Universidad Técnica Federico Santa María
Análisis Numérico de EDP - Departamento de Matemáticas
1er Semestre 2022

Tarea $N°2$

Profesor: Enrique Otarola
Ayudante: Pablo Muñoz
Estudiante: Pablo Calcumil Alarcón
Rol: 201673563-1

1. *2-points boundary value problem*

a)

Se tiene el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} -u'' + u &= f \qquad \text{en } \Omega = (0,1) \\ u'(0) &= 1 \\ u(1) &= 1 \end{cases}$$

Multiplicando la *EDO* por una función test $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, e integrando en Ω, entonces se tiene que

$$\int_\Omega -u'' \cdot \varphi \, dx + \int_\Omega u \cdot \varphi \, dx = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx$$

integrando por partes la 1era integral se obtiene

$$\int_\Omega u' \cdot \varphi' \, dx + \int_\Omega u \cdot \varphi \, dx - \big[u'(1) \cdot \varphi(1) - u'(0) \cdot \varphi(0)\big] = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx$$

pero sabemos que $u'(0) = 1$ e imponiendo que $\varphi(1) = 0$, se tiene que

$$\int_\Omega u' \cdot \varphi' \, dx + \int_\Omega u \cdot \varphi \, dx = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx - \varphi(0)$$

Finalmente, como $C^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$, y dado que impusimos la condición $\varphi(1) = 0$, formaremos el subespacio $H = \{\varphi \in H^1(\Omega)/ \ \varphi(1) = 0\}$, entonces se tiene que la formulación débil sería:

Encontrar $u \in H^1(\Omega)$, tal que

$$B[u, \varphi] = \int_\Omega u' \cdot \varphi' \, dx + \int_\Omega u \cdot \varphi \, dx = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx - \varphi(0) = F[\varphi] \quad , \forall \varphi \in H$$

b)

Pasando el problema formulado en **(a)** a un problema discreto, se tiene el siguiente:

Encontrar $U \in H_N \cap \{V \in H_N/ \ V(1) = 0\}$, donde H_N es subespacio de dimensión finita de $H^1(\Omega)$, tal que $B[U, V] = F[V]$, $\forall V \in H_N \cap \{V \in H_N/ \ V(1) = 0\}$.

También se puede decir que $H_N = span\left(\{\phi_i\}_{i=1}^{N+1}\right)$, donde $\{\phi_i\}_{i=1}^{N+1}$ es la base canónica del espacio de elementos finitos de funciones lineales a trozos y globalmente continuas.

Luego, sabemos que $U = \sum_{j=1}^{N+1} U_j\phi_j = \sum_{j=1}^{N} U_j\phi_j + \phi_{N+1}$, esto pues $u(1) = u(x_{N+1}) = U_{N+1} = 1$, y sabemos que el problema se puede ver de la siguiente manera:

$$B[U, \phi_i] = F[\phi_i] \quad ,\forall i = 1, ..., N$$

$$B\left[\sum_{j=1}^{N+1} U_j\phi_j, \phi_i\right] = B\left[\sum_{j=1}^{N} U_j\phi_j + \phi_{N+1}, \phi_i\right] = F[\phi_i] \quad ,\forall i = 1, ..., N$$

$$\sum_{j=1}^{N} U_j \cdot B\left[\phi_j, \phi_i\right] + B[\phi_{N+1}, \phi_i] = F[\phi_i] \quad ,\forall i = 1, ..., N$$

Por definición de las funciones ϕ_i, se tiene que $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, pero sabemos que $x_{N+1} = 1$, y como los ϕ_j deben cumplir que $\phi_j(1) = 0$, $\forall j = 1, ..., N+1$, esto es dado el problema, tenemos que $\phi_{N+1}(x_j) = 0$, $\forall j = 1, ..., N+1$, por lo que el problema queda:

$$\sum_{j=1}^{N} U_j \cdot B\left[\phi_j, \phi_i\right] = F[\phi_i] \quad ,\forall i = 1, ..., N$$

$$\sum_{j=1}^{N} U_j \left[\int_0^1 \phi_j \cdot' \phi_i' + \int_0^1 \phi_j \cdot \phi_i\right] = \sum_{j=1}^{N} U_j \underbrace{\int_0^1 \phi_j' \cdot \phi_i'}_{M_{ij}} + \sum_{j=1}^{N} U_j \underbrace{\int_0^1 \phi_j \cdot \phi_i}_{K_{ij}} = \int_0^1 f \cdot \phi_j \quad ,\forall i = 1, ..., N$$

Por lo tanto, notamos que se puede escribir de la forma $(\mathrm{K}+\mathrm{M})\mathrm{U} = \mathrm{F}$.

