Pablo Catcumil Alarcón
201673563-1

# Tarea 1

## Desarrollo

1) Tenemos la formula de diferencias finitas de 4to orden:

$$u''(x_i) = \frac{1}{12h^2}\left(-u(x_{i-2}) + 16\,u(x_{i-1}) - 30\,u(x_i) + 16\,u(x_{i+1}) - u(x_{i+2})\right) + O(h^4)$$

Escribiendo el desarrollo de Taylor para $u(x_{i-2}), u(x_{i-1}), u(x_{i+1})$ y $u(x_{i+2})$ se tiene que

$$u(x_{i-2}) = u(x_i) - 2h\,u'(x_i) + \frac{4h^2}{2}u''(x_i) - \frac{8h^3}{6}u^{(3)}(x_i) + \frac{16h^4}{24}u^{(4)}(x_i) - \frac{32h^5}{120}u^{(5)}(x_i) + \frac{64h^6}{720}u^{(6)}(x_i)\cdots$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - h\,u'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i) - \frac{h^5}{120}u^{(5)}(x_i) + \frac{h^6}{720}u^{(6)}(x_i) - \cdots$$

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + h\,u'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_i) + \frac{h^5}{120}u^{(5)}(x_i) + \frac{h^6}{720}u^{(6)}(x_i) + \cdots$$

$$u(x_{i+2}) = u(x_i) + 2h\,u'(x_i) + \frac{4h^2}{2}u''(x_i) + \frac{8h^3}{6}u^{(3)}(x_i) + \frac{16h^4}{24}u^{(4)}(x_i) + \frac{32h^5}{120}u^{(5)}(x_i) + \frac{64h^6}{720}u^{(6)}(x_i) + \cdots$$

Realizando las sumas $u(x_{i+2}) + u(x_{i-2})$ y $u(x_{i-1}) + u(x_{i+1})$, tenemos

$$u(x_{i-2}) + u(x_{i+2}) = 2\,u(x_i) + 4h^2u''(x_i) + \frac{16h^4u^{(4)}(x_i)}{12} + \frac{64\,h^6\,u^{(6)}(x_i)}{360} + \cdots$$

$$u(x_{i-1}) + u(x_{i+1}) = 2\,u(x_i) + h^2u''(x_i) + \frac{h^4}{12}u^{(4)}(x_i) + \frac{h^6}{360}u^{(6)}(x_i) + \cdots$$

Si $u \in C^6$, se tiene que

$$u(x_{i-2}) + u(x_{i+2}) = 2u(x_i) + 4h^2u''(x_i) + \frac{16}{12}h^4u^{(4)}(x_i) + \frac{64}{720}h^6\left[u^{(6)}(\eta_i) + u^{(6)}(\xi_i)\right]$$

$$u(x_{i-1}) + u(x_{i+1}) = 2\,u(x_i) + h^2u''(x_i) + \frac{h^4}{12}u^{(4)}(x_i) + \frac{h^6}{720}\left[u^{(6)}(\chi_i) + u^{(6)}(\gamma_i)\right]$$

donde $\eta_i \in (x_{i-2}, x_i)$, $\xi_i \in (x_i, x_{i+2})$, $\chi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ y $\gamma_i \in (x_i, x_{i+1})$

Luego, multiplicando por 16 a $(u(x_{i-1}) + u(x_{i+1}))$, multiplicando por $-1$ a $(u(x_{i-2}) + u(x_{i+2}))$ y sumando ambas se tiene que

$$16\left[u(x_{i-1})+u(x_{i+1})\right]-1\left[u(x_{i-2})+u(x_{i+2})\right]=30\,u(x_i)+12h^2u''(x_i)+\frac{16}{720}h^6\left[u^{(6)}(\chi_i)+u^{(6)}(\gamma_i)\right]$$

$$-\frac{64}{720}h^6\left[u^{(6)}(\eta_i)+u^{(6)}(\xi_i)\right]$$

$$\Rightarrow\ -u(x_{i-2})+16u(x_{i-1})-30u(x_i)+16u(x_{i+1})-u(x_{i+2})=12h^2u''(x_i)-\frac{16h^6}{720}\left[4u^{(6)}(\eta_i)+4u^{(6)}(\xi_i)\right.$$

$$\left.-u^{(6)}(\chi_i)-u^{(6)}(\gamma_i)\right]$$

$$\Rightarrow\quad u''(x_i)=\frac{1}{12h^2}\left(-u(x_{i-2})+16u(x_{i-1})-30u(x_i)+16u(x_{i+1})-u(x_{i-2})\right)+O(h^4)$$

donde $O(h^4)=\frac{16}{720}h^4\left[4u^{(6)}(\eta_i)+4u^{(6)}(\xi_i)-u^{(6)}(\chi_i)-u^{(6)}(\gamma_i)\right]$

$\eta_i\in(x_{i-2},x_i)$, $\xi_i\in(x_i,x_{i+2})$, $\chi_i\in(x_{i-1},x_i)$ y $\gamma_i\in(x_i,x_{i+1})$.

