutir condicionamiento numérico.

Sección 3

3. Caso 2 · Regresión logística con GD (clasificación 0/1)

Planteamiento

Objetivo biomédico (ejemplo): clasificar **riesgo de enfermedad** (0/1) con panel de biomarcadores.

Modelo:

$$\hat{p} = \sigma(\mathbf{w}^\top \mathbf{x}), \quad \sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

Costo (entropía cruzada):

$$J(\mathbf{w}) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[y_i \log \hat{p}_i + (1 - y_i) \log(1 - \hat{p}_i) \right]$$

Gradiente:

$$\frac{\partial J}{\partial w_j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\hat{p}_i - y_i) x_{ij}$$

Actualización:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}}$$

Pseudocódigo (mini-batch)

```

in:  $X$  ( $m \times p$ ),  $y \in \{0,1\}^m$ ,  $\eta$ , batch_size, epochs
preprocess:  $X \leftarrow \text{standardize}(X)$ 

initialize  $w \leftarrow \text{zeros}(p+1)$ 

for epoch in 1..epochs:
    for  $B$  in iterate_minibatches( $X$ ,  $y$ , batch_size, shuffle=True):
         $X_b, y_b \leftarrow B$ 
         $z \leftarrow X_b \cdot w$ 
         $p \leftarrow \text{sigmoid}(z)$ 
         $\text{grad} \leftarrow (1/|B|) \cdot (X_b \cdot (p - y_b))$ 
         $w \leftarrow w - \eta \cdot \text{grad}$ 

return  $w$ 

```

Métricas y curvas

- **AUC-ROC, AUPRC, sensibilidad, especificidad, F1.**
- Elección del **umbral** τ por criterio clínico (p. ej., maximizar sensibilidad bajo límite de FPs).
- Calibración: curvas de confiabilidad.

Visualización de la frontera de decisión

- Con dos características (x_1, x_2) , la frontera es una **línea** (hiperplano en general).
- Durante GD, la frontera rota/traslada hasta estabilizarse.
- Añadir **términos polinomiales** o **bases** para fronteras no lineales; GD sigue aplicando.

Sección 4

4. Buenas prácticas y discusión aplicada

Hiperparámetros y trucos prácticos

- **Tasa de aprendizaje (α)**: búsqueda en rejilla o **programación de tasa** (decay).
- **Inicialización**: pequeña aleatoria (cero puede estancar con ciertas variantes).
- **Barajado** por época y **mini-batches** estratificados si la clase es rara.
- **Regularización** (L2/L1) para estabilidad e interpretabilidad:

$$J_{\lambda} = J + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{w}\|_2^2 \quad (\text{Ridge})$$

- **Detección de fuga de datos** y validación por **sujeto** en estudios clínicos.

Checklist de la sesión (rápido)

- ☐ Estandarizaste variables de entrada.
- ☐ Definiste costo adecuado (MSE vs. CE).
- ☐ Elegiste mini-batch y α razonables.
- ☐ Verificaste convergencia con curva de J .
- ☐ Evaluaste con métricas adecuadas al objetivo clínico.
- ☐ Documentaste supuestos y limitaciones.

Objetivos de aprendizaje

- **Comprender** los fundamentos de la **Regresión Lineal**, **Regresión Logística** y **Perceptrón Multicapa (MLP)**.
- **Aplicar** estos modelos al contexto de **salud fetal** con datos de **cardiotocografía (CTG)**.
- **Evaluar** el desempeño con métricas adecuadas (MSE, AUC/Log-Loss, matriz de confusión, F1).

- 1 Regresión Lineal
- 2 Regresión Logística
- 3 Perceptrón Multicapa
- 4 Cierre y discusión

Dataset: fetal_health.csv (UCI CTG). **Contexto clínico:** interpretación de CTG (*normal*, *sospechoso*, *patológico*).

Contexto clínico (CTG)

! Defición

Prueba médica que monitoriza simultáneamente la frecuencia cardíaca del feto y la actividad contráctil del útero. Se realiza generalmente durante el tercer trimestre del embarazo y el parto, colocando dos transductores externos (uno para la frecuencia cardíaca fetal y otro para las contracciones) sobre el abdomen de la madre



Contexto clínico (CTG)

Característica (Variable en CSV)	Cálculo o Descripción
Parámetros Basales	
baseline value	Es la frecuencia cardíaca fetal (FCF) media aproximada en un segmento de 10 minutos, excluyendo aceleraciones, deceleraciones y períodos de variabilidad marcada (>25 lpm). Se redondea a incrementos de 5 latidos por minuto (lpm).[4, 5, 6, 7, 8] El rango normal se considera entre 110 y 160 lpm.[9, 10]
fetal_movement	Número de movimientos fetales detectados por segundo.[1, 11, 12]
uterine_contractions	Número de contracciones uterinas por segundo. Se considera normal tener 5 o menos contracciones en 10 minutos.[1, 4, 11, 12]

Contexto clínico (CTG)

- CTG registra **FCF** y **contracciones uterinas**.
- Clasificación clínica (FIGO): **normal** / **sospechoso** / **patológico**.
- Variabilidad, aceleraciones y desaceleraciones son claves.