Luego, las matrices K y M, están dadas por lo siguiente:

Notemos que por como están definidas las funciones ϕ_i, las matrices serán tridiagonales, por lo que solo nos importan los casos $B[\phi_{i-1}, \phi_i]$, $B[\phi_i, \phi_i]$ y $B[\phi_i, \phi_{i+1}]$.

- $B[\phi_{i-1}, \phi_i] = \int_0^1 \phi_{i-1}' \cdot \phi_i' \, dx + \int_0^1 \phi_{i-1} \cdot \phi_i \, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{i-1}' \cdot \phi_i' \, dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{i-1} \cdot \phi_i \, dx$

  $\implies B[\phi_{i-1}, \phi_i] = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{-1}{h_{i-1}} \cdot \frac{1}{h_{i-1}} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x_i - x)}{h_{i-1}} \cdot \frac{(x - x_{i-1})}{h_{i-1}} dx = \frac{-1}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6}$

  Donde $K_{i,i-1} = \frac{-1}{h_{i-1}}$ y $M_{i,i-1} = \frac{h_{i-1}}{6}$.

- $B[\phi_i, \phi_i] = \int_0^1 (\phi_i')^2 \, dx + \int_0^1 (\phi_i)^2 \, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_i')^2 \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_i)^2 \, dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_i')^2 \, dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_i)^2 \, dx$

  $\implies B[\phi_{i+1}, \phi_i] = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{-1}{h_i}\right)^2 dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1} - x}{h_i}\right)^2 dx$

  $\implies B[\phi_{i+1}, \phi_i] = \left[\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right] + \frac{h_{i-1} + h_i}{3}$

  Donde $K_{i,i} = \left[\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right]$ y $M_{i,i} = \frac{h_{i-1} + h_i}{3}$.

- $B[\phi_{i+1}, \phi_i] = \int_0^1 \phi'_{i+1} \cdot \phi'_i \, dx + \int_0^1 \phi_{i+1} \cdot \phi_i \, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi'_{i+1} \cdot \phi'_i \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i+1} \cdot \phi_i \, dx$

  $$\implies B[\phi_{i+1}, \phi_i] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i} \cdot \frac{-1}{h_i} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x - x_i)}{h_i} \cdot \frac{(x_{i+1} - x)}{h_i} dx = \frac{-1}{h_i} + \frac{h_i}{6}$$

  Donde $K_{i,i+1} = \dfrac{-1}{h_i}$ y $M_{i,i+1} = \dfrac{h_i}{6}$.

$\square$

2. L^2-interpolation estimate

Denotaremos por $\Omega = (0,1)$. Supondremos que $v \in C^1(\overline{\Omega})$, y notemos que

$$v(y) - v(x) = \int_x^y v'(s)ds \quad ,\forall x, y \in \Omega$$

$$\Longrightarrow |v(y) - v(x)| \leq \int_x^y |v'(s)|ds \leq \left(\int_x^y |v'|^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_x^y ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

esta última desigualdad, debido a la desigualdad de Holder, para $p = q = 2$, entonces

$$\Longrightarrow |v(y) - v(x)| \leq ||v'||_{L^2(\Omega)} \cdot |y - x|^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{|v(y) - v(x)|}{|y - x|^{\frac{1}{2}}} \leq ||v'||_{L^2(\Omega)} \quad ,\forall x, y \in \mathbb{R}$$

$\therefore$, $v \in C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$.