**2)** Se tiene el problema
$$\begin{cases} Lu = -u'' + u = f & \text{en } (0,1) \\ u(0) = \alpha \\ u'(1) = \beta \end{cases}$$

**a)** Utilizando el método de diferencias centradas de orden 2 se tiene que
$$u''(x_i) = \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}, \quad U_i \approx u(x_i), \quad \forall i = 0, \dots, J$$

y para el orden de truncación se usará $u'(x_i) = \dfrac{U_i - U_{i-1}}{h}$

formando la ecuación $\forall i$ se tiene que

$$(L_h \underset{\sim}{U})_i = -\left(\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}\right) + U_i = f_i, \quad \text{entonces se tiene que}$$

$\underline{i=1}$
$$U_0 \cdot \left(-\frac{1}{h^2}\right) + U_1 \cdot \left(1 + \frac{2}{h^2}\right) + U_2 \cdot \left(-\frac{1}{h^2}\right) = f_1, \quad \text{y como } u(0) = U_0 = \alpha$$
$$\Rightarrow U_1 \cdot \left(1 + \frac{2}{h^2}\right) + U_2 \left(-\frac{1}{h^2}\right) = f_1 + \frac{\alpha}{h^2}$$

$\underline{2 \leq i \leq J-2}$
$$U_{i-1} \cdot \left(-\frac{1}{h^2}\right) + U_i \cdot \left(1 + \frac{2}{h^2}\right) + U_{i+1} \cdot \left(-\frac{1}{h^2}\right) = f_i$$

$\underline{i = J-1}$
$$U_{J-2} \cdot \left(-\frac{1}{h^2}\right) + U_{J-1} \left(1 + \frac{2}{h^2}\right) + U_J \left(-\frac{1}{h^2}\right) = f_{J-1}$$

Pero sabemos que $u'(1) = \dfrac{U_J - U_{J-1}}{h} = \beta \Rightarrow U_J = \beta h + U_{J-1}$

$$\Rightarrow U_{J-2}\left(-\frac{1}{h^2}\right) + U_{J-1}\left(1 + \frac{2}{h^2}\right) + (\beta h + U_{J-1})\left(-\frac{1}{h^2}\right) = f_{J-1}$$
$$\Rightarrow U_{J-2}\left(-\frac{1}{h^2}\right) + U_{J-1}\left(1 + \frac{2}{h^2}\right) + U_{J-1}\left(-\frac{1}{h^2}\right) = f_{J-1} + \frac{\beta}{h}$$
$$\Rightarrow U_{J-2}\left(-\frac{1}{h^2}\right) + U_{J-1}\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) = f_{J-1} + \frac{\beta}{h}$$

$\therefore$ se tiene lo sgte:

$$(L_h \underset{\sim}{U})_i = \begin{cases} U_1\left(1 + \frac{2}{h^2}\right) + U_2\left(-\frac{1}{h^2}\right) = f_1 + \frac{\alpha}{h^2}, & i = 1 \\ U_{i-1}\left(-\frac{1}{h^2}\right) + U_i\left(1 + \frac{2}{h^2}\right) + U_{i+1}\left(-\frac{1}{h^2}\right) = f_i, & 2 \leq i \leq J-2 \\ U_{J-2}\left(-\frac{1}{h^2}\right) + U_{J-1}\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) = f_{J-1} + \frac{\beta}{h}, & i = J-1 \end{cases}$$

**b)** Suponemos que $\exists x_0 \in (0,1) \ / \ w(x_0) > 0$ y que es máximo. Como $w(x_0) > 0$, es claro que $x_0 \neq 0$, pues $w(0) \leq 0$. Además, como $w'(1) < 0$ se tiene que $w$ está decreciendo en tal punto, entonces $x_0 \neq 1$. Luego, $w'(x_0) = 0$, pues su máximo está en el interior.
Por otro lado, al ser máximo la función es concava en una vecindad de $x_0 \Rightarrow w''(x_0) < 0$. Finalmente,