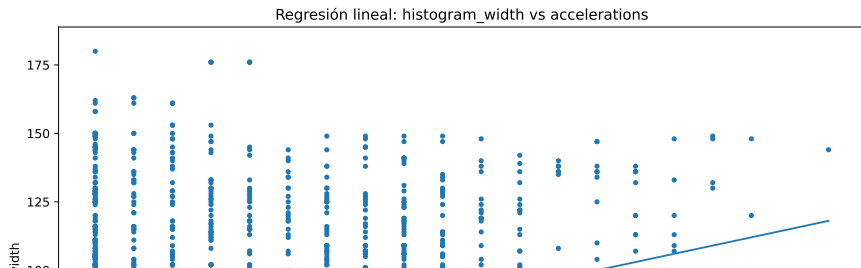
Regresión Lineal

Idea clave

Aproxima una relación **lineal** $\hat{y} = \beta_0 + \sum_j \beta_j x_j$ minimizando **MSE**.

Ejemplo didáctico (CTG)

Usamos una **variable continua** de CTG como respuesta (p. ej., *histogram_width*) para ilustrar ajuste y residuales.



Regresión Logística

Idea clave

Modela $P(Y = 1 \mid \mathbf{x}) = \sigma(\beta_0 + \mathbf{x}^\top \beta)$ con **sigmoide** $\sigma(z) = 1/(1 + e^{-z})$.

1. Definición de Regresión Logística

La **Regresión Logística** es un algoritmo de aprendizaje automático supervisado utilizado fundamentalmente para problemas de **clasificación binaria**.

A pesar de su nombre, su objetivo no es predecir un valor continuo, sino modelar la **probabilidad** (P) de que una observación pertenezca a una clase específica (usualmente denotada como $Y = 1$).

El modelo toma variables de entrada (features) x_1, \dots, x_n y estima $P(Y = 1|\mathbf{x})$.

2. El Mecanismo Central del Modelo

El modelo logístico opera en dos pasos cruciales:

2.1. El Componente Lineal (Logit)

Primero, el modelo calcula una suma ponderada de las entradas, exactamente igual que en una regresión lineal. A este resultado (z) se le conoce como **logit** o, más formalmente, **log-odds**.

$$z = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

- β_0 es el intercepto (sesgo).
- $\beta_{1...n}$ son los coeficientes (pesos) que el modelo aprende.
- El rango de salida de z es el de todos los números reales: $(-\infty, +\infty)$.

2.2. La Función Sigmoide (Logística)

Dado que una probabilidad debe estar en el rango $[0, 1]$, z no puede ser el

3. La Relación Clave: Probabilidad y Log-Odds

El concepto central que conecta el modelo lineal con la probabilidad es el **log-odds**. Esta transformación es necesaria para mapear un espacio acotado $[0, 1]$ a un espacio no acotado $[-\infty, +\infty]$.

3.1. De Probabilidad a Log-Odds

La transformación se realiza en dos pasos:

- ➊ **Probabilidad (P)**: La probabilidad del evento.
 - Rango: $[0, 1]$
- ➋ **Odds (Momios)**: La razón entre la probabilidad de que ocurra (P) y la de que no ocurra ($1 - P$).

$$Odds = \frac{P}{1 - P}$$

- Rango: $[0, +\infty]$
- ➌ **Log-Odds (Logit)**: El logaritmo natural de los *odds*.

4. Interpretación de Coeficientes

Debido a esta relación, los coeficientes (β_i) del modelo tienen una interpretación específica:

- **Coeficiente** β_i : Un incremento de una unidad en la variable x_i (manteniendo las demás constantes) genera un cambio de β_i en el **log-odds** de la predicción.
- **Odds Ratio (OR)**: Para una interpretación más intuitiva, se utiliza e^{β_i} . Un incremento de una unidad en x_i **multiplica** los *odds* por un factor de e^{β_i} .