Sea ahora $v \in H^1(\Omega)$ / $v(0) = 0$, entonces como $C^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$, $\exists \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ / $v_n \longrightarrow v$ en $H^1(\Omega)$, y como $v_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces por lo anterior se tiene que

$$|v_n(y) - v_n(x)| \leq ||v_n'||_{L^2(\Omega)} \cdot |y - x|^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow v_n \in C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega}) \ ,\forall n \in \mathbb{N}$$

En particular, para $n, k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$|(v_n - v_k)(y) - (v_n - v_k)(x)| \leq |y - x|^{\frac{1}{2}} \cdot ||v_n' - v_k'||_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$$

por lo que se tiene que $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$, luego como $C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$ es Banach, tomando el límite de la sucesión se tiene que

$$|v(y) - v(x)| \leq ||v'||_{L^2(\Omega)} \cdot |y - x|^{\frac{1}{2}}$$

y por lo anterior se tiene que $v \in C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$.

Ahora, tomando $y = 0$, y recordando que $v(0) = 0$, se tiene que

$$|v(x)| \leq ||v'||_{L^2(\Omega)} \cdot |x|^{\frac{1}{2}} \quad ,\forall x \in \Omega$$

luego, elevando al cuadrado e integrando en Ω, se tiene que

$$\int_\Omega |v(x)|^2 \, dx \leq ||v'||^2_{L^2(\Omega)} \int_\Omega |x| \, dx = \frac{1}{2} \cdot ||v'||^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\Longrightarrow ||v||^2_{L^2(\Omega)} \leq ||v'||^2_{L^2(\Omega)}$$

Para seguir con la demostración, se realizarán los siguientes 3 pasos, con las siguientes consideraciones:

$$I_i = (x_i, x_{i+1}) \quad ; \quad h_i = x_{i+1} - x_i \quad ; \quad \mathcal{I}_\mathcal{T} u|_{I_i} \in \mathbb{P}_1$$

1. Localización: Es suficiente con mostrar que

$$||u - \mathcal{I}_\mathcal{T} u||_{L^2(I_i)} \leq C h_i^2 ||u''||_{L^2(I_i)} \quad ,\forall i = 1, \ldots, N-1$$

2. Scaling: Considerando el siguiente cambio de variable:

$$I_i \longrightarrow \hat{I} = \Omega = (0,1)$$

$$x \longmapsto \hat{x} = \frac{x - x_i}{h_i}$$

También definimos la función $v(x) = u(x) - \mathcal{I}_{\mathcal{T}}u(x)$ y así $\hat{v}(\hat{x}) = v(x)$, por otro lado, es fácil notar que $v'' = (u - \mathcal{I}_{\mathcal{T}}u)'' = u''$, $\forall x \in I_i$, pues $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}u|_{I_i} \in \mathbb{P}_1$, y que también se tiene que

$$v'(x) = \frac{1}{h_i}\hat{v}'(\hat{x}) \quad ; \quad v''(x) = \frac{1}{h_i^2}\hat{v}''(\hat{x})$$

Entonces, con esto se tiene que

$$\int_{I_i} |v(x)|^2 dx = \int_{\hat{I}} |\hat{v}(\hat{x})|^2 \cdot h_i \cdot dx$$
$$\int_{I_i} |v'(x)|^2 dx = \frac{1}{h_i^2}\int_{\hat{I}} |\hat{v}'(\hat{x})|^2 \cdot h_i \cdot dx$$
$$\int_{I_i} |v''(x)|^2 dx = \frac{1}{h_i^4}\int_{\hat{I}} |\hat{v}''(\hat{x})|^2 \cdot h_i \cdot dx$$