$Lw(x_0) = -w''(x_0) + w(x_0) = f(x_0)$, y como

$w''(x_0) < 0 \Rightarrow -w''(x_0) > 0 \Rightarrow -w''(x_0) + w(x_0) > 0$

$\Rightarrow Lw(x_0) > 0$ lo que es una contradicción

$\therefore \ \nexists x_0 \in (0,1) \ / \ w(x_0) > 0$, y así tenemos que

$$\max_{x \in [0,1]} \{w(x)\} \leq 0. \quad \square$$

**c)** Por (a) se tiene que

$$U_{i-1} \cdot \left(-\frac{1}{h^2}\right) + U_i \cdot \left(\frac{2}{h^2} + 1\right) + U_{i+1} \cdot \left(-\frac{1}{h^2}\right) = f_i \quad , \forall i = 1, \dots, J-1$$

$$\Rightarrow U_i = \frac{1}{\left(\frac{2}{h^2} + 1\right)} \left[ f_i + \frac{1}{h^2}(U_{i-1} + U_{i+1}) \right]$$

Si $F \leq 0$, entonces $U_i \leq \dfrac{h^2}{2+h^2} \cdot \dfrac{1}{h^2}(U_{i-1} + U_{i+1}) = \dfrac{U_{i-1} + U_{i+1}}{2 + h^2}$

y ahora suponiendo que $U_i > 0$ es máximo interno, entonces se tiene que $U_i < \dfrac{2}{2+h^2} \cdot U_i$, pero $\dfrac{2}{2+h^2} < 1$

$\therefore \ U_i \leq 0$

Ahora para ver que $K$ es no singular suponemos que $f_i = 0 \quad \forall i$ y $\alpha = \beta = 0$, es decir, $F = 0$, por el principio del máximo recién demostrado tenemos que $U \leq 0$.

Luego, tenemos que

$$U_{i-1}\left(\frac{-1}{h^2}\right) + U_i\left(\frac{2}{h^2}+1\right) + U_{i+1}\left(\frac{-1}{h^2}\right) = 0 \qquad \forall i = 2, \dots, J-2$$

$$\Rightarrow \quad U_i\left(\frac{2+h^2}{h^2}\right) = \frac{1}{h^2}\left(U_{i-1} + U_{i+1}\right) \quad \Rightarrow U_i(2+h^2) = U_{i-1} + U_{i+1}$$

Como los $U_i \leq 0 \quad \Rightarrow \quad U_i \geq U_{i+1}$ ó $U_{i-1} \leq U_i$, esto pues $2+h^2 > 2$, y esto $\forall i = 2, \dots, J-2$.

También tenemos que

$$U_{J-2}\left(\frac{-1}{h^2}\right) + U_{J-1}\left(\frac{1}{h^2}+1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{J-2} = U_{J-1}(1+h^2)$$

pero $1+h^2 > 1$ y $U_{i+1} \geq U_i$, pero al ser negativos los $U_i$ entonces $U_{J-1} > U_{J-1}(1+h^2)$, $\therefore$ solo queda $U_{J-1} = U_{J-2} = 0$

$\Rightarrow U = 0$, y así $K$ es no singular. $\square$

d) Tenemos lo sgte:

$$Lw(x_j) - L_h W_j = -w''(x_j) + w(x_j) - \left(-\frac{W_{j-1} - 2W_j + W_{j+1}}{h^2} + W_j\right)$$

Donde $L_h W$ se realiza por diferencias centradas de orden 2, entonces, como $W_j = w(x_j)$,

$$Lw(x_j) - L_h W_j = -w''(x_j) + \frac{W_{j-1} - 2W_j + W_{j+1}}{h^2} = O(h^2),$$ si $w \in C^4[0,1]$ y $h$ pequeño suficientemente

$$\Rightarrow L_h W_j = Lw(x_j) + O(h^2) \quad , \forall j = 1, \dots, J$$

$$= -1 + O(h^2)$$

$$\Rightarrow L_h W_j \leq -\frac{1}{2} \quad , \forall j = 1, \dots, J$$

3) Se tiene el sgte problema: $\begin{cases} -U'' + bU' + U = 2x & \text{en } (0,1) \\ U(0) = 0 \\ U(1) = 0 \end{cases}$

a) Primero se resuelve la EDO Homogenea

$$-U'' + bU' + U = 0 \quad \Rightarrow \quad -r^2 + br + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2+4}}{2}$$

$$\Rightarrow U(x) = A e^{\left(\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}\right)x} + B e^{\left(\frac{b-\sqrt{b^2+4}}{2}\right)x}$$

