MAT 277
ANÁLISIS NUMÉRICO DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES, SEMESTRE 1, 2022
TAREA # 1

FECHA DE ENTREGA: 26/04/2022

1. *Higher order difference formula* (20 puntos). Derive la fórmula de diferencias finitas de cuarto orden:

$$u''(x_i) = \frac{1}{12h^2}\left(-u(x_{i-2}) + 16u(x_{i-1}) - 30u(x_i) + 16u(x_{i+1}) - u(x_{i+2})\right) + \mathcal{O}(h^4).$$

Especifique la regularidad de u en el término de error $\mathcal{O}(h^4)$. *Hint:* Para mostrar la fórmula, se puede proceder de la siguiente manera: Escriba desarrollos de Taylor adecuados en torno de x_i para los términos $u(x_{i-2})$, $u(x_{i-1})$, $u(x_{i+1})$, y $u(x_{i+2})$ sobre una malla de espaciamiento uniforme h. Observe estructura en $u(x_{i-1}) + u(x_{i+1})$ y $u(x_{i-2}) + u(x_{i+2})$.

2. *Continuous and discrete maximum principles* (40 puntos). Sean α y β números reales. Sea u la solución del siguiente problema de valores de contorno con condiciones *mixtas*:

$$Lu = -u'' + u = f \text{ in } (0,1), \qquad u(0) = \alpha, \qquad u'(1) = \beta.$$

(a) Escriba un *método de diferencias finitas* sobre la partición $\{x_j\}_{j=0}^{J}$ del intervalo $[0,1]$, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{J-1} < x_J = 1$, de espaciamiento uniforme h. Considere una discretización de la condición de Neumann con un error de truncación de orden $\mathcal{O}(h)$.

(b) Muestre el siguiente *principio del máximo continuo: Si $Lw \leq 0$ en $(0,1)$ y $w(0) \leq 0$, $w'(1) < 0$, entonces*

$$\max_{x\in[0,1]} w(x) \leq 0.$$

Proceda utilizando un argumento de contradicción basado en la consideración de un máximo positivo interno.

(c) Sea $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^J$ la solución discreta del esquema de diferencias finitas propuesto, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^J$ el lado derecho, y $K \in \mathbb{R}^{J\times J}$ la matriz correspondiente tal que $K\mathbf{U} = \mathbf{F}$. Muestre el siguiente *principio del máximo discreto: Si $\mathbf{F} \leq 0$, entonces* $\mathbf{U} \leq 0$. Concluya que K es no-singular.

(d) Sea w tal que $Lw = -1$ y $w(0) = 0$, $w'(1) = -1$. Sea $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^J$ tal que $W_j = w(x_j)$ para $j \in \{1, \ldots, J\}$. Muestre que $(L_h\mathbf{W})_j \leq -1/2$, para todo $j \in \{1, \ldots, J\}$, si h es *suficientemente pequeño.*

(e) Utilice $\mathbf{W}$ para derivar una cota de estabilidad adecuada para $\|\mathbf{U}\|_\infty$ en términos de α, β, y f.

(f) Muestre la estimación del error

$$\max_{j\in\{1,\ldots,J\}} |u(x_j) - U_j| \leq Ch.$$

Explicite la regularidad de u que es necesaria para obtener dicha estimación.

3. ***MATLAB*** **(40 puntos).** Considere el siguiente problema de valores de contorno con un parámetro $b \in \mathbb{R}$:

$$-u'' + bu' + u = 2x \text{ en } (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

(a) Encuentre la solución exacta $u(x)$ en términos del parámetro b.

(b) Escriba un método de diferencias finitas utilizando diferencias *centradas* de segundo orden y diferencias *upwind* de primer orden sobre una malla de espaciamiento uniforme h. Escriba la matriz del problema correspondiente.

(c) Implemente el esquema de diferencias finitas en MATLAB. Como sugerencia, se podría utilizar el comando `diag` para construir la matriz tridiagonal correspondiente. Utilice el comando backslash \ para encontrar la solución del sistema `Ax = b` como `x = A\ b`.

(d) Resuelva el sistema lineal para $h = 5^{-1}2^{-k}$, donde $0 \leq k \leq 5$, y $b = 0$ y $b = 100$. Calcule la norma del máximo del error en los puntos nodales y grafique los resultados versus h en escala log-log. Explique los resultados obtenidos.

(e) Grafique la solución exacta u y la solución discreta como una función lineal a trozos sobre la malla correspondiente para $h = 1/20$ y $h = 1/80$, y $b = 0$ y $b = 100$. Concluya.