Luego, con lo dicho en **localización** para $\hat{v}(\hat{x})$, se tiene que

$$h_i \cdot ||\hat{v}||^2_{L^2(\hat{I})} \leq Ch_i^4 \left(\frac{1}{h_i^4} \cdot h_i \cdot ||\hat{v}''||^2_{L^2(I_i)} \right)$$

$$\implies ||\hat{v}||^2_{L^2(\hat{I})} \leq C||\hat{v}''||^2_{L^2(\hat{I})}$$

3. Demostración de última desigualdad: Primero vemos que $\hat{v}(0) = v(x_i) = 0$ y $\hat{v}(1) = v(x_{i+1}) = 0$.

   Ahora, $\hat{v} \in H^2(\Omega)$, esto pues $\hat{v}'' = u'' \in L^2(\Omega) \implies \hat{v} \in C^1(\overline{\Omega})$. Luego, por el teorema de Rolle, $\exists \xi \in \Omega \ / \ \hat{v}'(\xi) = 0$, entonces se tiene que

$$|\hat{v}'(x)| = |\hat{v}'(x) - \hat{v}'(\xi)| \leq \int_{\xi}^{x} |\hat{v}''(s)| ds$$

   Luego, de la misma manera que se demostró la desigualdad de Poincaré, y por el mismo **Hint** desigualdad de Poincaré, se tiene que

$$||\hat{v}||_{L^2(\hat{I})} \leq ||\hat{v}'||_{L^2(\hat{I})} \leq C||\hat{v}''||_{L^2(\hat{I})}$$

   Es así que por el paso de **localización**, se tiene que

$$||v||^2_{L^2(I_i)} \leq Ch_i^4 ||v''||^2_{L^2(I_i)}$$

   Tomando la suma respecto a i, y recordando que $v(x) = u(x) - \mathcal{I}_{\mathcal{T}}u(x)$ y que $v'' = u''$

$$||u - \mathcal{I}_{\mathcal{T}}u||^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=0}^{N-1} ||u - \mathcal{I}_{\mathcal{T}}u||^2_{L^2(I_i)} \leq \sum_{i=0}^{N-1} Ch_i^4 ||u''||^2_{L^2(I_i)}$$

$$\implies ||u - \mathcal{I}_{\mathcal{T}} u||_{L^2(\Omega)} \leq C \left[\sum_{i=0}^{N-1} h_i^4 ||u''||^2_{L^2(I_i)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Luego, tomando $h = \max_i \{h_i\}$, es claro que queda la siguiente desigualdad

$$||u - \mathcal{I}_{\mathcal{T}} u||_{L^2(\Omega)} \leq C \left[\sum_{i=0}^{N-1} h_i^4 ||u''||^2_{L^2(I_i)} \right]^{\frac{1}{2}} \leq C h^2 ||u''||^2_{L^2(\Omega)}$$

$\square$

3. *Robin problem*

a)

Se tiene el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} -(au')' + cu &= f \qquad \text{en } \Omega = (0,1) \\ -a(0)u'(0) + h_0(u(0) - g_0) &= k_0 \\ a(1)u'(1) + h_1(u(1) - g_1) &= k_1 \end{cases}$$

Multiplicando la *EDO* por una función test $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, e integrando en Ω, entonces se tiene que

$$\int_\Omega -(a \cdot u')' \cdot \varphi \, dx + \int_\Omega c \cdot u \cdot \varphi \, dx = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx$$

integrando por partes la 1era integral se obtiene

$$\int_\Omega a \cdot u' \cdot \varphi' \, dx + \int_\Omega c \cdot u \cdot \varphi \, dx - \big[a(1) \cdot u'(1) \cdot \varphi(1) - a(0) \cdot u'(0) \cdot \varphi(0)\big] = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx$$

luego, utilizando los datos de borde del problema se obtiene

$$\int_\Omega a \cdot u' \cdot \varphi' \, dx + \int_\Omega c \cdot u \cdot \varphi \, dx - \Big[\big(-h_1 u(1) + h_1 g_1 + k_1\big) \cdot \varphi(1) + \big(-h_0 u(0) + h_0 g_0 + k_0\big) \cdot \varphi(0)\Big] = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx$$

Finalmente, reordenando y recordando que $C^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$, entonces se tiene que la formulación débil sería:

Encontrar $u \in H^1(\Omega)$, tal que $\forall \varphi \in H^1(\Omega)$, se tiene que

$$\int_\Omega a \cdot u' \cdot \varphi' \, dx + \int_\Omega c \cdot u \cdot \varphi \, dx + \big[h_1 u(1)\varphi(1) + h_0 u(0)\varphi(0)\big] = \int_\Omega f \cdot \varphi \, dx + (h_1 g_1 + k_1)\, \varphi(1) + (h_0 g_0 + k_0)\, \varphi(0)$$

Entonces, ahora se realiza la discretización del problema considerando $\mathcal{T} = \{x_i\}_{i=1}^N$, la partición del intervalo $\Omega = (0,1)$, tal que $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$, y definimos $h_i = x_{i+1} - x_i$, $\forall i = 1, ..., N-1$.