Ahora, por coef. indeterminados suponemos que $U(x) = Cx + D$

$$\Rightarrow \quad 0 + b \cdot C + Cx + D = 2x \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} b \cdot C + D = 0 \\ C = 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow D = -2b$$

$$\Rightarrow U(x) = 2x - 2b$$

$$\therefore \quad U(x) = A e^{\left(\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}\right)x} + B e^{\left(\frac{b-\sqrt{b^2+4}}{2}\right)x} + 2x - 2b$$

Luego, con los valores de frontera $U(0) = 0 \wedge U(1) = 0$, se tiene que $A = \dfrac{2(b - b\varepsilon - 1)}{\delta - \varepsilon} \wedge B = \dfrac{2(b\delta - b + 1)}{\delta - \varepsilon}$

donde $\delta = e^{\left(\frac{b+\sqrt{b^2+4}}{2}\right)}$ y $\varepsilon = e^{\left(\frac{b-\sqrt{b^2+4}}{2}\right)}$

b) Tenemos que el metodo de dif. centradas es $U''(x_i) = \dfrac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}$ y el upwind de 1er orden $U'(x_i) = \dfrac{U_{i+1} - U_i}{h}$, y ademas se tiene que $U(0) = U_0 = 0$ y $U(1) = U_{J+1} = 0$. Entonces se tiene que

$$-\left(\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}\right) + b \cdot \left(\frac{U_{i+1} - U_i}{h}\right) + U_i = 2x_i$$

$$\Rightarrow \quad U_{i-1} \cdot \left(-\frac{1}{h^2}\right) + U_i \cdot \left(\frac{2}{h^2} - \frac{b}{h} + 1\right) + U_{i+1} \cdot \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{b}{h}\right) = 2x_i \quad , \quad 2 \leq i \leq J-1$$

$\boxed{i=1}$ $$U_0 \cdot \left(-\frac{1}{h^2}\right) + U_1 \cdot \left(\frac{2}{h^2} - \frac{b}{h} + 1\right) + U_2 \cdot \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{b}{h}\right) = 2x_1$$

$$\Rightarrow \quad U_1 \cdot \left(\frac{2}{h^2} - \frac{b}{h} + 1\right) + U_2 \cdot \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{b}{h}\right) = 2x_1$$

$\boxed{i=J}$ $$U_{J-1} \left(-\frac{1}{h^2}\right) + U_J \left(\frac{2}{h^2} - \frac{b}{h} + 1\right) + U_{J+1} \cdot \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{b}{h}\right) = 2x_{J+1}$$

$$\Rightarrow \quad U_{J-1} \cdot \left(-\frac{1}{h^2}\right) + U_J \cdot \left(\frac{2}{h^2} - \frac{b}{h} + 1\right) = 2x_{J+1}$$

Donde la matriz queda de la sgte manera

$$K = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{h^2} - \frac{b}{h} + 1\right) & \left(\frac{-1}{h^2} + \frac{b}{h}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ \left(\frac{-1}{h^2}\right) & \left(\frac{2}{h^2} - \frac{b}{h} + 1\right) & \left(\frac{-1}{h^2} + \frac{b}{h}\right) & \cdots & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1}{h^2}\right) & \left(\frac{2}{h^2} - \frac{b}{h} + 1\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \left(\frac{2}{h^2} - \frac{b}{h} + 1\right) \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$K_{i,i+1} = \left(-\frac{1}{h^2} + \frac{b}{h}\right) \;;\; K_{i,i} = \left(\frac{2}{h^2} - \frac{b}{h} + 1\right) \;;\; K_{i,i-1} = -\frac{1}{h^2}$$

c) Implementación en Matlab.

d) Para el problema con $b=0$, se puede ver que acorde se aumenta la cantidad de nodos interiores (o se disminuye el espaciamiento), el error tiende a disminuir. Por otro lado, para $b=100$ en un comienzo aumenta un poco el error, pero finalmente disminuye, pero el error sigue siendo mayor a $b=0$, esto pues se debe a la complejidad del problema. Pero de igual manera, se puede decir que mientras mayor sea la cantidad de nodos interiores (o menor sea la distancia de espaciamiento) se obtienen mejores resultados.

e) Se puede ver que para $b=0$, en el grafico los espaciamientos son casi imperceptibles, esto se debe a que la complejidad del problema no es muy alto, en cambio para $b=100$, se puede notar como la solución para $h=\frac{1}{20}$ se desprende de las demas funciones mientras que $h=\frac{1}{80}$ se mantiene junto a la grafica de la solución analitica. Con esto podemos notar que mientras mayor sea la complejidad del problema se necesitarán mas nodos interiores.