Luego, el problema discretizado es encontrar $U \in H_N$, donde H_N es subespacio de dimensión finita de $H^1(\Omega)$, tal que $B[U,V] = F[V]$, $\forall V \in H_N$, donde se tiene que

$$B[U,V] = \int_\Omega a' \cdot U' \cdot V' \, dx + \int_\Omega c \cdot U \cdot V \, dx + \big[h_1 U(1)V(1) + h_0 U(0)V(0)\big]$$

$$F[V] = \int_\Omega f \cdot V \, dx + (h_1 g_1 + k_1)\, V(1) + (h_0 g_0 + k_0)\, V(0)$$

Por otro lado, también se puede decir que $H_N = span\Big(\{\phi_i\}_{i=1}^N\Big)$, donde $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ es la base canónica del espacio de elementos finitos de funciones lineales a trozos y globalmente continuas.

Ahora tomamos la solución del espacio de elementos finitos $U(x) = \sum_{j=1}^N U_j \cdot \phi_j(x)$, y entonces el problema queda de la siguiente forma:

$$B[U,\phi_i] = \sum_{j=1}^{N} U_j \cdot B[\phi_j,\phi_i] = F[\phi_i] \quad ,\forall i = 1,...N$$

es decir, quedan de la siguiente manera:

$$B[U,\phi_i] = \sum_{j=1}^{N} U_j \int_{\Omega} a \cdot \phi_j' \cdot \phi_i' \, dx + \sum_{j=1}^{N} U_j \int_{\Omega} c \cdot \phi_j \cdot \phi_i \, dx + \left[h_1 U_N \phi_i(x_N) + h_0 U_1 \phi_i(x_1)\right] \quad ,\forall i = 1,...N$$

$$F[\phi_i] = \int_{\Omega} f \cdot \phi_i \, dx + (h_1 g_1 + k_1)\, \phi_i(x_N) + (h_0 g_0 + k_0)\, \phi_i(x_1) \quad ,\forall i = 1,...N$$

Recordemos que $\phi_j(x_i) = \delta_{ij}$, por lo que se tiene lo siguiente:

$$B[U,\phi_1] = \sum_{j=1}^{N} U_j \int_{\Omega} a \cdot \phi_j' \cdot \phi_1' \, dx + \sum_{j=1}^{N} U_j \int_{\Omega} c \cdot \phi_j \cdot \phi_1 \, dx + h_0 U_1$$

$$B[U,\phi_N] = \sum_{j=1}^{N} U_j \int_{\Omega} a \cdot \phi_j' \cdot \phi_N' \, dx + \sum_{j=1}^{N} U_j \int_{\Omega} c \cdot \phi_j \cdot \phi_N \, dx + h_1 U_N$$

$$B[U,\phi_i] = \sum_{j=1}^{N} U_j \int_{\Omega} a \cdot \phi_j' \cdot \phi_i' \, dx + \sum_{j=1}^{N} U_j \int_{\Omega} c \cdot \phi_j \cdot \phi_i \, dx \quad ,\forall i = 2,...N-1$$

Así nos encontramos con las siguientes matrices cuadradas $N \times N$:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} a \cdot \phi_j' \cdot \phi_i' \, dx \quad ; \quad M_{ij} = \int_{\Omega} c \cdot \phi_j \cdot \phi_i \, dx \quad ; \quad L_{ij} = \begin{cases} h_0 \ , \ i = j = 1 \\ h_1 \ , \ i = j = N \\ \ 0 \ \ , \ 2 \leq i,j \leq N-1 \end{cases}$$

Por el otro lado de la igualdad, entonces se tiene lo siguiente:

$$F[\phi_1] = \int_{\Omega} f \cdot \phi_1 \, dx + (h_0 g_0 + k_0)$$

$$F[\phi_N] = \int_{\Omega} f \cdot \phi_N \, dx + (h_1 g_1 + k_1)$$

$$F[\phi_i] = \int_{\Omega} f \cdot \phi_i \, dx \quad ,\forall i = 2,...N-1$$

Obteniendose los siguientes vectores de dimensión N:

$$F_i = \int_{\Omega} f \cdot \phi_i \, dx \quad ; \quad G_i = \begin{cases} h_0 g_0 + k_0 \ , \ i = 1 \\ h_1 g_1 + k_1 \ , \ i = N \\ \qquad 0 \qquad ,2 \leq i \leq N-1 \end{cases}$$

Obteniendo la siguiente forma matricial:

$$(K + M + L)U = F + G$$

donde K, M, $L \in \mathbb{R}^{N\times N}$, y F, $G \in \mathbb{R}^N$

b)

Es fácil notar que $B[\cdot,\cdot]$ es bilineal y también simétrica. Ahora veamos si es coerciva, para ello sea $u \in H^1(\Omega)$, entonces

$$B[u,u] = \int_\Omega a \cdot (u')^2 \, dx + \int_\Omega c \cdot u^2 \, dx + \Big[h_1 u^2(1) + h_0 u^2(0) \Big]$$

Es claro que si $h_0, h_1 > 0$, entonces

$$B[u,u] \geq \int_\Omega a \cdot (u')^2 \, dx + \int_\Omega c \cdot u^2 \, dx$$

luego, considerando que $c(x) \geq 0$, y $a(x) > \alpha > 0$ en Ω, tenemos que

$$B[u,u] \geq \alpha ||u'||_{L^2(\Omega)}$$

Finalmente, por desigualdad de , se tiene que

$$B[u,u] \geq \alpha ||u||_{H^1(\Omega)}$$

$\therefore B$ es coerciva.

Ahora, veamos si B es continua, entonces sean $u, v \in H^1(\Omega)$, y considerando que a y c son acotadas, se tiene que

$$B[u,v] \leq \int_\Omega a \cdot |u'||v'| \, dx + \int_\Omega c \cdot |u||v| \, dx + h_1 |u(1)||v(1)| + h_0 |u(0)||v(0)|$$

Por Holder se tiene que

$$\implies B[u,v] \leq C \Big[||u'||_{L^2(\Omega)} ||v'||_{L^2(\Omega)} + ||u||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)} \Big] + (h_1 + h_0) ||u||_{L^\infty(\Omega)} ||v||_{L^\infty(\Omega)}$$

$$\implies B[u,v] \leq M ||u||_{H^1(\Omega)} ||v||_{H^1(\Omega)}$$

$\therefore B$ es continua.

Por otro lado, es claro también que F es lineal y veamos que es continua también:

$$F[v] \leq \int_\Omega |f||v| \, dx + (|h_0 g_0 + k_0| + |h_1 g_1 + k_1|) ||v||_{L^\infty(\Omega)}$$

Por Holder, se tiene finalmente que

$$F[v] \leq K ||v||_{H^1(\Omega)}$$

$\therefore F$ es continua, y con esto, por el teorema de representación de Riesz, $\exists! \; u \in H^1(\Omega)$ /

$$B[u,v] = F[v] \quad , \forall v \in H^1(\Omega)$$

De la misma manera, como se dijo anteriormente que $H_N \subset H^1(\Omega)$, se tiene que

$$B[u,V] = F[V] \quad , \forall V \in H_N$$

Y con la solución del problema discreto U, entonces se tiene que

$$B[u,V] - B[U,V] = F[V] - F[V] = 0$$

$$\implies B[u-U,V]=0 \quad ,\forall V\in H_N$$

Finalmente, se tiene que para $\alpha > 0$, la constante de coercividad y $M > 0$ la constante de continuidad, ambas de B, entonces es claro que

$$\alpha||u-U||^2_{H^1(\Omega)} \leq B[u-U,u-U] = B[u-U,u] - B[u-U,U]$$

Como $U, V \in H_N$, entonces se tiene que $B[u-U,U] = B[u-U,V] = 0$, entonces se tiene que

$$\alpha||u-U||^2_{H^1(\Omega)} \leq B[u-U,u] - B[u-U,V] = B[u-U,u-V]$$

$$\implies \alpha||u-U||^2_{H^1(\Omega)} \leq B[u-U,u-V] \leq M||u-U||_{H^1(\Omega)}||u-V||_{H^1(\Omega)}$$

$$\implies ||u-U||_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha}||u-V||_{H^1(\Omega)}$$

Como V es arbitrario en H_N, tomamos el ínfimo respecto a V

$$||u-U||_{H^1(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{V\in H_N} \left\{||u-V||_{H^1(\Omega)}\right\}$$

$\square$

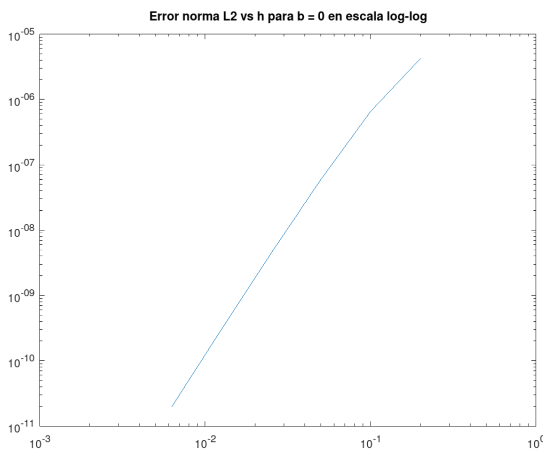
4. *MATLAB*

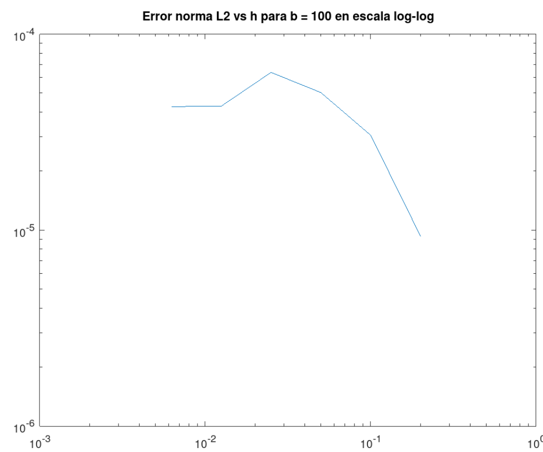
a)

Codigo implementado en MATLAB, para una malla de N nodos en $[0,1]$, elegidos de manera aleatoria.

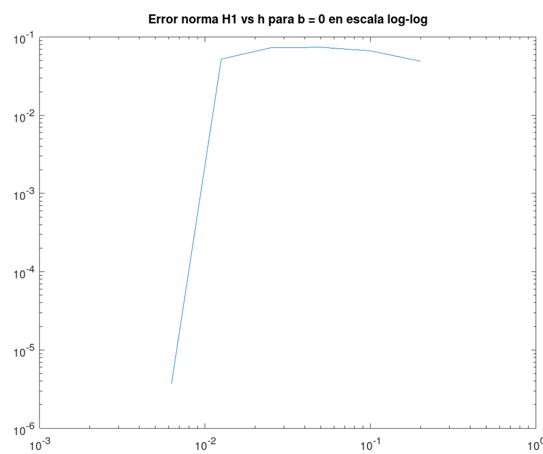
b)

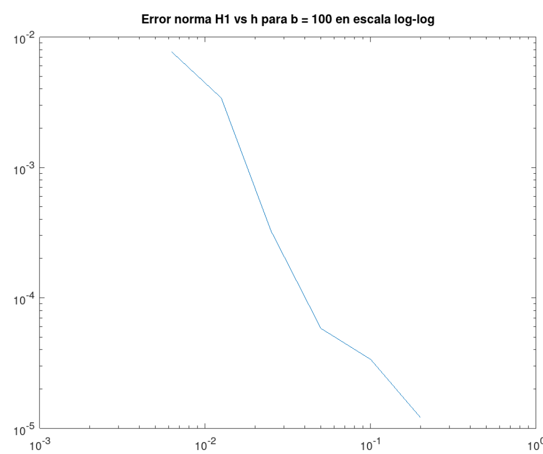
Para $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$ se tienen los siguientes gráficos





por otro lado, se tiene que

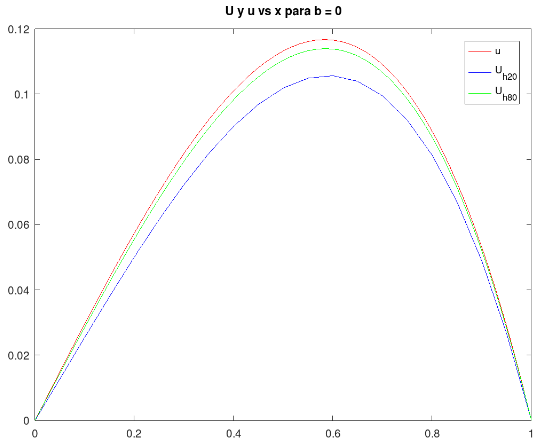


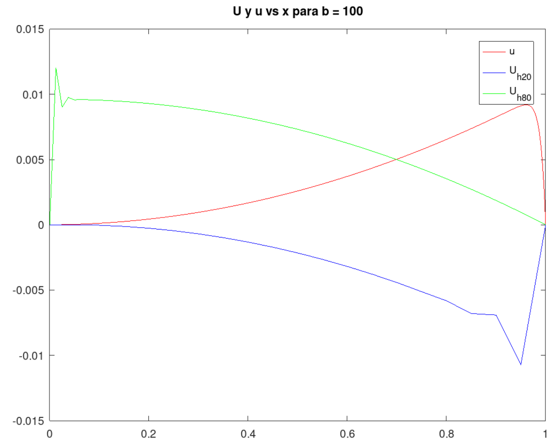


Notamos que para ambas normas, cuando el valor $b = 0$, mantienen un comportamiento similar, el cual es descender o disminuir el error cuanto más pequeño sea el valor de h (mayor número de nodos). En cambio para $b = 100$, este se mantiene o aumenta, aun cuando se aumenta la información, es decir, aumenta a pesar de la mayor cantidad de nodos, esto se debe a la complejidad del problema, puesto que se tienen distintas soluciones.

c)

Se tienen los siguientes gráficos para las funciones u y U cuando $h = \dfrac{1}{20}$ y $h = \dfrac{1}{80}$, para los valores $b = 0$ y $b = 100$.





Al igual que antes, se ve como el problema cuando $b = 0$, tienen menor error, mientras que para $b = 100$, el error es más notorio, a pesar del aumento del numero de nodos (o lo que es equivalente, a la disminución del largo de h). Esto se debe a la complejidad del problema, al igual que en **(c)**.

d)

Se tienen los siguientes valores de los errores, cuando $\beta = 1{,}1$ y $\beta = 1{,}2$, que es cuando alcanzaron el valor más bajo.

$$||u - U||_{L^\infty(\Omega)} = 0{,}0096376 \quad , \beta = 1{,}1$$
$$||u - U||_{L^2(\Omega)} = 0{,}000037012 \quad , \beta = 1{,}2$$
$$||u - U||_{H^1(\Omega)} = 0{,}0093805 \quad , \beta = 1{,}1$$

Esto se debe a que mientras más aumenta el valor de β, los nodos interiores se van acercando a los valores frontera $x = 0$ y $x = 1$, por lo que se va perdiendo información en la mitad del intervalo acorde aumenta el valor de β. Despues de cierto β, en el caso de este trabajo $b > 23$, la matriz K, del sistema $KU = F$ del problema discretizado, pasa a ser una matriz singular, esto es debido a que los nodos interiores son muy cercanos a $x = 0$ y $x = 1$, que computacionalmente, los redondea a estos valores.